Solution de l'examen de Physique Quantique

Session normale 2018/2019

Filière : SMP – S5

Pr. Mme. Yamina ACHKAR

Département de physique

Faculté des Sciences Dhar el Mahraz - Fès

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar Mahraz - Fès
Département de Physique
Session normale d'Automne 2018/2019

Examen de Physique Quantique / SMP - S5

Exercice /

Un oscillateur harmonique, à une dimension, de masse m et de pulsation ω, dont l'hamiltonien est ; $\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2\boldsymbol{m}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{m}\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{X}^2$, où X et P sont les opérateurs de position et d'impulsion. Soient $|\boldsymbol{\varphi_n}\rangle$ les vecteurs propres de l'opérateur $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a}^+\boldsymbol{a}$ associés aux valeurs propres $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$) ; où a et a^+ sont les opérateurs d'annihilation et de création tels que ;

$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^+)$ et $P = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,(a^+ - a)$. On donne : $[X\,,P] = i\hbar$ et $[a\,,a^+] = 1$.

1)Calculer les commutateurs $[X\,,\,H]$, $[P\,,\,H]$. En déduire le commutateur $[XP\,,\,H]$.

2)Montrer que $a|\varphi_n\rangle = \sqrt{n}|\varphi_{n-1}\rangle$ et $a^+|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle$.

3)Calculer, **dans l'état $|\boldsymbol{\varphi_n}\rangle$,** les valeurs moyennes $\langle \boldsymbol{X}\rangle_{|\varphi_n\rangle}$, $\langle \boldsymbol{P}\rangle_{|\varphi_n\rangle}$, $\langle \boldsymbol{X}^2\rangle_{|\varphi_n\rangle}$, $\langle \boldsymbol{P}^2\rangle_{|\varphi_n\rangle}$, $\langle \boldsymbol{H}\rangle_{|\varphi_n\rangle}$ et les écarts quadratiques moyens $\Delta\boldsymbol{X}$ et $\Delta\boldsymbol{P}$.

4)En déduire le produit $\Delta\boldsymbol{X}.\Delta\boldsymbol{P}$. Dire si le principe d'incertitude de Heisenberg est satisfait.

Problème /

Une particule dont l'espace des états est rapporté à la base des 3 vecteurs $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$.
Dans cette base, l'hamiltonien *H* du système et l'opérateur *A* sont donnés par :

$H\,|u_1\rangle = \hbar\omega|u_1\rangle + 2\hbar\omega|u_3\rangle$ $\qquad A\,|u_1\rangle = ia|u_2\rangle$

$H\,|u_2\rangle = 3\hbar\omega\,|u_2\rangle$ $\qquad A\,|u_2\rangle = -ia|u_1\rangle + ia|u_3\rangle$

$H\,|u_3\rangle = 2\hbar\omega\,|u_1\rangle + \hbar\omega\,|u_3\rangle$ $\qquad A\,|u_3\rangle = -ia|u_2\rangle$

où a et ω sont des constantes réelles.

1) Donner les matrices des opérateurs *H* et *A*. Ces opérateurs sont-ils hermitiques ? justifier.

2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des opérateurs *H* et de *A*. Donner le degré de dégénérescence de chacune des valeurs propres de *H* et de *A*.

-Le système à l'instant t = 0 est dans l'état : $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle - \frac{1}{2}|u_3\rangle$

3) À t = 0 on mesure l'énergie *H*, quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités? En déduire la valeur moyenne $\langle H\rangle$ dans l'état $|\psi(0)\rangle$.

4) Déterminer l'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant t.

5) On suppose qu'à t=0 on mesure l'énergie *H* et on trouve $-\hbar\omega$, immédiatement après cette mesure on mesure l'observable *A*, quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités ?

