

## MỤC LỤC

Trang phụ bìa

Lời cảm ơn

Mục lục

Danh mục các chữ viết tắt

MỞ ĐẦU .....	4
1. Lí do chọn đề tài.....	4
2. Mục đích nghiên cứu .....	5
3. Các đối tượng nghiên cứu.....	5
4. Câu hỏi nghiên cứu.....	5
5. Phương pháp nghiên cứu .....	5
6. Cấu trúc khoá luận.....	6
CHƯƠNG 1 CƠ SỞ LÝ LUẬN .....	7
1. Nguyên nhân gây nên những khó khăn cho học sinh khi học toán .....	7
2. Một số nguyên tắc cho việc dạy và học nhằm giúp học sinh vượt qua khó khăn trong học toán .....	11
3. Một số biện pháp chung trong hoạt động dạy của giáo viên nhằm giúp học sinh hạn chế sai lầm trong lập luận toán: phần đại số.....	15
4. Một số kết quả về các sai lầm thường gặp ở học sinh khi giải phương trình, bất phương trình, chứng minh bất đẳng thức.....	17
CHƯƠNG 2 GIÚP HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VƯỢT QUA NHỮNG SAI LẦM TRONG LẬP LUẬN TOÁN HỌC: PHẦN ĐẠI SỐ ...	23
1. Chủ đề phương trình.....	23
2. Chủ đề bất phương trình .....	42

CHƯƠNG 3 THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM .....	61
1. Mục đích và ý nghĩa thực nghiệm.....	61
2. Quá trình thực nghiệm.....	61
3. Kết quả phiếu điều tra giáo viên và học sinh.....	67
4. Kết luận sư phạm.....	76
KẾT LUẬN .....	78
TÀI LIỆU THAM KHẢO .....	80
PHỤ LỤC	

**DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT**

CNTT	:	Công nghệ thông tin
GSP	:	The Geometer's Sketchpad
HS	:	Học sinh
GV	:	Giáo viên
PPDH	:	Phương pháp dạy học
SGK	:	Sách giáo khoa
THPT	:	Trung học phổ thông

## MỞ ĐẦU

### 1. Lí do chọn đề tài

Nói đến học toán, thường người ta nghĩ ngay đến các con số, các ký hiệu, dấu toán, hình vẽ và các mối quan hệ phức tạp giữa chúng. Quả đúng thế, vì Toán học là khoa học của những ký hiệu trừu tượng, nó khác với các ngành khoa học thực nghiệm như Lý, Hóa, Sinh... ở chỗ không có vật chất cụ thể để sờ mó. Cho nên phần lớn học sinh đã không hiểu được nguồn gốc và ý nghĩa của những kiến thức toán một cách đúng bản chất để có thể áp dụng vào các tình huống thực tiễn. Hơn nữa, kiến thức mà học sinh phải tiếp thu trong chương trình phần lớn là những biến đổi đại số mà không hề có một hình ảnh minh họa nào. Do đó, các em thường cảm thấy vấn đề rắc rối và phức tạp. Điều này khiến các em nhìn nhận đối tượng theo một khía cạnh đơn giản và phiến diện, không đầy đủ bản chất nên thường mắc sai lầm khi đối diện với một bài toán. Chẳng hạn như biện luận theo tham số sự tương giao giữa hai đồ thị, phương trình tương đương và phương trình hệ quả, giải bất phương trình, chứng minh bất đẳng thức... Chính vì thế mà thực trạng dạy và học toán hiện nay ở một số trường phổ thông là phần lớn học sinh học toán nhưng không hiểu, gặp phải nhiều khó khăn trong quá trình học toán và có xu hướng ngày càng yếu dần về môn Toán. Đặc biệt là khả năng lập luận Đại số trong chương trình toán học phổ thông.

Là một giáo viên dạy toán trong tương lai tôi không thể không trăn trở với điều này. Tuy nhiên, làm thế nào để giúp các em vượt qua những sai lầm đó và học toán tốt hơn? Có lẽ đây là điều mà bất kì người giáo viên dạy toán nào cũng quan tâm và cố gắng thực hiện. Bởi nó còn là trách nhiệm của nhà giáo toán trên con đường thiết kế và phát triển môi trường học tập nhằm nâng cao chất lượng học toán cho học sinh. Để giải quyết vấn đề này, trước hết, người giáo viên cần ý thức được những khó khăn của các em trong quá trình học toán, dự kiến tốt những sai lầm của các em khi đối diện với một bài toán. Trên cơ sở đó giáo viên đề xuất một số biện pháp nhằm hạn chế phần nào những sai lầm mà học sinh hay mắc phải. Bằng cách đó, chắc rằng việc học của các em sẽ đạt hiệu quả hơn, khả năng tư duy toán học sẽ được cải thiện



và không ngừng nâng cao. Từ đó đem lại cho các em niềm say mê, hứng thú với môn toán và có thể giải quyết tốt các vấn đề trong cuộc sống. Với những lí do cơ bản như trên, tôi chọn đề tài “*Giúp học sinh trung học phổ thông (THPT) vượt qua những sai lầm trong lập luận toán học: phần đại số*” làm đề tài khóa luận tốt nghiệp của mình.

## **2. Mục đích nghiên cứu**

- Nghiên cứu những khó khăn của học sinh trong quá trình học toán;
- Dự kiến những sai lầm thường gặp của học sinh trong lập luận toán học: phần đại số và đề xuất các biện pháp khắc phục sai lầm;
- Thiết kế một số hoạt động phục vụ cho dạy học phương trình, bất phương trình.

## **3. Các đối tượng nghiên cứu**

- Các tài liệu về những sai lầm của HS khi giải phương trình, bất phương trình.
- Các hoạt động thiết kế cho bài dạy nhằm giúp học sinh vượt qua sai lầm khi lập luận toán học;
- Học sinh và giáo viên ở trường THPT.

## **4. Câu hỏi nghiên cứu**

- Việc học của HS đạt hiệu quả ra sao khi giáo viên tiến hành dự kiến và áp dụng các biện pháp thích hợp để khắc phục những khó khăn cho các em trong quá trình học toán?
- Việc sử dụng các môi trường toán tích cực trên máy tính nên tiến hành như thế nào để giúp HS vượt qua những sai lầm trong lập luận toán?

## **5. Phương pháp nghiên cứu**

### **❖ Phương pháp nghiên cứu lí luận**

- Sử dụng phương pháp phân tích – tổng hợp tài liệu;
- Phân loại tài liệu có liên quan để nghiên cứu cơ sở lí luận của đề tài.

**❖ Phương pháp nghiên cứu thực tiễn**

- Phương pháp quan sát sư phạm;
- Phương pháp điều tra, phỏng vấn;
- Phương pháp dạy thực nghiệm.

**6. Cấu trúc khoá luận**

**Chương 1: Cơ sở lí luận**

1. Nguyên nhân gây nên những khó khăn cho học sinh khi học toán
2. Một số nguyên tắc cho việc dạy và học nhằm giúp học sinh vượt qua khó khăn trong học toán
3. Một số biện pháp chung trong hoạt động dạy của giáo viên nhằm giúp học sinh hạn chế sai lầm trong lập luận toán: phần đại số
4. Một số kết quả về các sai lầm thường gặp ở học sinh khi giải phương trình, bất phương trình, chứng minh bất đẳng thức.

**Chương 2: Giúp học sinh trung học phổ thông vượt qua những sai lầm trong lập luận toán học: phần đại số**

1. Chủ đề phương trình
2. Chủ đề bất phương trình.

**Chương 3: Thực nghiệm sư phạm**

1. Mục đích của thực nghiệm sư phạm
2. Quá trình thực nghiệm
3. Kết quả phiếu điều tra giáo viên và học sinh
4. Kết luận sư phạm.

**Kết luận**

## **CHƯƠNG 1**

### **CƠ SỞ LÝ LUẬN**

Những sai lầm mà học sinh thường vấp phải trong lập luận toán học trước hết là do có những khó khăn nhất định khi học toán. Cụ thể là:

- Khó khăn của học sinh khi học các khái niệm toán học;
- Khó khăn của học sinh với ngôn ngữ toán học;
- Khó khăn của học sinh khi giải quyết các vấn đề toán học;
- Khó khăn của học sinh với lập luận, chứng minh và tư duy toán học.

Vì vậy trước khi đề xuất các biện pháp nhằm giúp học sinh vượt qua sai lầm trong lập luận toán học: phần đại số, cần thiết phải tìm hiểu nguyên nhân của những khó khăn đó; đưa ra một số nguyên tắc trong việc dạy và học để tạo môi trường toán tích cực thúc đẩy sự hiểu biết của các em.

#### **1. Nguyên nhân gây nên những khó khăn cho học sinh khi học toán**

Trong thực tế, có một bộ phận học sinh học toán dễ dàng, nhưng với nhiều học sinh môn Toán lại là một môn học khó. Trong số các nguyên nhân, có nguyên nhân ở chính môn Toán và những nguyên nhân ở người học.

##### **1.1. Nguyên nhân về môn Toán**

Một nhà toán học đã cho rằng, để làm chủ được toán học, người học cần phải thiết lập được mối quan hệ giữa 3 yếu tố: *đối tượng toán học*, *ngôn ngữ toán học* và *các thể hiện cụ thể đối tượng toán học*. Như vậy, muốn hiểu rõ được đối tượng toán học, học sinh cần phải sử dụng được hệ thống ngôn ngữ toán học liên quan đến đối tượng đó; nắm vững các thể hiện cụ thể đối tượng toán học để làm cơ sở cho việc hiểu bản chất của đối tượng toán học.

Toán học trở thành một môn học tinh tế bởi tính phong phú, đa dạng của ngôn ngữ toán học và các thể hiện cụ thể của đối tượng toán học. Tuy nhiên, càng tinh tế bao nhiêu thì càng gây khó khăn cho học sinh khi học toán bấy nhiêu.

Quan niệm về 3 yếu tố cấu thành môn Toán được xem xét như sau:

*a. Các đối tượng toán học là đối tượng tinh thần, là những tư tưởng được hình thành, tồn tại trong đầu óc con người.*

Nhìn lại lịch sử, trong một thời gian dài, con người không biết đến các con số. Con số được hình thành do nhu cầu của cuộc sống cần phải đếm, tính toán các đồ vật. Chẳng hạn, số 5 tồn tại trong đầu của chúng ta là một sự khái quát trừu tượng, trên thực tế chỉ có 5 con bò, 5 viên sỏi, 5 cái cây. . . chứ không có số 5. Con số là một đối tượng toán học, nó được hình thành trong đầu óc con người chứ không phải là những cái có thật.

Những hình ảnh, mô hình của các đối tượng toán học có thể là những sự vật tồn tại thực sự, nhưng chính bản thân các đối tượng toán học chỉ tồn tại trong đầu óc con người. Với một đối tượng học tập như vậy, việc tổ chức quá trình hình thành các khái niệm toán học tất yếu sẽ gặp không ít khó khăn.

*b. Ngôn ngữ toán học là những hình thức diễn tả các đối tượng toán học, mối quan hệ giữa các đối tượng đó.*

Bất kì môn khoa học nào cũng có thuật ngữ riêng của nó. Ngôn ngữ toán học là một loại thuật ngữ toán được chuyên môn hoá. Nó có ba đặc điểm cơ bản:

- *Nghĩa chính xác* tức là mỗi danh từ, ký hiệu hoặc những biểu thức do các ký hiệu tạo thành đều biểu thị một ý nghĩa rõ ràng, không thể hiểu thành hai nghĩa. Ví dụ:  $\log_a x$  biểu thị log của  $x$  có cơ số là  $a$ ,  $\lg x$  là log của  $x$  có cơ số 10;  $y = kx$  ( $k \neq 0$ )

biểu thị  $y$  là hàm số tỉ lệ thuận của  $x$ ;  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0, x \neq 0$ ) biểu thị  $y$  là hàm số tỉ lệ nghịch của  $x$ , v.v...

- *Diễn đạt ngắn gọn.* Ví dụ: câu “bình phương hiệu của  $a$  và  $b$  bằng 5” nếu dùng ký hiệu để diễn đạt là:  $(a - b)^2 = 5$ . Qua đó ta thấy rõ, ngôn ngữ ký hiệu không những chính xác mà còn “rút ngắn” rất nhiều so với dùng ngôn ngữ thông thường.

- *Sử dụng thuận tiện, linh hoạt.* Ví dụ trong công thức sau  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ,  $a$  và  $b$  có thể là một số hoặc biểu thức bất kì. Rộng hơn nữa,  $a$  và  $b$  trong công thức có thể biểu thị hai ký hiệu khác vị trí. Đó là điểm khác nhau cơ bản của ngôn ngữ toán học và ngôn ngữ thông thường.

Trên đây ta chỉ mới đưa ra ngôn ngữ ký hiệu của toán học. Thực ra, hình thức diễn đạt của ngôn ngữ toán có hai loại: Một loại là thuật ngữ chữ viết như “hình được tạo bởi một đầu chung của hai đoạn thẳng gọi là góc”; một loại nữa là ngôn ngữ hình học, nó bao gồm các hình hình học, đồ thị và các lược đồ.

Như vậy, học sinh cần tư duy toán học một cách chính xác và học sử dụng chuẩn xác ngôn ngữ toán học là điều vô cùng quan trọng. Đương nhiên đây không phải việc làm một sáng một chiều mà cần phải có sự nỗ lực liên tục. Đây cũng là một khó khăn trong việc học toán của các em.

*c. Các thể hiện cụ thể đối tượng toán học* là cách diễn tả một cách cụ thể, trực quan một số mặt của các đối tượng toán học. Chúng được hình thành bằng ngôn ngữ toán học, những hình vẽ, sơ đồ. Tùy theo từng trường hợp mà xác định đó là ngôn ngữ toán học hay thể hiện cụ thể toán học.

Các thể hiện cụ thể đối tượng toán học dùng làm chỗ dựa để phản ánh từ cái cụ thể đến tư tưởng toán học (từ trực quan đến trừu tượng) và có thể được dùng phản ánh những tư tưởng toán học vào cái cụ thể (cụ thể hóa), là chỗ dựa của các tư tưởng toán học, nhờ đó ta có thể suy nghĩ để giải các bài toán thuận lợi hơn. Tuy nhiên, đây cũng là một nguyên nhân gây khó khăn cho học sinh bởi như chúng ta đã biết có những tư tưởng toán học được nảy sinh do sự trừu tượng hóa những cái trừu tượng đã đạt được trước đó.

## **1.2. Nguyên nhân về phía người học**

Tùy theo trình độ điều luyện của ngôn ngữ bên trong, vốn kiến thức cũ, kinh nghiệm của các em, sự phản ánh các yếu tố bên ngoài vào bên trong đầu của mỗi người là khác nhau, đòi hỏi những khoảng thời gian khác nhau. Ví dụ, một học sinh có thói quen gọi lại bằng âm thanh hay lời nói, khi quan sát một hình vẽ, một ký hiệu, cần

có thời gian diễn dịch chúng thành lời nói để nắm được ý nghĩa. Còn học sinh có thói quen gọi lại những hình ảnh nhìn thấy trong đầu, có thể hiểu nghĩa của những công thức, ký hiệu dễ dàng hơn nhưng khi trình bày lại cho người khác hiểu bằng ngôn ngữ thông thường cũng cần có thời gian. Đặc điểm tâm lý đó của học sinh cũng gây không ít khó khăn cho các em trong học toán. Hay nói khác hơn là hầu hết học sinh không giống nhau về tư duy và cách tiếp thu toán. Có học sinh hứng thú xoay xở các bài toán và tìm ra lời giải hay, những cách tiếp cận không quen thuộc; có học sinh chỉ muốn ở trong môi trường có cảm giác thoải mái, thích ghi lại những ví dụ trên bảng, thực hành ở nhà, lập lại các bước giải đó trong các bài kiểm tra... rồi có những học sinh không giải được toán nếu không có những hướng dẫn theo từng bước giải một cách cụ thể.

Vậy nếu giáo viên không hiểu được điều đó và không có những phương pháp dạy học phù hợp thì không những không giúp học sinh vượt qua được những khó khăn mà có thể sẽ làm cho các em càng khó khăn hơn trong học toán.

Đến đây, có lẽ không thể không thừa nhận trách nhiệm của người giáo viên đối với những khó khăn mà học sinh của mình gặp phải trong học toán.

### **1.3. Nguyên nhân về phía giáo viên và phương pháp dạy học của giáo viên**

Một thực tế chung cần được thừa nhận là có 3 yếu tố làm học sinh không học toán được, đó là:

- Chúng ta dạy toán cứ như là các ký hiệu có ý nghĩa rõ ràng và cố hữu;
- Chúng ta thường không quan tâm đến mức độ chín chắn về nhận thức của người học. Những gì rõ ràng đối với thầy có thể xa lạ đối với học sinh;
- Chúng ta thường bỏ qua tầm quan trọng về nhu cầu của học sinh trong việc tự kiến tạo cách hiểu toán của riêng mình.

Mặt khác, lối truyền thụ theo kiểu áp đặt của thầy giáo và sự tiếp thu hoàn toàn thụ động của HS khiến các em có suy nghĩ rằng Toán học đã tồn tại từ lâu với những công thức và thuật toán bất di bất dịch, sẽ không còn chỗ nào cho những ý tưởng

mới, hay ít ra là cũng không có cơ hội để những học sinh bình thường đưa ra những suy nghĩ, cách nhìn mới từ bản thân. Hơn nữa, kết quả của việc dạy học theo kiểu áp đặt, truyền thụ một chiều từ phía giáo viên là kiến thức toán đi vào đầu học sinh không đúng bản chất của nó, không đầy đủ các khía cạnh và đôi khi rất trừu tượng. Chính vì không hiểu toán, không thấy được vẻ đẹp và sự sáng tạo vốn có của toán nên đa số học sinh ngại học toán và cho rằng toán là môn học khô khan.

Có thể nói rằng, nếu làm cho học sinh thấy rõ được những ứng dụng khác nhau của chứng minh thì có thể cải thiện được sự đánh giá của học sinh về vai trò của chứng minh trong toán học. Cho nên, hơn ai hết giáo viên cần phải nắm vững bản chất của chứng minh cùng với các chức năng quan trọng của nó, từ đó mới có thể tìm ra được những khó khăn của học sinh và có các biện pháp thích hợp giúp học sinh xây dựng những “chiến lược” chứng minh có hiệu quả.

## **2. Một số nguyên tắc cho việc dạy và học nhằm giúp học sinh vượt qua khó khăn trong học toán**

Dựa trên những nghiên cứu về việc dạy và học theo quan điểm lý thuyết kiến tạo và đặc trưng của phương pháp dạy học tích cực, có thể đúc kết một vài nguyên tắc chung cho việc dạy và học như sau:

### **2.1. Dạy học thông qua tổ chức các hoạt động học tập của học sinh**

Trong phương pháp tổ chức, người học - đối tượng của hoạt động “dạy”, đồng thời là chủ thể của hoạt động “học” - được cuốn hút vào các hoạt động học tập do giáo viên tổ chức và chỉ đạo, thông qua đó tự lực khám phá những điều mình chưa rõ chứ không phải thụ động tiếp thu những tri thức đã được giáo viên sắp đặt. Được đặt vào những tình huống của đời sống thực tế, người học trực tiếp quan sát, thảo luận, làm thí nghiệm, giải quyết vấn đề đặt ra theo cách suy nghĩ của mình, từ đó nắm được kiến thức kĩ năng mới, vừa nắm được phương pháp làm ra kiến thức, kĩ năng đó, không rập khuôn theo những mẫu sẵn có, được bộc lộ và phát huy tiềm năng sáng tạo. Dạy học theo cách này, GV không chỉ giản đơn truyền đạt tri thức mà còn hướng dẫn HS hành động.

## **2.2. Dạy và học chú trọng rèn luyện phương pháp tự học**

Phương pháp tích cực xem việc rèn luyện phương pháp học tập cho học sinh không chỉ là một biện pháp nâng cao hiệu quả dạy học mà còn là một mục tiêu dạy học.

Trong các phương pháp học thì cốt lõi là phương pháp tự học. Nếu rèn luyện cho người học có được phương pháp, kĩ năng, thói quen, ý chí tự học thì sẽ tạo cho các em lòng ham học, khơi dậy nội lực vốn có trong mỗi người, kết quả học tập sẽ được nhân lên gấp bội. Vì vậy, ngày nay người ta nhấn mạnh mặt hoạt động học trong quá trình dạy học, nỗ lực tạo ra sự chuyển biến từ học tập thụ động sang tự học chủ động, đặt vấn đề phát triển tự học ngày nay trong trường phổ thông, không chỉ tự học ở nhà sau bài lên lớp mà cả trong tiết học với sự hướng dẫn của GV.

## **2.3. Học sinh học bằng cách kiến tạo tri thức**

Theo quan điểm của lý thuyết kiến tạo, mỗi người giáo viên cần phải nhận thức được rằng học sinh đến lớp không phải như một chiếc “bảng trắng”, một cái “đĩa trống” hay một cái “hộp rỗng” đang đợi để được làm đầy, thay vào đó, học sinh đến lớp để được tiếp cận những hoạt động học cùng với tri thức mang ý nghĩa đã có từ trước. Khi học một vài điều mới, học sinh sẽ hiểu ý nghĩa thông tin mới dựa trên kiến thức có trước của mình, kiến tạo cách hiểu riêng cho mình bằng cách liên kết thông tin mới với những gì các em đã tin. Học sinh có xu hướng chấp nhận những tư tưởng mới (tri thức mới) chỉ khi những tri thức cũ của các em không còn hoạt động hoặc tỏ ra là không còn hiệu quả cho những mục đích mà các em cho là quan trọng.

Các nhà giáo dục Toán theo quan điểm kiến tạo khẳng định rằng bằng cách xây dựng trên những kiến thức đã kiến tạo được, học sinh có thể nắm bắt tốt hơn các khái niệm và có thể đi từ nhận biết sự vật sang hiểu nó. Kiến thức được kiến tạo khuyến khích tư duy phê phán, nó cho phép học sinh tích hợp được khái niệm theo nhiều cách khác nhau. Khi đó, học sinh có thể trình bày khái niệm, kiểm chứng, bảo vệ và phê phán về khái niệm được xây dựng.



#### **2.4. Giáo viên không nên đánh giá thấp về những khó khăn mà học sinh có thể gặp phải trong quá trình tìm hiểu các khái niệm cơ bản của Toán học**

Như chúng ta đã biết, Toán học là kết quả của sự trừu tượng hóa diễn ra trên những bình diện khác nhau. Có những khái niệm toán học là kết quả của sự trừu tượng hóa những đối tượng vật chất cụ thể, nhưng cũng có nhiều khái niệm nảy sinh do sự trừu tượng hóa những cái trừu tượng đã đạt được trước đó. Điều này gây ra nhiều khó khăn cho học sinh trong việc hình dung và hiểu các khái niệm một cách trực giác.

Một vài nghiên cứu cho thấy mặc dù học sinh có thể trả lời chính xác một số câu hỏi trong các bài kiểm tra, các bài trắc nghiệm, có thể thiết lập được các phép toán một cách chính xác nhưng các em vẫn còn nhầm lẫn về các ý tưởng và khái niệm cơ bản. Học sinh có thể hiểu nhưng không có khả năng chuyển sự hiểu biết đó của mình vào những bài toán mang nhiều nội dung thực tế hơn.

#### **2.5. Việc học của học sinh sẽ được cải tiến nếu các em nhận thức được và đương đầu với những lỗi khái niệm của mình**

Các nhà kiến tạo cho rằng học sinh học toán tốt nhất khi các em được đặt trong một môi trường xã hội tích cực mà ở đó các em có khả năng kiến tạo cách hiểu biết về toán theo cách riêng của mình. Với ý nghĩa này, thách thức đặt ra trong việc dạy học toán là tạo ra được những hoạt động thực nghiệm thu hút được học sinh tham gia và động viên, khuyến khích các em giải thích, đánh giá, trao đổi và áp dụng các mô hình toán học cần thiết nhằm làm cho những kinh nghiệm này có ý nghĩa.

