

MINISTERIO DE EDUCACION Y CULTURA

Certificados de Inscripción y de Derechos de Autor N° 002482 ; 002483

Prohibida la reproducción parcial o total de este libro.

LOS AUTORES

PRESENTACION

Este texto de Geometría Primera Parte está dedicado a los estudiantes que se preparan para ingresar a las diferentes Instituciones que imparten Educación Superior en las diferentes ramas de la Ingeniería.

El Objetivo es lograr unificar los conocimientos de Geometría que los estudiantes reciben en los establecimientos de Educación Media.

El texto presenta contenidos de Geometría Plana, Problemas y Ejercicios resueltos.

OCTUBRE 2001

Donado a la
ESPE - LTA
por el Sr. Xavier Zamayo
el 18-07/2002.

GEOMETRIA PLANA

UNIDAD 1

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

| | |
|--|---|
| 1.1. Términos no definidos | 1 |
| 1.2. Plano | 2 |
| 1.3. Punto | 2 |
| 1.4. Posición relativa Punto – Plano | 3 |
| 1.5. Figuras Geométricas | 3 |
| 1.6. Recta | 3 |
| 1.7. Posición relativa Punto – Recta | 3 |
| 1.8. Posición relativa de dos rectas en un plano | 3 |
| 1.9. Segmento | 4 |
| 1.10. Segmento Abierto | 4 |
| 1.11. Segmento Semiabierto | 4 |
| 1.12. Semirecta | 4 |
| 1.13. Rayo | 4 |
| 1.14. Proposiciones | 5 |
| 1.15. Problema | 7 |
| 1.16. Congruencia | 7 |
| 1.17. Equivalencia | 7 |
| 1.18. Semejanza | 8 |
| 1.19. Identidad | 8 |
| 1.20. La Demostración | 8 |

UNIDAD 2

PROPORCIONALIDAD

| | |
|--|----|
| 2.1. Razón | 13 |
| 2.2. Proporción | 13 |
| 2.3. Segmento Unitario | 15 |
| 2.4. Longitud de un Segmento | 15 |
| 2.5. Propiedades de un Segmento | 15 |
| 2.6. Operaciones con Segmentos | 16 |
| 2.7. División de un Segmento en partes congruentes | 17 |

| | |
|--|----|
| 2.8. División Interna de un Segmento | 17 |
| 2.9. División Externa de un Segmento | 18 |
| 2.10. División Armónica de un Segmento | 18 |
| 2.11. División en Media y Extrema razón de un Segmento | 18 |
| 2.12. Ejercicios | 19 |

UNIDAD 3

ANGULOS

| | |
|--|----|
| 3.1. Definición | 31 |
| 3.2. Representación gráfica y elementos | 31 |
| 3.3. Denominación | 31 |
| 3.4. Unidades de medida | 31 |
| 3.5. Medida de un ángulo | 32 |
| 3.6. Congruencia de ángulos | 32 |
| 3.7. Clases de ángulos | 32 |
| 3.8. Rectas perpendiculares | 33 |
| 3.9. Perpendicular de un Punto a una Recta | 34 |
| 3.10. Distancia de un Punto a una Recta | 34 |
| 3.11. Proyección Ortogonal | 34 |
| 3.12. Mediatriz | 34 |
| 3.13. Simetría | 35 |
| 3.14. Bisectriz | 36 |
| 3.15. Propiedades | 36 |
| 3.16. Ejercicios | 39 |

UNIDAD 4

TRIANGULOS

| | |
|--|----|
| 4.1. Definiciones Básicas | 49 |
| 4.2. Clasificación | 50 |
| 4.3. Líneas y Puntos fundamentales | 50 |
| 4.4. Propiedades | 53 |
| 4.5. Congruencia de Triángulos | 70 |
| 4.6. Triángulos Isósceles y Equilátero | 71 |

| | |
|---|-----|
| 4.7. Triángulo Rectángulo | 73 |
| 4.8. Desigualdades | 74 |
| 4.9. Ejercicios | 74 |
| 4.10. Transversales | 77 |
| 4.11. Semejanza de Triángulos | 104 |
| 4.12. Relaciones Métricas y Trigonométricas | 120 |
| 4.13. Area de un Triángulo | 151 |
| 4.14. Lugares Geométricos Básicos | 166 |

UNIDAD 5

CIRCULOS

| | |
|--|-----|
| 5.1. Definiciones Básicas | 169 |
| 5.2. Líneas y Puntos Fundamentales | 169 |
| 5.3. Angulos en un Círculo | 170 |
| 5.4. Ejercicios | 173 |
| 5.5. Cuerdas | 183 |
| 5.6. Tangentes y Secantes | 185 |
| 5.7. Ejercicios | 187 |
| 5.8. Posición Relativa de dos Círculos | 209 |
| 5.9. Círculo y Triángulo | 222 |
| 5.10. Areas Circulares | 231 |

UNIDAD 6

POLIGONOS Y CUADRILATEROS

| | |
|---|-----|
| 6.1. Definición | 255 |
| 6.2. Denominación | 255 |
| 6.3. Elementos | 255 |
| 6.4. Clasificación | 256 |
| 6.5. Congruencia de Polígonos | 226 |
| 6.6. Semejanza de Polígonos | 257 |
| 6.7. Propiedades | 259 |
| 6.8. Propiedades de los Polígonos Regulares | 260 |

| | |
|---------------------------------|-----|
| 6.9. Ejercicios | 265 |
| 6.10. Cuadriláteros | 275 |
| 6.11. Paralelogramo | 293 |
| 6.12. Rombo | 293 |
| 6.13. Rectángulo | 294 |
| 6.14. Cuadrado | 295 |
| 6.15. Trapecio | 296 |
| 6.16. Trapecio Isósceles | 297 |
| 6.17. Trapecio Rectángulo | 297 |
| 6.18. Ejercicios | 298 |

UNIDAD 1

1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Geometría, es la ciencia de las formas espaciales del mundo material, se basa en un conjunto de proposiciones que estudia la forma, propiedades y medida de las figuras y cuerpos geométricos; entendiéndose por proposición el enunciado de una ley o un principio. Es necesario considerar que las proposiciones no deben ser contradictorias y todos los resultados y conclusiones que se obtengan de ellas tampoco deben ser contradictorios entre sí, ni con los conocimientos ya existentes.

La geometría es una ciencia y un arte, es decir, es al mismo tiempo matemática y filosofía. Forma uno de los sistemas más perfectos de lógica que se conocen. Proporciona una disciplina mental y conocimientos indispensables para seguir estudios superiores.

Aunque la geometría es una de las partes más antiguas de la matemática, en la actualidad ha encontrado nuevas áreas de aplicación en campos tan diversos como la exploración del espacio.

En geometría aprendemos a comprobar las proposiciones por razonamiento deductivo o inductivo, analizando un problema en términos de los datos que se den, las leyes y principios que pueden aceptarse como verdaderos y mediante una reflexión cuidadosa, lógica y exacta, seleccionar una solución para el problema.

Una causa común de desavenencias, no sólo en geometría, sino en todas las actividades humanas, es el hecho de que la misma palabra puede tener distintos significados para diferentes personas; por tanto es necesario que los términos que usemos en las demostraciones tengan el mismo significado para cada uno de nosotros.

1.1. TÉRMINOS NO DEFINIDOS

Los objetos que rodean al hombre, forman en su mente el concepto de rectas y de curvas, de figuras planas y de cuerpos con formas y volúmenes diferentes.

Al observar varios cuerpos geométricos, algunos tienen la misma forma, ejemplo: el tronco de un árbol, una lata de conservas, un tubo de oleoducto; tienen una forma común, sin tomar en cuenta su material, color, peso, posición, etc., se produce en nuestra mente una **idea abstracta** a la cual se le da un nombre en este caso, **cilindro**.

Del mismo modo, en la construcción de una casa, las paredes (verticales) y pisos (horizontales), nos da la idea de perpendicularidad y paralelismo.

Los conceptos geométricos básicos son por lo tanto abstractos y existen sólo en nuestra mente. Los conocimientos iniciales de las propiedades y de las formas espaciales se obtienen por inducción, es decir, por medio de observaciones y experiencias reiteradas.

En el idioma existen palabras que son difíciles definir y se los describe en términos de otras palabras igualmente no definidas; tales definiciones se llaman "**tautologías**".

De esta manera, muchas palabras no se pueden definir sin caer en un círculo vicioso y siempre empezaremos con uno o más términos que no están definidos.

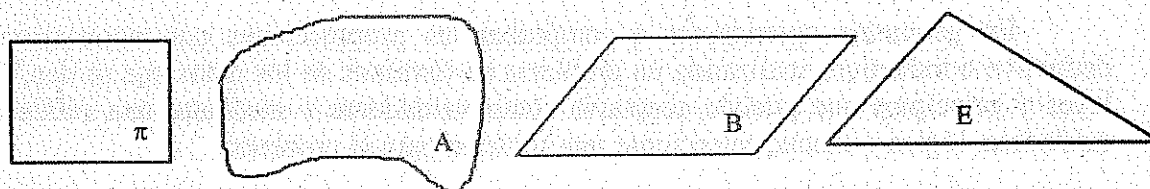
Al usar un término no definido, se supone que la palabra es tan elemental que todos conocen su significado, puesto que no hay palabras más sencillas para definir el término.

La geometría usa los siguientes términos no definidos: punto, recta, plano, espacio, medida. En la primera parte del contenido de este trabajo presentaremos proposiciones que relacionen puntos y rectas, los puntos serán los elementos de un plano y las rectas serán subconjuntos del mismo plano formadas por puntos, de ésta manera desarrollaremos la **Geometría Plana**; posteriormente añadiremos otras proposiciones que relacionen planos, puntos y planos, rectas y planos para desarrollar la **Geometría del espacio**.

1.2. PLANO

Una hoja de papel lo más extensa posible da la idea del concepto abstracto de plano.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN



Por medio de una letra mayúscula ubicada en el interior de su representación.

1.3. PUNTO

Para desarrollar muchos sistemas matemáticos, se empieza considerando un conjunto de elementos. Los elementos considerados en geometría son llamados **puntos**.

Podemos representar el punto con una minúscula marca en el pizarrón, pero ésta no es un punto; si podríamos subdividir la marca y cada parte subdividirla nuevamente en marcas más pequeñas y así indefinidamente, todavía no tendríamos un punto.

Euclides definió el punto como el elemento geométrico que tiene posición pero no dimensión, sin embargo la palabra "posición y dimensión" tampoco han sido definidas y no se estaría mejor que antes, tendríamos varias palabras que definir en vez de una; la solución del dilema es sencilla: la palabra punto no se define. Lo esencial es que todos tenemos una noción intuitiva bastante buena de lo que es un punto.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN

Por medio de una marca (\cdot o \times).

Por medio de una letra mayúscula escrita cerca de la representación gráfica, ejemplo:

$\cdot A$ o $\times A$

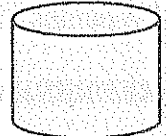
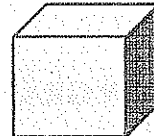
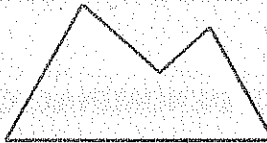
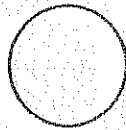
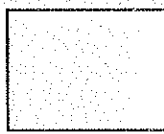
1.4. POSICIÓN RELATIVA PUNTO - PLANO

1) **COPLANAR.** Si el punto es elemento del plano.

2) **EXTERNO.** Si el punto no es elemento del plano.

1.5. FIGURAS GEOMÉTRICAS

Al observar los diferentes cuerpos y figuras geométricas, encontraremos que todos tienen algo en común y son los puntos. De esto podríamos concluir que una figura geométrica es un conjunto no vacío de puntos.



1.6. RECTA

La huella dejada al doblar una hoja de papel nos da la idea abstracta de recta. En dicha recta pueden marcarse infinitos puntos, por lo tanto, la recta es una figura geométrica, subconjunto de un plano.

DETERMINACIÓN

Dos puntos determinan una recta.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN



Por medio de dos letras mayúsculas que representan a dos puntos cualesquiera de la recta o por medio de una letra mayúscula cerca de la recta. \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{B}

1.7. POSICIÓN RELATIVA PUNTO - RECTA

1) **COLINEAL.** Si el punto es elemento de la recta.

2) **EXTERNO.** Si el punto no es elemento de la recta.

1.8. POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS EN UN PLANO

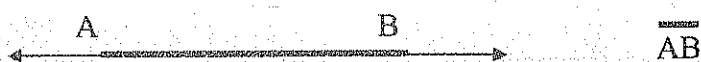
1) **PARALELAS.** Si la intersección es un conjunto vacío.

2) **SECANTES.** Si su intersección es un punto.

1.9. SEGMENTO (\overline{AB})

Es la figura geométrica de puntos colineales cuyos elementos son los puntos A y B y todos los puntos entre A y B. Los puntos A y B se llaman extremos.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN



1.10. SEGMENTO ABIERTO (\overline{AB})

Es la figura geométrica de puntos colineales, cuyos elementos están comprendidos entre los puntos A y B.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN



1.11. SEGMENTO SEMIABIERTO (\overline{AB} o \overline{AB})

Es la figura geométrica de puntos colineales, cuyos elementos están comprendidos entre los puntos A y B incluyendo ya sea el punto A o el B.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN



1.12. SEMIRECTA (\overrightarrow{AB})

Es la figura geométrica de puntos colineales, cuyos elementos están al mismo lado de A y B excluyendo A.

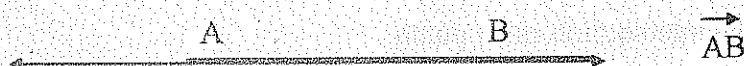
REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN



1.13. RAYO (\overrightarrow{AB})

Es la figura geométrica de puntos colineales, cuyos elementos están al mismo lado de A y B incluyendo A.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN



* 1.14. PROPOSICIONES

Las proposiciones más comunes que se utilizan son : axiomas, postulados, teoremas y corolarios.

1.14.1 AXIOMA

Es la proposición, que siendo evidente, no requiere demostración. Es el resultado de la observación o experimentación; los axiomas se utilizan generalmente en cualquier ciencia.

1. Axioma de identidad. $a = a$
2. Axioma de sustitución. Toda cantidad puede reemplazarse por su igual.
3. Propiedades de igualdad.
 - Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí.
 - Si a cantidades iguales se suman, restan, multiplican, dividen, se elevan a una misma potencia o se extraen la misma raíz los resultados son iguales.
4. Propiedades de las desigualdades.
 - El todo es mayor que cualquiera de sus partes e igual a la suma de las mismas.
 - Si una cantidad es mayor que otra y ésta mayor que una tercera, la primera es mayor que la tercera.
 - Si en los dos miembros de una desigualdad, se ejecuta una misma operación con números positivos, el sentido de la desigualdad no cambia.
 - Si se suman dos desigualdades de un mismo sentido, el resultado es otra desigualdad en el mismo sentido.
 - Si los dos miembros de una desigualdad se restan de los dos miembros de una igualdad, el resultado es una desigualdad de sentido contrario a la dada.
 - Si se cambian los signos de los dos miembros de una desigualdad, la desigualdad cambia de sentido.