Solution

Exercice O. H. $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$

$N = a^+ a$ $\quad [X, P] = i\hbar$ $\quad [a, a^+] = 1.$

$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^+)$ $\quad P = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,(a^+ - a)$

$N|\varphi_n\rangle = n|\varphi_n\rangle$ $\quad n \in \mathbb{N}$

1) Commutateurs,

$* \ [X, H] = \left[X, \frac{P^2}{2m}\right] + \underbrace{\left[X, \frac{1}{2} m\omega^2 X^2\right]}_{=0}$

$[X, H] = \frac{1}{2m}[X, P]\,2P \iff \boxed{[X, H] = \frac{i\hbar P}{m}}$

$* \ [P, H] = \underbrace{\left[P, \frac{P^2}{2m}\right]}_{=0} + \frac{1}{2} m\omega^2 [P, X^2]$

$= \frac{1}{2} m\omega^2 [P, X]\,2X \iff \boxed{[P, H] = -i\hbar m\omega^2 X}$

$* \ [XP, H] = X[P, H] + [X, H]P$

$= -i\hbar m\omega^2 X^2 + \frac{i\hbar}{m} P^2 = i\hbar\left(\frac{P^2}{m} - m\omega^2 X^2\right)$

1

2) M.q $a|\varphi_n\rangle = \sqrt{n}\,|\varphi_{n-1}\rangle$; $a^+|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}\,|\varphi_{n+1}\rangle$

or, $a|\varphi_n\rangle$ et $|\varphi_{n-1}\rangle$ st $\vec{v}$ps de N associés à la même v.p. $(n-1)$. Les vps de N st non dégénérées $\Rightarrow a|\varphi_n\rangle = c_n|\varphi_{n-1}\rangle$

$\| a|\varphi_n\rangle\|^2 = \| c_n|\varphi_{n-1}\rangle\|^2 = |c_n|^2$

$\Leftrightarrow \langle\varphi_n|a^+a|\varphi_n\rangle = |c_n|^2$

$\Leftrightarrow \langle\varphi_n|N|\varphi_n\rangle = n = |c_n|^2 \Leftrightarrow c_n = \sqrt{n}$.

$\Leftrightarrow \boxed{a|\varphi_n\rangle = \sqrt{n}\,|\varphi_{n-1}\rangle}$.

De même $a^+|\varphi_n\rangle$ et $|\varphi_{n+1}\rangle$ st $\vec{v}$ps de N associés à la m̂ v.p. $(n+1) \Rightarrow$

$a^+|\varphi_n\rangle = c_{n+}|\varphi_{n+1}\rangle \Leftrightarrow \|a^+|\varphi_n\rangle\|^2 = \|c_{n+}|\varphi_{n+1}\rangle\|^2$

$\Leftrightarrow \langle\varphi_n|aa^+|\varphi_n\rangle = \langle\varphi_n|N+1|\varphi_n\rangle = |c_{n+}|^2$

$\Leftrightarrow |c_{n+}|^2 = n+1 \Leftrightarrow c_{n+} = \sqrt{n+1}$.

$\Leftrightarrow \boxed{a^+|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}\,|\varphi_{n+1}\rangle}$

3) Valeurs moyennes ds $|\varphi_n\rangle$:

$\langle X\rangle_{|\varphi_n\rangle} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle\varphi_n|(a+a^+)|\varphi_n\rangle$

$= \sqrt{}\,\langle\varphi_n|.\left(\sqrt{n}|\varphi_{n-1}\rangle + \sqrt{n+1}\,|\varphi_{n+1}\rangle\right) = 0$

(2)

$\langle x \rangle = 0$

De m̂, $\boxed{\langle P \rangle = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \langle \varphi_n | (a^+ - a) | \varphi_n \rangle = 0}$

* $X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^2 + a^{+2} + a a^+ + a^+ a\right)$

* $P^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}\left(a^2 + a^{+2} - a a^+ - a^+ a\right)$

$\Rightarrow X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^2 + a^{+2} + 2N + 1\right)$

$P^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}\left(a^2 + a^{+2} - (2N+1)\right)$

* $\langle a^2 \rangle_{|\varphi_n\rangle} = \langle \varphi_n | a^2 | \varphi_n \rangle = \sqrt{n(n-1)} \langle \varphi_n | \varphi_{n-2} \rangle$
$= 0$