Có lẽ học sinh sẽ học tốt hơn khi các hoạt động được xây dựng nhằm giúp các em đánh giá, xác minh sự khác biệt giữa những niềm tin của mỗi cá nhân đối với tri thức và những kết quả thực nghiệm có thật. Nếu như ban đầu học sinh được yêu cầu hãy phỏng đoán hoặc dự báo về một nội dung hay vấn đề nào đó thì các em có thể sẽ rất quan tâm đến những kết quả thực nghiệm. Khi bằng chứng thực nghiệm đã rõ ràng là mâu thuẫn với những dự đoán của các em, chúng ta nên giúp đỡ các em xác minh sự khác biệt này.

Quả thật, chính trong quá trình học sinh bị thôi thúc thu thập những kết quả thực nghiệm và so sánh những dự đoán của mình với các kết quả đó, các em sẽ có khả năng xác nhận bằng chứng về những lỗi khái niệm của mình.

## **2.6. Máy tính nên được dùng để giúp học sinh trực quan và tư duy toán học, không nên chỉ dừng lại ở việc cung cấp các thuật toán để dự đoán kết quả**

Dạy học với sự hỗ trợ của máy tính dường như giúp học sinh nắm vững hơn các khái niệm toán học, bằng cách cung cấp những cách khác nhau để biểu diễn cùng một đối tượng hay cho phép học sinh thao tác các khía cạnh khác nhau của một biểu diễn cụ thể khi khám phá đối tượng.

Các phần mềm dạy học có thể giúp học sinh hiểu những khái niệm trừu tượng.

## **2.7. Đổi mới đánh giá kết quả học tập của học sinh**

Trong dạy học, việc đánh giá HS không chỉ nhằm mục đích nhận định thực trạng và điều chỉnh hoạt động của trò mà còn đồng thời tạo điều kiện nhận định thực trạng và điều chỉnh hoạt động dạy của thầy.

Trước đây, GV độc quyền đánh giá HS. Trong phương pháp tích cực, GV phải hướng dẫn HS phát triển kỹ năng tự đánh giá để tự điều chỉnh cách học. Liên quan với điều này, GV cần tạo điều kiện thuận lợi để HS được tham gia đánh giá lẫn nhau. Để giúp các em trở thành những con người năng động thì việc kiểm tra, đánh giá không thể dừng lại ở yêu cầu tái hiện các kiến thức, lặp lại các kỹ năng đã học mà phải khuyến khích trí thông minh, óc sáng tạo trong việc giải quyết các tình huống thực tế.

## **2.8. Việc sử dụng các phương pháp dạy học được đề xuất không chắc chắn rằng tất cả học sinh sẽ học toán tốt hơn**

Không có phương pháp nào là hoàn hảo và sẽ có thể tác động thích hợp đối với tất cả học sinh. Một vài nghiên cứu Giáo dục Toán đã chỉ ra rằng những nhầm lẫn khái niệm của học sinh thường là nhanh chóng thích nghi và khá bền vững, kiên cố, các em rất chậm để thay đổi được, ngay cả khi học sinh đó đã được đối mặt với một sự

thật rõ ràng rằng niềm tin của mình là không đúng. Và điều này mới chỉ là một phần của vấn đề. Mặt khác, chúng ta không thể biết chắc là các em đã đủ tập trung, chú ý để nỗ lực với việc học các ý tưởng mới.

### **3. Một số biện pháp chung trong hoạt động dạy của giáo viên nhằm giúp học sinh hạn chế sai lầm trong lập luận toán: phần đại số**

#### **3.1. Bồi dưỡng học sinh thói quen giải xong bài vẫn tiếp tục suy nghĩ**

Đó là điều mà rất ít học sinh làm được, nhưng khi giải xong cần từ những phương diện nào để suy nghĩ tiếp? Học sinh cần được rèn luyện thói quen này:

- Đối với bài điển hình hay bài khó hãy nghĩ lại xem mình đã phát hiện hướng suy nghĩ giải ra sao?
- Đặc điểm của hướng suy nghĩ ấy là gì? Nó dùng thích hợp cho loại bài nào?
- Bài đó dùng đến những kiến thức cơ sở và lí luận cơ bản nào? Dùng những phương pháp toán học nào?
- Có thể từ một góc độ khác để xét vấn đề được không? Còn cách giải nào ngắn gọn hơn không? Hoặc nghiên cứu sâu hơn về kết luận của bài toán.
- Những bài giải sai hoặc làm không ra nên hỏi tưởng lại tỉ mỉ, lúc đó vì sao lại như thế? Nguyên nhân tại đâu? Là do kiến thức còn hổng hay hiểu bài chưa tốt? Phải đối chiếu thật kĩ với cách giải đúng, nghĩ xem hướng suy nghĩ của mình sai chỗ nào hay gặp trở ngại gì?

#### **3.2. Giúp học sinh nắm được đặc điểm của phân kiến thức mới**

Các kiến thức mới trong toán phổ thông đại thể được hình thành theo ba loại phương thức. *Loại thứ nhất* là trên cơ sở kiến thức cũ thêm một nhân tố để hình thành kiến thức mới. Ví dụ trên cơ sở toán học cấp một đưa vào những số ngược nhau làm nảy nở khái niệm số âm và số dương. Trong phương trình bậc nhất một ẩn số đưa thêm vào một ẩn số nữa thành phương trình hai ẩn số. *Loại thứ hai* là thay đổi kết cấu kiến thức cũ. Ví dụ phép khai căn là một khái niệm mới được đưa ra trên cơ sở phép tính ngược của phép tính lũy thừa. *Loại thứ ba* là xây dựng một cấu trúc

kiến thức mới. Ví dụ các kiến thức về phương trình hoàn toàn khác với các kiến thức về số học.

GV cần chú ý điều này để giúp HS khắc sâu kiến thức dễ dàng hơn.

### **3.3. Giúp học sinh suy nghĩ và giải quyết vấn đề theo cách tư duy mới**

Điều này rất quan trọng để các em không vận dụng kiến thức một cách máy móc, sai lầm. Sau khi đã hiểu rõ đặc điểm của phần kiến thức mới, phải cố gắng dựa theo những khái niệm mới, phương pháp mới, tức là theo phương thức tư duy mới để suy nghĩ và giải quyết vấn đề, luôn chú ý khắc phục những ảnh hưởng xấu của nếp tư duy cũ, nếu không sẽ gặp phải sai lầm có tính nguyên tắc. Và ở đây ta cần quan tâm đến cách tư duy đại số. Chẳng hạn, xét hai ví dụ sau để xem HS đã giải sai chỗ nào:

1) So sánh  $a$  và  $(-a)$  cái nào lớn hơn;

2) Giải phương trình:  $\frac{x}{1-x} = \frac{x}{x-1}$ .

*Một học sinh đã giải như sau:*

1)  $a > (-a)$

2) Từ đề bài ta được  $1 - x = x - 1$ ;  $x = 1$  là nghiệm.

Phân tích: Ta thấy rằng bài 1) giải sai ở chỗ xem  $a$  là số dương,  $(-a)$  là số âm. Đây là do ảnh hưởng của thói quen dùng chữ số để biểu thị số, xem số có dấu “+” là số dương, như  $(+3)$ ; còn số có dấu “-” xem là số âm, như  $(-1)$  chẳng hạn. Như thế là đã quên mất chữ cái biểu thị số bất kì,  $a$  có thể là số dương, số không hoặc số âm, còn  $(-a)$  là số ngược lại với  $a$ .

Với bài 2) giải sai ngay ở bước đầu tiên. Từ  $\frac{x}{1-x} = \frac{x}{x-1}$  rút ngay ra  $1 - x = x - 1$ . Vì

sao sai? Là bị ảnh hưởng bởi “khi hai phân số bằng nhau, nếu tử số bằng nhau thì mẫu số cũng bằng nhau”. Phán đoán này chỉ đúng với điều kiện tử số khác không. Ở đây, tử số của hai vế trong phương trình là biến số  $x$ , giá trị của nó chưa xác định, nên không loại trừ khả năng nó bằng không. Do đó, ta không có đủ cơ sở để rút ra

kết quả  $1 - x = x - 1$ . Thực tế là phương trình có một nghiệm  $x = 0$ , lúc đó mẫu số khác nhau.

### **3.4. Bồi dưỡng cho học sinh thói quen tính toán chính xác**

a) *Đọc đề cẩn thận*: Gặp đề toán, trước hết nên đọc cẩn thận một lượt, phải phân tích kĩ điều kiện đã cho, cần tìm cái gì? Trên cơ sở đó quan sát đặc điểm của các biểu thức, liên tưởng đến những kinh nghiệm đã giải bài tập, những công thức, quy tắc. Ngoài ra cần chú ý các điều kiện ràng buộc hoặc hạn chế ngầm trong đề để bảo đảm tính toán được chính xác.

b) *Tính toán tỉ mỉ*: Gặp phép tính phức tạp phải bình tĩnh không được nôn nóng, từng bước một tính toán cẩn thận, tính đến đâu đảm bảo chính xác đến đó. Đặc biệt, giải phương trình hoặc bất phương trình chứa tham số một bước tính sai (như sai dấu, sai hệ số) sẽ dẫn đến tất cả đều sai. Do đó phải hết sức cẩn thận, tự tin, kiên trì tính toán.

c) *Kiên trì kiểm tra*: Làm xong bài phải kiên trì kiểm tra. Từ xem lại đề, bước giải đầu tiên, quá trình giải cho đến tận đáp số đều không được cầu thả.

d) *Chữ viết ngay ngắn*: Giải bài tập nhất định phải viết chữ ngay ngắn, trình bày thích hợp theo các loại đề. Làm như thế không những đỡ sai mà còn giúp cho tư duy mạch lạc.

### **4. Một số kết quả về các sai lầm thường gặp ở học sinh khi giải phương trình, bất phương trình, chứng minh bất đẳng thức**

Lí thuyết phương trình không phải chỉ là cơ sở để xây dựng đại số học mà còn giữ vai trò quan trọng trong các bộ môn khác của toán học. Phương trình, bất phương trình và bất đẳng thức chiếm một vị trí khá lớn trong chương trình toán phổ thông. Nội dung này tưởng là đơn giản nhưng thật ra các em còn mắc rất nhiều sai lầm khi giải. Bởi nó là những biến đổi đại số “khô khan”, không có minh họa trực quan nên học sinh đôi khi áp dụng một cách máy móc, hình thức mà không hiểu được bản

chất của những biến đổi đó, chẳng hạn biến đổi tương đương, phương trình hệ quả, chứng minh bất đẳng thức...

Để có cơ sở cho việc phân tích các sai lầm thường gặp của học sinh trong chương trình Đại số phổ thông và nêu những hướng khắc phục sau đây tôi xin trình bày một số kết quả nghiên cứu của nhóm tác giả *V.M.Bradis, V.L.Minkovskii and A.K.Kharcheva* trong cuốn “*Lapses in Mathematical reasoning*”. Những sai sót này đã đưa đến những kết luận thật vô lí khiến các em lúng túng, hoài nghi và cũng từ đó các em sẽ nhận ra được sai lầm của mình.

#### **4.1. Giải phương trình:** $\sqrt{x} + x = 2$ (1).

Một cách nhanh chóng và tự tin, HS viết lời giải như sau:

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 - x \\&\Leftrightarrow x = 4 - 4x + x^2 \\&\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}.\end{aligned}$$

HS nghi ngờ việc biến đổi của mình nên thay giá trị của  $x_1$  vào phương trình (1) và nhận thấy một điều vô lí:  $6 = 2$ ?

Phân tích: HS đã quên rằng việc giải phương trình vô tỷ có thể làm xuất hiện những nghiệm ngoại lai. Để giải thích rõ ràng điều này, ta sẽ trả lời 2 câu hỏi:

- (1) Tại sao xuất hiện nghiệm ngoại lai?
- (2) Với phương trình nào thì nó là một nghiệm?

Ta chuyển đổi phương trình (1) thành dạng  $f(x) = 0$  và nhân 2 vế với một lượng nhân để biến vế trái thành bình phương của 2 hàm biểu diễn khác nhau. Như vậy phương trình (1) có dạng:  $\sqrt{x} - (2 - x) = 0$  (\*)

Nhân 2 vế bởi nhân tử  $f_1(x) = \sqrt{x} + (2 - x)$ .

Khi đó ta có:  $x - (2 - x)^2 = 0$ , hay  $x^2 - 5x + 4 = 0$  là phương trình đã biến đổi được ở trên, có nghiệm bằng 4, như vậy  $x = 4$  là nghiệm ngoại lai của phương trình (1), chính là kết quả của việc nhân 2 vế của phương trình (\*) với  $f_1(x)$ , thật vậy vì ta có  $f_1(4) = \sqrt{4} + (2 - 4) = 2 - 2 = 0$ .

Cách giải của HS dĩ nhiên là tương tự với cách giải ở đây nhưng ý nghĩa sau cùng là số nhân tạo ra nghiệm ngoại lai đã được tách ra để thấy rõ ràng hơn. Các em sẽ hiểu rõ vấn đề vì sao có nghiệm  $x = 4$  không thỏa phương trình đầu.

#### **4.2. Một số tùy ý thì bằng với 0 hay chẳng?**

Với  $a$  là một số thực tùy ý khác 0, ta thiết lập phương trình bậc hai:

$$x^2 - ax = -\frac{1}{3}a^2 \quad (1).$$

Giải phương trình này trong tập số thực, một HS lập luận như sau:

Nhân 2 vế bởi  $(-3a)$  rồi cộng thêm  $(x^3 - a^3)$  vào, ta được:

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow -3ax^2 + 3a^2x = a^3 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = x^3 \\ &\Leftrightarrow (x - a)^3 = x^3. \end{aligned}$$

Khai căn bậc 3 của 2 vế, ta có  $x - a = x$ , suy ra  $a = 0$  (2)

Như vậy dẫn đến rằng mọi số thực tùy ý  $a$  khác 0 thì bằng với 0.

Phân tích: Trong lập luận trên HS đã mắc một lỗi thật nghiêm trọng, đó là từ phương trình  $x - a = x$ , với  $a$  là một số thực tùy ý khác 0, dĩ nhiên không suy ra được  $a = 0$ . Thật vậy, giải phương trình  $x - a = x$  dẫn đến kết luận sau:  $x - x = a$ , do đó  $(1 - 1).x = a$  hay  $0.x = a$ ; với điều kiện  $a \neq 0$  thì phương trình  $0.x = a$  vô nghiệm vì không tồn tại một số mà khi nhân với 0 kết quả là một số khác 0. Tuy nhiên, có thể nhiều HS thấy nghi ngờ khi chuyển đổi từ  $(x - a)^3 = x^3$  thành  $x - a = x$  có hợp lí không? Hoàn toàn hợp lí vì căn bậc 3 của một số thực là số thực, chỉ có 1 giá trị (dương nếu số thực dưới dấu căn là dương và âm nếu nó là âm). Từ trên suy ra phương trình (2) vô nghiệm, do đó trong tập số thực phương trình (1) là vô nghiệm.

### **4.3. Một chứng minh bằng nhau của hai số tùy ý**

Cho 2 số tùy ý  $a$  và  $b > a$ , ta viết:  $a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + a^2$  (1), các tổng đại số này chỉ khác nhau về trật tự các số hạng. Ta viết lại đẳng thức (1) dưới dạng bình phương của một hiệu:  $(a - b)^2 = (b - a)^2$  (2)

Khai căn bậc 2 hai vế ta có:  $a - b = b - a$  (3)

Chuyển vế, đơn giản và chia 2 vế bởi 2, ta có:  $a + a = b + b$ ;  $2a = 2b$ ;  $a = b$  (4).

Phân tích: Thay  $a$  và  $b$  là những số xác định bất kì, ví dụ  $a = 3$ ,  $b = 1$  thì ta thấy đẳng thức (1) và (2) đúng còn (3) không đúng. Do đó sai lầm xuất hiện khi chuyển từ (2) sang (3). Việc biến đổi này tạo cơ sở để kết luận rằng căn bậc hai của 2 số bằng nhau, cùng bậc thì bằng nhau, điều này tất nhiên đúng nếu  $x$  và  $y$  là 2 số dương và  $n$  là một số tự nhiên tùy ý, khi đó từ  $x^n = y^n$ , suy ra  $x = y$ .

Thật vậy, nếu  $x > y$  ( $x < y$ ) thì  $x^n > y^n$  ( $x^n < y^n$ ). Với  $n = 2$ , định lí này có thể phát biểu như sau: "Nếu 2 hình vuông có cùng diện tích thì các cạnh của chúng bằng nhau". Nếu  $x, y$  cùng âm hoặc một trong chúng là âm thì không thể kết luận như trên, ví dụ với  $x = 5$ ,  $y = -5$  ta có được đẳng thức bình phương vì  $x^2 = y^2 = 25$ , nhưng  $x = 5 > y = -5$ .

### **4.4. Một đơn vị dương thì bằng với một đơn vị âm?**

Cho  $b$  là một số dương khác 1. Ta xác định số  $a$  theo  $b$  bằng cách:  $b^a = -1$  (1). Từ quan hệ ở (1) ta xác định rằng  $b^{2a} = 1$ . Dễ dàng thấy rằng  $a = 0$  do tương ứng với điều kiện  $b \neq 1$ . Từ đây cũng suy ra được rằng  $b^a = 1$  (2). So sánh quan hệ ở (1) và (2) ta thấy rằng  $1 = -1$ . Sai lầm từ đâu mà dẫn đến điều vô lí này?

Phân tích: Ta biết rằng trong tập số thực quan hệ (1) là không có nghĩa vì lũy thừa của một số dương luôn là một số dương. Quan hệ (1) chỉ có nghĩa nếu ta xét bài toán trong tập số phức. Trong trường hợp đó cho  $b = i$  và  $a = 2$  ta có quan hệ đúng là  $i^2 = -1$ , tất nhiên điều này không đưa đến mâu thuẫn.

### **4.5. Nếu $a > b$ thì $a > 2b$ ?**

Cho 2 số dương tùy ý  $a, b$  và giả sử rằng  $a > b$ .



Nhân 2 vế của bất đẳng thức này với  $b$ , ta được bất đẳng thức mới  $ab > b^2$ ;

Trừ vế theo vế cho  $a^2$ , ta có:  $ab - a^2 > b^2 - a^2$ ;

Hay tương đương với:  $a(b - a) > (b + a)(b - a)$  (1)

Chia 2 vế cho  $(b - a)$ , ta có quan hệ:  $a > b + a$  (2). Cộng vế theo vế bất đẳng thức này và bất đẳng thức gốc  $a > b$ , ta được bất đẳng thức  $2a > 2b + a$ , hay chuyển vế ta có bất đẳng thức:  $a > 2b$  (3)

Do vậy, nếu  $a > b$  thì  $a > 2b$ . Ví dụ từ điều hiển nhiên  $10 > 9$  ta kết luận theo những gì vừa chứng minh thì  $10 > 18$  chẳng?

Phân tích: Thật dễ để thấy sai lầm khi chuyển từ bất đẳng thức (1) sang (2), tức là chia 2 vế của bất đẳng thức (1) cho  $(b - a)$  là một giá trị âm vì  $a > b$ . Việc chia cả 2 vế bất đẳng thức bởi cùng một số đưa đến bất đẳng thức cùng chiều\_tức là nhận một trong 2 dấu ( $<$  và  $>$ ), chỉ đúng nếu số chia là số dương. Với số chia là âm thì bất đẳng thức phải đổi chiều. Việc chứng minh tính chất này có thể tìm thấy trong bất kì cuốn sách đại số nào. Nếu khi chuyển từ (1) sang (2) ta đổi chiều bất đẳng thức thì có được  $a < b + a$  và loại bỏ được kết luận không đúng là  $a > 2b$ .

#### **4.6. Nếu $a$ và $b$ là 2 số dương thì $a > b$ và $b > a$ ?**

Như ta được biết, nếu có hai bất đẳng thức cùng chiều tức là cùng dấu  $>$  (lớn hơn) hoặc cùng dấu  $<$  (bé hơn), ta có thể cộng hay nhân chúng vế theo vế và được bất đẳng thức mới cùng chiều với 2 bất đẳng thức đã cho, tức là từ bất đẳng thức  $a > b$  và  $c > d$  suy ra  $a + c > b + d$  và  $ac > bd$ .

Cho 2 số dương  $a$  và  $b$ , ta viết 2 bất đẳng thức đúng sau:  $a > (-b)$ ,  $b > (-a)$ ;

Nhân vế theo vế đưa đến kết luận  $ab > b^2$ , sau đó chia 2 vế bởi  $b > 0$  ta được  $a > b$

Bây giờ, nếu viết cách khác ta vẫn có bất đẳng thức đúng  $b > -a$ ,  $a > -a$ , tương tự trên ta có  $ba > a^2$  và  $b > a$ . Như vậy, với 2 số dương thì bất kì mỗi số lớn hơn số còn lại.

Phân tích: Định lí về nhân bất đẳng thức nêu ở trên thật ra không chính xác, nó chỉ đúng với bất đẳng thức mà tất cả các số hạng đều dương. Ở đây, phát biểu chính xác

là có thể nhân vế theo vế 2 bất đẳng thức cùng chiều nếu tất cả những số này là dương, khi đó bất đẳng thức mới sẽ cùng chiều với bất đẳng thức đã cho. Nếu bài toán này áp dụng cho những bất đẳng thức như  $5 > -1$  và  $2 > -15$  có thể dẫn đến điều vô lí  $5 \cdot 2 > (-1) \cdot (-15)$ , tức  $10 > 15$ . Như vậy, việc nhân cả hai bất đẳng thức đã dẫn đến điều vô lí là  $a > b$  và  $b > a$  với  $a, b$  là hai số dương bất kì.

#### **4.7. Một số lỗi của học sinh**

Để kết thúc phần này, liên quan đến sự cân nhắc về lỗi trong lập luận đại số ta sẽ phân tích 2 điều rất đơn giản nhưng đáng tiếc HS lại rất hay mắc lỗi. Đầu tiên là rút gọn phân thức đại số: thường thì các em đơn giản phân thức  $\frac{a^2x}{b^2+cx}$  bởi  $x$  và có

được phân thức  $\frac{a^2}{b^2+c}$  mà quên rằng việc đơn giản một phân thức tức là chia cả tử và mẫu cho cùng một số. Tức là để chia một tử số đơn thức  $a^2x$  bởi  $x$  ta rút gọn  $x$  trong đó, để chia một mẫu số nhị thức  $b^2+cx$  cho  $x$  ta phải chia cả  $b^2$  và  $cx$  cho  $x$ .

Khi đó ta có được dạng sau:  $\frac{a^2}{\frac{b^2}{x}+c}$ .

Như vậy, nên nhớ chính xác rằng khi đơn giản một phân thức đại số ta phải lược bỏ những phần tử giống nhau của toàn bộ tử số và mẫu số. Nếu ta không chú ý đến qui luật này có thể dễ dẫn đến những kết luận kiểu như:  $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2b}{1+b} = \frac{2}{1+1} = 1$ .

Một lỗi phổ biến khác là khai căn bậc hai của tổng bình phương là khai căn mỗi thành phần, tức là:  $\sqrt{(a^2+b^2)} = a+b$ .