1.14.2 POSTULADOS

Son proposiciones, cuya verdad aunque no tenga la evidencia de un axioma, se lo acepta sin demostración. A diferencia de los axiomas, éstos se los emplea generalmente en Geometría.

- Por dos puntos distintos pasa una sola recta.
- Una recta es un conjunto ordenado de puntos, no existe primero ni último. Entre dos puntos siempre existe otro.
- Toda recta puede prolongarse indefinidamente en los dos sentidos.
- La distancia entre dos puntos es la longitud del segmento que los une.
- Por tres puntos dados no colineales pasa un plano y sólo uno.
- Si dos puntos están en un mismo plano, la recta que los contiene pertenece al plano.
- Se puede trazar un círculo con centro y radio dados.
- Toda figura puede hacerse cambiar de posición sin alterar su forma y dimensiones.

1.14.3 TEOREMA

Es la proposición cuya verdad necesita ser demostrada; una vez demostrado un teorema se lo puede utilizar para la demostración de otros teoremas, junto con axiomas, postulados, definiciones, etc..

Un teorema se compone de : Hipótesis y Tesis.

- Hipótesis, son las condiciones o datos del teorema.
- Tesis, es la propiedad a demostrarse.

1.14.3.1 RELACIONES ENTRE TEOREMAS

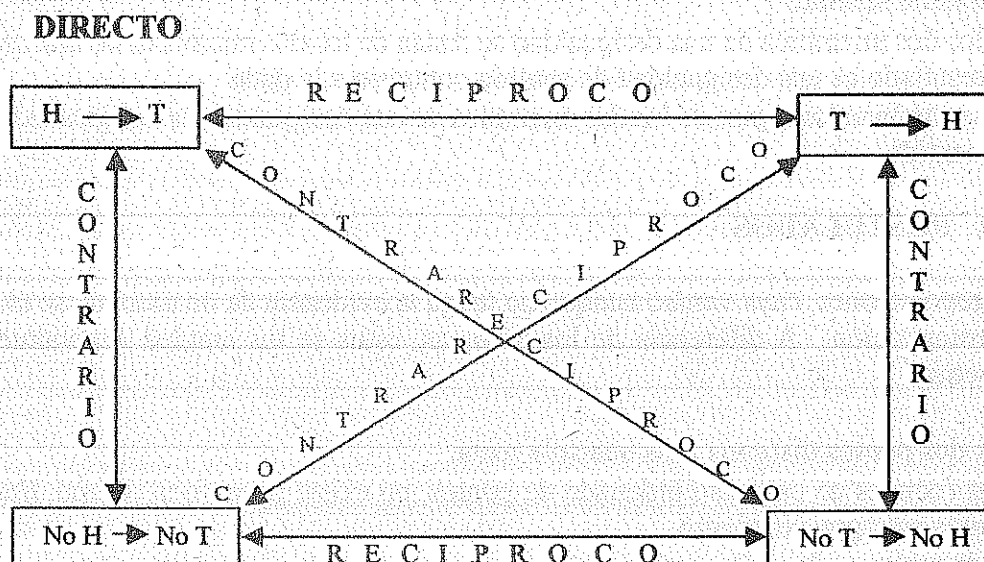
Según como se tome la hipótesis y tesis de un teorema, pueden existir los siguientes teoremas :

DIRECTO : Es el enunciado de un teorema .

RECÍPROCO : Es la proposición que tiene por hipótesis y tesis, la tesis y la hipótesis del teorema directo. Un teorema recíproco puede ser verdadero o falso.

CONTRARIO : Es la proposición que tiene por hipótesis y tesis las negaciones respectivas de la hipótesis y la tesis del teorema directo.

CONTRARECÍPROCO : Es la proposición contraria a la recíproca de la directa.



ESQUEMA DE LA RELACIÓN ENTRE LOS TEOREMAS

EJEMPLO:

Directo.- Todos los puntos de la mediatriz de un segmento, equidistan de sus extremos.

Recíproco.- Todos los puntos que equidistan de los extremos de un segmento, pertenecen a la mediatriz del segmento.

Contrario.- Todo punto externo a la mediatriz de un segmento no equidista de los extremos del segmento.

Contrarecíproco.- Todo punto que no equidista de los extremos de un segmento, no pertenece a la mediatriz del segmento.

1.14.4 COROLARIO

Es una proposición, consecuencia directa de un teorema demostrado, por tanto no hace falta demostración.

1.15. PROBLEMA

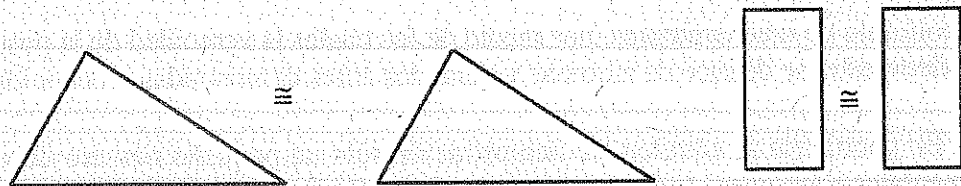
Es una situación particular que se plantea para ser resuelta.

1.16. CONGRUENCIA (\cong)

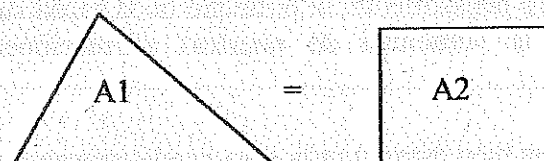
Dos figuras geométricas son congruentes si tienen exactamente la misma forma y medida; al superponerlas coinciden en todos sus puntos.

La congruencia implica de hecho una igualdad de medida, pero no siempre la igualdad de medida implica congruencia.

En segmentos y ángulos, la igualdad de medida implica congruencia.

EJEMPLOS:**1.17. EQUIVALENCIA (=)**

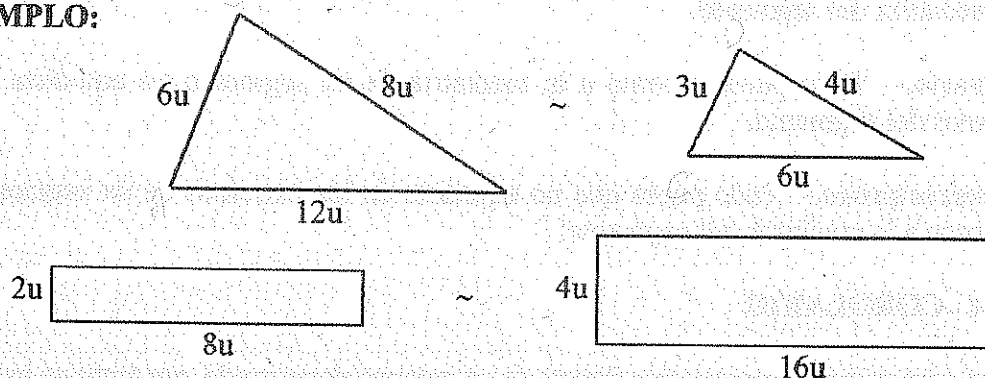
Dos figuras geométricas son equivalentes si tienen igual medida y no necesariamente la misma forma.

EJEMPLO:

1.18. SEMEJANZA (\sim)

Dos figuras geométricas son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente congruentes y sus lados respectivamente proporcionales.

EJEMPLO:

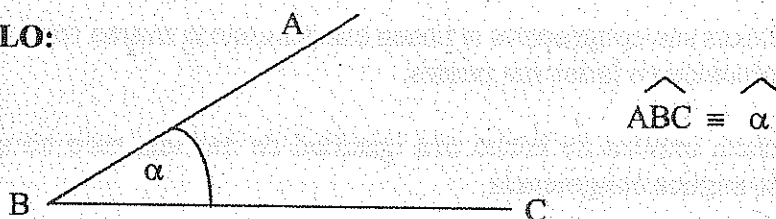


Si dos figuras geométricas son semejantes, tienen exactamente la misma forma pero distinto tamaño.

1.19. IDENTIDAD (\equiv)

Se tiene identidad cuando nos referimos a una misma figura geométrica.

EJEMPLO:



1.20. LA DEMOSTRACIÓN

Es un conjunto de razonamientos, por medio de los cuales la veracidad de la proposición que se demuestra se deduce de axiomas y verdades antes demostradas o conocidas.

En geometría se admiten sin demostración sólo un pequeño número de verdades fundamentales o axiomas; todas las demás verdades (teoremas), se demuestran basándose en estos axiomas mediante una serie de deducciones. La veracidad de los propios axiomas está garantizada porque tanto ellos mismos, como los teoremas que se demuestran apoyándose en ellos, han sido comprobados por reiteradas observaciones y larga experiencia.

La demostración se realiza en virtud del requerimiento de una de las leyes fundamentales de nuestro pensamiento, el principio de la razón suficiente, que establece la necesidad de que la veracidad de nuestras afirmaciones esté rigurosamente fundamentada.

Una demostración bien estructurada sólo puede apoyarse en proposiciones antes demostradas, siendo inadmisibles toda alegación a la evidencia.

La demostración es necesaria también para fundamentar la generalidad de la proposición que se demuestra, es decir, la posibilidad de su aplicación a todos los casos particulares.

Finalmente, por medio de las demostraciones, las verdades geométricas se reducen a un sistema armonioso de conocimientos científicos, en el cual se pone de manifiesto todas las relaciones internas que existen entre las diversas propiedades de las formas espaciales. "Llamando espaciales aquellas propiedades por las cuales se determinan la forma, la magnitud y la posición mutua de los objetos".

1.20.1 MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

1.20.1.1 MÉTODO INDUCTIVO

Es un razonamiento que parte de conocimientos o verdades particulares para obtener mediante ellos una verdad general, o que observa varios fenómenos para inferir la ley que los explica.

EJEMPLOS:

- Demostrar que el cuadrado de cualquier número impar disminuido en una unidad da un número múltiplo de ocho.

Demostración: $3^2 - 1 = 9 - 1 = 8 = 8 \times 1$

$$5^2 - 1 = 25 - 1 = 24 = 8 \times 3$$

$$7^2 - 1 = 49 - 1 = 48 = 8 \times 6$$

$$9^2 - 1 = 81 - 1 = 80 = 8 \times 10$$

$$\dots\dots\dots (2n-1)^2 - 1 = 4n^2 - 4n = 4n(n-1)$$

$4n(n-1)$ es múltiplo de $4n$ y $(n-1)$ son dos números sucesivos, de los cuales uno de ellos es par y múltiplo de 2, por lo tanto, $4n(n-1)$ es múltiplo de 8.

- Queremos saber el valor del sumatorio de las medidas de los ángulos internos de un triángulo. Para esto escogemos varios triángulos diferentes y mediante un transportador medimos cuidadosamente los ángulos, y al realizar el sumatorio nos da en todos los casos π ; entonces se llega a la conclusión que el sumatorio de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es π .

1.20.1.2 MÉTODO DEDUCTIVO

Es un razonamiento que parte de conocimientos o verdades generales para obtener mediante ellos una verdad particular.

La mayoría de los teoremas y problemas geométricos se demuestran usando el método deductivo.

1.20.2 PROCEDIMIENTO DE UNA DEMOSTRACIÓN

Los teoremas pueden demostrarse por dos procedimientos : directo e indirecto.

La demostración directa, prueba la veracidad de la proposición, estableciendo una relación directa entre ella y las demostradas con anterioridad.

La demostración indirecta, pone en duda la veracidad de la proposición que se demuestra y tomándola por falsa, llegamos a una contradicción con las condiciones del teorema o con una proposición ya demostrada.

Por esto, la demostración indirecta se llama también "demostración por reducción al absurdo".

1.20.3 INSTRUCCIONES PARA UNA DEMOSTRACIÓN

Conviene subrayar, que todas las demostraciones deben ser exhaustivas. En particular, hay que enunciar precisamente y, si es necesario demostrar todos los teoremas a los cuales se hace referencia en el proceso de demostración.

En la mayoría de los problemas, el dibujo desempeña un papel importantísimo, permitiendo encontrar (e incluso sugerir) la idea de la resolución. Por eso conviene trazar los dibujos minuciosa y exactamente, saber notar en ellos las propiedades geométricas que se puedan aprovechar.

A veces una propiedad, notada con acierto en el dibujo, permite deducir la resolución del problema.

En resumen las instrucciones para una demostración serían las siguientes :

1. Hacer un gráfico que represente lo más exactamente posible el enunciado de la proposición, empleando letras mayúsculas para cada punto notable. Indicar con marcas, símbolos, letras, etc. en la figura las partes de medidas iguales.
2. Expresar la hipótesis en forma simbólica.
3. Expresar la tesis en forma simbólica.
4. Realizar la demostración, en la misma que debe constar de proposiciones y razones.

NOTA: En el presente texto, las demostraciones no contienen razones, quedando como inquietud para el estudiante.