* $\langle a^{+2} \rangle_{|\varphi_n\rangle} = \langle \varphi_n | a^{+2} | \varphi_n \rangle = \sqrt{(n+1)(n+2)} \langle \varphi_n | \varphi_{n+2} \rangle = 0$

* $\langle 2N+1 \rangle = \langle \varphi_n | (2N+1) | \varphi_n \rangle = 2n+1$

$\Rightarrow \boxed{\langle X^2 \rangle_{|\varphi_n\rangle} = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1) = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right)}$

$\boxed{\langle P^2 \rangle_{|\varphi_n\rangle} = \hbar m\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)}$

3

$$\Leftrightarrow \langle H\rangle_{|\varphi_n\rangle} = \frac{\langle p^2\rangle}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \langle x^2\rangle$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\omega}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\langle H\rangle_{|\varphi_n\rangle} = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)} \quad (= E_n)$$

$$* \quad \Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\langle x^2\rangle}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \sqrt{\langle p^2\rangle}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\Delta p = \sqrt{\hbar m\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}}$$

4). $\Delta x . \Delta p = \hbar\left(n+\frac{1}{2}\right) \geq \frac{\hbar}{2}. \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ P.I.H. est bien satisfait

4

Problème. Base $\{|u_i\rangle\}_{i=1,2,3}$ H et A /

$$\begin{cases} H|u_1\rangle = \hbar\omega|u_1\rangle + 2\hbar\omega|u_3\rangle \\ H|u_2\rangle = 3\hbar\omega|u_2\rangle \\ H|u_3\rangle = 2\hbar\omega|u_1\rangle + \hbar\omega|u_3\rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} A|u_1\rangle = ia|u_2\rangle \; ; \; A|u_2\rangle = -ia|u_1\rangle + ia|u_3\rangle \\ A|u_3\rangle = -ia|u_2\rangle \end{cases}$$

1) Matrices de H et de A :

$$H = \hbar\omega \begin{array}{c} \begin{matrix} |u_1\rangle & |u_2\rangle & |u_3\rangle \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A = a\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

H et A st hermitiques car les éléments diagonaux st réels, et leurs matrices présentent une symétrie de conjugaison par rapport à la diagonale

2) V.ps de H, H est non diagonale ⇒ on résout l'équation caractéristique : on pose $H' = \frac{H}{\hbar\omega}$

E. C. : $|H' - \lambda.\mathbb{1}| = 0$

(5)

2 ème méthode : H n'est pas diagonale, mais, on constate que $3\hbar\omega$ est une v.p de H, car c'est 1 élément diagonal

$$H = \begin{pmatrix} \hbar\omega & 0 & 2\hbar\omega \\ 0 & 3\hbar\omega & 0 \\ 2\hbar\omega & 0 & \hbar\omega \end{pmatrix}$$

donc on résout l'éq. caractéristique de la matrice restriction $\bar{H}$ ds la base $\{|u_1\rangle ; |u_3\rangle\}$

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} \hbar\omega & 2\hbar\omega \\ 2\hbar\omega & \hbar\omega \end{pmatrix}$$

$$\bar{H}' = \frac{\bar{H}}{\hbar\omega} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow |\bar{H}' - \lambda \mathbb{1}| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = 0$$

$$(-\lambda-1)(3-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Les v.ps de $\bar{H}$ st $-\hbar\omega$ et $3\hbar\omega$

$\Rightarrow$ Les v.ps de H st $\boxed{E_1 = -\hbar\omega}$ et $\boxed{E_2 = E_3 = 3\hbar\omega}$.

6

2 ème méthode

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - 4(3-\lambda) = 0$$

$\Leftrightarrow (3-\lambda)\{(1-\lambda)^2 - 4\} = (3-\lambda)(-\lambda-1)(-\lambda+3)$

$\Leftrightarrow \lambda = -1$ et $\lambda = 3$ (double racine)

$\Leftrightarrow$ Les v.ps de H st $\boxed{E_1 = -\hbar\omega}$ et $\boxed{E_2 = E_3 = 3\hbar\omega}$

* Degré de dégénérescence :

* $E_1 = -\hbar\omega$: non dégénérée.