Rõ ràng điều này không đúng vì ta biết  $\sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$  mà  $(a+b)^2$  thì bằng với  $a^2 + 2ab + b^2$  và không bằng  $a^2 + b^2$ . Hơn nữa, đẳng thức  $\sqrt{(a^2+b^2)} = a+b$  cũng vô lí theo quan điểm hình học vì nó mô tả sự bằng nhau của cạnh huyền với tổng hai cạnh trong tam giác vuông bất kì. Như vậy phép khai căn không có tính chất phân phối với phép cộng và trừ nhưng có với phép nhân và chia:

$$\sqrt{(a \pm b)} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}, \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \text{ với } a, b \geq 0.$$

## CHƯƠNG 2

GIÚP HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VƯỢT QUA NHỮNG  
SAI LẦM TRONG LẬP LUẬN TOÁN HỌC: PHẦN ĐẠI SỐ

## 1. Chủ đề phương trình

## 1.1. Thiết kế hoạt động dạy học định lí về biến đổi tương đương và phương trình hệ quả trong sách giáo khoa (trang 67, Đại số 10 nâng cao)

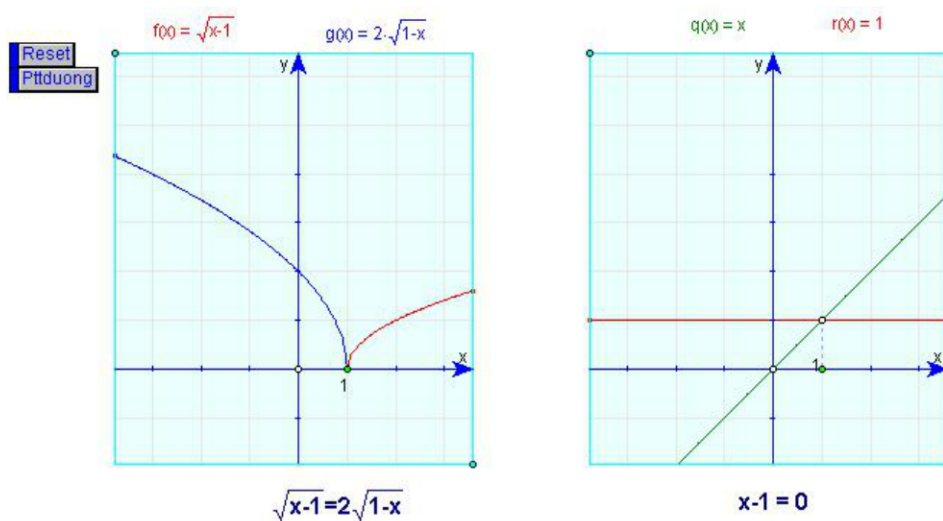
Minh họa trên GSP để học sinh thấy rằng hai phương trình tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm. Và làm sáng tỏ hơn định lí 1, định lí 2 bằng đồ thị, thay vì chứng minh với những biến đổi đại số thật “khô khan”.

Khái niệm phương trình tương đương đã được học ở lớp dưới.

Hỏi? Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai? Giải thích?

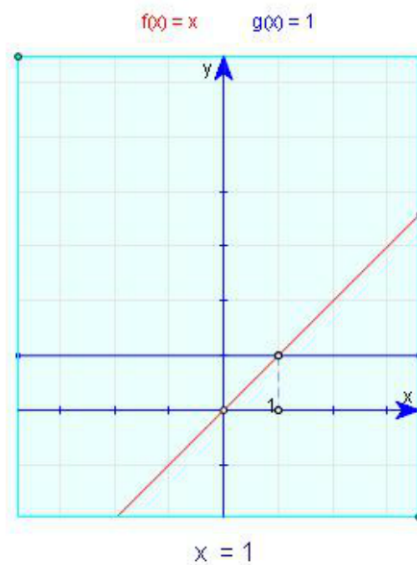
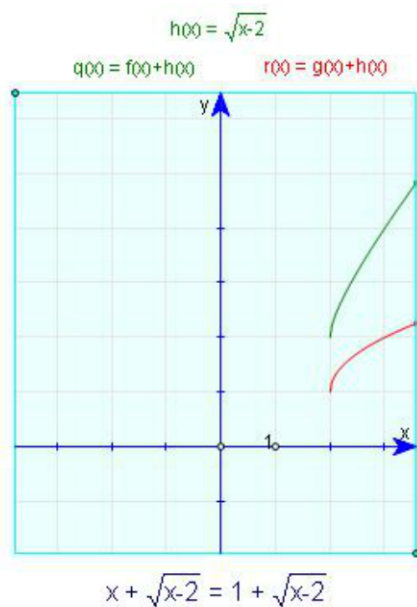
- a)  $\sqrt{x-1} = 2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x-1=0$
- b)  $x+\sqrt{x-2} = 1+\sqrt{x-2} \Leftrightarrow x=1$
- c)  $|x|=1 \Leftrightarrow x=1$

a) Hướng dẫn HS quan sát nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$  và  $q(x) = r(x)$  là hoành độ của các điểm màu xanh trên hệ trục bên trái và bên phải (mở file **pttd**).



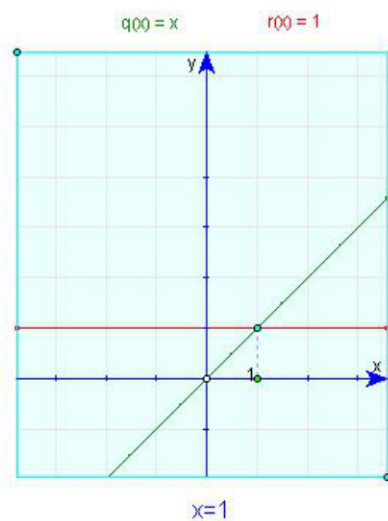
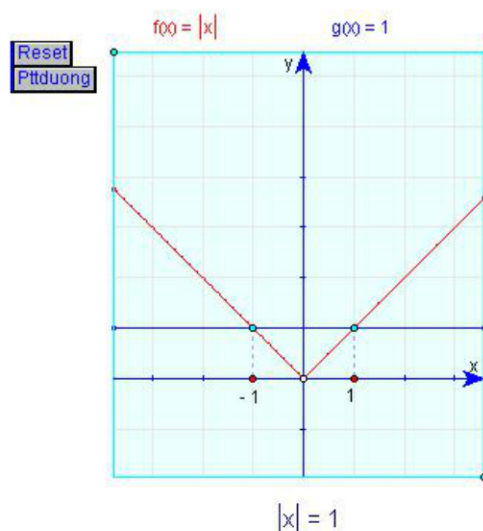
Kích nút **pttduong** để HS thấy rõ sự tương đương của hai phương trình.

b) Cho HS quan sát đồ thị của hai phương trình để thấy rằng phương trình đầu vô nghiệm và phương trình sau có một nghiệm  $x = 1$  nên chúng không tương đương.



c) Mở file **pthqua2.gsp**

Nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$  và  $q(x) = r(x)$  lần lượt là hoành độ của các điểm màu đỏ trên hệ trục bên trái và màu xanh trên hệ trục bên phải.



Kích nút **pttduong** để kiểm tra câu trả lời.

Đến đây, việc tiếp thu định lí 1 về phương trình tương đương là dễ dàng với HS. Tuy nhiên, trong bài phương trình có một nội dung quan trọng đó là “phương trình hệ quả”. Nội dung này chỉ cho HS thấy trong một số trường hợp các phép biến đổi là không tương đương (vì có thể xuất hiện thêm hoặc làm mất nghiệm). Hoạt động sau thiết kế để có thể dẫn dắt và minh họa cho các em hình dung rõ về điều này. Hoạt động diễn ra trước khi HS được biết về định nghĩa phương trình hệ quả và các định lí nhằm mục đích để cho HS tự mình có thể mắc những lỗi sai, sau đó quan sát trên GSP và phát hiện ra vấn đề.

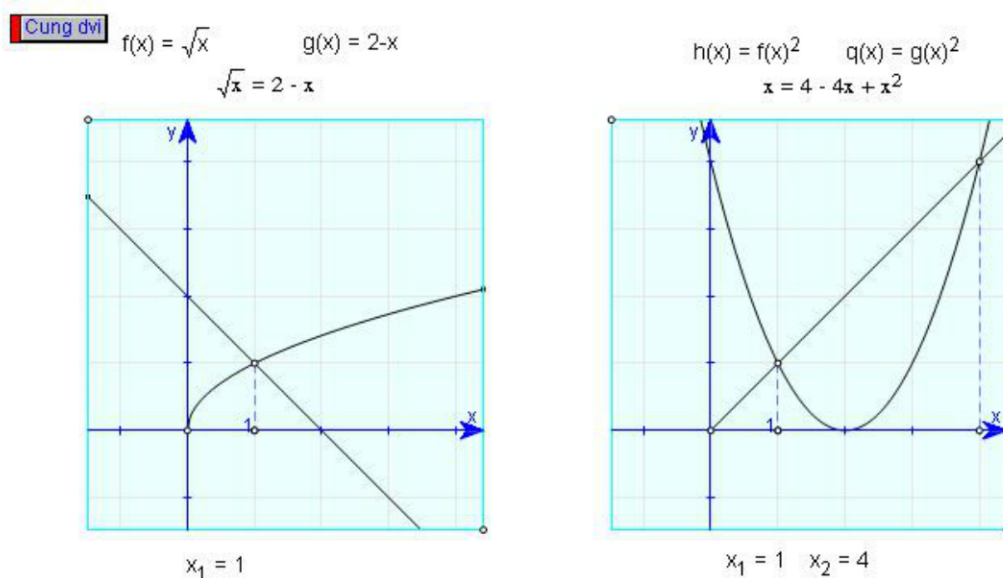
**Hoạt động 1:** Giải phương trình  $\sqrt{x} = 2 - x$  (1)

Đối diện với bài này đa số các em đều nghĩ đến việc bình phương hai vế để khử căn, do đó tiến hành giải như sau:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Thay  $x = 4$  vào (1) không thỏa. Vì sao thừa nghiệm này?

**Hoạt động 2:** Dựa vào đồ thị hãy xác định và so sánh tập nghiệm  $T_1$  của (1) và tập nghiệm  $T_2$  của  $(\sqrt{x})^2 = (2-x)^2$  (2). Mở file **HD2.gsp**



Rõ ràng việc bình phương đã làm xuất hiện thêm nghiệm  $x = 4$  không thỏa (1). Hay nói cách khác là biến đổi như vậy không tương đương. Từ đây, GV nêu định nghĩa phương trình hệ quả và nghiệm ngoại lai.

*Hoạt động 3:* Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai? Giải thích?

a)  $\sqrt{x-2} \Rightarrow x-2=1$

b)  $\frac{x(x-1)}{x-1} \Rightarrow x=1$

Hoạt động này nhằm củng cố cho HS về phương trình hệ quả.

*Hoạt động 4:* Khi bình phương hai vế của một phương trình ta có được một phương trình tương đương với phương trình đã cho hay không? Vì sao?

Trả lời câu hỏi này chính là nội dung của định lí 2. Tuy nhiên, GV cần giúp các em phát hiện ra hệ quả quan trọng của định lí. Chẳng hạn, xét hai bài toán trong hoạt động sau:

*Hoạt động 5:* Giải các phương trình sau:

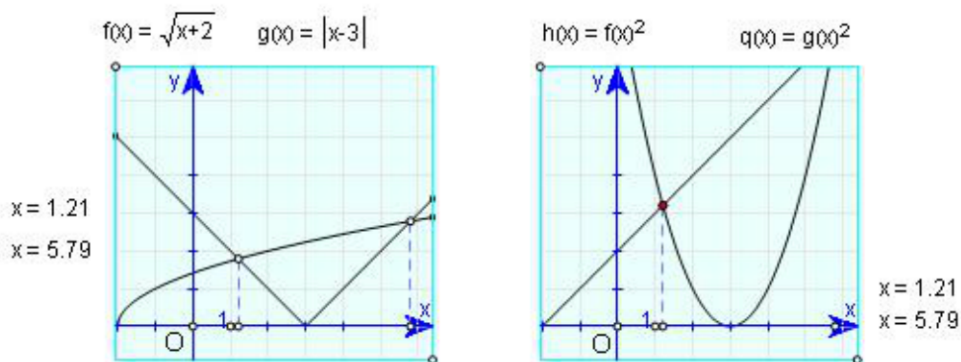
a)  $\sqrt{x+2} = |x-3|$

b)  $-\sqrt{x+2} = -|x-3|$

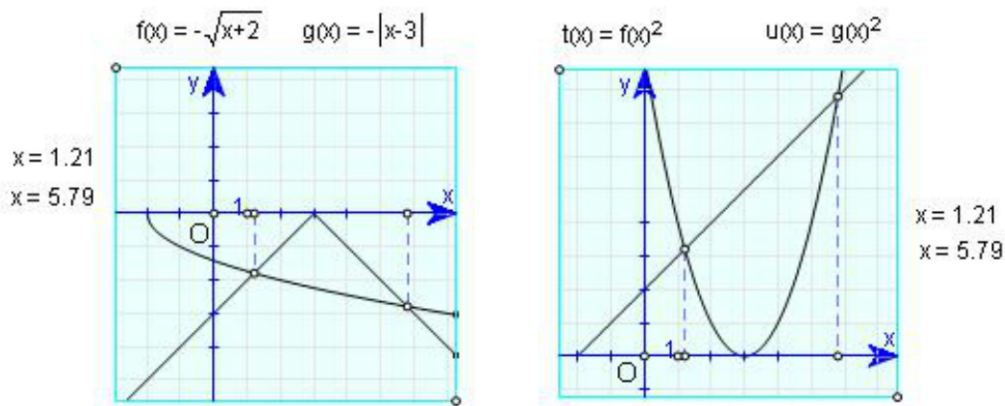
Nhiều HS áp dụng định lí 2 và cho rằng việc bình phương hai vế thu được phương trình hệ quả. Tuy nhiên có phải lúc nào cũng ráp công thức như vậy là hoàn toàn đúng? HS sẽ được hiểu rõ điều này qua minh họa sau trên GSP.

*Hoạt động 6:* Quan sát đồ thị và có nhận xét gì về nghiệm của hai phương trình trước và sau khi bình phương?

Minh họa phương trình a), mở file **Hd 6a).gsp**



Minh hoạ phương trình b), mở file **Hd 6b).gsp**



Vậy ta có chú ý:


1. Nếu hai vế của một phương trình luôn cùng dấu với mọi  $x$  và thoả mãn điều kiện xác định của phương trình thì khi bình phương hai vế của nó, ta được phương trình tương đương;
2. Nếu phép biến đổi phương trình dẫn đến phương trình hệ quả thì sau khi tìm được nghiệm của phương trình hệ quả, ta thử lại vào phương trình đã cho để phát hiện và loại bỏ nghiệm ngoại lai.

## **1.2. Dự kiến và phân tích một số sai lầm để có biện pháp khắc phục cho học sinh trong quá trình lập luận**

Khó khăn của học sinh khi lập luận về phương trình đó là HS còn mơ hồ trong việc hiểu về khái niệm tương đương, hệ quả, biến đổi thế nào thì được một phương trình tương đương. Trong khi lập luận để giải phương trình các em thường dùng một cách tùy tiện các dấu tương đương “ $\Leftrightarrow$ ”, dấu suy ra “ $\Rightarrow$ ” dẫn đến những sai lầm nghiêm trọng. Hơn nữa, ngoài hai định lý mà các em được học trong chương trình lớp 10 thì thực chất các em phải có một kiến thức đại số cơ bản mới giải được nhiều loại phương trình với nhiều dạng khác nhau. Cụ thể như phương trình vô tỷ, trị tuyệt đối, phương trình mũ, logarit...

Vì vậy, tôi xin đi vào từng bài toán cụ thể để dự đoán những khó khăn, sai lầm của các em, tìm hiểu nguyên nhân để từ đó có biện pháp khắc phục.

**Bài 1:** Giải phương trình:  $x + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$ . (1)

 **Dự kiến sai lầm:** Với phương trình này các em thường mắc các sai lầm sau:

- Nhận thấy có  $\frac{1}{x-1}$  ở 2 vế nên rút gọn và biến đổi (1)  $\Leftrightarrow x+1=2x-1 \Leftrightarrow x=2$ , thay


$x=2$  vào (1) ta được  $2+1=3$  thỏa nên  $x=2$  là nghiệm của phương trình.

- Qui đồng mẫu số nhưng không đặt điều kiện cho mẫu:

$$(1) \Leftrightarrow x(x-1)+1=(2x-1) \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Kết luận phương trình (1) có 2 nghiệm.

Có học sinh khi giải ra thay  $x=1$  vào (1) thấy phương trình không xác định lại lúng túng hoặc hoài nghi vì sao  $1=0$ . Sai lầm ở đâu?


 **Phân tích sai lầm:** Do thiếu cẩn thận và không hiểu qui tắc rút gọn nên các em nhìn thấy có phần tử nào giống nhau trong phương trình là lược bỏ và nhầm lẫn khi vận dụng định lý đã học:



$f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$  với  $a + bc = db \Leftrightarrow a + c = d$ . Ngoài ra, học sinh cũng thường phạm sai lầm với những kiểu rút gọn như:

$$\begin{aligned}\frac{a^2x}{b^2+cx} &= \frac{a^2}{b^2+c}; \\ \frac{2ab}{a+b} &= \frac{2b}{1+b} = \frac{2}{1+1} = 1; \\ \frac{a+b}{ac} &= \frac{1+b}{c}.\end{aligned}$$

Sai lầm thứ hai là do là thói quen qui đồng mẫu số mà học sinh đã được học ở lớp dưới. Các em tin rằng việc qui đồng phân số là như nhau dù phân số đó gồm các con số hay biểu thức đại số, vì vậy đã không đặt điều kiện cho mẫu số.

 **Biện pháp khắc phục sai lầm:** Trước tiên, giáo viên cần củng cố cho học sinh về qui tắc rút gọn trong phương trình. Rút gọn nghĩa là nhân hay chia hai vế của phương trình với cùng một hàm số. Với định lí 1, học sinh phải biết được rằng khi thêm hoặc bớt hai vế của một phương trình với cùng một hàm số thì không khẳng định nhận được một phương trình tương đương. Để phép biến đổi không xuất hiện nghiệm ngoại lai hoặc làm mất nghiệm thì phải đặt điều kiện để tập xác định của phương trình không thay đổi. Từ đây giúp học sinh nhớ lại một hệ quả quan trọng mà các em đã được học ở lớp dưới. Vấn đề này sẽ được nhận ra bởi chính học sinh qua trả lời câu hỏi sau:

Hỏi ? Mỗi khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a) Cho phương trình  $3x + \sqrt{x-2} = x^2$ . Chuyển  $\sqrt{x-2}$  sang vế phải thì được phương trình tương đương.

b) Cho phương trình  $3x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2}$ . Lược bỏ  $\sqrt{x-2}$  ở cả hai vế của phương trình thì được phương trình tương đương.

Vậy ta có hệ quả sau:

1) Quy tắc chuyển vế:  $f(x) + h(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) - h(x)$

2) Quy tắc rút gọn:  $f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

(Với điều kiện xác định của phương trình đầu).

Phải giúp học sinh thấy được rằng: nếu rút gọn bằng cách cộng hay trừ với cùng một hàm số thì phải đảm bảo chúng xác định trên tập xác định của phương trình đầu. Nếu rút gọn bằng cách nhân hay chia với cùng một hàm số thì hàm số này phải khác không, điều này suy ra từ định lí 1.

Ngoài ra, các em phải hiểu rằng với một biểu thức đại số, cần có điều kiện vì tùy theo giá trị của  $x$  mà biểu thức đó xác định hay không? Do đó, qui đồng mẫu số trong số học và đại số là hoàn toàn khác nhau. Chỉ khi nào khẳng định được mẫu số khác không ta mới qui đồng mà không đặt điều kiện cho mẫu. Vì thực ra qui đồng là nhân các số hạng trong phương trình với mẫu chung để rút gọn được mẫu số. Với phương trình (1), học sinh đã rút gọn sai nhưng “vô tình” kết quả lại đúng, vì thế khi ra đề trắc nghiệm ta nên tránh các trường hợp trùng như vậy để đánh giá được học sinh. Nắm vững những điều trên các em sẽ tránh được sai lầm trong quá trình giải. Khi đó, GV có thể ra cho học sinh một số bài tương tự, chẳng hạn giải các phương trình sau:

a)  $\sqrt{x-5} - x = 2 + \sqrt{x-5}$  ;


b)  $\frac{2x+1}{\sqrt{x-3}} = \frac{x+2}{\sqrt{x-3}}$  ;

c)  $\frac{x^2-7x+6}{x-6} = 5$ .

Lời giải đề nghị:  $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)+1=2x-1 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$ .

Vậy phương trình (1) có một nghiệm  $x=2$ .

**Bài 2:** Giải phương trình:  $(x+1)\sqrt{x^2+x-2} = 2x+2$ . (1)


 **Dự kiến:** - Bình phương hai vế để làm mất căn, khi đó sẽ dẫn đến một phương trình bậc bốn, càng phức tạp và bế tắc.


- Nhận thấy hai vế phương trình có nhân tử chung là  $(x + 1)$  nên rút gọn và lúc này HS thường biến đổi theo các cách sau:

+ Bình phương 2 vế không có điều kiện gì và tìm được 2 nghiệm là  $x = 2$  và  $x = -3$ ;

+ Đặt điều kiện  $x \neq -1$ , lược bỏ  $(x + 1)$  rồi bình phương hai vế;

$$+ (1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x - 2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \\ x \leq -2 \vee x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3. \end{cases}$$

 **Phân tích:** Học sinh vẫn hay nhớ máy móc rằng có căn thức thì bình phương để khử chúng mà không xem xét bài toán cụ thể để suy nghĩ hướng giải quyết. Tình ý hơn, có em đặt 2 làm thừa số chung và nhận thấy  $(x + 1)$  xuất hiện ở hai vế của phương trình, vậy phải rút gọn nhưng quên điều kiện. Có học sinh lại “ép” cho  $x \neq -1$  để rút gọn, do tưởng rằng muốn rút gọn thì biểu thức đó phải khác không mà quên rằng biểu thức đó bằng không có khi vẫn thỏa phương trình, vì vậy dẫn đến sót nghiệm. Với cách giải thứ ba, học sinh đưa được về dạng  $\sqrt{A} = B$  nhưng cách biến đổi đó đã thể hiện sự nhầm lẫn của các em khi bình phương hai vế của phương trình. Các em đã không nắm vững định lý 2 về phương trình hệ quả trình bày trong SGK.

 **Biện pháp:** Điều mà GV cần phải nhắc nhở HS đó là tập xác định của phương trình. Nhớ rằng  $\sqrt{A}$  chỉ có nghĩa khi  $A \geq 0$ . Với một biểu thức cần lược bỏ trong phương trình thì phải xét hai trường hợp: nếu nó bằng không thì xem thỏa phương trình không; nếu khác không thì rút gọn, vì ta chưa khẳng định được biểu thức đó thế nào do còn phụ thuộc vào giá trị của  $x$ . Cách chia trường hợp này có giống với cách biến đổi  $ab = cb(1) \Leftrightarrow b(a - c) = 0(2) \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = c \end{cases}(3)$  không? Ta cùng xét ví dụ:

$$\text{Giải phương trình: } 3x^3 - 6x^2 - 9x = 9(x^2 - 2x - 3). \quad (2)$$

*Lời giải đúng:*

$$(2) \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 3)(3x - 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ 3x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Biến đổi từ (1) sang (2) là hiển nhiên, từ (2) sang (3) có thể viết lại dưới dạng sau

$$a.b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}. \text{ Điều này phải chăng luôn đúng?}$$

Cần chỉ cho học sinh thấy rằng điều này không còn đúng với phương trình vô tỷ, logarit... Thật ra không có điều kiện gì trong biến đổi tương đương đó vì tập xác định của phương trình này luôn là  $R$ , ta ngầm hiểu như vậy và phép biến đổi đã không làm thay đổi TXĐ của phương trình. Do đó, GV cần diễn giải một cách tường minh cho học sinh thấy rằng:

$$f(x).g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in D[g(x)] \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) = 0 \\ x \in D[f(x)] \end{cases} \quad (*)$$

$\begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in D[g(x)] \end{cases}$  tức là những giá trị  $x$  tìm được từ  $f(x) = 0$  phải thuộc miền xác định của  $g(x)$  và ngược lại.