EJEMPLOS :**PROCEDIMIENTO DIRECTO**

$$H) \quad AB = CD$$

$$T) \quad AC = BD$$

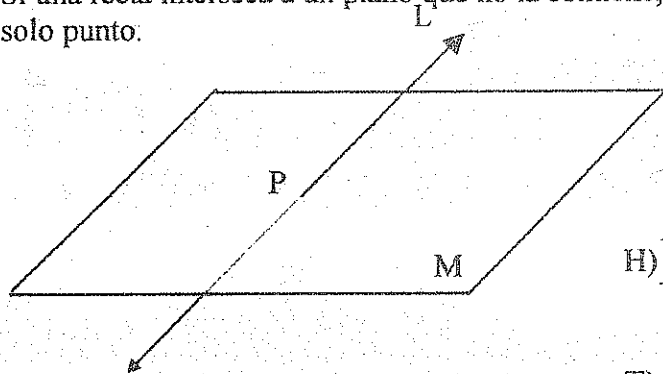
$$D) \quad \begin{array}{ll} AB = CD & (1) \text{ (Hipótesis)} \\ BC = BC & (2) \text{ (Identidad)} \end{array}$$

$$AB + BC = CD + BC \quad (1) + (2)$$

$$\Rightarrow AC = BD \quad ///.$$

PROCEDIMIENTO INDIRECTO

Si una recta interseca a un plano que no la contiene, entonces la intersección contiene un solo punto.



$$H) \quad \begin{array}{l} \vec{L} \text{ interseca al plano M en P} \\ \vec{L} \in \text{plano M} \end{array}$$

$$T) \quad P \text{ y sólo } P \notin \vec{L} \text{ y M}$$

$$D) \quad (1) \quad \vec{L} \text{ interseca al plano M en P} \quad (\text{Hipótesis})$$

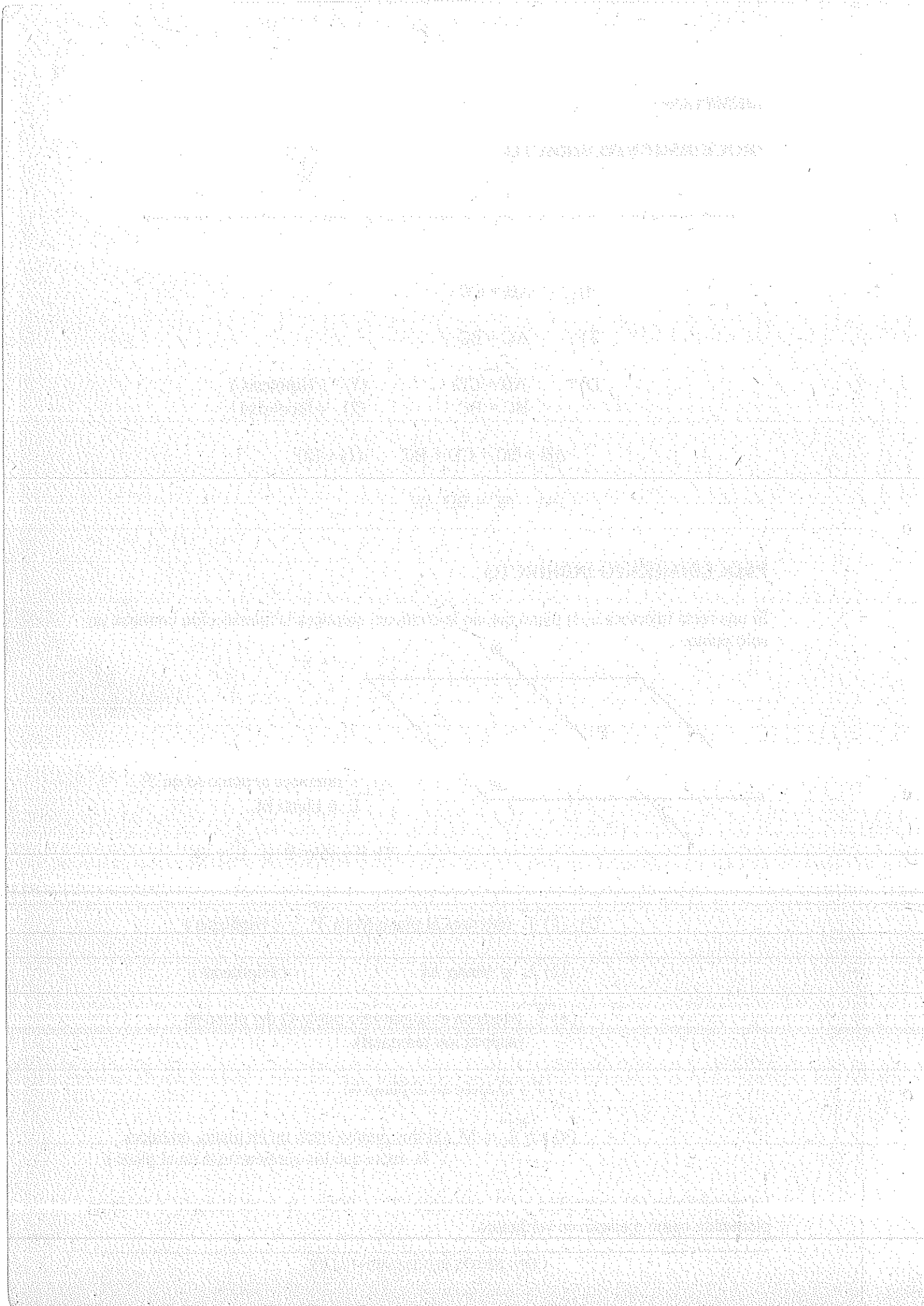
$$(2) \quad \vec{L} \notin \text{plano M} \quad (\text{Hipótesis})$$

$$(3) \quad \vec{L} \text{ interseca en algún otro punto Q del plano M} \\ (\text{suposición temporal})$$

P y Q están en el plano M

$$(4) \quad \Rightarrow \vec{L} \in M \quad (\text{Si dos puntos están en un plano, entonces la recta que los contiene está en el plano}).$$

La proposición (4) contradice a (2), por tanto (3) es falso; en consecuencia el teorema planteado como ejemplo es verdadero.



UNIDAD 2

2. PROPORCIONALIDAD

2.1. RAZÓN

La mayor parte de las ideas que se expresan en la actualidad, están basadas en la comparación de números y cantidades. Cuando se dice la distancia de Quito a Guayaquil es de 550 Km., se está comparando con una unidad llamada Kilómetro.

DEFINICIÓN

La razón es una comparación de una cantidad respecto a otra cantidad semejante, el resultado es un número abstracto, es decir no tiene unidades.

Es importante hacer notar que una razón es un cociente entre cantidades semejantes, porque no tendrían significado encontrar la razón de la medida de un segmento a la de un ángulo.

Una razón es una fracción, por lo tanto, todas las propiedades que tiene una fracción se aplican a las razones.

REPRESENTACIÓN

Para representar la razón 15 a 4, se lo hace : $\frac{15}{4}$, $15/4$, $15 \div 4$

El 15 y el 4 se denominan términos de la razón.

2.2. PROPORCIÓN

Es la igualdad de dos razones. Si dos razones tienen el mismo valor, las razones pueden igualarse como una proporción, por ejemplo : $\frac{4}{12} = \frac{12}{36}$

Si tres o más razones son iguales, se tiene una serie de razones iguales.

REPRESENTACIÓN

Si las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales, la proporción puede representarse como :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} ; \quad a \div b = c \div d$$

DENOMINACIÓN

Se lee “ a es a b como c es a d ” o también “ a y c son proporcionales a b y d ”.

TÉRMINOS

Son los elementos que forman la proporción; **a** es el primer término, **b** el segundo, **c** el tercero y **d** el cuarto término.

EXTREMOS : a y d

MEDIOS : b y c

ANTECEDENTES : a y c

CONSECUENTES : b y d

2.2.1 CUARTA PROPORCIONAL

De tres cantidades, es el cuarto término de la proporción, así, en la proporción :

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{c}, \quad x \text{ es la cuarta proporcional entre } a, b \text{ y } c.$$

2.2.2 MEDIA PROPORCIONAL (Media Geométrica o Proporción Continua)

Si en una proporción, el segundo y tercero o primero y cuarto término son iguales, se dice, que cualquiera de los dos es media proporcional entre el primero y cuarto o

segundo y tercero términos de la proporción respectivamente, así: $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ o $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$;

entonces **x** es media proporcional entre **a** y **b**. $x^2 = ab$, $x = \sqrt{ab}$ (media geométrica).

2.2.3 PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

1. En una proporción pueden invertirse las razones.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{entonces} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\text{Ejemplo: } \frac{17}{5} = \frac{51}{15} \Rightarrow \frac{5}{17} = \frac{15}{51}$$

2. El producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \text{entonces} \quad a \times d = b \times c$$

$$\text{Ejemplo: } \frac{17}{5} = \frac{51}{15} \Rightarrow 17 \times 15 = 51 \times 5$$

3. En una proporción a cada antecedente se puede sumar su respectivo consecuente, o, a cada consecuente se puede sumar su respectivo antecedente.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{entonces} \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \text{o} \quad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

Ejemplo : $\frac{17}{5} = \frac{51}{15} \Rightarrow \frac{17+5}{5} = \frac{51+15}{15} \text{ o } \frac{17}{5+17} = \frac{51}{15+51}$

4. En una proporción a cada antecedente se puede restar su respectivo consecuente, o, a cada consecuente se puede restar su respectivo antecedente.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \text{ o } \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$

Ejemplo : $\frac{17}{5} = \frac{51}{15} \Rightarrow \frac{17-5}{5} = \frac{51-15}{15} \text{ o } \frac{17}{5-17} = \frac{51}{15-51}$

5. En una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes, es a la suma de los consecuentes, como uno cualquiera de sus antecedentes es a su respectivo consecuente.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$ entonces $\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$

Ejemplo: $\frac{17}{5} = \frac{51}{15} = \frac{153}{45} \Rightarrow \frac{17+51+153}{5+15+45} = \frac{17}{5} = \frac{51}{15} = \frac{153}{45}$

2.3. SEGMENTO UNITARIO

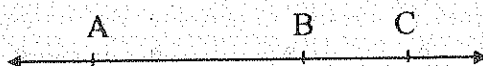
Es el segmento arbitrario que se toma como unidad de medida de otros segmentos.

2.4. LONGITUD DE UN SEGMENTO (AB)

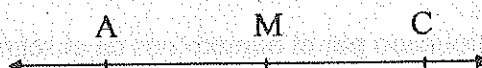
Es un número que representa las veces que está contenido el segmento unitario en el segmento AB.

2.5. PROPIEDADES DE UN SEGMENTO

1. Dados los puntos colineales A, B y C ; B está entre A y C , si $AB + BC = AC$



2. Dados los puntos colineales A, M y C; M es el punto medio del segmento AC, si $AM = MC$

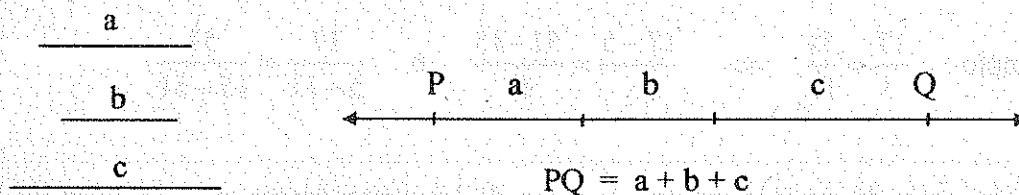


2.6. OPERACIONES CON SEGMENTOS

2.6.1 SUMA DE SEGMENTOS

Consiste en encontrar un segmento de longitud igual a la suma de las longitudes de los segmentos dados.

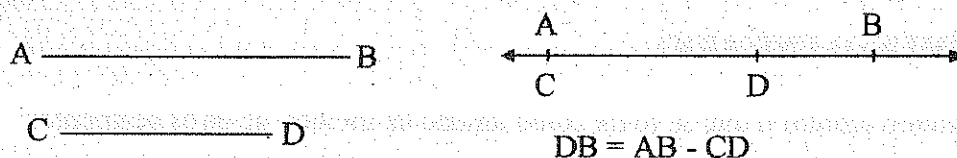
Gráficamente, el segmento que representa la suma se obtiene ubicando consecutivamente en una misma recta los segmentos dados.



2.6.2 RESTA DE SEGMENTOS

Restar de un segmento otro menor, consiste en encontrar un tercer segmento tal que, sumado al segundo de por resultado el primero.

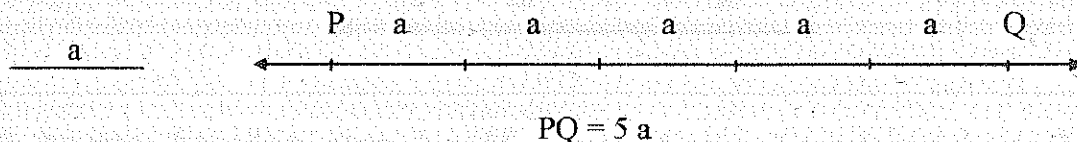
Gráficamente, se ubican los dos segmentos en un mismo rayo, de modo que el origen del rayo sea extremo común de los dos segmentos. El segmento determinado por los otros dos extremos de los segmentos dados, es el segmento diferencia.



2.6.3 MULTIPLICACIÓN DE UN SEGMENTO POR UN NÚMERO

Consiste en encontrar un segmento de longitud igual al producto de la longitud del segmento dado por el número.

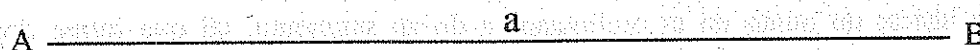
Gráficamente, el segmento que representa el producto, se obtiene sumando el segmento dado tantas veces como indique el número.



2.6.4 DIVISIÓN DE UN SEGMENTO POR UN NÚMERO

Es el segmento tal que multiplicado por el número nos da el segmento dado.

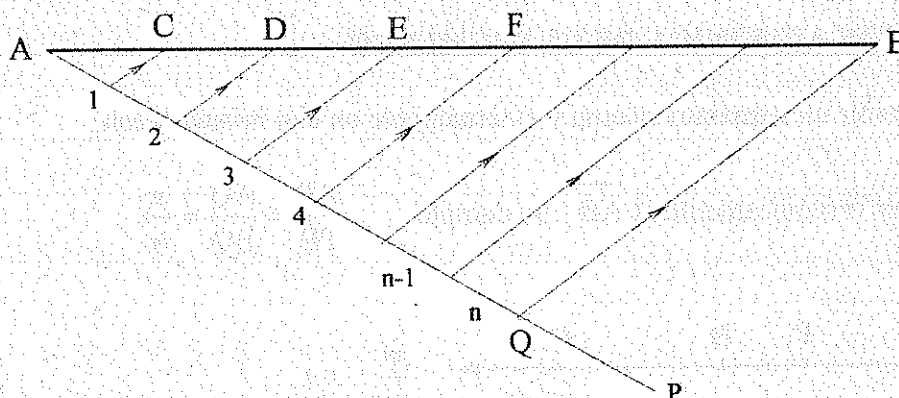
Gráficamente, el segmento dado se debe dividir en tantas partes iguales como indica el número. Cualquiera de las partes iguales es el segmento buscado.



2.7. DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN n PARTES CONGRUENTES

SOLUCIÓN GRÁFICA

Dato: \overline{AB}



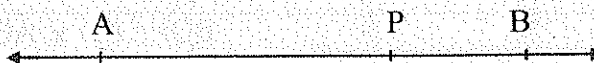
CONSTRUCCIÓN

1. \overline{AP} recta cualquiera
2. En \overline{AP} tomamos n partes congruentes.
3. $AQ = n$
4. Trazamos \overline{BQ}
5. Por los puntos 1, 2, 3, ..., (n - 1), n trazamos paralelas a \overline{BQ} , obteniéndose los puntos de división C, D, E,

2.8. DIVISIÓN INTERNA DE UN SEGMENTO

Consiste en localizar un punto situado en el interior de un segmento, tal que forme dos segmentos que están en una razón dada m/n .

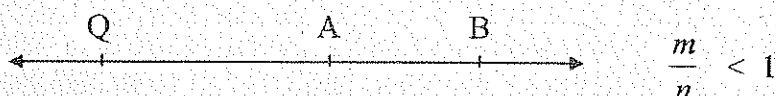
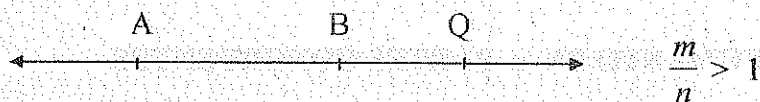
Si P es el punto que divide interiormente al \overline{AB} , se cumple: $\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$



2.9. DIVISIÓN EXTERNA DE UN SEGMENTO

Consiste en ubicar un punto en la prolongación de un segmento, tal que forme dos segmentos que estén en una relación dada m/n .