: $E_2 = E_3 = 3\hbar\omega$ 2 fois dégénérée.

* $\vec{v}$ps de H :

La matrice de H présente 1 élément diagonal $\boxed{E_2 = 3\hbar\omega}$ dont le $\vec{v}$p est le $\vec{v}$ de base $\boxed{|u_2\rangle}$.

soit $\overline{H} = \hbar\omega \begin{array}{c} \begin{matrix} |u_1\rangle & |u_3\rangle \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ on calcul les $\vec{v}$ps de $\overline{H}$

la matrice restriction ds la base $\{|u_1\rangle, |u_3\rangle\}$

* à la v.p $E_1 = -\hbar\omega \rightarrow |\varepsilon_1\rangle = \alpha_1 |u_1\rangle + \beta_1 |u_3\rangle$

* " " $E_3 = 3\hbar\omega \rightarrow |\varepsilon_3\rangle = \alpha_3 |u_1\rangle + \beta_3 |u_3\rangle$

(1)

$\bar{H}|\varepsilon_n\rangle = E_n|\varepsilon_n\rangle \qquad n = 1, 3.$

$\hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$

* $\underline{E_1 = -\hbar\omega}$, $\quad \alpha_1 + 2\beta_1 = -\alpha_1 \Leftrightarrow \boxed{\beta_1 = -\alpha_1}$

$2|\alpha_1|^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \beta_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

$\Leftrightarrow \boxed{|\varepsilon_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_1\rangle - |u_3\rangle\right)}$

* $\underline{E_3 = 3\hbar\omega}$, $\quad \alpha_3 + 2\beta_3 = 3\alpha_3.$

$\Leftrightarrow \alpha_3 = \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{|\varepsilon_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_1\rangle + |u_3\rangle\right)}$

$\Rightarrow$ <u>Les $\vec{v}$'ps de H st :</u>

$$\begin{cases} |\varepsilon_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_1\rangle - |u_3\rangle\right) \longrightarrow E_1 = -\hbar\omega \\ |\varepsilon_2\rangle = |u_2\rangle \longrightarrow E_2 = E_3 = 3\hbar\omega \\ |\varepsilon_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_1\rangle + |u_3\rangle\right) \nearrow \end{cases}$$

* <u>v.ps de A :</u> on pose $A' = \frac{A}{a}$.

$$|A' - \lambda \mathbb{1}| = \begin{vmatrix} -\lambda & -i & 0 \\ i & -\lambda & -i \\ 0 & i & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2 - 1) - (-\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2 - 2) = 0$$

$\to 0$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow$ <u>ls v.ps de A st :</u>

$$\{ \lambda_1 = a\sqrt{2} \; ; \; \lambda_2 = 0 \; ; \; \lambda_3 = -a\sqrt{2} \}$$

* ls 3 solutions sont distincts $\Rightarrow$ ls v.ps de A sont toutes non dégénérés.

* <u>$\vec{V}$ps de A</u>, soient $|\lambda_n\rangle = \alpha_n |u_1\rangle + \beta_n |u_2\rangle + \gamma_n |u_3\rangle$ /

$$A|\lambda_n\rangle = \lambda_n |\lambda_n\rangle \quad \text{avec } n = 1, 2, 3$$

$$a \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \lambda_n \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

* <u>$\lambda_1 = a\sqrt{2}$</u> $\Rightarrow$ $-i\beta_1 = \sqrt{2}\,\alpha_1$

$i\beta_1 = \sqrt{2}\,\gamma_1$

$\Leftrightarrow \boxed{\beta_1 = i\sqrt{2}\alpha_1} \quad \boxed{\gamma_1 = -\alpha_1} \Leftrightarrow |\alpha_1|^2 + 2|\alpha_1|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$