Ví dụ: Giải phương trình:  $\sqrt{x-2}(x^2-x+6) = 0$ . (3)

Nếu biến đổi như sau:

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ (x-3)(x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

khi đó, với  $x = -2$  thì  $\sqrt{x-2}$  không có nghĩa nên  $x = -2$  là nghiệm ngoại lai của phương trình. Vì vậy phép biến đổi trên là không tương đương.

Một điều quan trọng nữa là giáo viên giúp học sinh nhận ra cách nâng lũy thừa chẵn hai vế của phương trình. Nếu  $\sqrt[n]{A} = B \Leftrightarrow A = B^n$  thì hiển nhiên đúng nhưng  $\sqrt{A} = B$  thì sao?

Nhắc lại rằng nếu không có điều kiện gì thì bình phương hai vế ta thu được phương trình hệ quả, thử lại để kết luận nghiệm. Tuy nhiên cách này dễ thừa hoặc sót nghiệm và đôi khi tìm ra kết quả rồi HS không nhớ đến việc thử lại hoặc lúng túng

trong quá trình loại bỏ nghiệm. Muốn biến đổi là tương đương thì làm thế nào?

Chẳng hạn với phương trình  $\sqrt{-x^2 + 4x} = 2x - 2$  (4), giải như sau:

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x \geq 0 \\ -x^2 + 4x = (2x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 5x^2 - 12x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases}.$$

Thấy rằng với  $x = \frac{2}{5}$ , vế phải của (4) bằng  $-\frac{6}{5}$  trong khi vế trái là căn bậc hai luôn

không âm, do đó  $x = \frac{2}{5}$  là nghiệm ngoại lai. Đến đây, GV có thể hình thành cho học

sinh một quy tắc nâng lũy thừa hai vế như sau:

1. Muốn nâng hai vế phương trình lên một lũy thừa chẵn ta phải chắc chắn rằng hai vế đang cùng dấu, tốt nhất là không âm;

2. Muốn làm cho hai vế không âm ta có thể:

+ Đặt điều kiện:  $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$  (\*\*), ở đây vì  $B^2 \geq 0$  mà  $A = B^2$  nên không cần

đặt điều kiện cho  $A$ ;


+ Chuyển vế, chẳng hạn:  $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+7} = 2 + \sqrt{x+1} \\ x \geq -1 \end{cases} \dots$

Các em hoàn toàn có thể hiểu được quy tắc trên.

*Lời giải đề nghị:* Với những kiến thức được diu dắt như vậy, hi vọng rằng các em có thể vượt qua được những sai lầm thường vấp phải khi giải phương trình. Sau đây là một lời giải của phương trình (1) để HS tham khảo

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow (x-1)(\sqrt{x^2+x-2}-2)=0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x^2+x-2 \geq 0 \\ \sqrt{x^2+x-2}-2=0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -2 \end{cases} \\ x^2+x-2=4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Bài 3:** Giải phương trình:  $\sqrt{(x+1)(x^2-x-2)}=x+1$ . (1)

 **Dự kiến:** Đối diện với bài này học sinh có nhiều hướng giải. Tuy nhiên, có thể vẫn không tránh khỏi những sai lầm sau đây:

- Bình phương hai vế để làm mất căn nhưng không đặt điều kiện, khi đó:

(1)  $\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-2)=(x+1)^2$  (2), đến đây có thể các em giải theo một trong ba hướng sau:

+ Lược bỏ  $(x+1)$  ở hai vế:

$$(2) \Leftrightarrow x^2-x-2=x+1 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=3;$$

+ Đặt điều kiện  $x \neq -1$  rồi rút gọn, khi đó giải ra kết quả  $x = -1$  hoặc  $x = 3$  nhưng loại  $x = -1$ ;

+ Biến đổi:

$$(2) \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-2-x-1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-2x-3)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=3.$$

- Một hướng giải khác là tách biểu thức trong căn như sau:

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)[(x+1)(x-2)]}=x+1 \quad (3) \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2} \sqrt{x-2}=x+1 \quad (4)'
 \end{aligned}$$

sau đó đưa  $(x+1)$  ra khỏi căn không có trị tuyệt đối rồi rút gọn  $(x+1)$  ở hai vế, khi đó (4)  $\Leftrightarrow \sqrt{x-2}=1 \Leftrightarrow x=3$ . Nhiều trường hợp từ (4) các em lại nhầm lẫn rằng


$\sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1}$ , và biến đổi  $(x+1) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1}$  vì thế rút gọn sau khi phân tích như vậy, khi đó (4)  $\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 1 \Leftrightarrow x = 3$ ;


- Hoặc từ (3) có học sinh đi theo hướng giải như sau:

$$(3) \Leftrightarrow |x+1|\sqrt{x-2} = x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}=1 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \quad (5)$$

cách giải này có vẻ chắc chắn và có cơ sở, tuy nhiên đã làm mất nghiệm vì  $x = -1$  cũng thoả phương trình (1). Sai lầm ở đâu?

 **Phân tích:** Sai lầm đầu tiên là do học sinh thiếu cẩn thận đôi khi chủ quan và đã không hiểu sự cần thiết của việc đặt điều kiện trong bài toán giải phương trình. Điều này cũng thể hiện sự mơ hồ của các em về phép biến đổi tương đương và hệ quả. Từ (2) nếu tiếp tục vấp những sai lầm như đã chỉ ra, trước hết, do thói quen rút gọn phân tử giống nhau mà học sinh đã biết khi làm toán số học, đó là  $ab = bc \Leftrightarrow a = c$ . Ở đây “vô tình” mà kết quả đúng dù bước lập luận đã sai ngay từ đầu, giáo viên nên chú ý điều này khi ra các đề toán trắc nghiệm. Biến đổi thứ hai với điều kiện  $x \neq -1$  để rút gọn được nhưng các em quên rằng  $x = -1$  phương trình vẫn thoả. Biến đổi thứ ba là chính xác nhưng không chấp nhận vì phép bình phương ban đầu không tương đương. Sai lầm thứ hai cũng thường gặp ở học sinh vì đa số các em đều suy diễn rằng  $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$  nên tách biểu thức trong căn mà không quan tâm có điều kiện gì hay không? Điều này là do các em “ngộ nhận” thực hiện một phép tương tự với  $(xy)^2 = x^2 y^2$ , nhắc đến sai lầm này còn có những kiểu nhầm lẫn như  $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ ,  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 = a + b$ , chúng là các “á hằng đẳng thức” mà các em hay “sáng tác” ra trong khi giải toán. Sai lầm thứ ba là do các em chưa hiểu cách đặt điều kiện để tập xác định của phương trình không đổi và để được một phép biến đổi tương đương vì thế đã dẫn đến sót nghiệm  $x = -1$ .

 **Biện pháp:** Phương trình (1) có dạng  $\sqrt{A} = B$ , theo định lí 2 đã học, ta sẽ bình phương hai vế và thu được phương trình hệ quả, khi đó kết quả có thể xuất hiện nghiệm ngoại lai nên phải thử lại. Để phép bình phương này là một biến đổi tương đương thì cần phải có điều kiện  $B \geq 0$ . Ở đây, cần giải thích cho các em hiểu rõ chiều ngược lại  $A = B^2 \Rightarrow \sqrt{A} = B$ , tức là khai căn của  $A$  và  $B^2$  mà  $A = B^2 \geq 0$  còn  $B$  chưa khẳng định được dương hay âm nên phải đặt điều kiện để căn tồn tại. Phương trình trên nếu không đặt điều kiện thì đáp số vẫn đúng do sự trùng hợp vì vậy giáo viên có thể dẫn ra ví dụ sau để làm sáng tỏ thêm dạng toán này. Chẳng hạn giải phương trình  $\sqrt{x+1} = 2x$ , nếu bình phương không điều kiện và cho đó là một biến đổi tương đương ta thu được hai nghiệm  $x = 1$  hoặc  $x = \frac{-1}{4}$  nhưng nghiệm  $x = \frac{-1}{4}$  không thỏa phương trình.

Hơn nữa phải phân biệt cho học sinh thấy rằng ta có  $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}$  vì khi đó  $AB \geq 0$  do  $A \geq 0, B \geq 0$  nên căn tồn tại, chiều ngược lại chưa chắc xảy ra. Vì sao?

Nếu  $A < 0, B < 0$  thì  $AB > 0$  nên  $\sqrt{AB}$  tồn tại trong khi  $\sqrt{A}, \sqrt{B}$  vô nghĩa. Vậy để có  $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$  thì  $A \geq 0$  và  $B \geq 0$  (\*). Việc nhầm lẫn hằng đẳng thức là do học sinh chưa hiểu thấu đáo công thức nên khi vận dụng gặp khó khăn trong việc nhớ đúng vì vậy cần khắc sâu kiến thức cho các em. Chẳng hạn giáo viên có thể nêu ra một ví dụ phản chứng, với  $x = 2, y = 3$  thì  $(x + y)^2 = 25$  nhưng  $x^2 + y^2 = 16$  thì sao bằng nhau được.

Theo (\*) thì học sinh sẽ thấy được rằng  $(a + b) = \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a+b}$  chỉ khi  $(a + b) \geq 0$ , còn  $\sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$ . Do đó, nếu phân tích  $\sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1}$  thì  $(x+1) \geq 0$  để  $|x+1| = x+1$  và làm như trường hợp trên.

Với bài toán trên nếu nhận dạng  $\sqrt{A} = B$  thì việc giải là đơn giản bằng hai cách:

+ Dùng định lí 2 về phương trình hệ quả, bình phương hai vế của phương trình và thử lại nghiệm;



+ Biến đổi tương đương, áp dụng (\*\*) của bài 2.

Tuy nhiên, nếu học sinh phân tích được đến bước (3) cần giúp học sinh thấy rằng vì  $(x+1)^2 \geq 0$  nên  $(x-2) \geq 0$  do đó  $\sqrt{x-2}$  tồn tại. Hơn nữa, lập luận ở (5) không đúng vì  $(x+1) = 0$  thì “0” nhân với bất kì số nào cũng bằng không, khi đó biểu thức trong căn luôn bằng không. Khác với trường hợp  $f(x) \cdot \sqrt{g(x)} = 0$ , nếu  $f(x) = 0$  thì  $g(x) \geq 0$  để  $\sqrt{g(x)}$  tồn tại. Như vậy với bài toán trên, khi phân tích đến (3) học sinh sẽ thấy được rằng nếu  $(x+1) = 0$  thì (1) luôn thỏa, tách ra thành  $|x+1|\sqrt{x-2} = x+1$ , để lược bỏ  $(x+1)$  thì  $x+1 \neq 0$ . Sau đây là một lời giải đầy đủ theo cách này cho học sinh tham khảo:


$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)[(x+1)(x-2)]} = x+1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2(x-2)} = x+1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ |x+1|\sqrt{x-2} = x+1 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \sqrt{x-2}=1 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases} \end{aligned}$$

Qua các phân tích trên đây ta giúp học sinh nhận ra rằng

$$\sqrt{AB} = \begin{cases} \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} & \text{nếu } A, B \geq 0 \\ \sqrt{-A} \cdot \sqrt{-B} & \text{nếu } A, B \leq 0 \end{cases}. \text{ Tương tự với dạng toán này yêu cầu học sinh}$$

giải phương trình sau

**Bài 4:** Giải phương trình: a)  $2\sqrt{x^2-9} = (x+5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$ . (1)

 **Dự kiến:** - Tách các biểu thức  $\sqrt{x^2-9} = \sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x+3}$  và  $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$ , khi


đó:  $(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{x-3} = (x+5) \frac{1}{\sqrt{x-3}} \Leftrightarrow 2(x-3) = (x+5) \Leftrightarrow x=11$ .

- Bình phương hai vế, ta được:

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 4(x^2 - 9) = (x + 5)^2 \frac{x+3}{x-3} \\&\Leftrightarrow 4(x+3)(x-3) = (x+5)^2 \frac{x+3}{x-3} \\&\Leftrightarrow 4(x-3)^2 = (x+5)^2 \\&\Leftrightarrow 3x^2 - 34x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = 11.\end{aligned}$$

 **Phân tích:** Nếu không hiểu rõ bản chất của căn bậc hai ở bài trên HS lại nhầm

lẫn  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$  vì thế đã làm sót nghiệm  $x = -3$ . Cách làm thứ hai là thường gặp, bình phương mà chưa đảm bảo hai vế cùng dấu và biến đổi lại để sai vì vậy cũng sót nghiệm  $x = -3$ .

 **Biện pháp:** Tương tự như bài 3, nếu muốn tách căn để rút gọn phải đặt điều

kiện cho biểu thức trong căn không âm, tức là  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} & \text{nếu } A, B \geq 0 \\ \frac{\sqrt{-A}}{\sqrt{-B}} & \text{nếu } A, B \leq 0 \end{cases}$ , điều này

là cần thiết nhắc nhở HS vì các em hay tách căn tùy tiện. Sai lầm thứ hai tuy không nghiêm trọng lắm nhưng cũng vì các em hay chủ quan phần điều kiện mà kết quả thường sai. Do đó, ngoài việc cung cấp các dạng toán cơ bản cho HS giáo viên cần nêu một phương pháp chung đối với các phương trình chứa căn, đó là:

- Đặt điều kiện để căn thức xác định;
- Bình phương hai vế (nếu hai vế cùng dấu);
- Giải phương trình này;
- So sánh điều kiện để kết luận tập nghiệm.

*Lời giải đề nghị:*

+ Vì  $x = -3$  thỏa (1) nên là một nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned}
 + (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 2(x-3) = x+5 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ 2\sqrt{(3-x)(-x-3)} = (x+5)\sqrt{\frac{-x-3}{3-x}} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 11 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ 2(3-x) = x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x < -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm  $x = -3$  hoặc  $x = 11$ .

Để làm sáng tỏ hơn phương pháp chung ở trên GV có thể nêu cho HS bài toán sau:

*Giải phương trình:*  $(x+3)\sqrt{10-x^2} = x^2 - x - 12$ . (2)

Phương trình (2) không thuộc dạng cơ bản nào, áp dụng phương pháp chung nêu trên có thể giải như sau:

+ Điều kiện:  $10 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$


+ Với điều kiện trên thì

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow (x+3)\sqrt{10-x^2} = (x+3)(x-4) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \sqrt{10-x^2} = x-4 \end{cases} (*)
 \end{aligned}$$

Vì  $|x| \leq \sqrt{10}$  nên  $(x-4) < 0$  do đó phương trình (\*) vô nghiệm

Vậy (1) có một nghiệm  $x = -3$ .

**Bài 5:** Giải phương trình:  $\sqrt{2x^3 - 3x} = \sqrt{x^2 - 2x}$ . (1)


 **Dự kiến:** - Bình phương hai vế để làm mất căn, khi đó:


$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow 2x^3 - 3x = x^2 - 2x \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - x = 0 \\
 &\Leftrightarrow x(2x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \vee x = -\frac{1}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Thay các nghiệm vào (1) kết luận tập nghiệm là  $\{x = 1, x = -\frac{1}{2}\}$ ;

- Nhận thấy mỗi vế đều có  $\sqrt{x}$  nên đặt nhân tử chung, khi đó:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{x(2x^2 - 3)} = \sqrt{x(x - 2)} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{2x^2 - 3} = \sqrt{x}\sqrt{x - 2} \quad (2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - x - 1 = 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \vee x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

 **Phân tích:** - Cách làm trên thể hiện sự mơ hồ của HS trong việc dùng dấu “ $\Leftrightarrow$ ” dù rằng các em có thử lại kết quả. Thật ra phép bình phương như trên không sai nếu các em thay bởi dấu “ $\Rightarrow$ ” vì đã biến đổi đúng và cho kết quả chính xác. Như vậy nếu điều kiện phức tạp thì có thể biến đổi đưa về phương trình hệ quả rồi thử nghiệm. Cách làm thứ hai là do các em “vô tư” khi giải phương trình chứa căn, không quan tâm biểu thức trong căn có xác định không? Phép biến đổi từ (1) sang (2) là không tương đương vì đã làm thay đổi TXĐ của phương trình. Các em thường đặt điều kiện theo “sở thích” do đó mắc sai lầm khi tách căn và biến đổi phương trình sai dẫn đến mất nghiệm. Những lỗi này cũng tương tự như bài 3 ở trên và đã được phân tích rõ.

 **Biện pháp:** Phương trình (1) có dạng  $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ , nếu 2 biểu thức trong căn đều phức tạp khi tìm điều kiện thì có thể áp dụng định lí 2 ở SGK bình phương đưa về phương trình hệ quả, giải và thử nghiệm. Với (1) điều kiện của  $(x^2 - 2x)$  là đơn giản vì thế cần giúp HS biết cách biến đổi tương đương để tránh trường hợp quên thử lại dẫn đến thừa hoặc sót nghiệm. Hơn nữa, giải tương đương thì bài toán logic, chặt chẽ hơn và giúp các em phát triển tư duy lập luận.

Vậy  $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$ , tùy theo  $A, B$  mà đặt  $A$  hoặc  $B$  không âm, chỉ đặt điều kiện cho  $A$  hoặc  $B$  vì lúc này ta có  $A = B$ . Cũng từ bài toán này ta nhận ra một dạng cơ

bản nữa của phương trình chứa căn, đó là:  $\sqrt{AB} = \sqrt{AC}$  (\*). Nhưng phải chăng

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{B} = \sqrt{C} \\ A = 0 \end{cases}$  ? Ta thấy rằng nếu  $A = 0$  thì (\*) hiển nhiên đúng, để rút gọn  $\sqrt{A}$  ở

hai vế phải có điều kiện  $A \neq 0$ , khi đó còn lại  $\sqrt{B} = \sqrt{C}$ , nếu  $B = C$  thì không khẳng định được  $\sqrt{A.B}$  có nghĩa, do vậy phải có điều kiện  $A.B \geq 0$ . Từ đây suy ra cách giải tổng quát cho dạng (\*) là:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = C \\ A \neq 0; A.B \geq 0 \end{cases}$$

Lúc này phương trình (1) có thể giải như sau:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{x(2x^2 - 3)} = \sqrt{x(x - 2)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3 = x - 2 \\ x(x - 2) \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \vee x = 1 \\ x \leq 0 \vee x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Trên đây là một số phương trình chứa căn dạng cơ bản nhưng để HS hạn chế được sai lầm trong lập luận GV cần hướng dẫn HS cách tự học để rèn thêm các kỹ năng giải toán cho bản thân. Đây mới chỉ là một phần nhỏ trong muôn vạn bài toán phương trình ở chương trình toán phổ thông. Điều quan trọng là qua những cách phân tích trên HS có tự hình thành cho mình một phương pháp tiếp cận bài toán mới hay không? Nếu HS nắm được một số nguyên tắc của phép biến đổi tương đương, hệ quả đó thì chúng tôi hi vọng rằng với nhiều dạng phương trình khác các em sẽ biến đổi tránh được sai lầm không đáng có.


## **2. Chủ đề bất phương trình**

Nói chung, các khái niệm và định lý về bất phương trình có nhiều điểm tương tự với phương trình. Trong một số trường hợp, ta chỉ cần thay từ “phương trình” bởi từ “bất phương trình”, dấu “=” bởi dấu “<” hoặc “>” là được kết quả. Tuy nhiên, HS vẫn sẽ gặp khó khăn với một số dạng bất phương trình. Vì vậy, GV cần ý thức điều này để giúp đỡ các em.

### **2.1. Phân tích một số sai lầm của học sinh khi giải bất phương trình**

Thường các em hay mắc sai lầm khi giải bất phương trình vô tỷ, mũ và logarit. Sau đây là những bài toán cụ thể để qua đó thấy được sai lầm của học sinh và từ đó đề ra biện pháp khắc phục

**Bài 1:** Giải bất phương trình:  $\sqrt{2x^2 - 6x + 1} - x + 2 > 0$ . (1)

 **Dự kiến sai lầm:** Các em sẽ nghĩ đến việc chuyển về để bình phương, tức (1)

thành  $\sqrt{2x^2 - 6x + 1} > x - 2$  (2). Đến đây, học sinh có thể mắc một số sai lầm:

- Bình phương hai vế mà không có điều kiện:

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 > (x - 2)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 3 \end{cases}\end{aligned}$$

Kết luận (1) có tập nghiệm là  $S = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ ;

- Đặt điều kiện cho biểu thức trong căn và bình phương:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 6x + 1 > (x - 2)^2 \end{cases}$$

Giải ra, kết luận tập nghiệm như trường hợp trên;

- Đặt điều kiện cho biểu thức trong căn và vế phải của (2), khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x + 1 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 6x + 1 > (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x > 3;$$

Có thể sau khi chuyển về học sinh nhận xét rằng về trái là căn bậc hai nên luôn không âm, do đó để (1) thỏa chỉ cần  $(x - 2) < 0 \Leftrightarrow x < 2$ .

**Phân tích sai lầm:** Học sinh không hiểu được bản chất của phép biến đổi tương đương trong bất phương trình, sai lầm này cũng tương tự như trong phương trình vì thế các em cho rằng bình phương luôn là phép biến đổi tương đương. Sai lầm thứ hai do nghĩ rằng chỉ cần căn thức có nghĩa thì bình phương được. Các em không chú ý chiều “ $\Leftarrow$ ” không đúng vì chưa đảm bảo  $(x - 2) \geq 0$ . Ở cách giải thứ ba, có nhớ đến điều kiện trước khi bình phương nhưng vẫn sót trường hợp do chưa chú ý được dấu trong bất phương trình. Lập luận cuối cùng thể hiện sự thiếu cân nhắc có phần chủ quan dẫn đến nhầm lẫn kiến thức. Các em không thấy được rằng nếu về phải không âm ta vẫn có thể tìm được các giá trị của  $x$  thỏa bất phương trình.

**Biện pháp khắc phục sai lầm:** Cần chỉ cho học sinh thấy được một số tính chất trong bất phương trình là tương tự với phương trình, khác biệt lớn nhất là “dấu” trong bất phương trình. Do đó tùy mỗi bài toán mà lập luận khác nhau, điều này sẽ được chỉ ra sau bài toán trên. Ở đây cần nhắc lại rằng để phép bình phương là tương đương thì phải đảm bảo chúng cùng dấu. Với bất phương trình (1), tất nhiên phải chuyển về mới có thể giải được. Thấy rằng  $\sqrt{A} > B \Rightarrow A > B^2$ , nhưng chiều ngược lại thì sao? Như vậy cần có  $A \geq 0, B \geq 0$  mà  $A > B^2$  nên điều kiện  $A \geq 0$  có thể bỏ được. Hơn nữa, nếu  $A \geq 0$  còn  $B < 0$  thì bất phương trình vẫn thỏa. Tổng hợp lại ta có:

$$\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^2 \\ A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases}$$


Với  $A, B$  là những biểu thức đại số.

Sau đây là một lời giải đề nghị cho bất phương trình (1) để học sinh tham khảo:

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + 1} > x - 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 < 0 \\ 2x^2 - 6x + 1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 6x + 1 > (x - 2)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \\ x > 3 \end{cases}.\end{aligned}$$

Cần chỉ cho các em thấy rằng với bất phương trình trên nếu có dấu “=” thì cách giải vẫn vậy và lúc này  $B \leq 0$  thỏa bất phương trình. Bây giờ bất phương trình ngược lại thì sao? Tức là thay bởi dấu “<”, “≤” thì cách giải thế nào?


**Bài 2:** Giải bất phương trình:  $\sqrt{x^2 - 16} \leq 2x - 7$ . (1)


 **Dự kiến:** Sai lầm thường thấy là bình phương hai vế để có biến đổi tương đương nhưng không đảm bảo điều kiện hoặc đặt sai điều kiện. Chẳng hạn:

$$+ (1) \Leftrightarrow x^2 - 16 \leq (2x - 7)^2;$$

$$+ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 \geq 0 \\ x^2 - 16 \leq (2x - 7)^2 \end{cases};$$

$$+ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x^2 - 16 \leq (2x - 7)^2 \end{cases}.$$

 **Phân tích:** Mắc những sai lầm khi tiến hành khử căn đa phần là do các em chưa nắm được bản chất của căn bậc hai và định lí về phương trình hệ quả. Biến đổi đầu tiên có thể do HS vẫn chưa hiểu cách dùng dấu “ $\Leftrightarrow$ ”. Cách biến đổi thứ hai do các em tin rằng căn bậc hai luôn không âm, không quan tâm đến biểu thức trong căn, đặt điều kiện cho vế phải để đảm bảo hai vế không âm rồi bình phương. Cách biến đổi thứ ba do nghĩ rằng đặt điều kiện cho căn thức tồn tại thì bình phương được.