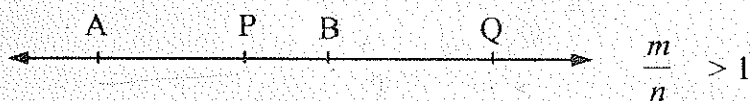
Si Q es el punto que divide externamente al \overline{AB} , se cumple: $\frac{AQ}{BQ} = \frac{m}{n}$



2.10. DIVISIÓN ARMÓNICA DE UN SEGMENTO

Consiste en dividir un segmento interna y externamente en una misma razón.

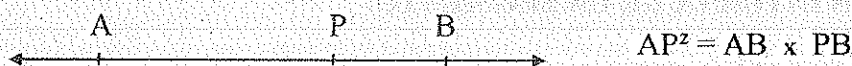
Si P y Q dividen armónicamente al \overline{AB} , se cumple: $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ} = \frac{m}{n}$



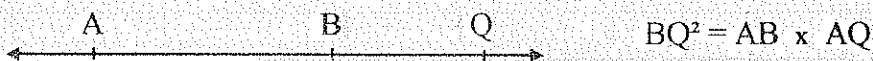
2.11. DIVISIÓN EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN DE UN SEGMENTO

Consiste en dividir un segmento interna o externamente en dos segmentos tales que, uno de ellos es media proporcional entre el segmento dado y el otro de la división.

Si P divide internamente en media y extrema razón al \overline{AB} , se cumple:



Si Q divide externamente en media y extrema razón al \overline{AB} , se cumple:

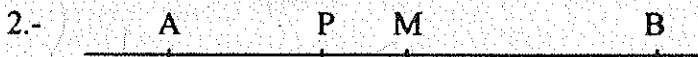


2.12. EJERCICIOS



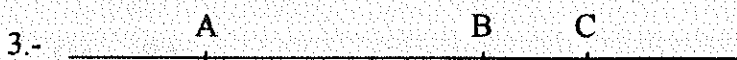
H) $AM = MB$

T) $PM = \frac{PA + PB}{2}$



H) $AM = MB$

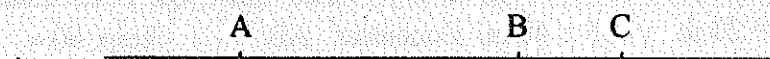
T) $PM = \frac{PB - PA}{2}$



H) $AB = \frac{7}{5} BC$

T) $\frac{BC}{AC} = ?$

Resp. $\frac{5}{12}$



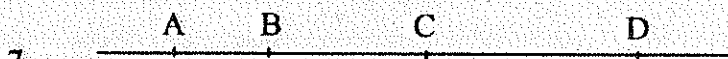
H) $BC = \frac{3}{7} AC$

T) $\frac{AB}{BC} = ?$

Resp. $\frac{4}{3}$

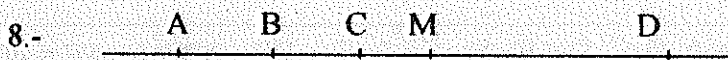
5.- Dados los puntos colineales A, B y C. Si las longitudes AB y BC son proporcionales a 9 y 5 respectivamente y $AC = 504$ u., calcular AB. Resp. 324

6.- Dados los puntos colineales A, B, C y D. Si $AC = CD$ y $BD - AB = 40$. Calcular BC. Resp. 20



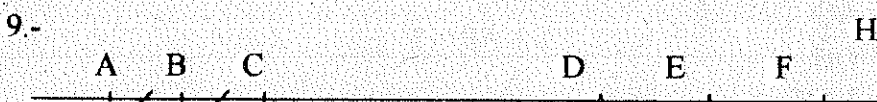
H) $CD = 2 AB$

T) $AB = BD - AC$



H) $AB = BC$
 $CD = 2 AC$
 $AM = MD$

T) $AM = AB + AC$



H) $CD = 2 AB$
 $DE = 2 EF$

T) $BF = 3 CE / 2$

- 10.- Dados los puntos colineales A, R, P, C y D tales que : $AP = PD$, $AR = PC$ y $RC = 20$. Calcular AD. Resp. 40.



H) $AC + BD = 14$

$AD = 11$

T) $BC = ?$

Resp. 3

- 12.- Si en el gráfico : $CD = 2AB$, $BD = 14$ y $BC = 2$. Encontrar el valor de AC.



Resp. 8

- 13.- Dados los puntos colineales A, B, C y D. Si $AD = 24$, $CD = 8$ y $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$.

Calcular BC.

Resp. 4

- 14.- Dados los puntos colineales consecutivos Q, A, B y P tales que : QB y AP están en la razón $4/5$, $QA = 20$ m. y $BP = 40$ m. Encontrar AB. Resp. 60 m.



H) $AB = \frac{BC}{2} = \frac{CD}{3} = \frac{DE}{4}$

$DE - CD = 4$

T) $BC = ?$

Resp. 8

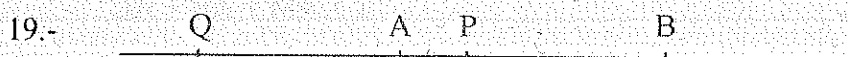
- 16.- Dados los puntos colineales A, B, C, D, E y F. Si $AB = BD$, $BC = CE$, $DE = EF$ y $BD - EF = 6$. Calcular CD. Resp. 3

- 17.- Dados los puntos colineales A, B, C, D y E. Si $BC = 3AB$, $\frac{CD}{BC} = \frac{1}{3}$ y $\frac{AC}{CE} = \frac{4}{9}$.

Encontrar $\frac{DE}{BC}$

Resp. $8/3$

- 18.- Dados los puntos colineales A, B, C, D y E. Si $\frac{BD}{CE} = \frac{2}{5}$, $DE - AB = 6$, $AE = 40$ y $BD = 10$. Calcular CD. Resp. 7



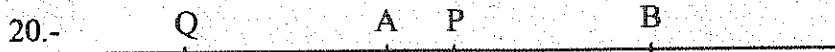
H) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$

$PB = 3.420$ u.

$BQ = 16.074$ u.

T) $AP = ?$

Resp. 2.220 u.



$$H) \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$$

$$AB = 792 \text{ u.}$$

$$PQ = 247 \text{ u.}$$

$$T) AQ = ?$$

$$\text{Resp. } 142,31 \text{ u.}$$



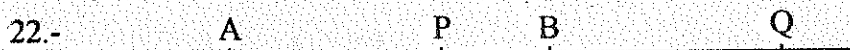
$$H) \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$$

$$PB \times BQ = 28 \text{ u.}$$

$$BQ - PB = 7 \text{ u.}$$

$$T) AB = ?$$

$$\text{Resp. } 8 \text{ u.}$$



$$H) \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$$

$$AQ - BP = 25 \text{ u.}$$

$$AQ - AB = 10 \text{ u.}$$

$$T) AB = ?$$

$$\text{Resp. } 20 \text{ u.}$$



$$H) \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$$

$$QP = 10 \text{ u.}$$

$$AQ = 15 \text{ u.}$$

$$T) AB = ?$$

$$\text{Resp. } 7,5 \text{ u.}$$



$$H) AP \times BQ = PB \times AQ$$

$$AP = PQ = 20 \text{ u.}$$

$$T) PB = ?$$

$$\text{Resp. } 6,6 \text{ u.}$$

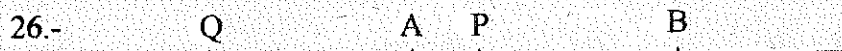


$$H) AP \times BQ = PB \times AQ$$

$$AP = BQ = 8 \text{ u.}$$

$$T) PB = ?$$

$$\text{Resp. } 3,3 \text{ u.}$$



$$H) AP \times BQ = PB \times AQ$$

$$AQ = AB = 15 \text{ u.}$$

$$T) PB = ?$$

$$\text{Resp. } 10 \text{ u.}$$

27.- En una recta se toman los puntos A, B, C y D de manera que: $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BD}$

y $\frac{1}{AB} + \frac{1}{BD} = 0.125 \text{ u.}$ Hallar BC.

Resp. 8u.

28.- En una recta se toman los puntos A, B, C, D, E, , sabiendo que $AB = 0.1 \text{ u.}$, $BC = 0.02 \text{ u.}$, $CD = 0.003 \text{ u.}$, Calcular la longitud del segmento que es la suma de los segmentos dados.

Resp. $10 \text{ u} / 81$

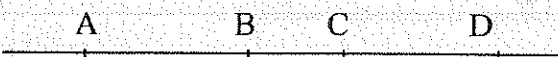
29.- 

H) $AP \times BQ = PB \times AQ$

T) $AB = ?$

$$\frac{1}{PB} + \frac{1}{QB} = \frac{2}{5}$$

Resp. 5 u.

30.- 

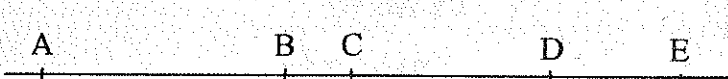
H) $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$

T) $AB^2 = BC \times BD$

31.- 

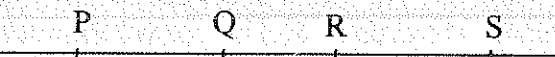
H) $BC = \frac{3}{7} AC$

T) $BD = \frac{4CD + 3AD}{7}$

32.- 

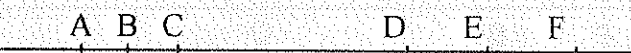
H) $\frac{AB}{AD} = \frac{DE}{EB}$

T) $AD = EB$

33.- 

H) $\frac{PQ}{PR} = \frac{SR}{SQ}$

T) $PR = QS$

34.- 

H) $AB = BC$

T) $BE = \frac{AD + CF}{2}$

$DE = EF$

35.- 

H) $AB = BC = CD$

T) $PB = \frac{PD - 2AP}{3}$

36.-



H) $BC = CD$

T) $AC^2 = AB \cdot AD + \frac{BD^2}{4}$

37.- En una recta se ubican los puntos colineales A, B, C, D, E y F. Si : $AB = BC$;
 $CE = EF$ y $AD = DF$, demostrar que : $CD = EF - BC$

38.-



H) $\frac{AC}{CE} = \frac{BE}{AD}$

T) $AC^2 - CE^2 = BC \times DE - AB \times CD$

39.-



H) $AB = BD$

T) $BE = \frac{AC + DF}{2}$

$CE = EF$

40.-



H) $BM = MC$

T) $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

41.-



H) $BC = DC$

$AB = a$

$AC = m$

$AD = b$

T) $m = \sqrt{ab + \frac{(b-a)^2}{4}}$

42.-



H₁) $AB \times CD = 2 AD \times BC$

T₁) $\frac{2}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{3}{AC}$

H₂) $AB \times CD = 7 BC \times AD$

T₂) $\frac{1}{AD} + \frac{7}{AB} = \frac{8}{AC}$

43.-



H) $AB \times BD = BC \times AD$

T) $\frac{1}{AB} + \frac{1}{BD} = \frac{1}{BC}$

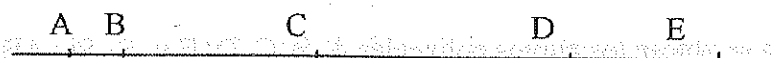
44.-



H) $BC = \frac{3}{7} BD$


T) $AB = \frac{7AC - 3AD}{4}$

45.- En una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C, D, E y F, de modo que :
 $BE = \frac{5}{8} AF$. Calcular AF sabiendo que $AC + BD + CE + DF = 39$ u. Resp. 24 u.

46.- 

H) $AB = \frac{BC}{4}$; $AC = \frac{AD}{2}$; $DE = \frac{AE}{3}$; $CD = 5$ u.

T) $AB = ?$ Resp. 1u.

47.- 

H) $AB = BC$; $CD = 2 AC$
 $EF = FG$; $DE = 2 EG$
 $AB + FG = 4,5$ u.

T) $BF = ?$

Resp. 22,5 u.

48.- 

H) $AM = MB$
 $AM - CD = 4$ u.
 $CD = 2 MC = 2 DB$

T) $DB = ?$

Resp. 2 u.


49.- 

H) $AB = 7$ u
 $BD = 21$ u

T) $BC = ?$

$3 AD \times BC = AB \times CD$

Resp. $\frac{21}{13}$ u.

50.- 

H) $3 AD \times BC = AB \times CD$
 $AC = 5$ u
 $AD = 4 AB$

T) $AB = ?$

Resp. 4,06 u.

51.- 

H) $CD = 2 AB$
 $AC = 8$ u.
 $BD = 14$ u.

T) $BC = ?$

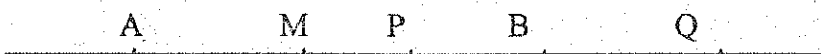
Resp. 2 u.

52.- 


H) $BC = 3$ u.
 $AC + BD = 14$ u.

T) $AD = ?$

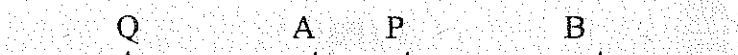
Resp. 11 u.

53.- 

H) $AP \times BQ = PB \times AQ$ T) $MB^2 = MP \times MQ$
 $AM = MB$


54.- 

H) $AP \times BQ = PB \times AQ$ T) $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}$


55.- 

H) $AQ \times PB = AP \times BQ$ T) $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AP} - \frac{1}{AQ}$


56.- Sobre una recta se toman los puntos A, B, C y D tal que $AB = 1u.$, $CD = 3u.$ y
 $\frac{1}{BC} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1$ Hallar BC. Resp. 2 u.

57.- 

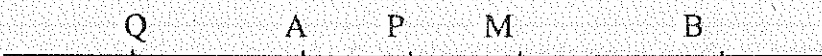
H) $AP \times BQ = PB \times AQ$ T) $AB = \frac{2PB \times BQ}{BQ - PB}$

58.- 

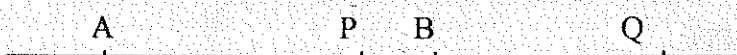
H) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ T₁) $\frac{1}{PB} + \frac{1}{BQ} = \frac{2}{AB}$ T₂) $AB = \frac{2AP \times BQ}{PQ}$

59.- 

H) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ T₁) $\frac{1}{PB} - \frac{1}{BQ} = \frac{2}{AB}$ T₂) $AB = \frac{2AP \times BQ}{PQ}$

60.- 

H) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$
 $AM = MB$ T) $MB^2 = MP \times MQ$

61.- 

H) $AP = PQ$
 $PB \times AQ = AP \times BQ$ T) $BQ = 2PB$

62.-

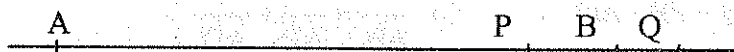


H) $AQ = 3 AB$

T) $\frac{5}{AQ} = \frac{1}{AP}$

$AP \times BQ = AQ \times PB$

63.-



H) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$

T) $PB = ?$

$AP = 558 \text{ u.}$

$BQ = 13 \text{ u.}$

Resp. 12,43 u.