$\Leftrightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{1}{2}} \quad \boxed{\beta_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}} \quad \boxed{\gamma_1 = -\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \boxed{|\lambda_1\rangle = \frac{1}{2}|u_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|u_2\rangle - \frac{1}{2}|u_3\rangle}$

* $\underline{\lambda_2 = 0}$: $\boxed{\beta_2 = 0}$ $\quad \alpha_2 - \gamma_2 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha_2 = \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{|\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_3\rangle}$

* $\underline{\lambda_3 = -a\sqrt{2}}$: $\quad -i\beta_3 = -\sqrt{2}\alpha_3$

$i\beta_3 = -\sqrt{2}\gamma_3$

$\Leftrightarrow \boxed{\beta_3 = -i\sqrt{2}\alpha_3} \quad \boxed{\gamma_3 = -\alpha_3} \Leftrightarrow 2|\alpha_3|^2 + 2|\alpha_3|^2 = 1.$

$\boxed{\alpha_3 = \frac{1}{2}} \quad \boxed{\beta_3 = -\frac{i}{\sqrt{2}}} \quad \boxed{\gamma_3 = -\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \boxed{|\lambda_3\rangle = \frac{1}{2}|u_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|u_2\rangle - \frac{1}{2}|u_3\rangle}$

* à $t = 0$ $\quad |\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle - \frac{1}{2}|u_3\rangle$

3). On mesure H à $t=0$, résultats et prob. ?
Il faut exprimer $|\psi(0)\rangle$ en fct des vps $|\varepsilon_n\rangle$

on constate que $\frac{1}{2}\left(|u_1\rangle - |u_3\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varepsilon_1\rangle$

et $\frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varepsilon_2\rangle$

$\Rightarrow |\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varepsilon_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\varepsilon_2\rangle$

$\Rightarrow$ Mes $(H) \longrightarrow \{E_1 = -\hbar w \,;\, E_2 = 3\hbar w\}$

* prob. de mesure :

$\boxed{P(E_1) = \frac{1}{2}}$ $\boxed{P(E_2) = \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \langle H\rangle = \sum_{n=1}^{2} E_n P(E_n) = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_2$

$$\boxed{\langle H\rangle = \frac{\hbar w}{2}(3-1) = \hbar w}$$

4) $|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|\psi(0)\rangle$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|\varepsilon_1\rangle + e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|\varepsilon_2\rangle\right)$

$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{e^{+iwt}|\varepsilon_1\rangle + e^{-3iwt}|\varepsilon_2\rangle\right\}$

* facultatif $\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{e^{iwt}}{2}\left(|u_1\rangle - |u_3\rangle\right) + \frac{e^{-3iwt}}{\sqrt{2}}|u_2\rangle}$

5) à t=0, on mesure H on trouve $-\hbar\omega$, immédiatement après cette mesure l'état du syst est :

$$|\psi'\rangle = \frac{P_1|\psi(0)\rangle}{\sqrt{\langle\psi(0)|P_1|\psi(0)\rangle}}$$

or $P_1 = |\varepsilon_1\rangle\langle\varepsilon_1|$

$$\Leftrightarrow P_1|\psi(0)\rangle = |\varepsilon_1\rangle\langle\varepsilon_1|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\varepsilon_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\varepsilon_2\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|\varepsilon_1\rangle$$

$\langle\psi(0)|P_1|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$

$$\boxed{|\psi'\rangle = |\varepsilon_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_1\rangle - |u_3\rangle\right)}$$

* Le syst. immédiatement après la mesure étant ds l'état $|\psi'\rangle$, si on mesure A résultats et prob?

on remarque que $|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha_1\rangle + |\alpha_3\rangle\right)$

or

$|\alpha_1\rangle$ v.p de A associé à $\alpha_1 = a\sqrt{2}$

$|\alpha_3$ ″ ″ ″ $\alpha_3 = -a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ mes(A) $\rightarrow \{\alpha_1 = a\sqrt{2}\ ;\ \alpha_3 = -a\sqrt{2}\}$

$\boxed{P(\alpha_1) = \frac{1}{2}}$. $\boxed{P(\alpha_3) = \frac{1}{2}}$