 **Biện pháp:** Bất phương trình (1) có dạng  $\sqrt{A} \leq B$  (\*), nếu  $A \geq 0$  thì vế trái sẽ luôn không âm nên không có trường hợp vế trái âm, vế phải không âm.



Để phép bình phương là tương đương phải đảm bảo hai vế cùng dấu, nhưng với cách biến đổi thứ hai  $B \geq 0, A \leq B^2$  không đảm bảo  $A \geq 0$  vì vậy điều kiện  $A \geq 0$  không bỏ được. Cách biến đổi thứ ba tất nhiên không đúng vì vế phải chưa không âm. Qua phân tích này ta thấy cách lập luận hoàn toàn khác bất phương trình trên, các em cần hiểu rõ để tránh nhầm lẫn, và không máy móc áp dụng. Như vậy ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \leq B^2 \end{cases}$$

Lời giải đề nghị:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ 2x - 7 \geq 0 \\ x^2 - 16 \leq (2x - 7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \vee x \geq 4 \\ x \geq \frac{7}{2} \\ x^2 - 16 \leq 4x^2 - 28x + 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq \frac{13}{3} \vee x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq x \leq \frac{13}{3} \\ x \geq 5 \end{cases}$$

Với bất phương trình (\*) thay bởi dấu “<” thì có gì thay đổi? Lúc này  $A, B$  không thể đồng thời bằng không. Nếu  $A \geq 0$  thì  $B > 0$  để  $A < B^2$ ; nếu  $B \geq 0$  giả sử ta xét

trường hợp  $A > 0, B = 0$  khi đó  $A < B^2$  là vô lí. Vậy  $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$

Để cho tiện ta viết  $A, B$  nhưng chú ý rằng  $A, B$  là những biểu thức đại số theo biến  $x$ , hay rõ hơn  $A = f(x), B = g(x)$

**Bài 3:** Giải bất phương trình:  $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$ . (1)

 **Dự kiến:** - Sai lầm thường gặp ở học sinh là biến đổi như sau:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

- Có em nhận thấy  $\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$  nên  $(1) \Leftrightarrow x^2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 3$ ;

- Biến đổi tương đương như trường hợp đầu và kèm theo  $\begin{cases} x^2 - 3x \leq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 3x - 2} \leq 0 \end{cases} (*)$ ,

đến đây lại vấp tiếp những sai lầm ở (\*) như bình phương rồi giải bất phương trình  $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$ , hoặc kết luận hệ này vô nghiệm do nhận thấy (\*) không thỏa;

- Bình phương để làm mất căn:  $(1) \Leftrightarrow (x^2 - 3x)^2(2x^2 - 3x - 2) \geq 0$ , đưa về tích của phương trình bậc 4 với bậc 2 dẫn đến bế tắc.


 **Phân tích:** Đa số học sinh đều lập luận như trường hợp đầu tiên vì các em tin

vào điều đã biết ở số học là  $ab \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} (1)$  (I), mà  $b \geq 0$ , nên chỉ có hệ (1). Ta

thấy rằng với  $x = 2$  vẫn nghiệm đúng bất phương trình (1) do vậy cách giải trên đã làm mất nghiệm.

- Sai lầm thứ hai là sự đánh giá thiếu chính xác  $A\sqrt{B} \geq 0$  mà  $\sqrt{B} \geq 0$  nên chỉ cần  $A \geq 0$ . Các em không thấy được nếu  $B = 0$  thì có nhất thiết là  $A \geq 0$ ?

Hai sai lầm trên đây là do xuất hiện dấu “=” trong bất phương trình nên học sinh thường lúng túng và hay mắc sai lầm. Cách lập luận thứ ba là máy móc áp dụng công thức nêu ở (I). Từ bất phương trình (\*) có thể nhiều em nghĩ rằng hai vế không âm thì bình phương để giải mà không thấy được (\*) chỉ xảy ra dấu bằng. Sai lầm cuối cùng do không quan tâm đến biểu thức cụ thể trong bất phương trình, chỉ muốn khử căn để việc giải đơn giản.

 **Biện pháp:** Trước hết bất phương trình (1) có dạng  $f(x)\sqrt{g(x)} \geq 0$  (2), yếu tố

quan trọng ở bất phương trình (1) là  $\sqrt{2x^2 - 3x - 2}$ , nó có hai giá trị hoặc “bằng 0” hoặc “lớn hơn 0”. Với những bất phương trình có dấu “=” việc giải bao giờ cũng phức tạp và dễ nhầm lẫn, nếu không chú ý sẽ sót nghiệm vì vậy giáo viên cần phân

tích rõ ràng. Để đơn giản ta tách (2) thành 
$$\begin{cases} f(x)\sqrt{g(x)} = 0 & (a) \\ f(x)\sqrt{g(x)} > 0 & (b) \end{cases} \quad (II),$$
 các em phải

hiểu được rằng dấu “ $\geq$ ” nghĩa là có hai trường hợp: “lớn hơn” hoặc “bằng”. Dạng (a) đã biết cách giải trong phần phương trình. Nhắc lại cho học sinh thấy được nếu  $f(x) = 0$  thì  $g(x) \geq 0$  để căn tồn tại. Khi  $\sqrt{g(x)} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$  thì  $f(x)$  có điều kiện gì để thỏa? Nhớ rằng “0” nhân với bất kì số nào cũng bằng không nên chỉ cần giá trị  $x$  tìm được từ  $g(x) = 0$  thuộc tập xác định của  $f(x)$ . Còn lại trường hợp (b) không có dấu “=” nên căn thức nếu tồn tại thì luôn dương, vậy  $(b) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ . Và cần giúp

đỡ học sinh thấy được giải bất phương trình chứa căn không phải lúc nào cũng bình phương, nhất là khi biểu thức đã là bậc 2.


Như vậy, tổng hợp lại ta có:

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) = 0 \\ x \in D[f(x)] \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \end{cases} \quad . \text{Áp dụng điều này ta có lời giải cho (1) như sau:}$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} = 0 \\ (x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x > 0 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \vee x = -\frac{1}{2} \\ x = 3 \\ x > 3 \vee x < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Nếu bất phương trình trên không có dấu “=” thì đơn giản, chỉ xảy ra trường hợp (b). Và từ đây học sinh sẽ thấy rằng nếu thay bởi dấu “≤” ta cũng tách ra hai trường hợp như trên. Chỉ khác  $f(x)\sqrt{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ . Cần giúp học sinh phân biệt điều này để tránh lập luận sai như trường hợp hai dự kiến trên đây.

**Bài 4:** Giải bất phương trình:  $x^2(2x^2 - 3x + 1) \geq 0$ . (1)


 **Dự kiến:** - Biến đổi (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$ ;

- Nhận thấy  $x^2 \geq 0$  nên (1)  $\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 1$ ;

- Hoặc biến đổi như trường hợp đầu kèm theo  $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 \leq 0 \\ x^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ x \leq 0 \end{cases}$  hệ này


vô nghiệm, vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là  $S = [1, +\infty)$ ;

- Tách ra 3 trường hợp như công thức ở bài 3 nếu học sinh đã được học về dạng đó.

 **Phân tích:** Với  $x = 0$  vẫn thỏa (1) nên hai cách giải đầu đã làm mất nghiệm. Sai

lầm đầu tiên do tưởng rằng  $ab \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ , có thể các em nhận thấy  $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$  vẫn

thỏa  $ab \geq 0$  nên giải như trường hợp thứ 3. Cách giải thứ hai do suy luận từ  $f^2(x)g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$  vì thấy rằng  $f^2(x) \geq 0$ . Lời giải thứ tư thể hiện sự máy móc áp dụng công thức từ bài 3, cho rằng  $f^2(x)$  và  $\sqrt{f(x)}$  đều như nhau vì cùng không âm. Nếu tiến hành giải với những sai lầm như trên là thể hiện sự mơ hồ về dấu trong bất phương trình, khi xuất hiện thêm dấu “=” bài toán sẽ rắc rối hơn và với học sinh sẽ khó khăn hơn trong việc lập luận đúng. Vì vậy giáo viên cần chú ý để giúp học sinh khắc phục nhược điểm đó.

 **Biện pháp:** Thấy rằng bất phương trình (1) có dạng  $f^2(x)g(x) \geq 0$  (\*) và cách

giải hoàn toàn khác bài 3 ở trên. Nhân tố quan trọng là  $f^2(x)$  không âm nhưng tập xác định của nó là  $\mathbf{R}$ , khác với  $\sqrt{f(x)}$  có nghĩa khi  $f(x) \geq 0$ .

Vì vậy nếu tách riêng hai trường hợp như bài 3 sẽ có nhiều thay đổi, tức  $f^2(x)g(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$ , không như bài 3 là  $f(x) > 0$  để  $\sqrt{f(x)} > 0$ . Đây

cũng là cách giải nếu (1) không xảy ra dấu “=”. Còn  $f^2(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ .

Hợp hai trường hợp này ta sẽ có:


(\*)  $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ . Vậy cách giải đầu tiên đã thu hẹp miền giá trị của (1) nên sót

nghiệm, thật ra chỉ cần  $x^2 = 0$  là thỏa vì  $x^2 > 0$  khi  $x \neq 0$ , do đó nếu phân tích chân phương như cách thứ ba vẫn không đúng. Cách lập luận thứ hai không sai nhưng lại sót nghiệm vì các em quên rằng với  $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$  thì dù tam thức bậc hai  $(2x^2 - 3x + 1)$  thế nào đi nữa bất phương trình (1) vẫn xảy ra. Mặt khác, vai trò của  $\sqrt{f(x)}$  khác  $f^2(x)$  nên tách ra ba trường hợp. Tuy nhiên, nếu thay bởi dấu “ $\leq$ ” thì sao? Ta thấy rằng cách giải dạng (\*) không phụ thuộc nhiều vào  $f^2(x)$  nên tương tự, ta chỉ đổi  $g(x) \leq 0$ .

Lời giải đề nghị:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq \frac{1}{2} \vee x = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

**Bài 5:** Giải bất phương trình:  $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} < \frac{1}{x + 5}$ . (1)

 **Dự kiến:** - Biến đổi (1)  $\Leftrightarrow x + 5 < \sqrt{x^2 - 2x - 3}$  (\*), đến đây có thể HS lại mắc các sai lầm như sau:

+ Bình phương hai vế để khử căn rồi giải:

$$(*) \Leftrightarrow (x+5)^2 < x^2 - 2x - 3 \Leftrightarrow 12x + 28 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{7}{3}$$


+ Nhận thấy vế phải luôn không âm nên  $(*) \Leftrightarrow x+5 < 0 \Leftrightarrow x < -5$ ;

- Chuyển vế của (1) rồi bình phương:


$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} - \frac{1}{x+5} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} - \frac{1}{x+5} \right)^2 < 0, \text{ đến đây thường bế tắc do thắc mắc tại sao bình}$$

phương lại âm hoặc tiếp tục khai triển thấy càng phức tạp.

 **Phân tích:** Học sinh tưởng rằng  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow b < a$  hoặc nghĩ đây là so sánh hai

phân số cùng tử nên phân số nào lớn hơn sẽ có mẫu bé hơn. Khi đưa về dạng  $A < \sqrt{B}$  lại tiếp tục sai lầm với những lí do như đã chỉ ra ở bài 1. Hoặc có thể do thói quen giải một số bất phương trình hay chuyển biểu thức về một vế để việc giải đơn giản hơn nhưng ở đây các em lại làm cho bài toán rắc rối hơn.

 **Biện pháp:** Nếu  $a, b$  là những số xác định thì cách giải trên đúng, nhưng ở đây là phân thức hữu tỷ hơn nữa lại chứa căn thức, bất phương trình (1) thay đổi theo giá trị của biến  $x$ . Các đáp số  $x < -\frac{7}{3}$  hoặc  $x < -5$  đều không đúng, chẳng hạn thay  $x = -5 < -\frac{7}{3}$  thì (1) không xác định,  $x = -6$  thì (1) vô lí. Vậy lập luận của học sinh sai ở

đâu? Với  $A, B$  là những biểu thức đại số theo biến  $x$  thì  $\frac{1}{A} < \frac{1}{B}$  (\*), chuyển vế và qui

đồng, ta được  $\frac{A-B}{AB} > 0$  (\*\*), đến đây lập luận như đã biết ta có:

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} AB > 0 \\ A > B \\ AB < 0 \\ A < B \end{cases}, \text{ đó là cách làm chân phương cần rèn cho học sinh để với những}$$

bài toán tương tự các em biết cách phân tích. Chẳng hạn với dạng  $\frac{A}{B} < 1$  các em

thường nhầm  $\begin{cases} A < B \\ B \neq 0 \end{cases}$  nhưng nếu đã hiểu dạng toán trên thì học sinh cũng sẽ biết

cách biến đổi tương tự, tức là:

$$\frac{A}{B} < 1 \Leftrightarrow \frac{A-B}{B} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A < B \\ B > 0 \\ A > B \\ B < 0 \end{cases}$$

Ngoài ra, để việc lập luận đơn giản hơn có thể hướng dẫn thêm cho các em cách làm sau đây. Nếu  $A, B > 0$  thì tất nhiên so sánh được như với phân số, tức  $(*) \Leftrightarrow A > B$ ; nếu  $A < 0, B > 0$  thì  $(*) \Leftrightarrow A < B$ ; nếu  $A, B < 0$  thì  $(*) \Leftrightarrow B < A$ . Cách lập luận theo kiểu đánh giá thường là khó với học sinh nhưng sẽ thuận tiện hơn khi giải những bất phương trình chứa căn thức, chẳng hạn bài 4 trên đây.

Tổng hợp cách làm này ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} A > B > 0 \\ B > 0 > A \\ B < A < 0 \end{cases}. \text{ Với những phân tích trên đây, có thể trình bày bài 4 như sau để}$$

học sinh tham khảo thêm:

$$\text{Trước hết, điều kiện để các biểu thức xác định: } \begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 3 \\ x > -5 \end{cases}$$

+ Nếu  $x < -5$  thì vế phải là số âm, vế trái là số dương nên không thỏa.

$$+ \text{ Nếu } \begin{cases} x > 3 \\ -5 < x < -1 \end{cases} \text{ thì } \sqrt{x^2 - 2x - 3} > 0 \text{ và } x + 5 > 0 \text{ nên}$$


$$(1) \Leftrightarrow x+5 < \sqrt{x^2-2x-3}$$

$$\Leftrightarrow (x+5)^2 < x^2-2x-3 \Leftrightarrow x < \frac{-7}{3}$$

Kết hợp các điều kiện ta có nghiệm bất phương trình là  $x \in (-5, \frac{-7}{3})$ .

Thật ra với những bất phương trình giải theo kiểu đánh giá như trên thường là khó với học sinh nhưng giáo viên không nên ngại cung cấp cho học sinh. Làm những bài tập như thế sẽ rèn tư duy lập luận và cách nhìn nhận tổng hợp một bài toán cho các em.


**Bài 6:** Giải bất phương trình:  $x^{x^2-1} \geq x^{2x+2}$ . (1)

 **Dự kiến:** Bài toán này tương đối khó, học sinh có thể mắc các sai lầm sau:

$$+ \text{ Sai lầm 1: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 \geq 2x + 2 \end{cases}$$


$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 3 \vee x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3;$$

$$+ \text{ Sai lầm 2: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 - 1 \leq 2x + 2 \\ x \geq 1 \\ x^2 - 1 \geq 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \geq 3. \end{cases}$$

 **Phân tích:** Phép biến đổi đầu tiên là do HS đã ngộ nhận  $x \geq 1$  nên nhầm tưởng

rằng  $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$ . Với cách làm thứ hai có vẻ đúng nhưng vẫn sót

nghiệm, ta thấy  $x = 1$  thỏa bất phương trình (1), vì các em quên “một mũ bao nhiêu cũng bằng một”.

 **Biện pháp:** Trước hết, (1) là bất phương trình mũ có dạng  $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$  (\*).



Một điều mà học sinh hay quên đó là số mũ hữu tỷ thì cơ số phải dương. Có thể nhắc nhở cho các em bằng cách chỉ ra ví dụ sau đây:

$\sqrt[3]{-8} = -2$ , nếu không tuân thủ điều đó thì ta có thể biến đổi:

$$\sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2. \text{ Như vậy } 2 = -2 \text{ chẳng?}$$

Hơn nữa, khi giải bất phương trình mũ ta cần chú ý các tính chất của hàm số mũ là:

+ Nếu cơ số  $a > 1$  thì hàm số mũ  $y = a^x$  đồng biến;

+ Nếu cơ số  $0 < a < 1$  thì hàm số mũ  $y = a^x$  nghịch biến.

$$\text{Vì thế } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \leq 1 \\ f(x) \leq g(x) \\ a \geq 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}. \text{ Do } 1^{f(x)} = 1, \text{ với } f(x) \text{ bất kì nên trong hai trường hợp}$$

đều có  $x = 1$ . Cách làm thứ hai trên không chú ý đến điều này nên đã sót nghiệm.

Với dấu bất phương trình ngược lại thì ta vẫn có cách làm tương tự.

*Lời giải đề nghị:*

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 1 \leq 2x + 2 \\ x \geq 1 \\ x^2 - 1 \geq 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 3 \leq 0 \\ x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ -1 \leq x \leq 3 \\ x \geq 1 \\ x \leq -1 \vee x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}.$$

$$\text{Bài 7: Giải bất phương trình: } \log_2 \frac{4x^2 - 4x - 1}{2x - 3} \geq 0. \quad (1)$$

$$\text{Dự kiến: - Biến đổi: } (1) \Leftrightarrow \log_2(4x^2 - 4x - 1) - \log_2(2x - 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4x^2 - 4x - 1) \geq \log_2(2x - 3)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 1 \geq 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x > \frac{3}{2};$$

$$\text{- Hoặc } (1) \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x - 1}{2x - 3} \geq 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 1 \geq 2x - 3.$$

🌟 **Phân tích:** Cách biến đổi như trên là không tương đương, do các em đã nhầm

lẫn kiểu như  $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ , ở đây là  $\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a f(x) - \log_a g(x)$ . Các em quên rằng nếu về trái đã xác định nhưng khi tách ra như vậy về phải chưa chắc tồn tại. Cách giải trên đã làm mất nghiệm vì thay  $x = 1$  vào (1) vẫn thỏa. Cách lập luận hai sai ở bước thứ hai vì tin rằng  $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$ .

🌟 **Biện pháp:** Bất phương trình (1) có dạng  $\log_a \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$  (\*). Giáo viên cần chỉ cho học sinh thấy được sai lầm của mình, chẳng hạn  $f(x), g(x) < 0$  nhưng  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  nên  $\log_a \frac{f(x)}{g(x)}$  tồn tại mà  $\log_a f(x), \log_a g(x)$  không tồn tại do đó muốn tách ra phải đặt điều kiện. Nhưng cách này dài dòng và dễ sót trường hợp.

Nhớ rằng  $\log_a 1 = 0, 0 < a \neq 1$  nhưng phải chăng (\*)  $\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \geq 1$ ? Tất nhiên còn phụ thuộc vào cơ số  $a$ , trường hợp đó chỉ xảy ra với  $a > 1$ ; nếu  $0 < a < 1$  thì (\*)  $\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ . Hai bất phương trình này có thể giải được như đã biết ở bài 5.

$$\text{Vậy (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) \geq g(x) > 0 \\ 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

Cũng cần chỉ cho học sinh thấy tùy trường hợp mà cách biến đổi khác nhau, chẳng hạn với (1) vì cơ số  $a = 2 > 0$  nên đưa được về  $\frac{4x^2 - 4x - 1}{2x - 3} \geq 1$ , ở đây ta không đánh giá như trên mà chuyển về, qui đồng và xét dấu sẽ nhanh hơn. Đề cập đến dạng bất phương trình trên cần nhắc lại cho học sinh một số dạng sau. Chẳng hạn:

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) < 0,$$


và nếu có dấu “=” phải chú ý, tức  $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \leq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ . Tương tự với chiều

bất phương trình ngược lại.

*Lời giải đề nghị:*

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x - 1}{2x - 3} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x - 1}{2x - 3} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 3} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x-1)}{2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$


**Bài 8:** Giải bất phương trình:  $x^2 - x - 4 + \sqrt{4 - x^2} \leq \frac{x^2}{2 - \sqrt{4 - x^2}}.$  (1)


 **Dự kiến:** - Khử căn thức ở vế phải và biến đổi:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - x - 4 + \sqrt{4 - x^2} \leq 2 + \sqrt{4 - x^2} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3 \quad (3)$$

- Hoặc nhân hai vế với  $2 - \sqrt{4 - x^2}$  và đưa đến dạng phức tạp hơn, bết tắc!

 **Phân tích:** Phép biến đổi từ (2) sang (3) là không tương đương, sai lầm vì học sinh tin rằng  $f(x) + h(x) \geq g(x) + h(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$ , sai lầm thứ hai do không nhìn nhận được dấu hiệu của khử căn thức vì vậy các em đã máy móc qui đồng theo thói quen.

 **Biện pháp:** Vì sao phép biến đổi trên là không tương đương? Do  $\sqrt{4 - x^2}$  chỉ có nghĩa khi  $4 - x^2 \geq 0$  nên phép suy từ (2) sang (3) làm mở rộng tập xác định của bất phương trình và chiều ngược lại sẽ thu hẹp tập xác định.

Không nên ngộ nhận rằng  $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) \geq g(x) + h(x)$ . Điều này cũng tương tự như trong phương trình. Hay nói khác hơn là khi thêm hoặc bớt hai vế của một bất phương trình với cùng một hàm số thì ta nhận được bất phương trình chưa chắc đã tương đương với bất phương trình đã cho. Lí do là phép biến đổi này làm thay đổi tập xác định của bất phương trình. Vậy với (1) nếu muốn phép biến đổi từ (2) sang (3) là tương đương phải có điều kiện  $4 - x^2 \geq 0$ .