64.-



H) $PA = 10 \text{ u.}$

$PB = 30 \text{ u.}$

T) $PC = ?$

$\frac{AC}{5} = \frac{BC}{3}$

Resp. 60 u.

65.-



H) $\frac{EC}{CF} = \frac{EB}{BF}$; $BE = \frac{3}{4}BC$; $BF = 12 \text{ u.}$

T) $EC = ?$

Resp. 2u.

66.-



H) $AM = \frac{MB}{3}$

T) $PM = ?$

$AP = 30 \text{ u.}$

$PB = 6 \text{ u.}$

Resp. 24 u.

67.- Los segmentos a, b, c son proporcionales a 7, 5 y 6 respectivamente. Si :
 $a + b + c = 12 \text{ u.}$, calcular las medidas de a, b y c. Resp. 4,67 ; 3,33 ; 4 u.

68.-



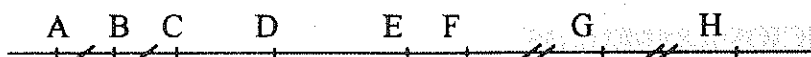
H) $AP = \frac{PD}{3}$

T) $BP = ?$

$BD - 3 AB = 24 \text{ u}$

Resp. 6 u.

69.-



H) $AD = 20 \text{ u.}$

$CE = 30 \text{ u.}$

$DF = 25 \text{ u.}$

$EH = 35 \text{ u.}$

T) $BG = ?$

Resp. 55 u.

70.-



H) $AC + BD + CE = 44 \text{ u.}$

$AE = 25 \text{ u.}$

$DE = 2 AB$

T) $AB = ?$

Resp. 2 u.

71.-



H) $AB = \frac{AC + CD}{2}$; $BD^2 - 2 BD + 1 = 0$

T) $AD = ?$

Resp. 2 u.

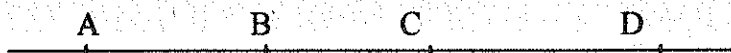
72.- Dados los puntos colineales $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$; si:

$A_0 A_1 = a$

$A_1 A_2 = 1$

$A_2 A_3 = 1/a$, donde a es un número real. Hallar $A_0 A_n$. Resp. $a^2/(a - 1)$

73.-

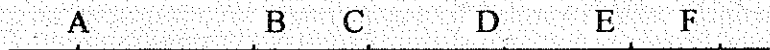


H) $AC = \frac{9}{4} CD$; $AB = \frac{7}{8} CD$; $AD = 39$

T) $BC = ?$

Resp. $33/2$

74.-



H) $AB = 3 EF$

$AC = CE$

$BD = DF$

T) $CD = 2 EF$

75.-

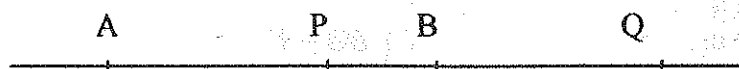


H) $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$

T) $\frac{2}{AC} - \frac{2}{BD} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{CD}$

2.12.1 EJERCICIOS RESUELTOS

21.-



$$PB \times BQ = 28 \text{ u.}$$

$$BQ - PB = 7 \text{ u.}$$

2 ecuaciones

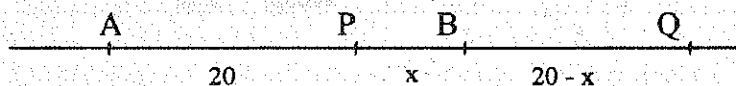
$$\Rightarrow BQ^2 - 7BQ - 28 = 0$$

$$\therefore BQ = 9,84 \text{ u.} ///$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB} \Rightarrow \frac{AB - 2,84}{2,84} = \frac{AB + 9,84}{9,84}$$

$$\therefore AB = 8 \text{ u.} ///$$

24.-

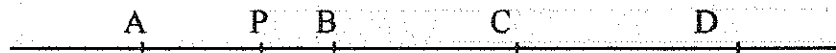


$$AP = PQ = 20 \text{ u.}$$

$$AP \times BQ = PB \times AQ \Rightarrow 20(20 - x) = 40x$$

$$\therefore x = PB = 6,6 \text{ u.} ///$$

35.-



$$AB = AP + PB$$

$$PD = PB + 2AB \therefore PD = PB + 2(AP + PB)$$

$$PD - 2AP = 3PB \Rightarrow PB = \frac{PD - 2AP}{3} ///$$

42.-



$$AB \times CD = 2AD \times BC$$

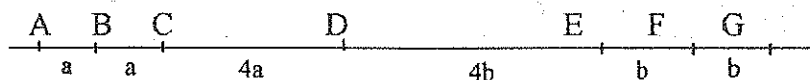
$$AB \times (AD - AC) = 2AD \times (AC - AB)$$

$$AB \times AD - AB \times AC = 2AD \times AC - 2AD \times AB$$

$$3AB \times AD = 2AD \times AC + AB \times AC$$

$$\Rightarrow \frac{2}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{3}{AC} ///$$

47.-



$$AB = BC = a \quad \therefore CD = 4a$$

$$EF = FG = b \quad \therefore DE = 4b$$

$$AB + FG = a + b = 4,5 \text{ u.}$$

$$BF = a + 4a + 4b + b = 5(a + b) = 5(4,5) = 22,5 \text{ u.} \quad ///$$

59.-



$$T_1) \quad \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ}$$

$$T_2) \quad \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ}$$

$$\frac{AB - PB}{PB} = \frac{AB + BQ}{BQ}$$

$$AP \times BQ = AQ \times PB = (AB + BQ) \times (PQ - BQ)$$

$$\frac{AB}{PB} - 1 = \frac{AB}{BQ} + 1$$

$$AP \times BQ = AB \times PQ + BQ \times PQ - AB \times BQ - BQ^2$$

$$AB \left(\frac{1}{PB} - \frac{1}{QB} \right) = 2$$

$$AP \times BQ = AB \times PQ + BQ \times (PQ - AB - BQ)$$

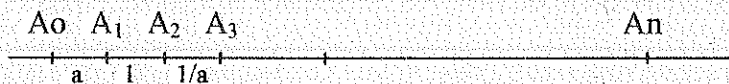
$$\therefore \frac{1}{PB} - \frac{1}{BQ} = \frac{2}{AB}$$

$$AP \times BQ = AB \times PQ - AP \times BQ$$

$$2 AP \times BQ = AB \times PQ$$

$$\therefore AB = \frac{2AP \times BQ}{PQ}$$

72.-



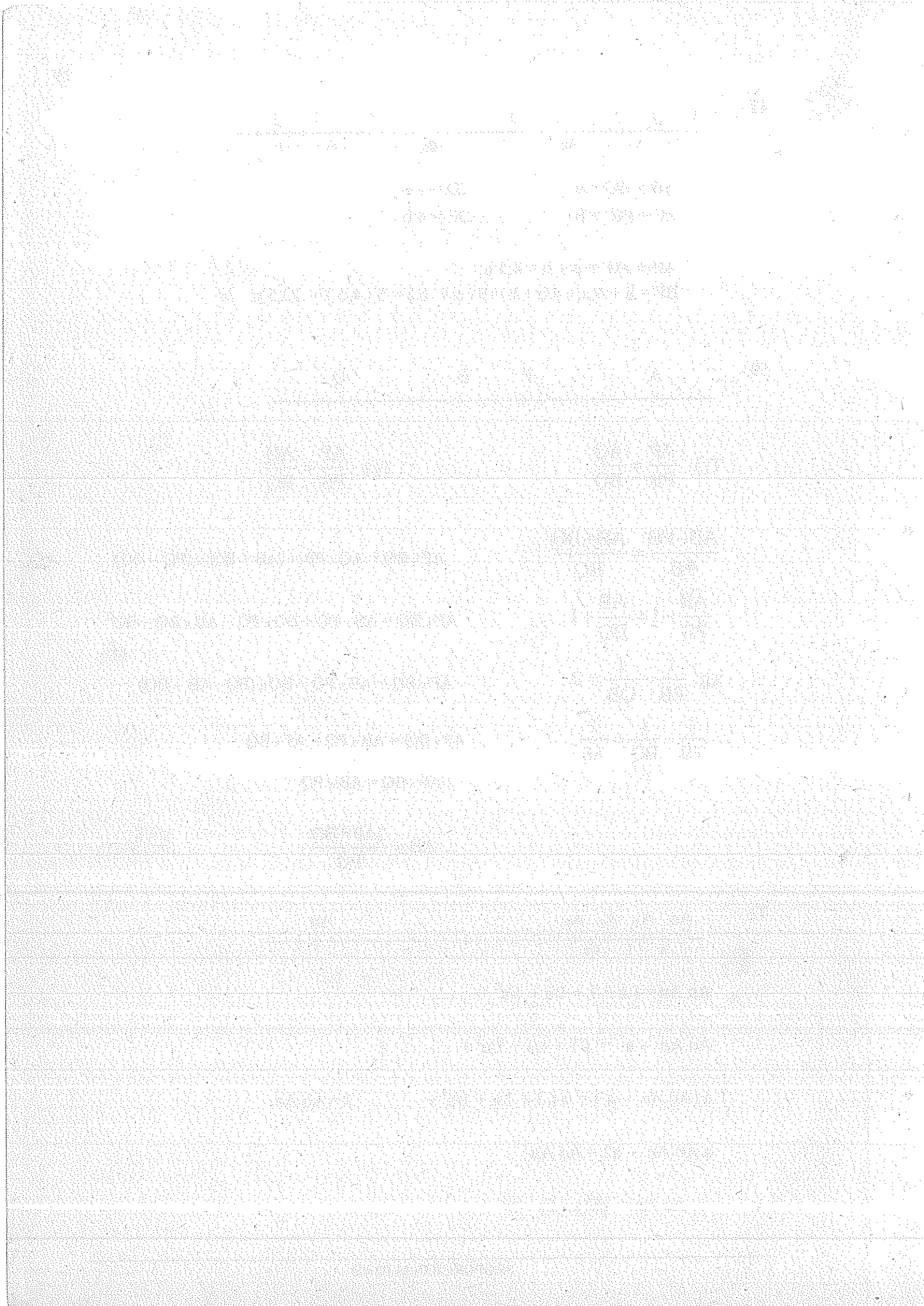
$$A_0 A_n = (a + 1 + 1/a + 1/a^2 + \dots)$$

$$A_0 A_n - a = (1 + 1/a + 1/a^2 + \dots)$$

$$a(A_0 A_n - a) = a(1 + 1/a + 1/a^2 + \dots) = A_0 A_n$$

$$a A_0 A_n - a^2 = A_0 A_n$$

$$\therefore A_0 A_n = a^2/(a - 1) \quad ///$$



UNIDAD 3

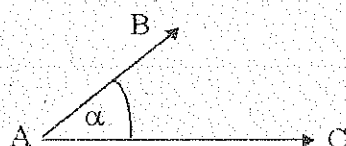
3. ÁNGULOS

3.1. DEFINICIÓN

Es una figura geométrica que está formada por dos rayos que tienen el mismo origen.

Dos rectas no paralelas en un mismo plano determinan un ángulo.

3.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ELEMENTOS



Lados del ángulo : \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC}

Vértice : Punto A

3.3. DENOMINACIÓN

1. Por la letra del vértice entre las otras dos : $\angle BAC$, \widehat{BAC}
2. Por la letra del vértice : $\angle A$, \widehat{A}
3. Por una letra, símbolo o número en el ángulo : $\angle \alpha$, $\widehat{\alpha}$

3.4. UNIDADES DE MEDIDA

RADIÁN (rad.) : Es la medida de un ángulo, cuya longitud del arco subtendido es igual al radio del círculo.

GRADO SEXAGESIMAL: Si a una revolución completa se la divide en 360 partes de igual medida, a cada una de estas partes iguales se denomina grado. ($^{\circ}$).

$$1 \text{ REVOLUCIÓN} = 360^{\circ} = 2 \pi \text{ rad. } (\pi = 3.14159265 \dots)$$

Los submúltiplos del grado sexagesimal son el minuto y el segundo.

$$1 \text{ minuto } (1') = 1^{\circ} / 60; \quad 1 \text{ segundo } (1'') = 1' / 60$$

CUADRO DE EQUIVALENCIAS PARA ÁNGULOS

| SEXAGESIMAL | RADIÁN |
|---------------|-----------|
| 360° | 2π |
| 270° | $3/2 \pi$ |
| 180° | π |
| 90° | $\pi/2$ |
| 60° | $\pi/3$ |
| 45° | $\pi/4$ |
| 30° | $\pi/6$ |

3.5. MEDIDA DE UN ÁNGULO

Es un número que representa las veces que está contenida la unidad de medida en el ángulo.

3.6. CONGRUENCIA DE ÁNGULOS

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida, así :

$$m \angle A = \pi/3 \text{ rad} ; m \angle B = \pi/3 \text{ rad}$$

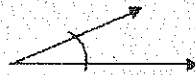
$$m \angle A = m \angle B$$

$$\angle A \cong \angle B$$

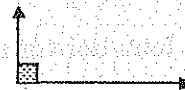
3.7. CLASES DE ÁNGULOS

3.7.1 POR SU MEDIDA

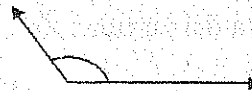
1. AGUDO. Su medida es menor a $\pi/2$ rad



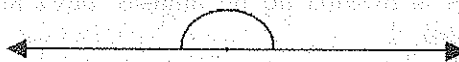
2. RECTO. Su medida es igual a $\pi/2$ rad



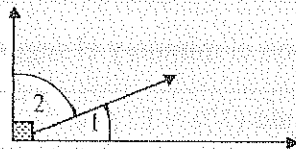
3. OBTUSO. Su medida es mayor a $\pi/2$ rad y menor a π rad.



4. ÁNGULO DE LADOS COLINEALES (LLANO). Su medida es igual a π rad.

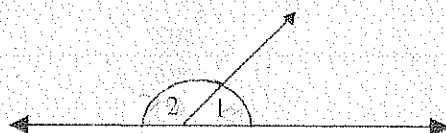


5. ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS. Son dos ángulos cuya suma de medidas es igual a $\pi/2$ rad. A cada ángulo se lo llama el complemento del otro.



$$m \angle 1 + m \angle 2 = \pi/2 \text{ rad.}$$

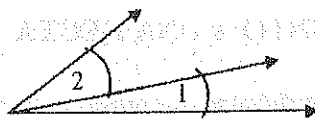
6. ANGULO SUPLEMENTARIO. Son dos ángulos cuya suma de medidas es igual a π rad. A cada ángulo se lo llama el suplemento del otro.



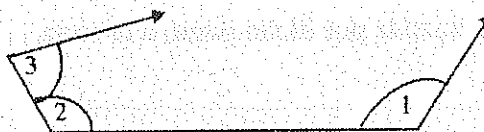
$$m \angle 1 + m \angle 2 = \pi \text{ rad.}$$

3.7.2 POR SU POSICIÓN

- 1. ADYACENTES.** Son dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común.

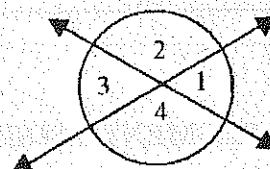


- 2. CONSECUTIVOS.** Son los ángulos que tienen un lado común y se forman siguiendo un mismo sentido.

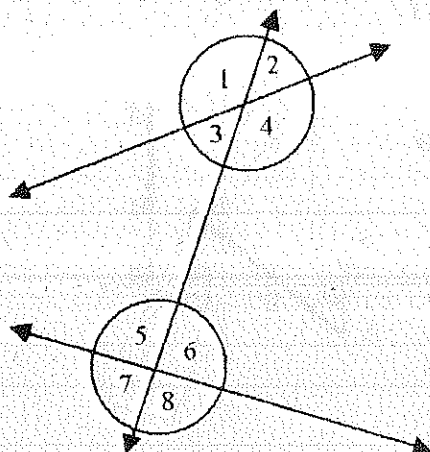


- 3. OPUESTOS POR EL VÉRTICE.** Son dos ángulos no adyacentes, formados cuando dos rectas se intersectan en un punto.

$\angle 1$ y $\angle 3$
 $\angle 2$ y $\angle 4$



- 4. ÁNGULOS FORMADOS EN DOS RECTAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL.**



a) INTERNOS : $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$

b) EXTERNOS : $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$, $\angle 8$

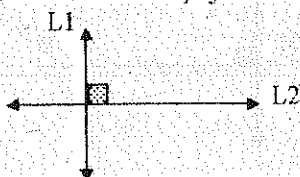
c) ALTERNOS INTERNOS : $\angle 3$ y $\angle 6$
 $\angle 4$ y $\angle 5$

d) ALTERNOS EXTERNOS : $\angle 1$ y $\angle 8$
 $\angle 2$ y $\angle 7$

e) CORRESPONDIENTES :
 $\angle 1$ y $\angle 5$, $\angle 2$ y $\angle 6$,
 $\angle 3$ y $\angle 7$, $\angle 4$ y $\angle 8$

3.8. RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas son perpendiculares si, y sólo si, se intersectan formando un ángulo recto.



$\vec{L1} \perp \vec{L2}$

3.9. PERPENDICULAR DE UN PUNTO A UNA RECTA

Es el segmento que va desde el punto a la recta y forma con esta un ángulo de $\pi/2$ rad.

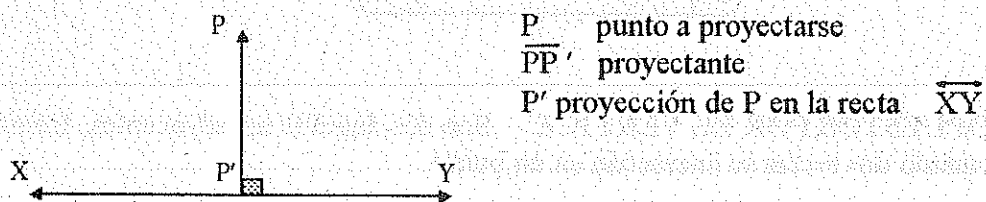
3.10. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Es la longitud del segmento perpendicular del punto a la recta.

3.11. PROYECCIÓN ORTOGONAL

3.11.1 DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA

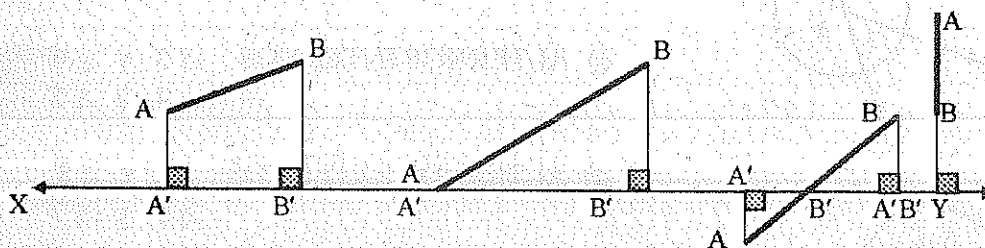
Es el pie de la perpendicular trazada por dicho punto a la recta.



3.11.2 DE UN SEGMENTO SOBRE UNA RECTA

Es el segmento comprendido entre las proyecciones de los puntos extremos del segmento a proyectarse.

$\overline{A'B'}$ proyección del segmento \overline{AB} en la recta \overline{XY} .



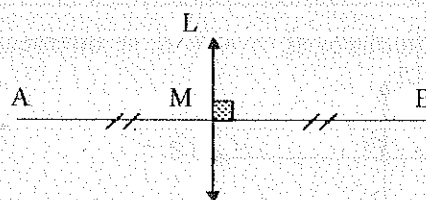
3.12. MEDIATRIZ

Es la recta perpendicular trazada por el punto medio de un segmento.

$$AM = MB$$

$$\vec{L} \perp \overline{AB}$$

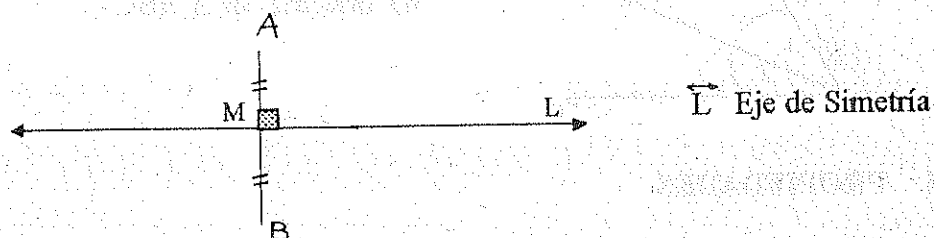
\vec{L} Mediatriz



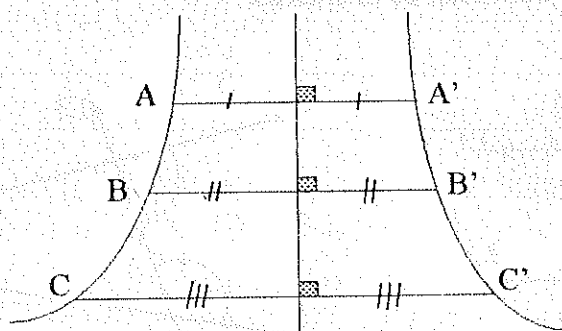
3.13. SIMETRÍA

3.13.1 CON RESPECTO A UNA RECTA

Se dice que dos puntos A y B son simétricos con respecto a una recta, si la recta es la mediatriz del segmento AB.

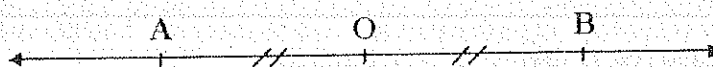


Una figura geométrica es simétrica con respecto a una recta, si cada uno de sus puntos forma parte de un par de puntos simétricos con respecto a la recta.

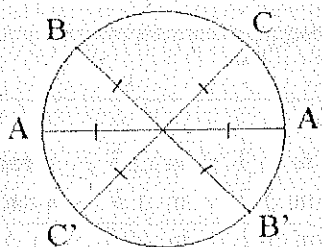


3.13.2 CON RESPECTO A UN PUNTO

Dos puntos A y B son simétricos con respecto a un punto O, si O es el punto medio del segmento AB.

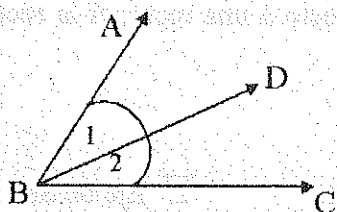


Una figura geométrica es simétrica con respecto a un punto O, si cada uno de sus puntos forma parte de un par de puntos simétricos con respecto a O.



3.14. BISECTRIZ

Es el rayo que divide a un ángulo dado en dos ángulos de igual medida.



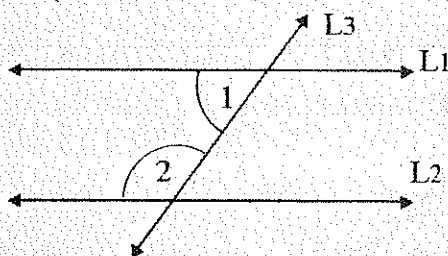
$$\text{Si } m \angle 1 = m \angle 2$$

\overrightarrow{BD} bisectriz de $\angle ABC$

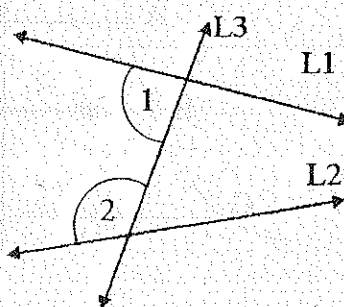
3.15. PROPIEDADES

POSTULADO.

Si en un plano, dos rectas son cortadas por una transversal, y si la suma de las medidas de los ángulos internos formados de un mismo lado es igual a π rad, las dos rectas son paralelas; caso contrario, las dos rectas se intersecan.



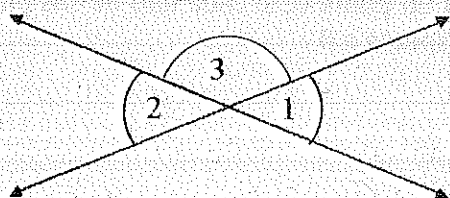
$$\text{Si: } m \angle 1 + m \angle 2 = \pi \text{ rad.} \\ \Rightarrow \overrightarrow{L1} \parallel \overrightarrow{L2}$$



$$\text{Si: } m \angle 1 + m \angle 2 \neq \pi \text{ rad.} \\ \Rightarrow \overrightarrow{L1} \text{ Y } \overrightarrow{L2} \text{ se intersecan}$$

TEOREMA # 1.

Los ángulos opuestos por el vértice, son congruentes.



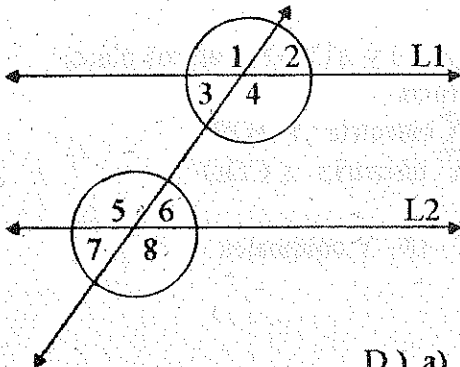
H) $\angle 1$ y $\angle 2$ opuestos por el vértice

$$\text{T) } \angle 1 \cong \angle 2$$

$$\begin{aligned} \text{D) } m \angle 1 + m \angle 3 &= \pi \text{ rad} \\ m \angle 2 + m \angle 3 &= \pi \text{ rad} \\ m \angle 1 + m \angle 3 &= m \angle 2 + m \angle 3 \\ m \angle 1 &= m \angle 2 \\ \angle 1 &\cong \angle 2 \end{aligned}$$

TEOREMA # 2.

Los ángulos alternos internos, alternos externos y correspondientes, formados en dos rectas paralelas cortadas por una transversal, son congruentes.



$$H) \overleftrightarrow{L1} \parallel \overleftrightarrow{L2}$$

$$T) \text{ a) } \angle 3 \cong \angle 6$$

$$\text{b) } \angle 1 \cong \angle 8$$

$$\text{c) } \angle 1 \cong \angle 5$$

$$D) \text{ a) } m\angle 3 + m\angle 5 = \pi \text{ rad}$$

$$m\angle 5 + m\angle 6 = \pi \text{ rad}$$

$$m\angle 3 + m\angle 5 = m\angle 5 + m\angle 6$$

$$m\angle 3 = m\angle 6$$

$$\angle 3 \cong \angle 6 \quad ///$$

$$\text{b) } m\angle 1 + m\angle 3 = \pi \text{ rad}$$

$$m\angle 6 + m\angle 8 = \pi \text{ rad}$$

$$m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 6 + m\angle 8$$

$$m\angle 3 = m\angle 6$$

$$m\angle 1 = m\angle 8$$

$$\Rightarrow \angle 1 \cong \angle 8 \quad //$$

$$\text{c) } m\angle 1 = m\angle 8$$

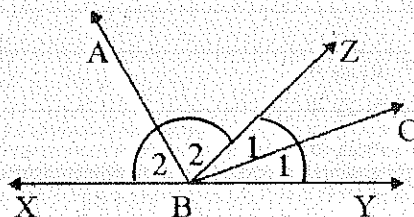
$$m\angle 5 = m\angle 8$$

$$m\angle 1 = m\angle 5$$

$$\angle 1 \cong \angle 5 \quad ///$$

TEOREMA # 3.

Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios son perpendiculares entre sí.



$$H) \angle XBZ \text{ y } \angle ZBY \text{ suplementarios}$$

$$\overrightarrow{BA} \text{ bisectriz } \angle XBZ$$

$$\overrightarrow{BC} \text{ bisectriz } \angle ZBY$$

$$T) \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$$

$$D) 2m\angle 1 + 2m\angle 2 = \pi \text{ rad}$$

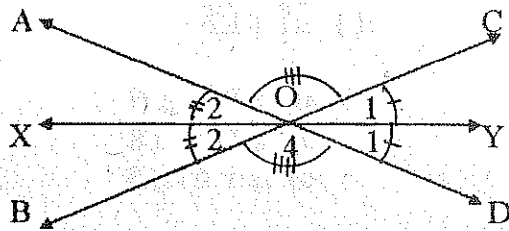
$$m\angle 1 + m\angle 2 = \pi/2 \text{ rad}$$

$$m\angle ABC = \pi/2 \text{ rad}$$

$$\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC} \quad ///$$

TEOREMA # 4.

Las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice, son colineales.



H) $\angle AOB$ y $\angle COD$ opuestos por el vértice

\overrightarrow{OX} bisectriz $\angle AOB$

\overrightarrow{OY} bisectriz $\angle COD$

T) X - O - Y colineales

$$D) 2m\angle 1 + 2m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 2\pi \text{ rad.}$$

$$m\angle 3 = m\angle 4$$

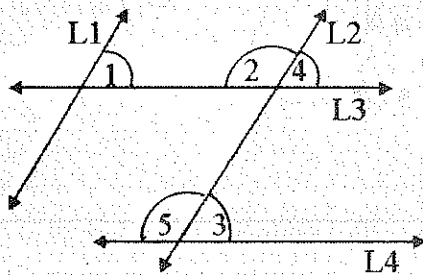
$$2m\angle 1 + 2m\angle 2 + 2m\angle 3 = 2\pi \text{ rad.}$$

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = \pi \text{ rad.}$$

X - O - Y colineales ///

TEOREMA # 5.

Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, son congruentes (paralelos en el mismo sentido) o suplementarios.



H) $\vec{L1} \parallel \vec{L2}$; $\vec{L3} \parallel \vec{L4}$

T) a) $\angle 1 \cong \angle 3 = \pi \text{ rad}$

b) $m\angle 1 + m\angle 5 = \pi \text{ rad}$

$$D) a) m\angle 1 = m\angle 4$$

$$m\angle 3 = m\angle 4$$

$$m\angle 1 = m\angle 3$$

$$\angle 1 \cong \angle 3 ///$$

$$b) m\angle 2 + m\angle 4 = \pi \text{ rad}$$

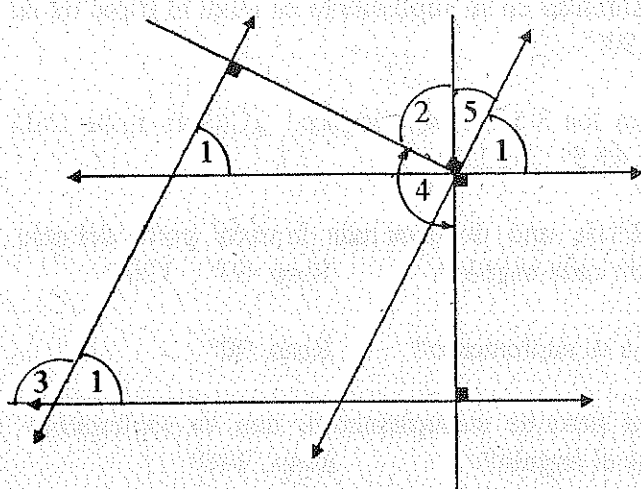
$$m\angle 2 = m\angle 5$$

$$m\angle 4 = m\angle 1$$

$$m\angle 5 + m\angle 1 = \pi \text{ rad} ///$$

TEOREMA # 6.

Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son congruentes o suplementarios.



$$\begin{aligned} \text{T) } \angle 1 &\cong \angle 2 \\ \angle 3 &\cong \angle 4 \\ m\angle 1 + m\angle 4 &= \pi \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D) } m\angle 2 + m\angle 5 &= \pi/2 \text{ rad} \\ m\angle 5 + m\angle 1 &= \pi/2 \text{ rad} \\ m\angle 5 + m\angle 1 &= m\angle 2 + m\angle 5 \\ m\angle 1 &= m\angle 2 \\ \Rightarrow \angle 1 &\cong \angle 2 // \end{aligned}$$

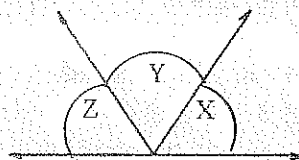
$$\begin{aligned} m\angle 1 + m\angle 3 &= \pi \text{ rad} \\ m\angle 2 + m\angle 4 &= \pi \text{ rad} \\ m\angle 3 &= m\angle 4 \\ \angle 3 &\cong \angle 4 /// \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\angle 1 + m\angle 3 &= \pi \text{ rad} \\ m\angle 3 &= m\angle 4 \\ m\angle 1 + m\angle 4 &= \pi \text{ rad} /// \end{aligned}$$

3.16. EJERCICIOS

- Uno de los ángulos complementarios, aumentado en $\pi/6$ rad es igual al otro.
¿Cuánto mide cada ángulo? Resp. 30° ; 60°
- La diferencia de dos ángulos suplementarios es $\pi/3$ rad. Hallar el complemento del ángulo menor. Resp. 30°
- Dos ángulos son complementarios, y uno de ellos es $\pi/10$ rad. más, que el triple del otro. ¿Cuánto mide cada ángulo? Resp. 72° ; 18° .
- ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos suplementarios, si quitando al menor de ellos $\pi/9$ rad. y agregándose al mayor, éste resulta el triple de lo que queda del menor. Resp. 65° ; 115°

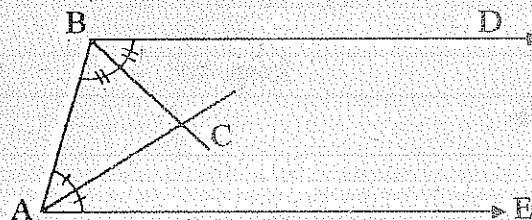
5. Dos ángulos son suplementarios; uno de ellos es disminuido en $\pi/12$ rad. para ser agregado al otro, de tal manera que éste nuevo ángulo, es igual a cuatro veces el resto del primero. ¿Cuánto mide cada ángulo? Resp. 51° ; 129°
6. Hallar la medida del ángulo que disminuido en su suplemento es igual al triple de su complemento. Resp. 90°
7. Uno de los ángulos suplementarios es los $3/5$ del otro ángulo. ¿Cuánto mide cada ángulo? Resp. $67,5^\circ$; $112,5^\circ$
8. De dos ángulos suplementarios, los $2/3$ de uno de ellos más la sexta parte del otro forman un ángulo recto. ¿Cuánto mide cada ángulo? Resp. 60° ; 120°
9. ¿Cuánto mide un ángulo que es igual a su suplemento? Resp. 90°
10. Los $4/7$ de un ángulo menos la cuarta parte de su suplemento, dan su suplemento aumentado en $\pi/6$ rad. ¿Cuánto mide el ángulo? Resp. 140°
11. Dos veces la medida de un ángulo es $\pi/5$ rad. menos que cinco veces la medida de su suplemento. ¿Cuál es la medida del ángulo? Resp. 123.42°
12. ¿Cuál es la diferencia entre el suplemento y el complemento de un ángulo que equivale a los $3/7$ de un ángulo recto? Resp. 90°
13. El doble del complemento de un ángulo más el triple de su suplemento es 500° . Hallar la medida del ángulo. Resp. 44°
14. Los ángulos X, Y, Z son proporcionales a los números 3, 5 y 7. Hallar el ángulo Y



15. Calcular el valor de dos ángulos suplementarios, de modo que, si al quíntuplo del menor se le disminuye la mitad del mayor, se obtiene el triple del menor aumentado en $\pi/18$ rad. Resp. 40° ; 140°
16. Dos ángulos suplementarios están en la razón $5/4$. Hallar sus medidas. Resp. 100° ; 80°
17. Si el suplemento del suplemento de un ángulo se le aumenta el complemento del complemento del mismo ángulo, resulta el cuádruple del complemento del mismo ángulo. Hallar el ángulo. Resp. 60°
18. La medida de uno de los ángulos de un par de ángulos suplementarios, es el doble de la medida del otro menos $3\pi/20$. Encontrar la medida de cada ángulo. Resp. 129° ; 51°

19. La diferencia entre los $\frac{5}{16}$ del suplemento de un ángulo y el complemento de la mitad del ángulo excede en 5° al doble del complemento del ángulo. Calcular la medida del ángulo. Resp. 75°
20. El duplo del complemento de un ángulo es igual al complemento de la diferencia entre el suplemento y el complemento del ángulo. Calcular la medida del ángulo. Resp. 90°
21. La suma del complemento de un $\angle \alpha$ con el suplemento de su ángulo doble, es igual a $\frac{3}{2}$ del complemento de un $\angle \beta$. Si: $m \angle \alpha - m \angle \beta = 3\pi/20$ rad. Calcular el complemento del ángulo $\angle \alpha$. Resp. 27°
22. Dos ángulos adyacentes suplementarios están en la razón de 2 a 3. Hallar el valor del ángulo formado por la bisectriz del ángulo menor con el lado no común. Resp. 144°
23. La suma del complemento de un ángulo con el suplemento de su ángulo doble es mayor en 110° al tercio del ángulo. Hallar la medida del ángulo. Resp. 48°
24. Si el complemento del suplemento de un ángulo más el suplemento del complemento de su ángulo doble es igual al doble del suplemento del ángulo menos un ángulo llano. Encontrar la medida del ángulo. Resp. 36°
25. La sexta parte del suplemento del complemento de un ángulo es igual a la mitad de la cuarta parte del suplemento del complemento de 50° . Hallar la medida del ángulo. Resp. 15°
26. Los ángulos $\angle BAC$ agudo y $\angle CAD$ recto, son adyacentes. Determinar la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle BAD$. Resp. 45°
27. En un ángulo llano $\angle AOD$ se trazan los ángulos adyacentes $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle COD$. Si las bisectrices de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle COD$ forman un ángulo de 130° , hallar la medida del ángulo $\angle BOC$. Resp. 80°

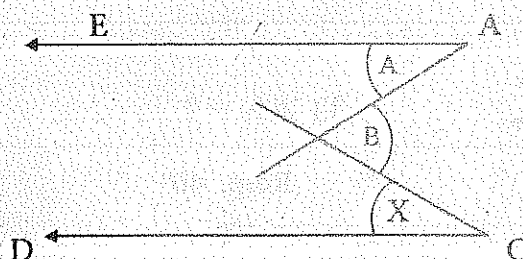
28.



H) $\overrightarrow{BD} \parallel \overrightarrow{AE}$

T) $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AC}$

29.



H) $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{CD}$

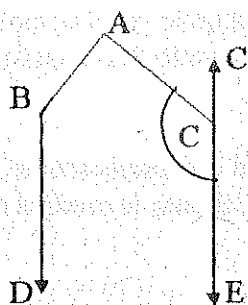
$\angle A = 2\pi/9$ rad

$\angle B = 7\pi/18$ rad

T) $\angle X = ?$

Resp. 30°

30.



$$H) \overrightarrow{BD} \parallel \overrightarrow{CE}$$

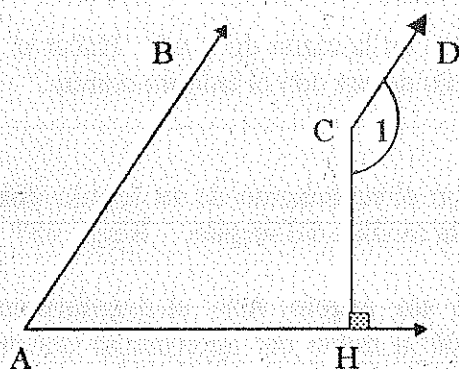
$$\angle A = 4\pi/9 \text{ rad}$$

$$\angle B = 13\pi/18 \text{ rad}$$

$$T) \angle C = ?$$

Resp. 150°

31.



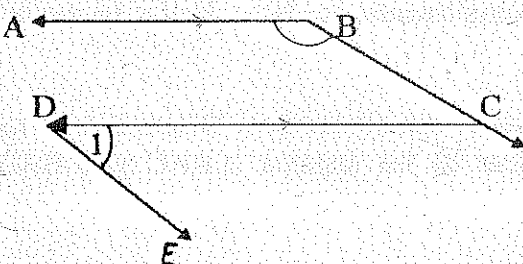
$$H) \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$$

$$\angle A = 3\pi/10 \text{ rad}$$

$$T) \angle 1 = ?$$

Resp. 144°

32.



$$H) \overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{DC}$$

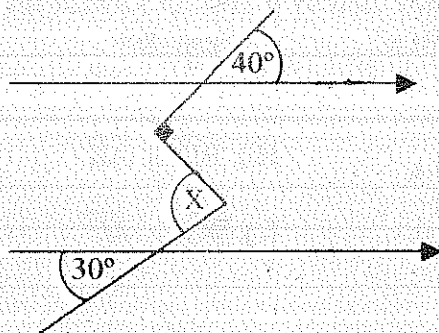
$$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DE}$$

$$\angle B = 3\pi/4 \text{ rad}$$

$$T) \angle 1 = ?$$

Resp. 45°

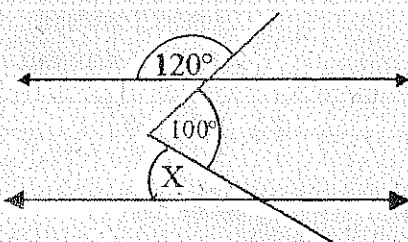
33.



$$T) \angle X = ?$$

Resp. 80°

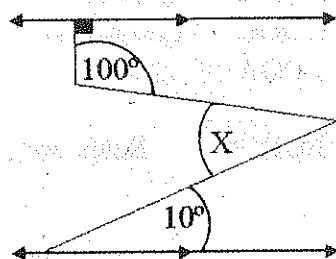
34.



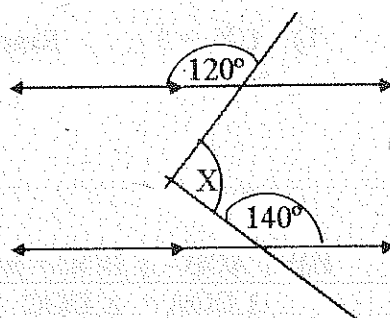
$$T) \angle X = ?$$

Resp. 40°

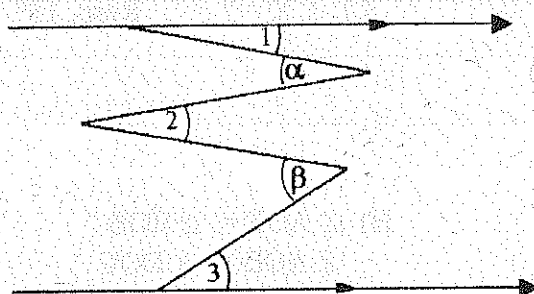
35.

T) $\angle X = ?$ Resp. 20°

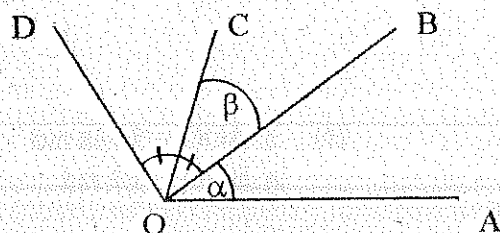
36.

T) $\angle X = ?$ Resp. 100°

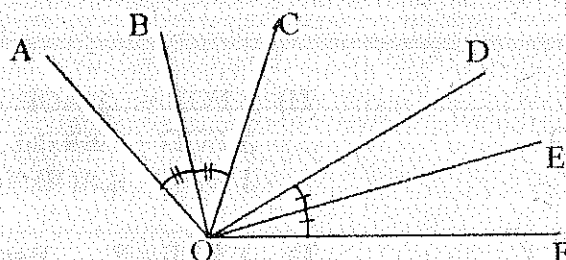
37.

T) $\angle \alpha + \angle \beta = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$

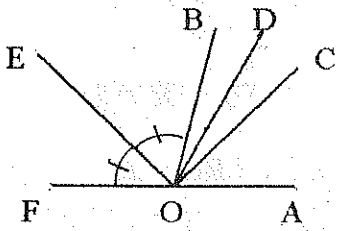
38.