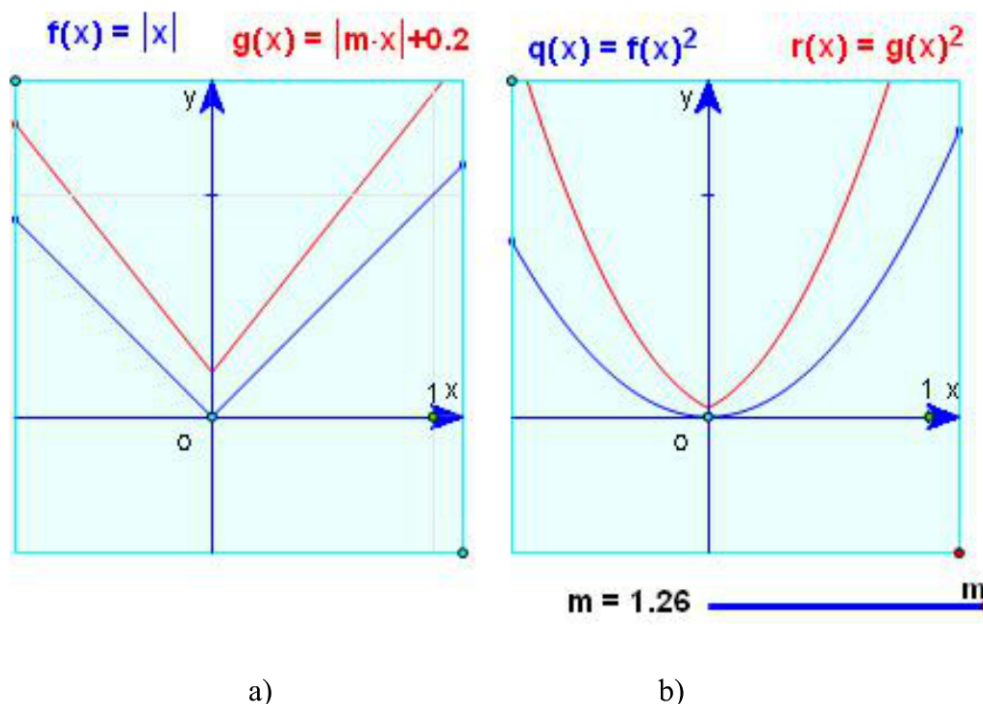
*Lời giải đề nghị:*

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow x^2 - x - 4 + \sqrt{4 - x^2} \leq 2 + \sqrt{4 - x^2} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.\end{aligned}$$

## **2.2. Một số bất phương trình ứng dụng GSP để giúp học sinh trực quan và hiểu rõ vấn đề hơn**

Qua các bài toán trên ta thấy sai lầm mà HS thường hay mắc phải là khử căn bậc hai trong bất phương trình vô tỷ, do không hiểu và vi phạm qui tắc nâng lên lũy thừa. Hoạt động sau thiết kế trên GSP để giúp HS khám phá và hiểu rõ hơn quy tắc nâng lên lũy thừa bậc chẵn.

Mở file **bpt1.gsp**



Hình 2.1

Hình 2.1.a) là đồ thị của hai hàm số  $f(x) = |x|$  và  $g(x) = |mx| + 0,2$ ; nhận thấy đồ thị của hàm số  $y = g(x)$  nằm trên đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  trên tập  $D$  nào đó. Hình 2.1.b) là đồ thị của hai hàm số  $y = [f(x)]^2$  và  $y = [g(x)]^2$ .

Quan sát hình vẽ, kết luận gì về vị trí của đồ thị hàm số  $y = [f(x)]^2$  so với đồ thị hàm số  $y = [g(x)]^2$  trên tập  $D$ ?

Kéo rê  $m$  để quan sát tập nghiệm của hai bất phương trình  $f(x) < g(x)$  và  $[f(x)]^2 < [g(x)]^2$ , trả lời các câu hỏi sau:

a) Trước hết, hãy nêu cách xác định tập nghiệm của hai bất phương trình trên?

Khi hai đồ thị của các hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  không cắt nhau thì tập nghiệm  $T_1$  của bất phương trình  $f(x) < g(x)$  là tập nào?

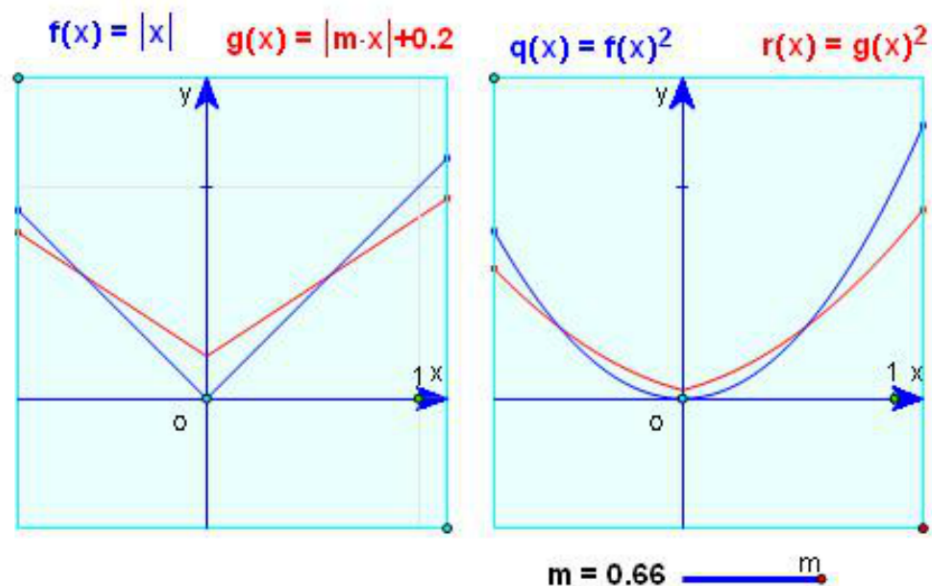
b) Tập nghiệm  $T_2$  của bất phương trình  $[f(x)]^2 < [g(x)]^2$  là gì? So sánh với  $T_1$ ?

Theo hình trên ta thấy với  $m = 1.26$  tập nghiệm của bất phương trình không đổi sau khi bình phương, còn với giá trị  $m$  khác thì sao?

Kéo rê  $m$  sao cho hai đồ thị cắt nhau (hình 2.2)

Trả lời các câu hỏi sau:

- Tập nghiệm của bất phương trình  $f(x) < g(x)$  là tập nào?
- Mối quan hệ của hai tập nghiệm của hai bất phương trình  $f(x) < g(x)$  và  $[f(x)]^2 < [g(x)]^2$  là gì?



**Hình 2.2**

Như vậy với bất kì giá trị nào của  $m$  thì tập nghiệm của bất phương trình vẫn không thay đổi khi ta bình phương.

Từ khảo sát trên ta có kết luận tổng quát sau:

Cho bất phương trình  $f(x) < g(x)$  có tập các định  $D$ .

Nếu  $f(x)$  và  $g(x)$  không âm với mọi  $x \in D$  thì

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^2 < [g(x)]^2.$$

Điều này vẫn đúng với bất phương trình ngược lại, kể cả có dấu “=”.

Sau hoạt động này yêu cầu HS giải các bất phương trình sau:

1)  $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} > \sqrt{2x-8}$

2)  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+2} \leq 1$

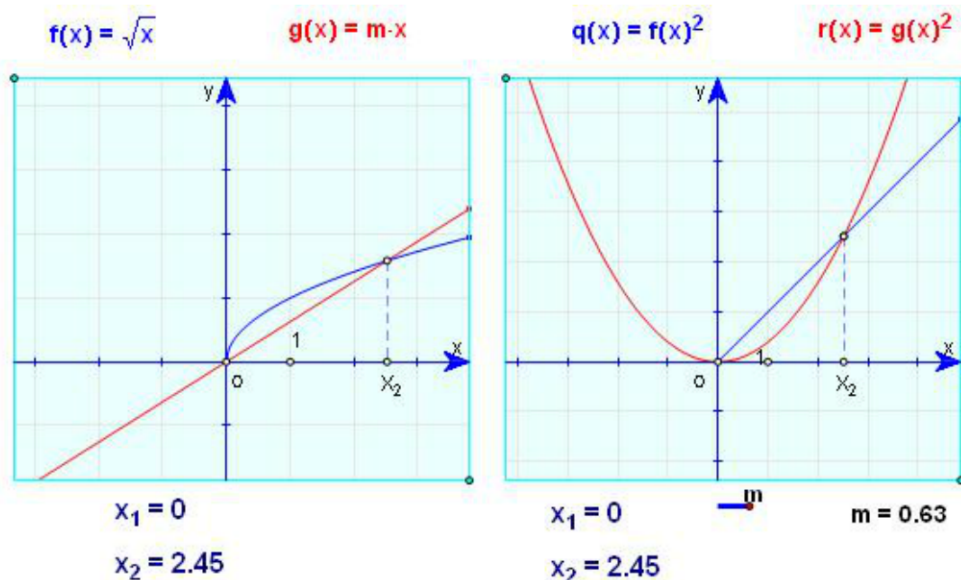
3)  $|2x+5| > |7-4x|$ .

Gợi ý: Biến đổi để hai vế bất phương trình không âm rồi áp dụng kết luận trên.

Bây giờ, nếu  $f(x)$  và  $g(x)$  không cùng dấu thì kết luận trên còn đúng không?

Xét bất phương trình:  $mx < \sqrt{x}$ . (1)

Mở file **bpt2.gsp**



a)

**Hình 2.3**

b)

Hình 2.3 a) là đồ thị của hai hàm số  $f(x) = \sqrt{x}$  và  $g(x) = mx$  và hình 2.5 b) là đồ thị của hai hàm số khi đã nâng lên lũy thừa bậc hai.

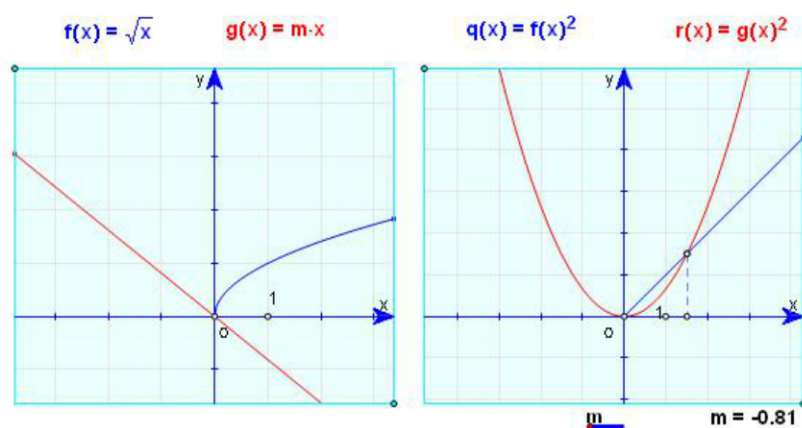
Kéo rê  $m$ , quan sát đồ thị các hàm số hãy so sánh tập nghiệm  $T_1$  của bất phương trình  $g(x) < f(x)$  (1) và tập nghiệm  $T_2$  của bất phương trình  $[g(x)]^2 < [f(x)]^2$  (2)?

Hướng dẫn HS chú ý giá trị  $m$ :

Nếu  $m > 0$  thì tập nghiệm của bất phương trình trước và sau khi bình phương trùng nhau. Chẳng hạn với  $m = 0.63$  như hình 2.3 tập nghiệm  $T_1$  và  $T_2$  của hai bất phương trình đều là  $T = (0, 2,45)$ . Vậy phép bình phương lúc này là tương đương.

Nếu  $m < 0$ , hãy so sánh tập nghiệm  $T_1$  và  $T_2$  ?

Có thể nhận xét gì về dấu hai vế của bất phương trình  $g(x) < f(x)$  lúc này? Nhớ rằng điều kiện tồn tại của vế trái  $f(x) = \sqrt{x}$  là  $x \geq 0$ , trong khi với  $m < 0$  thì vế phải  $g(x) = mx < 0$ .



**Hình 2.4**

Với hình trên, ta thấy khi  $m = -0.81$ , bất phương trình (1) chỉ có tập nghiệm  $T_1 = (0, +\infty)$  nhưng bất phương trình (2) có đến tập nghiệm  $T_2 = (0, 1)$ . Phép bình phương đã làm thay đổi tập xác định của phương trình.

Như vậy, để phép nâng lũy thừa bậc chẵn là tương đương thì phải đảm bảo hai vế của bất phương trình đều cùng dấu, tốt nhất là không âm.



## **CHƯƠNG 3**

### **THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM**

#### **1. Mục đích và ý nghĩa thực nghiệm**

##### **1.1. Mục đích**

- Nghiên cứu về khả năng lập luận toán: phân đại số của học sinh THPT và việc giúp đỡ các em khắc phục sai lầm như thế nào của các thầy cô giáo;
- Thu thập dữ liệu xác định một số khó khăn của các em khi giải toán và sự tiến bộ sau quá trình giúp đỡ của thầy cô giáo trong tiết dạy;
- Tiến hành thực nghiệm sư phạm để kiểm nghiệm tính hiệu quả của cách thức giúp đỡ học sinh vượt qua sai lầm khi lập luận toán trong dạy học.

##### **1.2. Ý nghĩa**

Nếu quá trình thực nghiệm thành công thì đây sẽ là một minh chứng rõ ràng bổ sung vào những nghiên cứu khẳng định vai trò của việc chẩn đoán sai lầm của học sinh khi lập luận toán trong dạy học để từ đó đề ra biện pháp khắc phục cho các em. Ngoài ra, khóa luận sẽ là một tài liệu tham khảo thiết thực cho sinh viên sư phạm và những ai quan tâm đến việc nâng cao chất lượng, hiệu quả của việc dạy học theo xu hướng mới, đặc biệt với chương trình sách giáo khoa hiện nay.

#### **2. Quá trình thực nghiệm**

##### **2.1. Phương pháp thực nghiệm**

Đề tài được tổ chức thực nghiệm tại lớp 11/9 trường THPT Phú Lộc, huyện Phú Lộc, tỉnh Thừa Thiên Huế với 40 HS có mặt. Hình thức tổ chức cho việc thực nghiệm là:

- Dạy học có sự hỗ trợ của công nghệ thông tin dựa trên những hoạt động đã thiết kế nhằm giúp học sinh hiểu rõ hơn lí thuyết để vận dụng giải bài tập hạn chế sai lầm;
- Phát phiếu điều tra về phương hướng giúp đỡ học sinh vượt qua sai lầm khi lập luận toán cho giáo viên và mong muốn được giúp đỡ như thế nào ở học sinh;

- Tổ chức thu thập dữ liệu, lấy thông tin phục vụ cho quá trình thống kê và phân tích dữ liệu của đề tài.

## **2.2. Nội dung thực nghiệm**

Vì không có điều kiện thực nghiệm những nội dung liên quan đến phần phương trình, bất phương trình và bất đẳng thức (trình bày ở chương 2), tôi đã chọn một bài trong lịch dạy được phân công của mình và vận dụng phần cơ sở lí luận trình bày ở chương 1 để thiết kế bài dạy có dự kiến khó khăn của học sinh khi học toán. Từ đó, xây dựng phương hướng giúp đỡ các em vượt qua sai lầm khi giải Toán thông qua thiết kế mô hình động trên GSP và cung cấp các dạng toán. Đó là bài “*Hàm số liên tục*” trong SGK đại số và giải tích 11 (Tiết 58).

## **2.3. Thu thập dữ liệu**

Trong quá trình tiến hành thực nghiệm sư phạm bản thân đã thu thập được những phân sau:

### **❖ Dữ liệu dựa trên quan sát**

- Lớp học sôi nổi vì HS được phát huy tối đa tính tích cực thông qua trả lời câu hỏi tại chỗ, lên bảng, làm bài tập trên giấy. Điều này cũng lôi cuốn sự chú ý của những HS có vẻ trầm ở các tiết học trước. Hơn nữa, những mô hình động thiết kế trên GSP và việc phân tích dạng toán đã thực sự giúp các em nắm rõ lý thuyết hơn và có hạn chế được sai lầm khi giải các bài tập GV đưa ra;
- Học sinh thể hiện được mức độ nắm bắt kiến thức của mình. Một số HS vấp phải sai lầm như GV dự đoán nhưng qua sự phân tích, giúp đỡ của GV các em tỏ ra hiểu vấn đề hơn và hạn chế được phần nào sai sót trong bài làm;
- Tuy nhiên, số lượng HS vượt qua được sai lầm trong lập luận sau các biện pháp giúp đỡ của GV là không nhiều vì đây là những HS của một trường THPT ở vùng ven có chất lượng bình thường. Hơn nữa, nội dung bài học là phân giải tích tương đối khó với các em nên không dễ gì tiếp thu tốt ngay tại lớp. Những sai lầm đó chỉ có thể khắc phục qua thời gian tự học, rèn thêm bài tập ở nhà.

❖ **Dữ liệu thu được trên giấy**

- Các bản viết tay của HS làm các ví dụ sau khi lĩnh hội kiến thức thông qua mô hình trên máy tính và sự phân tích của GV;
- Các phiếu thăm dò ý kiến của GV và HS;
- Các hình ảnh trong quá trình dạy học.

**2.4. Phân tích dữ liệu**

Sau khi triển khai thực nghiệm, một số thống kê và phân tích rút ra như sau:

▪ **Với hoạt động đầu tiên nhằm xác định khó khăn của HS khi học khái niệm hàm số liên tục tại một điểm**

Đó là **hoạt động 1** ở SGK

GV gọi 1 HS lên điền đáp án vào bảng phụ và theo dõi HS dưới lớp làm vào vở. Kết quả là HS này và nhiều HS dưới lớp chỉ tính đúng giới hạn của hàm số  $y = f(x)$  khi  $x$  dần tới 1 còn tính sai giới hạn bên phải, giới hạn bên trái của hàm số  $y = g(x)$  khi  $x$  dần tới 1. Điều này chứng tỏ phần giới hạn một bên với HS còn khá mơ hồ, các em chưa biết khi nào thì tính giới hạn phải, giới hạn trái do đó sẽ gặp khó khăn và mắc sai lầm khi xét tính liên tục của hàm số tại một điểm.

▪ **Dự kiến một số sai lầm thường gặp của HS khi tính giới hạn của hàm số tại một điểm**

Với hàm số được cho bởi hai công thức có dạng như sau:

**Dạng 1:** Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{nếu } x \neq x_0 \\ f_2(x) & \text{nếu } x = x_0 \end{cases} \text{ tại } x = x_0.$$

**Dạng 2:** Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{nếu } x \geq x_0 \\ f_2(x) & \text{nếu } x < x_0 \end{cases} \text{ tại } x = x_0.$$

HS thường nhầm lẫn và không biết khi nào thì tính trực tiếp giới hạn hàm số tại một điểm theo định nghĩa, khi nào thì tính giới hạn bên trái, giới hạn bên phải của hàm số tại điểm đó và xem có tồn tại giới hạn không? Câu hỏi này chắc chắn nhiều HS thắc mắc, để đánh giá việc chẩn đoán sai lầm đó, GV cho HS làm trên giấy ví dụ về dạng toán 1 trong 5 phút:

Xét tính liên tục của hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{nếu } x \neq 3 \\ 5 & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$  tại  $x = 3$

Và  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} & \text{nếu } x \neq 5 \\ 4 & \text{nếu } x = 5 \end{cases}$  tại  $x = 5$ .

Đánh số thứ tự chẵn lẻ và mỗi HS làm một câu. Kết quả hoạt động đó như sau:

Yếu: Chưa hiểu định nghĩa nên không có phương pháp làm. Các em không phân biệt được khi nào thì tính các giới hạn một bên.

Câu 1: Xét tính liên tục của hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{khí } x \neq 3 \\ 5 & \text{khí } x = 3 \end{cases}$  tại  $x = 3$ .

TXD:  $\mathbb{R}$   
 $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

lim  $\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 1)}{x - 3} = x + 1 = 4$   
 $x \rightarrow 3^-$

lim  $\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 1)}{x - 3} = x + 1 = 4$   
 $x \rightarrow 3^+$

Vậy  $f$  không liên tục

Trung bình: Nhận biết được khái niệm nhưng chỉ tính được giá trị của hàm số tại một điểm.

Câu 1:  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} & \text{khí } x \neq 5 \\ 4 & \text{khí } x = 5 \end{cases}$  tại  $x = 5$ .

TXD:  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Với  $x = 5 \Rightarrow f(5) = 4$

Tại  $x \neq 5$  ta có:

lim  $\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} = \frac{(x - 5)(x - 1)}{x - 5} = x - 1 = 4$   
 $x \rightarrow 5^-$

lim  $\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} = \frac{(x - 5)(x - 1)}{x - 5} = x - 1 = 4$   
 $x \rightarrow 5^+$

Vậy  $f$  liên tục

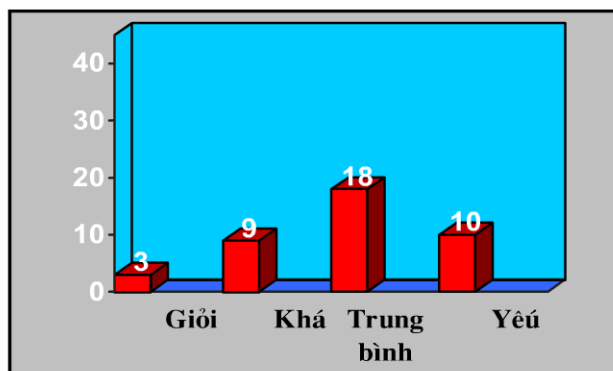
Khá: Hiểu được các bước xét tính liên tục của hàm số tại một điểm nhưng còn máy móc nên vẫn sai sót.

Tại  $x = 5$   
 $f(5) = 4$   
 Khi  $x \neq 5$ ,  $g(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-5)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-1)(x-5)}{(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} (x-1)$   
 $= 4$   
 $g(x) \neq g(5)$   
 Vậy hàm số gián đoạn tại  $x = 5$ .

Giỏi: Tô ra hiểu bài, có phương pháp giải và kết quả chính xác.

câu 2. Giải:  
 Tập xác định của hàm số đã cho là  $D = \mathbb{R}$   
 Chọn  $x = 3$ , ta có:  
 $f(3) = 5$  và  
 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)}{x-3}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 3} (x-1) = 3-1 = 2 \neq f(3) = 5$   
 Do đó hàm số  $f(x)$  không liên tục tại  $x = 3$ .

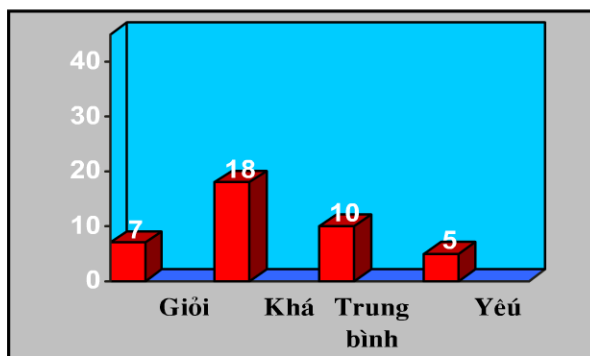
Sau đây là biểu đồ thể hiện kết quả trên:



GV đã phân tích, giúp HS nhận thấy sự khác nhau giữa việc tính giới hạn hàm  $g(x)$  ở hoạt động 1 và ví dụ áp dụng định nghĩa. Sau đó GV chốt lại bằng phương pháp giải từng dạng nêu ở trên (viết trong bảng phụ để HS tiện theo dõi).

❖ **Đánh giá khả năng vượt qua sai lầm trong lập luận toán của học sinh sau sự giúp đỡ của giáo viên**

Sau tiết dạy, chúng tôi đã tổ chức cho HS làm một bài kiểm tra nhỏ trong 15 phút ra chơi vào buổi học khác. Kết quả chấm điểm được thể hiện ở biểu đồ bên:



So sánh 2 biểu đồ ta nhận thấy tiết dạy có sự quan tâm sâu sát những khó khăn, sai lầm của học sinh khi lập luận, phân tích phương pháp giải kết hợp hình ảnh minh họa trên GSP và sự hướng dẫn tự học ở nhà đã giúp ích được nhiều cho các em trong việc hạn chế sai lầm khi giải toán. Cụ thể: số HS đạt điểm giỏi, khá tăng lên còn số HS đạt điểm trung bình, yếu giảm đi rõ rệt.

Lớp 11/9 KIỂM TRA 15 PHÚT (GIẢI TÍCH)

Họ và tên HS: Trần Thị Ngọc

Điểm: 9,5

I. Phần trắc nghiệm khách quan (4 điểm)

Cho hàm số:  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 7x + 6 & \text{khí } x \neq 1 \\ a & \text{khí } x = 1 \end{cases}$  hàm số liên tục tại  $x = 1$  khi  $a$  bằng:

A. 7 B. -6 C. -5 D. -4

II. Phần tự luận (6 điểm)

Xét tính liên tục của hàm số  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{nếu } x > 5 \\ 4 & \text{nếu } x \leq 5 \end{cases}$  tại  $x = 5$ .

I. C. (f)

Giải: Ta có:  $f(5) = 4$

$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(x-1)(x-5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} (x-1) = 4$

$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} 4 = 4$

Vì:  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 4$  và  $f(5) = 4$  nên  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 4$  (đ)

Như vậy hàm số liên tục tại  $x = 5$ . (f)

**Bài làm thu được của học sinh trên giấy**

### 3. Kết quả phiếu điều tra giáo viên và học sinh

Trong quá trình thực nghiệm, ngoài trao đổi phỏng vấn một số GV và HS, bản thân đã phát phiếu điều tra để thu thập ý kiến phục vụ cho đề tài. Sau đây là nội dung của phiếu và những câu trả lời xuất hiện nhiều nhất thu được:

#### PHIẾU ĐIỀU TRA GIÁO VIÊN



Để phục vụ cho việc thu thập dữ liệu dùng trong nghiên cứu giáo dục Toán, kính mong thầy cô trả lời những câu hỏi sau:



*1. Khi giải phương trình, bất phương trình, thầy cô nhận thấy học sinh sai lầm nhiều nhất ở điểm nào ?*

- Sử dụng các phép biến đổi tương đương và hệ quả để đưa phương trình, bất phương trình về dạng “quen” đã học.
- Kết hợp tập nghiệm của phương trình, bất phương trình với điều kiện xác định của nó.



*2. Thầy cô thường giúp học sinh giải bài toán bằng nhiều cách hoặc mở rộng bài toán hay chỉ tập trung nắm vững một cách giải? Vì sao?*

- + Đối với học sinh trung bình, yếu giúp HS nắm vững cách giải quan trọng;  
+ Đối với học sinh khá, giỏi giúp HS giải bằng nhiều cách: mở rộng bài toán hoặc phân tích và thay đổi giả thiết giúp HS tư duy hơn.
- Trước hết, mở rộng nhiều cách vì mỗi cách giải đều có những ưu và nhược điểm khác nhau, sau đó chốt lại cách giải nào đơn giản, rõ ràng, phù hợp với đa số HS. Giúp HS tư duy và phát triển khả năng suy luận trong quá trình giải là chủ yếu, điều này cũng tùy thuộc vào thời gian và đối tượng HS.



**3.** *Thầy cô có thường dẫn ra những ví dụ có chứa sai lầm cho học sinh nhận xét không? Vì sao?*

- Có vì qua phân tích các sai lầm trong ví dụ HS sẽ rút kinh nghiệm, hạn chế khi gặp lại và rèn tư duy lập luận.
- Rất ít khi vì khá mất thời gian để HS nhận xét được sai lầm trong bài toán đó, chỉ đưa ra một số ví dụ điển hình mà HS hay sai nhất nhằm giúp các em rút kinh nghiệm.



**4.** *Thầy cô có thường thiết kế những hoạt động về biến đổi tương đương trong phương trình, bất phương trình trên GSP cho học sinh hình dung không?*

- Có, để giúp HS hiểu rõ bản chất các phép biến đổi này, nhất là phân biệt được phép biến đổi tương đương với hệ quả.
- Nếu thiết kế tốt những hoạt động như vậy thì HS dễ hình dung, nắm vững thêm về lí thuyết từ đó biết suy luận chặt chẽ trong cách trình bày. Tuy nhiên, điều đó là không thường xuyên vì tùy bài và thời gian thế nào.



**5.** *Theo thầy cô những bài trắc nghiệm khách quan có giúp ích gì cho việc chẩn đoán và khắc phục sai lầm của học sinh không? Vì sao?*

- Có vì các phương án nhiễu là dự đoán những lỗi sai của HS. Học sinh có thể nhận ra một số sai lầm khi thực hành hoặc được GV phân tích sau đó.
- Những bài trắc nghiệm khách quan có chất lượng thì giúp ích rất nhiều trong việc chẩn đoán của GV và khắc phục sai lầm của HS. Học sinh củng cố lại kiến thức và rèn được tư duy nhạy bén, suy luận nhanh.



**6.** *Theo thầy cô thì việc cho học sinh tự mắc sai lầm sau đó ta dẫn chứng để bác bỏ có tác dụng giúp đỡ học sinh vượt qua sai lầm như thế nào?*



- Đề HS tự giải quyết bài toán có thể mắc nhiều sai lầm nhưng khi GV phân tích sẽ giúp các em hiểu được vấn đề một cách rõ ràng, chính xác hơn, nhận ra sai lầm của bản thân và rút kinh nghiệm cho các bài giải sau.



*7. Theo thầy cô thì việc dùng hình ảnh minh họa trên GSP để minh họa cho những biến đổi đại số có thể khắc phục phần nào những cách hiểu hình thức, máy móc của các em không? Vì sao?*

- Những biến đổi đại số được minh họa trên GSP giúp HS hoàn thiện hơn các khái niệm, định lý và tạo ra cơ hội khám phá tri thức mới. HS có thể hiểu, nắm bắt được các kỹ thuật để vận dụng giải bài tập chính xác hơn.
- Học sinh nhìn trực quan sẽ nhận thấy chính xác, cụ thể và rõ ràng hơn. Từ đó có thể khắc phục được những kiểu suy luận “vô căn cứ” do hiểu mơ hồ.



*8. Theo thầy cô, việc nêu từng ví dụ cụ thể rồi phân tích sai lầm với cung cấp phương pháp giải từng dạng toán, cách nào hiệu quả hơn để giúp các em vượt qua sai lầm khi lập luận? Tại sao?*

- Cung cấp phương pháp giải từng dạng toán giúp HS hình dung về cách giải tuy nhiên sẽ khiến các em phụ thuộc và không có hướng giải quyết cho một bài toán mới. Nêu từng ví dụ cụ thể rồi phân tích sai lầm giúp HS vượt qua sai lầm khi lập luận nhiều hơn vì HS được tiếp xúc với bài tập thì mới có kinh nghiệm cho bản thân và khắc sâu kiến thức.
- Cung cấp phương pháp giải để HS có cách nhìn tổng thể và nêu ví dụ cụ thể để khắc sâu hơn phương pháp, rèn thêm kỹ năng giải toán.



*9. Thầy cô thường dùng phương pháp dạy học nào để rèn luyện kỹ năng lập luận toán đại số cho học sinh?*

- Phương pháp giải bằng các phép biến đổi tương đương.
- HS sẽ tự giải quyết vấn đề đặt ra, sau đó GV nhấn mạnh những chỗ sai và hoàn chỉnh bài giải.

- Đặt hệ thống câu hỏi, phân tích bài toán bằng cách liên hệ với những bài tập đã giải, những kiến thức liên quan. Thử thay đổi giả thiết, kết luận để HS có sự linh hoạt trong cách suy luận.

**Nhận xét chung:** Qua những ý kiến thu được từ phía GV, chúng ta có thể nêu lên một số nhận xét như sau:

- ❖ GV đã tỏ ra quan tâm nhiều đến những sai lầm của HS khi lập luận toán và tìm cách giúp đỡ các em hạn chế những sai lầm đó trong tiết dạy của mình;
- ❖ Tuy nhiên, do yếu tố khách quan và chủ quan nên vẫn chưa thật sự có một phương pháp nào mạnh nhằm khắc phục sai lầm cho HS khi giải toán. Sự giúp đỡ của GV chỉ là một phần còn quan trọng là sự nỗ lực ở mỗi học sinh;
- ❖ GV đều nhận thấy việc dự kiến tốt sai lầm của HS và phân tích phương pháp giải kết hợp với CNTT giúp ích nhiều cho HS khi học và làm toán nhưng điều này không đơn giản và đòi hỏi GV phải có nhiều kinh nghiệm. Hơn nữa còn tùy thời lượng chương trình và trình độ của HS.

## PHIẾU ĐIỀU TRA HỌC SINH



*1. Khi học về phương trình, bất phương trình em thấy khó nhất điểm nào?*

- Em thấy khó nhất việc phải biến đổi các phương trình, bất phương trình về các dạng quen thuộc. Lập luận bài toán sao cho hoàn chỉnh vì lần nào em cũng bị trừ điểm trình bày.
- Giải và biện luận phương trình, bất phương trình chứa tham số. Các phương trình, bất phương trình chứa căn, chứa trị tuyệt đối vì điều kiện phức tạp và em rất hay quên. Hơn nữa dễ sai khi xét dấu, thử lại nghiệm.

Phần lớn HS đều thấy khó khăn trong việc trình bày lời giải chứng tỏ các em chưa thật sự hiểu về các biến đổi đại số trong phương trình, bất phương trình vì vậy ngại với các dạng chứa tham số.



*2. Khi đọc một bài toán có đề cập đến “những sai lầm thường gặp” em có quan tâm không hay chỉ muốn biết cách giải đúng?*

- Em quan tâm cả hai vì điều đó giúp em giải toán một cách tốt hơn, tránh được những sai sót khi lập luận
- Em quan tâm đến “những sai lầm thường gặp” của bài toán vì nó giúp em hiểu thêm về cách trình bày, rút kinh nghiệm để sau này không vấp phải những lỗi đó. Và từ đó có thể tìm ra được lời giải chính xác cho bài toán.
- Em chỉ muốn biết cách giải đúng để có thể giải được các bài tập tương tự.

Đa số HS đều quan tâm đến “sai lầm thường gặp” nhưng một thực tế thường thấy là HS ngại đọc những sai lầm đó vì các em chỉ muốn có nhanh nhất lời giải đúng để “bất chước” khi gặp lại. Các sai lầm nếu không được phân tích nguyên nhân rõ ràng sẽ làm cho các em dễ lẫn lộn hơn khi giải một dạng toán tương tự do chưa hiểu tường tận và đôi khi chỉ nhớ cách làm sai.



**3. Cách cung cấp những kiến thức cần nhớ có giúp ích được gì cho em khi tiến hành giải toán không?**

- Cách cung cấp những kiến thức cần nhớ là hết sức cần thiết vì nó giúp em hệ thống những kiến thức cơ bản nhanh nhất, thiết thực để vận dụng giải toán một cách hiệu quả, không tốn nhiều thời gian để ngồi nhớ lại chúng.
- Có giúp ích vì kiến thức sẽ ngắn gọn, dễ nhớ, dễ vận dụng, không gây khó khăn trong việc cần phải học gì, nhớ gì. Em hi vọng SGK sẽ có nhiều kiến thức cần nhớ “mở rộng” hơn.

Đa số câu trả lời là “có”, chứng tỏ các em cần được hệ thống kiến thức trọng tâm sau mỗi bài học nhưng với sự giảng giải của thầy cô chứ không phải cung cấp đơn thuần.



**4. Việc minh họa những biến đổi đại số trên GSP (phần mềm động trên máy tính) có giúp em nắm rõ vấn đề hơn không? Em có biết phần mềm hỗ trợ học toán nào không?**

- Nhờ những ví dụ trực quan đó giúp HS dễ nắm bắt, tư duy và chủ động hơn trong việc tiếp thu kiến thức và tiết học cũng sinh động hơn.
- Em không biết phần mềm hỗ trợ GSP cũng như bất kì phần mềm hỗ trợ học toán nào khác.
- Việc minh họa những biến đổi đại số trên GSP (phần mềm động trên máy tính) giúp em quan sát dễ từ đó nắm rõ vấn đề hơn. Phần mềm hỗ trợ học toán: hình học không gian, phần mềm vẽ đồ thị.

Vì được giải thích rõ ràng về GSP trong các tiết dạy máy nên đa số HS đều trả lời là giúp các em dễ hiểu bài học hơn nhưng thật ra ít HS biết đây cũng là phần mềm hỗ trợ học toán. Chỉ xuất hiện số ít câu trả lời có vẻ hiểu rõ và thích thú về các phần mềm toán học. Điều này chứng tỏ CNTT vẫn chưa được ứng dụng nhiều trong trường học để làm minh họa trực quan, giúp HS dễ hình dung vấn đề và tránh cách hiểu mơ hồ đối với các biến đổi đại số “khô khan”.



**5.** Theo em, nếu cung cấp cho em hàng loạt dạng toán với những phương pháp giải kèm theo có hỗ trợ cho em trong việc vượt qua sai lầm khi lập luận toán không ?

- Theo em chỉ tránh được một số dạng mà khi đọc “phương pháp giải” ta hiểu và làm bài tập áp dụng nhiều mới rút kinh nghiệm được.
- Việc cung cấp chỉ đơn thuần giúp em định hướng cách giải khi gặp dạng tương tự còn sai lầm vẫn có thể xảy ra khi lập luận.
- Không hỗ trợ đáng kể trong việc vượt qua sai lầm khi giải toán mà dễ bị lẫn lộn do đó cần có sự hướng dẫn của thầy cô để nắm vững dạng hơn.

Câu hỏi này số HS trả lời “có” và “không” chiếm tỉ lệ gần bằng nhau. Thật ra các em cũng không dám khẳng định mình sẽ vượt qua được sai lầm khi giải toán nếu chưa hiểu rõ các dạng toán được cung cấp, còn phụ thuộc vào sự giúp đỡ nơi thầy cô và tùy bài toán.



**6.** Khi đối diện với một bài toán em thường tìm kiếm dạng quen thuộc đã học hay phân tích bài toán theo nhiều khía cạnh dựa trên kiến thức sẵn có?

- Khi đối diện một bài toán, nếu thấy có dạng quen thuộc thì em tiến hành giải còn không thì tìm cách đưa nó về dạng đã học rồi giải dựa trên những kiến thức có liên quan.
- Em sẽ phân tích bài toán theo nhiều khía cạnh dựa trên kiến thức sẵn có chứ không nhất thiết phải rập khuôn máy móc theo dạng toán quen thuộc để tìm ra phương pháp giải mới.
- Trong trường hợp dạng quen thuộc em đã giải được rồi thì em sẽ thử tìm những cách khác nhanh hơn, gọn hơn dựa trên kiến thức sẵn có.

Qua các câu trả lời trên chứng tỏ HS cũng có hướng giải cho một bài toán nhưng còn thụ động, giải bài toán theo kinh nghiệm là chủ yếu. Câu hỏi này nhằm mục

đích muốn HS cần phải tích cực, linh hoạt trong mọi tình huống thì các em mới có thể khám phá và chinh phục tri thức cho riêng mình.



**7. Giải một phương trình, bất phương trình nếu gặp dạng không quen thuộc em sẽ làm thế nào?**

- Em sẽ dựa vào kiến thức sẵn có để cố gắng biến đổi bài toán về dạng quen thuộc hoặc thử làm một cách làm mà em cho là đúng nhất. Sau đó sẽ thay kết quả tìm được vào phương trình đầu để xem có hợp lí không.
- Phân tích đề, cố nhớ lại những dạng đã gặp tương tự. Nếu không giải ra thì hỏi bạn bè, thầy cô hoặc tìm trên sách tham khảo.

Hướng giải quyết của đa số học sinh là tìm cách đưa về dạng quen thuộc, tìm trên sách tham khảo hoặc hỏi thầy cô. Các em chưa có phương pháp tiếp cận đối với một bài toán mới, thường làm toán theo thói quen và áp dụng công thức chứ không phải tư duy, sáng tạo. Điều này dễ dẫn đến những sai lầm, máy móc khi lập luận.



**8. Em mong muốn được giúp đỡ bằng cách cho em nhiều dạng toán để em học thuộc hay muốn thầy cô dẫn dắt, phân tích từng bài toán cụ thể cho em hiểu rõ và tự mình giải được?**

- Em mong muốn cả hai. Nếu thầy cô dẫn dắt, phân tích từng bài toán cụ thể thì sẽ dễ hiểu hơn và có được những kĩ năng làm toán. Cung cấp cho em nhiều dạng toán để học thuộc vì đó là những kiến thức cơ bản, bổ ích giúp em làm vận dụng làm bài tập.
- Muốn thầy cô dẫn dắt, phân tích từng cách làm vì học vẹt không phải là cách học tốt và bền lâu, khi đã hiểu rồi thì gặp dạng tương tự em có thể giải được.
- Theo em, thầy cô nên cho HS những dạng toán để các em tự nghiên cứu và GV chỉ phân tích dạng toán khó, lạ.

Đa số HS đều muốn được thầy cô dẫn dắt, phân tích các dạng toán để các em hiểu sâu và có thể giải được các dạng tương tự. Một số câu trả lời là muốn được



tự chiếm lĩnh tri thức từ các dạng toán thầy cô đưa ra. Điều này cho thấy vai trò và trách nhiệm của người GV trong việc tìm các biện pháp giúp đỡ HS học toán tốt hơn.



**9.** *Các bài trắc nghiệm khách quan có giúp ích cho em trong việc kiểm tra kiến thức của mình không? Em có thấy thú vị và dễ dàng hơn làm toán tự luận không?*

- Vì làm trắc nghiệm là tiếp xúc với nhiều dạng toán khác nhau, đòi hỏi sự nhanh trí của học sinh và kiến thức rộng, khả năng suy luận tốt cho nên giúp chúng em kiểm tra kiến thức. Trắc nghiệm khó và không dễ dàng nhưng em vẫn thấy rất thú vị.
- Có. Nếu làm nhiều bài trắc nghiệm nhiều thì sẽ gặp khó khăn trong việc giải các bài toán tự luận vì đã quen với cách làm ngắn gọn cho ra đáp số. Đối với em thích làm toán tự luận hơn chứ không dám khẳng định dễ.
- Có nhưng chưa hẳn. Vì làm trắc nghiệm còn nhờ vào may mắn, nếu không giải được một bài toán ta có thể lựa chọn theo cảm tính nhưng tự luận thì cần sự logic, chặt chẽ.

Đa số HS đều thừa nhận rằng làm trắc nghiệm giúp các em kiểm tra được kiến thức của mình và tỏ ra thích thú với trắc nghiệm vì không phải mất công trình bày. Điều này chứng tỏ HS còn chưa vững trong kỹ năng lập luận một bài toán, khả năng diễn đạt, suy luận logic. Bên cạnh đó cũng có nhiều ý kiến cho rằng trắc nghiệm khó hơn và nếu làm nhiều sẽ gặp khó khăn khi giải toán tự luận.



**10.** *Khi lập luận sai một bài toán, em muốn biết vì sao để em tự tìm hướng giải khác hay muốn thầy cô cho em cách làm đúng để em giải lại?*

- Em chọn cách thứ nhất vì em không muốn tạo cho mình một thói quen thụ động trong khi giải toán và nhầm lẫn sâu bài toán. Nếu bài toán quá khó và cách lập luận của chúng ta không chắc chắn thì mới hỏi bạn bè hoặc nhờ thầy cô hướng dẫn.

- Chọn cách 1 vì làm như thế ta rèn được tính kiên trì, khả năng tư duy, sáng tạo. Qua đó ta sẽ nắm vững kiến thức hơn, rút kinh nghiệm cho những lần sau, có vậy mới giúp em thực sự tiến bộ khi học toán.
- Muốn thầy cô cho em cách làm đúng vì nếu tự giải lại cũng dễ lặp lại hướng sai lầm trước do có một số bài em cố gắng tự tìm hướng giải khác nhưng lại không thể.
- Ở câu hỏi này đa số các em đều muốn biết “vì sao sai?” để tự tìm một hướng giải khác. Lí do của các em đã thể hiện khát vọng muốn chinh phục tri thức, tự mình vượt qua những sai lầm khi giải toán. Các em đã không ngại khó để lăn lộn với những bài toán dễ mắc sai lầm thì tại sao chúng ta không tận dụng điều này để giúp đỡ các em học toán tốt hơn và ngày càng yêu thích môn toán.

#### **4. Kết luận sư phạm**

Sau quá trình thực nghiệm diễn ra tương đối thuận lợi và kết thúc, bản thân đã rút ra một số kết luận sau:



#### **ĐỐI VỚI HỌC SINH**

- Tiết dạy có chẩn đoán và phân tích sai lầm làm cho HS tập trung, chú ý hơn vì các em đều muốn biết để tránh khi giải bài tập;
- HS cần “va chạm” với các bài toán trước khi được cung cấp phương pháp giải để nâng cao trình độ tư duy, khả năng xem xét, giải quyết vấn đề, đồng thời rèn luyện kỹ năng làm việc độc lập. Tiết dạy nên có hoạt động nhóm để HS thảo luận cách hiểu, cách tiếp cận vấn đề của mình với người khác. Đó là cách tốt nhất để HS khắc phục sai lầm của bản thân và tự tin hơn trong các bài toán lập luận;
- HS cần ý thức hơn về vai trò chủ thể của mình trong các tiết học và trong việc vượt qua những sai lầm của mình khi giải toán. Các em không nên quá phụ thuộc vào sự dẫn dắt của GV cũng như các dạng toán được cung cấp.



- Ngoài ra, trong luyện tập hàng ngày các em nên cố gắng một đề tìm nhiều cách giải. Từ những góc độ khác nhau, từ nhiều phía để mày mò cách giải, như thế có thể làm cho tính toán linh hoạt, đa dạng. Không ngừng tích lũy kinh nghiệm sẽ từ nhận thức cảm tính nâng lên lý tính, dần dần sẽ cảm giác trước cách giải nào ngắn gọn, hợp lý nhất.



### **ĐỐI VỚI GIÁO VIÊN**

- Giúp đỡ HS của mình vượt qua những sai lầm khi lập luận một bài toán là điều mà bất kì GV nào cũng mong muốn. Tuy nhiên, nó còn phụ thuộc nhiều yếu tố, nhất là phương pháp giảng dạy của GV và trình độ của HS. Đặc biệt, nếu GV chẩn đoán tốt một số khó khăn, sai lầm của HS khi tiếp nhận kiến thức để phân tích và cô đọng nội dung trọng tâm thì sẽ giúp ích rất nhiều cho HS trong việc giảm thiểu sai lầm khi giải toán;
- Bên cạnh đó, GV nên ứng dụng các phần mềm hỗ trợ học toán để minh họa trực quan, giúp HS có cái nhìn chính xác hơn với những biến đổi đại số khó hình dung. Điều này đôi khi giúp HS nhận ra lỗi sai của mình dễ dàng mà GV không cần phải phân tích nhiều;
- Ngoài ra, GV nên hướng dẫn cụ thể cho HS tự học ở nhà vì thời gian đó mới thật sự giúp các em vận dụng những điều đã học nhằm rèn kỹ năng giải toán cho bản thân cũng như phát triển tư duy.

## **KẾT LUẬN**

Qua quá trình nghiên cứu và thực nghiệm, chúng tôi rút ra một số kết luận sau:

### ***1. Về mặt lý luận***

Khoá luận đã phân tích rõ: những nguyên nhân gây nên khó khăn cho HS khi học toán; một số nguyên tắc cho việc dạy và học nhằm giúp HS vượt qua khó khăn khi học toán; một số biện pháp chung nhằm giúp HS khắc phục sai lầm trong lập luận toán: phân đại số. Qua những ví dụ cụ thể, khoá luận đã cho thấy vai trò to lớn của việc chẩn đoán tốt các sai lầm của HS khi đối diện với một bài toán. Khi đó, người GV có thể đề xuất được các biện pháp hợp lý để hạn chế sai lầm cho HS, nhằm giúp các em lĩnh hội tri thức toán một cách chính xác và hoàn thiện.

Ngoài ra, khoá luận còn cho thấy GV cần thiết phải hệ thống cho HS các kiến thức cơ bản, trọng tâm và sự nỗ lực của chính HS trên con đường vượt qua mọi sai lầm trong lập luận toán học.

### ***2. Về mặt vận dụng***

Khoá luận đã sử dụng phần mềm động GSP để thiết kế một số phép biến đổi tương đương, hệ quả trên phương trình, bất phương trình. Đây là một nội dung khó hình dung đối với HS và các em còn hiểu mơ hồ. Mục đích của việc thiết kế nhằm giúp HS hoàn thiện hơn các khái niệm đó và khám phá những kiến thức mới. Qua đó giúp HS hiểu và nắm bắt được các kỹ thuật, đồng thời áp dụng để giải các bài toán trong khuôn khổ của nội dung chương trình.

### ***3. Về mặt thực nghiệm***

Khoá luận đã kiểm chứng tính hiệu quả của tiết học có dự kiến sai lầm, phân tích phương pháp và làm bài tập vận dụng trong việc giúp HS vượt qua những sai lầm khi lập luận đại số. Dữ liệu thu thập được minh chứng một phần cho điều này. Bên cạnh đó việc giúp đỡ các em còn phụ thuộc nhiều yếu tố.

**❖ Lời kiến nghị**

- Làm thế nào để HS có được một kiến thức cơ bản, vững chắc, tránh được những sai lầm trong lập luận toán học? Tất nhiên người GV phải có phương pháp dạy sao cho vừa đảm bảo cung cấp đầy đủ kiến thức trong chương trình vừa rèn luyện các kỹ năng cần thiết và phát triển tư duy cho các em. Khi kiến thức đến với các em một cách tự nhiên, không gò bó thì các em sẽ tiếp thu bài tốt hơn, dễ dàng khắc sâu. Điều này đòi hỏi GV phải có trình độ chuyên môn sâu rộng, có trình độ sư phạm lành nghề mới có thể tổ chức, hướng dẫn các hoạt động của HS mà nhiều khi diễn biến ngoài tầm dự kiến của GV;
- Tăng cường hướng dẫn HS biết sử dụng các phần mềm hỗ trợ cho việc học toán;
- Thường xuyên đưa vào tiết học những bài toán có chứa sai lầm cho HS nhận xét, GV phân tích và chốt lại phương pháp. Mục đích giúp HS phát triển tư duy logic chặt chẽ và khả năng toán học tiềm tàng của bản thân.

**❖ Hướng mở rộng của đề tài**

- Giúp HS vượt qua những sai lầm trong lập luận toán học là một đề tài không lạ nhưng để nêu được biện pháp thật hiệu quả nhằm hạn chế sai lầm thì thật sự chưa có một phương pháp cụ thể. Hơn nữa, đề tài chưa bao quát được hết chương trình đại số ở phổ thông. Đề tài có thể mở rộng theo hướng này;
- Phần vận dụng thiết kế minh họa cho những biến đổi đại số nhằm giúp HS hình dung chỉ tập trung ở nội dung các định lý về phương trình tương đương, hệ quả. Vì thế có thể mở rộng phạm vi nghiên cứu của đề tài lớn hơn là chương trình toán THPT;
- Quá trình thực nghiệm của đề tài chỉ diễn ra ở một trường THPT, trên các đối tượng HS tương đối đồng đều. Do đó, đề tài có thể mở rộng bằng việc nghiên cứu trên nhiều đối tượng HS khác nhau của nhiều trường khác nhau.

*Mặc dù bản thân đã có rất nhiều cố gắng nhưng khóa luận chắc chắn không tránh khỏi những sai sót. Rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của quý thầy cô và các bạn để khóa luận được hoàn thiện hơn.*

*Một lần nữa xin chân thành gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy hướng dẫn.*

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

### Tiếng Việt

- [1] Trần Vui, *Nâng cao chất lượng dạy học Toán theo những xu hướng mới*, giáo trình khoa Toán trường ĐHSP Huế, 2006
- [2] Nguyễn Vĩnh Cận, Lê Thống Nhất, Phan Thanh Quang, *Sai lầm phổ biến khi giải Toán (dùng cho HS và GV dạy Toán THPT)*, NXB Giáo dục, 2004
- [3] Trần Phương (Hà Nội), Nguyễn Đức Tuấn (TP Hồ Chí Minh), *Sai lầm thường gặp và các sáng tạo khi giải Toán*, NXB Hà Nội, 4 - 2006
- [4] Đào Văn Trung, *Làm thế nào để học tốt Toán phổ thông*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2001
- [5] Phạm Quốc Phong, *Các chuyên đề nâng cao Toán THPT (Đại số và Giải tích)*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2004
- [6] Trần Thuý Hiền, *Chẩn đoán và khắc phục một số khó khăn trong học toán của học sinh THPT - Giới hạn và Đạo hàm*, Luận văn thạc sĩ ĐHSP Huế, 2007
- [7] Nguyễn Ngọc Anh, *540 Bài toán Đại số 10 Nâng cao (Dùng cho HS Khá - Giỏi chuyên Toán)*, NXB trẻ, 7 - 1998
- [8] Đoàn Quỳnh, *Tài liệu bồi dưỡng giáo viên - Đại số 10 nâng cao*, NXB Giáo dục, 2006.

### Tiếng Anh

- [1] V.M.Bradis, V.L.Minkovskii and A.K.Kharcheva, *Lapses in Mathematical reasoning*, Dover publications, INC. Mineola. NewYork, 2006.

## **PHỤ LỤC**

**Trường THPT Phú Lộc**

**Giáo án thực tập số 2**

**Tên bài dạy: Hàm số liên tục (Đại số và Giải tích 11)**

GV hướng dẫn: Thầy Hồ Ngọc Thạch

SV soạn và lên lớp: Nguyễn Thị Hoàng Tâm

Tiết (theo PPCT): 58

Lớp: 11/9

Phòng: 11

Ngày 07/03/2008 - Thứ 6

**I. Mục tiêu:** Qua bài học, học sinh cần nắm được:

**1. Về kiến thức:**

- Định nghĩa hàm số liên tục tại một điểm, hàm số liên tục trên một khoảng, một đoạn.

- Các định lý cơ bản về hàm số liên tục.

**2. Về kỹ năng:**

- Xác định được tính liên tục của hàm số tại một điểm dựa vào định nghĩa.

- Biết cách vận dụng các định lý cơ bản để xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

- Chứng minh phương trình có nghiệm ở dạng đơn giản.

**3. Về tư duy:**

- Kết hợp kiến thức cũ và mới.

- Hiểu được định nghĩa và xét tính liên tục của hàm số trong trường hợp cụ thể.

**4. Về thái độ:**

- Phát huy tính tích cực trong học tập.
- Hiểu được ý nghĩa hình học của một hàm số liên tục.

**II. Chuẩn bị:**

1. Giáo viên: Giáo án điện tử, projector, màn chiếu, SGK, phiếu học tập, bảng phụ về đồ thị các hàm số sơ cấp cơ bản.
2. Học sinh: Các kiến thức đã học trong phần giới hạn hàm số.

**III. Gợi ý phương pháp dạy học:**

Cơ bản dùng phương pháp gợi mở vấn đáp, phát huy tính tích cực của học sinh, giúp HS hình dung và tự kiến tạo tri thức thông qua hình ảnh trực quan trên máy tính.

**IV. Tiến trình bài học và các hoạt động**

1. Ổn định lớp (1 phút).
2. Nội dung bài mới:

**HD1: Giải quyết bài toán ở SGK nhằm đưa đến định nghĩa**

Hoạt động của học sinh	Hoạt động của giáo viên
<b>TL1:</b> - Đang lưu thông  <b>TL2:</b> - Giao thông đường bộ gián đoạn	Mở file HAMSOLIEN TUC. Chiếu <b>slide 1</b> .  Cho HS quan sát hình ảnh cầu sông Hàn lúc bình thường và khi quay để HS có cái nhìn sơ bộ về sự liên tục, gián đoạn trong thực tế.  <b>H1:</b> Nhận xét gì về giao thông đường bộ và đường thủy lúc này?  <b>H2:</b> Khi cầu quay thì thế nào?  * GV dẫn vào bài mới: Đối với hàm số, sự liên tục và gián đoạn có tính chất như thế nào ta sẽ nghiên cứu bài học hôm nay.

<p><b>TL3</b></p> $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1; f(1) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ $\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ <p>Vậy <math>f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)</math></p> <p><b>TL4:</b> - Tại điểm có hoành độ <math>x = 1</math>, đồ thị của <math>f(x)</math> là đường liên nét, đồ thị của <math>g(x)</math> bị đứt đoạn.</p>	<p><b>H3:</b> Chiếu <i>slide 4</i>. Cho HS làm hoạt động 1 ở SGK</p> <p>* GV treo bảng phụ, gọi 1 HS lên bảng điền kết quả câu a) vào bảng, dưới lớp làm vào vở rồi nhận xét bài bạn.</p> <p>GV chiếu <i>slide 5</i> và nhận xét bài làm của HS</p> <p>GV liên kết file MinhhoaHĐ1.gsp cho HS quan sát và trả lời câu b)</p> <p>Gợi ý: Xem tại điểm có hoành độ <math>x = 1</math> đồ thị là đường liên nét hay đứt đoạn</p> <p>GV: Hàm số <math>y = f(x)</math> được gọi là liên tục tại <math>x = 1</math> và <math>y = g(x)</math> không liên tục tại điểm này.</p>
---	--

**HĐ2: Định nghĩa hàm số liên tục tại một điểm. Ví dụ áp dụng**

Hoạt động của học sinh	Hoạt động của giáo viên
<p>Ghi đề bài.</p> <p><b>TL1:</b> Xảy ra 1 trong 3 trường hợp:</p> <p>+ Không tồn tại <math>f(x_0)</math>;</p> <p>+ Không tồn tại giới hạn hữu hạn <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)</math>;</p> <p>+ Tồn tại <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)</math> nhưng <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)</math>.</p>	<p>Sang <i>slide 6</i>. Kích hiện tiêu đề 1.</p> <p><i>Định nghĩa</i> hàm số liên tục tại một điểm và gián đoạn.</p> <p>Vậy một hàm số gián đoạn tại điểm <math>x_0</math> nếu thỏa điều kiện gì?</p> <p>Gợi ý cho HS trả lời dựa theo định nghĩa</p> <p>GV chiếu <i>slide 7</i>.</p>

<p><b>TL2:</b> HS tiến hành làm vào giấy.</p> <p>a) Ta có: <math>f(3) = 5</math></p> $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 1) = 2 \neq f(3) = 5$ <p>Vậy hàm số <math>f(x)</math> không liên tục tại <math>x = 3</math>.</p> <p>b) Ta có: <math>f(5) = 4</math></p> $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x - 1) = 4 = f(5)$ <p>Vậy hàm số <math>f(x)</math> liên tục tại <math>x = 5</math>.</p> <p>HS lắng nghe để nắm các bước</p>	<p><b>Ví dụ áp dụng 1:</b></p> <p>a) Xét tính liên tục của hàm số</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{nếu } x \neq 3 \\ 5 & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$ <p>tại <math>x = 3</math></p> <p>b) Xét tính liên tục của hàm số</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} & \text{nếu } x \neq 5 \\ 4 & \text{nếu } x = 5 \end{cases}$ <p>tại <math>x = 5</math></p> <p>Chia lớp thành 2 dãy và tất cả HS làm trên giấy nháp. Hướng dẫn HS dựa theo định nghĩa để tìm các bước.</p> <p>Gọi 2 HS lên bảng trình bày, GV nhận xét.</p> <p>GV chốt lại các bước xét tính liên tục của hàm số tại một điểm:</p> <p>Bước 1: Tính <math>f(x_0)</math>, nếu tồn tại chuyển sang bước 2;</p> <p>Bước 2: Tính <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)</math>, nếu tồn tại giới hạn hữu hạn thì chuyển sang bước 3;</p> <p>Bước 3: So sánh để kết luận theo định nghĩa:</p> <p>+ Nếu <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)</math> thì hàm</p>
--	--



	<p>số <math>y = f(x)</math> liên tục tại điểm <math>x_0</math> ;</p> <p>+Nếu <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)</math>, hàm số <math>y = f(x)</math> gián đoạn tại điểm <math>x_0</math> .</p> <p>Liên kết file: MinhhoaVD.gsp cho HS hình dung về sự liên tục hay gián đoạn của các hàm số. Bây giờ xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng ta làm thế nào?</p>
--	--

**HĐ3: Định nghĩa hàm số liên tục trên một khoảng. Một số định lí cơ bản**

Hoạt động của học sinh	Hoạt động của giáo viên
HS lắng nghe để hiểu định nghĩa	<p>Sang <b>slide 9</b>, định nghĩa hàm số liên tục trên một khoảng.</p> <p>GV tóm tắt: Hàm số <math>f</math> liên tục trên khoảng <math>(a, b)</math> khi <math>f</math> liên tục tại mọi <math>x_0 \in (a, b)</math> .</p> <p>Dẫn dắt: Xét đoạn <math>[a, b] = (a, b) \cup \{a\} \cup \{b\}</math>, vậy hàm số liên tục trên đoạn <math>[a, b]</math> khi nào?</p> <p>GV hiển thị định nghĩa trong <b>slide 9</b>.</p> <p>GV tóm tắt: <math>f</math> liên tục trên <math>[a, b]</math> khi</p> $\begin{cases} f \text{ liên tục trên } (a, b) \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) \end{cases}$

<p><b>TL1:</b> <math>f</math> liên tục trên <math>(a, b)</math> và</p> $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ <p><b>TL2:</b> Đồ thị hàm đa thức liên tục trên tập số thực <math>\mathbf{R}</math></p> <p>Đồ thị hàm phân thức, lượng giác liên tục trên các khoảng xác định của chúng.</p>	<p>Từ đây, yêu cầu HS định nghĩa tương tự khi xét tính liên tục của hàm số <math>f</math> trên nửa khoảng <math>(a, b]</math>?</p> <p>Gợi ý: <math>(a, b] = (a, b) \cup \{b\}</math></p> <p>GV hiện thị nhận xét trong <b>slide 9</b>, liên kết qua file MinhhoaNX.gsp để HS hình dung rõ hơn về nhận xét.</p> <p>GV treo hình vẽ sẵn đồ thị các hàm số: đa thức, phân thức hữu tỷ, các hàm lượng giác. Hỏi: nhận xét gì về tính liên tục của mỗi hàm trên tập xác định của chúng?</p> <p>GV gợi ý: Xét xem đồ thị là đường liên tục hay đứt đoạn trên từng khoảng của tập xác định.</p> <p>GV chiếu <b>slide10</b> về một số định lý cơ bản.</p> <p><b>Ví dụ 2 :</b></p> <p>Cho hàm số :</p> $h(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 5 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ <p>Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.</p>
--	--

<p><b>TL3: TXĐ: <math>\mathbf{R}</math></b></p> <p>Nếu <math>x \neq 1</math> thì <math>h(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1}</math> là hàm phân thức hữu tỷ có TXĐ là <math>(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)</math> nên liên tục trên mỗi khoảng <math>(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)</math>.</p> <p>Nếu <math>x = 1</math> ta có <math>h(1) = 5</math></p> $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2 \neq h(1)$ <p>Nên <math>h(x)</math> không liên tục tại <math>x = 1</math></p> <p>Kết luận: hàm số <math>h(x)</math> liên tục trên các khoảng <math>(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)</math> và gián đoạn tại <math>x = 1</math>.</p> <p><b>TL 4 : Thay 5 bởi 2</b></p> <p>Vì để có <math>\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2 = h(1)</math>.</p>	<p>* Hướng dẫn: TXĐ của <math>h(x)</math>?</p> <p>Nếu <math>x \neq 1</math> thì <math>h(x)</math> được cho bởi công thức nào? Hãy xét tính liên tục theo ĐL1.</p> <p>Nếu <math>x = 1</math> thì xét tính liên tục như VD1.</p> <p>GV chiếu <b>slide 11</b> về kết quả và nhận xét.</p> <p>* Hỏi : Cần thay số 5 bởi số nào để được một hàm số mới liên tục trên tập số thực <math>\mathbf{R}</math> ?</p> <p>GV liên kết qua file hslientuc.gsp để HS hình dung và trả lời câu hỏi trên quan sát. Sau đó yêu cầu chứng minh.</p> <p>GV chốt lại : Giúp HS phân biệt cách xét tính liên tục của hàm số có một trong hai dạng sau :</p> <p>Dạng 1 : <math>f(x) = \begin{cases} f_1(x) &amp; \text{nếu } x \neq x_0 \\ f_2(x) &amp; \text{nếu } x = x_0 \end{cases}</math> tại <math>x = x_0</math></p> <p>Dạng 2: <math>f(x) = \begin{cases} f_1(x) &amp; \text{nếu } x \geq x_0 \\ f_2(x) &amp; \text{nếu } x &lt; x_0 \end{cases}</math> tại <math>x = x_0</math></p> <p>Với dạng 1 xét tính liên tục như các bước ở trên. Với dạng 2 ta có các bước sau:</p>
---	---

<p>HS theo dõi để hiểu rõ, vận dụng giải bài tập</p> <p>HS tiếp nhận vấn đề</p> <p>HS quan sát</p>	<p><b>Bước 1:</b> Tính <math>f(x_o) = f_1(x)</math>, nếu tồn tại chuyển sang bước 2</p> <p><b>Bước 2:</b> Tính các giới hạn:</p> $\lim_{x \rightarrow x_o^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_o^+} f_1(x) \quad (1)$ $\lim_{x \rightarrow x_o^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_o^-} f_2(x) \quad (2)'$ <p>so sánh (1) và (2):</p> <p>+ Nếu (1) <math>\neq</math> (2) thì không tồn tại <math>\lim_{x \rightarrow x_o} f(x)</math> nên hàm số không liên tục</p> <p>+ Nếu (1) = (2) thì chuyển sang bước 3</p> <p><b>Bước 3:</b> So sánh <math>f(x_o)</math> và <math>\lim_{x \rightarrow x_o} f(x)</math>, kết luận về sự liên tục theo định nghĩa.</p> <p>*Treo bảng phụ tóm tắt các bước trên để HS ghi nhớ.</p> <p>* Dẫn dắt : Giả sử hàm số <math>y = f(x)</math> liên tục trên đoạn <math>[a, b]</math> với <math>f(a), f(b)</math> trái dấu. Hỏi đồ thị của hàm số có cắt trục hoành tại điểm thuộc khoảng <math>(a, b)</math> không ?</p> <p>GV liên kết qua file Minhhoapt.gsp để HS hình dung.</p> <p>Chiếu toàn bộ <b>slide13</b> về định lí 3 và các nhận xét.</p> <p><b>Ví dụ 3:</b> Chứng minh phương trình <math>x^3 - 2x + 5 = 0</math> có ít nhất một nghiệm.</p>
--	--

HS trả lời nhanh tại chỗ.	GV hướng dẫn HS về nhà nghiên cứu, giờ BT chữa. Chiếu toàn bộ <b>slide14</b> về trắc nghiệm khách quan, HS trả lời tại chỗ.
---------------------------	--

**HD5: Củng cố và hướng dẫn HS tự học ở nhà**

\* Củng cố: Chiếu **slide 15**.

- Nắm định nghĩa hàm số liên tục tại một điểm  $x_0$  và hàm số gián đoạn khi nào.
- Các bước xét tính liên tục của hàm số tại một điểm.
- Định nghĩa hàm số liên tục trên đoạn  $[a, b]$ .
- Tính liên tục của các hàm đa thức, phân thức hữu tỷ, lượng giác và định lí về phương trình có nghiệm.

\* BTVN:

1. Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 1 & \text{nếu } x \leq 1 \\ 3x + 2 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

- a) Xét tính liên tục của  $f(x)$  tại  $x = 1$
  - b) Thay 2 bởi số nào để  $f$  liên tục tại  $x = 1$ .
2. Bài tập 1\_6 trang 140, 141 SGK.
3. Chuẩn bị cho tiết tiếp theo của bài này.



Tác giả khoá luận (Nguyễn Thị Hoàng Tâm)  
đang thực nghiệm bài dạy có chuẩn đoán và khắc phục sai lầm cho  
HS thông qua minh họa trực quan và phân tích phương pháp.

## ĐƠN XÁC NHẬN THỰC NGHIỆM KHOA LUẬN

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM  
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

### ĐƠN XIN XÁC NHẬN THỰC NGHIỆM KHOA LUẬN TỐT NGHIỆP

Kính gửi Ban Giám Hiệu trường THPT Phú Lộc.

Kính gửi quý thầy cô trong tổ Toán - Tin.

Em tên là: Nguyễn Thị Hoàng Tâm.

Sinh viên khoa Toán trường ĐHSP Huế\_ Niên khóa 2004 - 2008.

Trong thời gian thực tập tại trường THPT Phú Lộc em đã tiến hành thực nghiệm đề tài khóa luận tại lớp 11/9.

Thời gian: Thứ 6 ngày 07 tháng 03 năm 2008, tiết 8.

Nội dung thực nghiệm : bài Hàm số liên tục, tiết 58 (Đại số và giải tích 11).

Với đề tài khóa luận: “Giúp học sinh THPT vượt qua những sai sót trong lập luận Toán học \_ phần Đại số”.

Xác nhận của nhà trường:

Sinh viên Nguyễn Thị Hoàng Tâm đã tiến hành thực nghiệm  
đề tài khóa luận như sau:  
.....  
.....

Phú Lộc, ngày 04/4/2008

Tổ trưởng Tổ Toán

*Trần Minh Lương*

Trần Minh Lương

Phú Lộc, ngày 04 tháng 4 năm 2008

Sinh viên thực tập

*Th*

Nguyễn Thị Hoàng Tâm



NGUYỄN KHẢ

**PHIẾU ĐIỀU TRA GIÁO VIÊN**

Để phục vụ cho việc thu thập dữ liệu dùng trong nghiên cứu giáo dục Toán, kính mong thầy cô trả lời những câu hỏi sau:

1. Khi giải phương trình, bất phương trình thầy cô nhận thấy học sinh sai lầm nhiều nhất ở điểm nào?

..... sai lầm pt ẩn tại, gặp biến đổi tương đương  
đến phía vế pt ẩn giản dễ giải.....

2. Thầy cô thường giúp học sinh giải bài toán bằng nhiều cách hoặc mở rộng bài toán hay chỉ tập trung nắm vững một cách giải? Vì sao?

..... mở rộng nhiều cách giải, sau đó chốt lại các  
giải nào đó giản, rõ ràng. Giúp học sinh tự duy  
và phát triển khả năng suy luận, nắm được nhiều trong quá trình  
tìm cách giải.....

3. Thầy cô có thường dẫn ra những ví dụ có chứa sai lầm cho học sinh nhận xét không? Vì sao?

..... Có. Giúp học sinh tránh sai trong quá trình  
giải.....

4. Thầy cô có thường thiết kế những hoạt động về biến đổi tương đương trên phương trình, bất phương trình, bất đẳng thức cho học sinh hình dung không?

..... Có. Về giải tập đường thì bài giải chốt lại,  
lưu ý và giúp học sinh rèn luyện tính cẩn thận  
khi làm.....

**Thu thập ý kiến giáo viên**



**PHIẾU ĐIỀU TRA HỌC SINH**

1. Khi học về phương trình, bất phương trình em thấy khó nhất điểm nào?

Khi học về phương trình, bất phương trình em thấy khó nhất ở phần lập luận và trình bày bài toán.

2. Khi đọc một bài toán em có đề cập đến những sai lầm thường gặp em có quan tâm không hay chỉ muốn biết cách giải đúng? Vì sao?

Khi đọc một bài toán có đề cập đến những sai lầm thường gặp em có quan tâm. Vì nó sẽ giúp cho em khắc phục những sai lầm trong khi giải bài.

3. Cách cung cấp những kiến thức cần nhớ có giúp ích được gì cho em khi tiến hành giải toán không?

Cách cung cấp những kiến thức cần nhớ có giúp ích cho em khi tiến hành giải toán cụ thể là những kiến thức về ngôn ngữ, để nhớ để vận dụng không gây khó khăn trong việc cần phải học gì, nhớ gì.

4. Việc minh họa những biến đổi đại số trên GSP có giúp em nắm rõ vấn đề hơn không? Em có biết phần mềm hỗ trợ học toán nào không?

Việc minh họa những biến đổi đại số trên GSP giúp em nắm rõ vấn đề hơn.

Hiện nay em vẫn chưa biết phần mềm hỗ trợ học toán nào.

5. Theo em, nếu cung cấp cho em hàng loạt dạng toán với những phương pháp giải kèm theo có hỗ trợ cho em trong việc né tránh sai lầm khi lập luận toán không?

Nếu cung cấp cho em hàng loạt dạng toán với những phương pháp giải kèm theo sẽ hỗ trợ cho em rất nhiều trong việc né tránh sai lầm khi lập luận toán.

**Thu thập ý kiến học sinh**