T) $\angle COA = ?$ Resp. $(\angle \alpha + \angle \beta) / 2$

39.

T) $\angle BOE = \frac{\angle AOD + \angle COF}{2}$

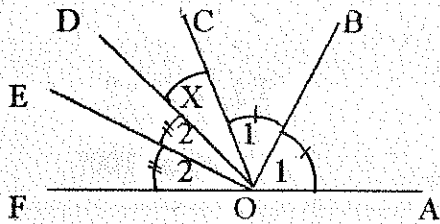
40.



- H) $\angle COA = \angle COB$
 $\angle DOC = 11\pi/90 \text{ rad}$
 $\angle DOA = \angle EOF$

T) $\angle EOB = ?$ Resp. 56°

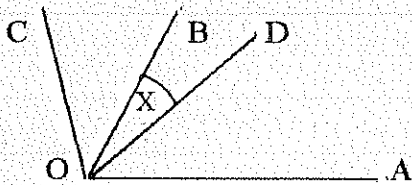
41.



H) $\angle EOB = 5\pi/9 \text{ rad}$

T) $\angle X = ?$ Resp. 20°

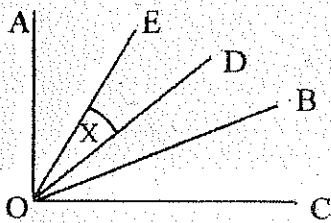
42.



- H) $\angle AOB - \angle BOC = \pi/6 \text{ rad}$
 $\angle DOA = \angle DOC$

T) $\angle X = ?$ Resp. 15°

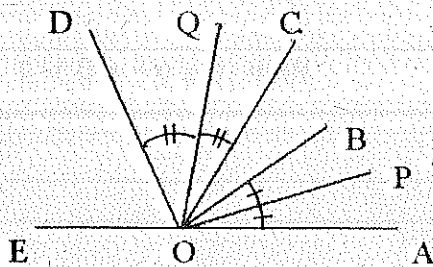
43.



- H) $\angle AOE = \angle EOB$
 $\angle AOD = \angle DOC$
 $\angle AOC - \angle AOB = \pi/9 \text{ rad}$

T) $\angle X = ?$ Resp. 10°

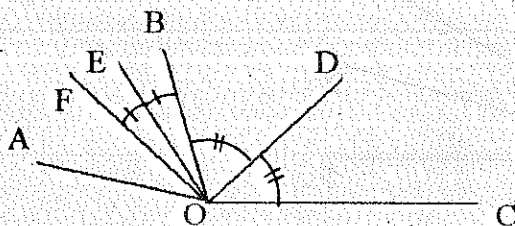
44.



- H) $\angle AOC = 5\pi/18 \text{ rad}$
 $\angle BOD = \pi/2 \text{ rad}$

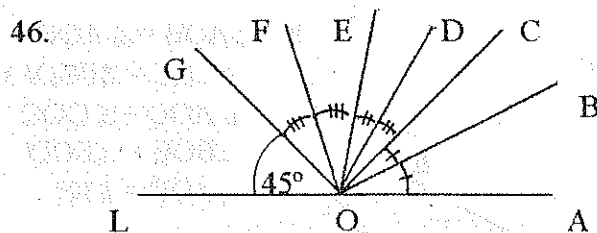
T) $\angle POQ = ?$ Resp. 70°

45.



- H) $\angle FOB = \angle AOF$
 $\angle FOD = 4\pi/9 \text{ rad}$
 $\angle BOC - \angle AOB = 2\pi/9 \text{ rad}$

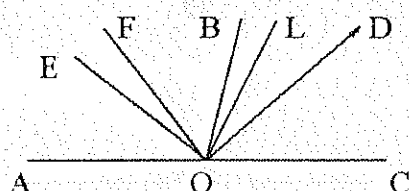
T) $\angle EOF = ?$ Resp. 15°



H) \overline{OF} bisectriz $\angle COL$

T) $\angle COE = ?$ Resp. 45°

47.



H) $\angle DOC = \angle DOB$

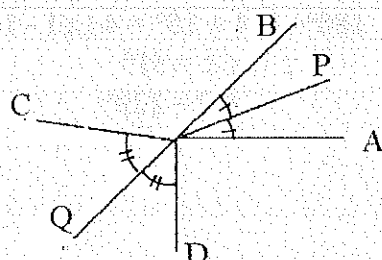
$\angle BOE = \angle EOA$

$\angle AOF = \angle FOD$

$\angle EOL = \angle LOC$

T) $\angle FOL = ?$ Resp. 45°

48.



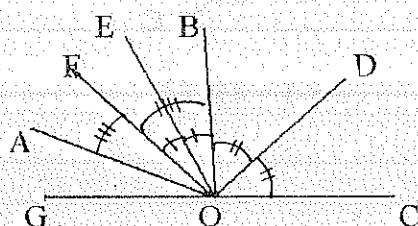
H) $\angle DOA = \angle BOC = 2 \angle AOB$

$\angle COD = 3 \angle BOA$

T) $\angle POQ = ?$ Resp. 180° y $22,5^\circ$

49. Se tienen los rayos \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} , \overrightarrow{OT} . El ángulo formado por las bisectrices de los ángulos $\angle POT$ y $\angle POQ$ disminuido en $\frac{3}{4}$ del suplemento de un $\angle X$ es igual a 4° . Determinar el $\angle X$ si la diferencia entre los ángulos $\angle POT$ y $\angle POQ$ es igual a 20° . Resp. 172°

50.

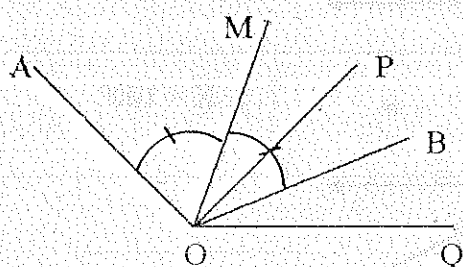


H) $\angle FOD = 4\pi/9$ rad

$\angle BOC - \angle AOB = 2\pi/9$ rad

T) $\angle 1 = ?$ Resp. 15°

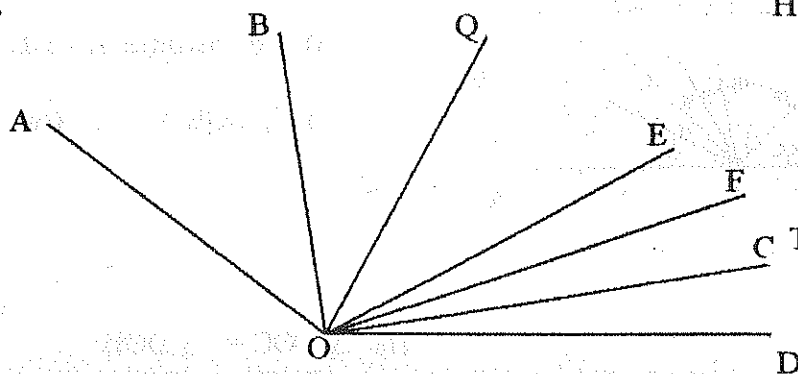
51.



H) $\frac{\angle AOP}{\angle POB} = \frac{\angle AOQ}{\angle BOQ}$

T) $(\angle MOB)^2 = \angle MOP \times \angle MOQ$

52.



$$H) \angle AOB = \angle AOF / 3$$

$$\angle COD = \angle FOD / 3$$

$$\angle AOQ = \angle QOC$$

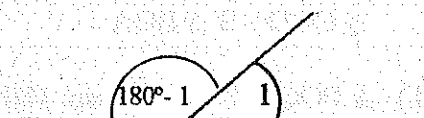
$$\angle BOE = \angle EOD$$

$$\angle AOD = 130^\circ$$

$$T) \angle QOE = \angle AOD / 6$$

3.17 EJERCICIOS RESUELTOS

5.



$$180^\circ - \angle 1 + 15^\circ = 4(\angle 1 - 15^\circ)$$

$$\therefore \angle 1 = 51^\circ$$

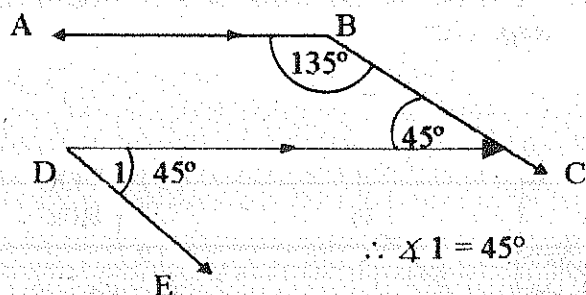
$$\angle 2 = 129^\circ$$

6.

$$\angle 1 - (180^\circ - \angle 1) = 3(90^\circ - \angle 1)$$

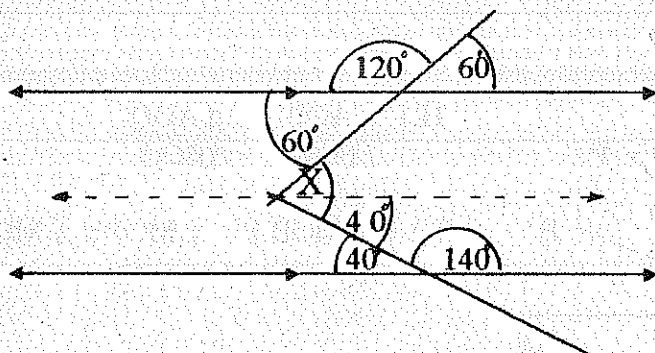
$$\therefore \angle 1 = 90^\circ$$

32.



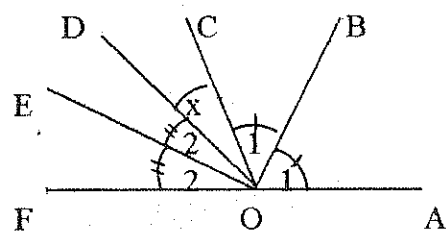
$$\therefore \angle 1 = 45^\circ$$

36.



$$\therefore \angle X = 100^\circ$$

41.



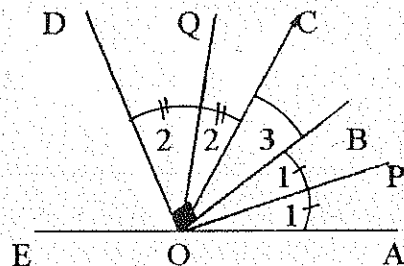
$$2\angle 1 + \angle X + 2\angle 2 = 180^\circ \quad (1)$$

$$\angle 1 + \angle X + \angle 2 = 100^\circ \quad (2)$$

$$(1) - 2(2)$$

$$\therefore \angle X = 20^\circ$$

44.



$$2\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ \quad (1)$$

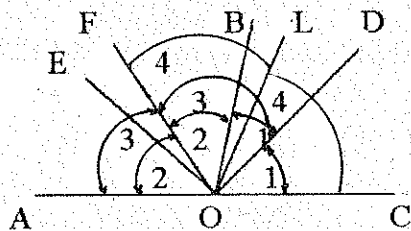
$$2\angle 1 + \angle 3 = 50^\circ \quad (2)$$

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle POQ \quad (3)$$

$$(3) \text{ en } [(1) + (2)]$$

$$\therefore \angle POQ = 70^\circ$$

47.



$$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ \quad (1)$$

$$2\angle 3 + \angle 1 = 180^\circ \quad (2)$$

$$2\angle 4 + \angle 2 = 180^\circ \quad (3)$$

$$(1) \text{ en } [(2) + (3)]$$

$$\therefore \angle 3 + \angle 4 = 135^\circ \quad (4)$$

$$\angle 3 + \angle 4 + \angle FOL = 180^\circ \quad (5)$$

$$(4) \text{ en } (5)$$

$$\therefore \angle FOL = 45^\circ$$

UNIDAD 4

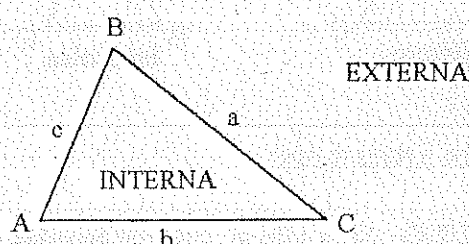
4. TRIÁNGULOS

4.1. DEFINICIONES BÁSICAS

4.1.1 TRIÁNGULO

Es la figura geométrica formada por tres segmentos, que resulta de unir tres puntos no colineales.

Todo triángulo separa al plano en dos subconjuntos : la región interna y la región externa del triángulo.



4.1.2 ELEMENTOS

1. VÉRTICES. Son los tres puntos no colineales : A , B , C

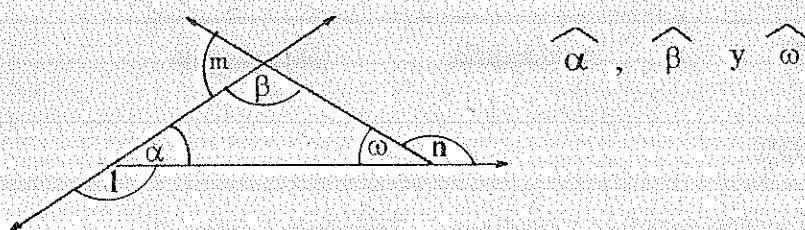
2. LADOS. Son los segmentos \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC}

Cada lado se opone a un vértice. Los lados se designan generalmente con la letra minúscula del vértice al que se opone ese lado, así : $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

3. CONTORNO. Es el conjunto de los tres lados.

4. PERÍMETRO. Es la suma de los lados : $P = AB + BC + AC = a + b + c$

5. ÁNGULOS INTERNOS. Son los ángulos formados por los lados.



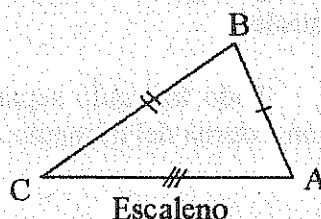
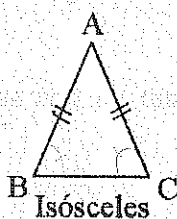
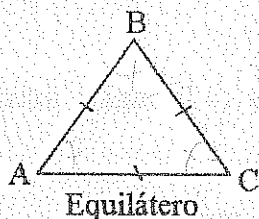
6. ÁNGULOS EXTERNOS. Son los ángulos formados por un lado y la prolongación de otro lado : \hat{l} , \hat{m} , \hat{n}

4.1.3 DENOMINACION : Por los vértices : ΔABC

4.2. CLASIFICACIÓN

4.2.1 POR SUS LADOS

1. **EQUILÁTERO.** Si, y sólo si, sus tres lados son congruentes. $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$
2. **ISÓSCELES.** Si, y sólo si, dos de sus lados son congruentes. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
3. **ESCALENO.** Si sus tres lados no son congruentes.



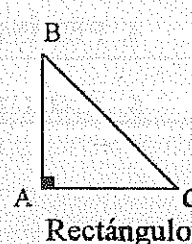
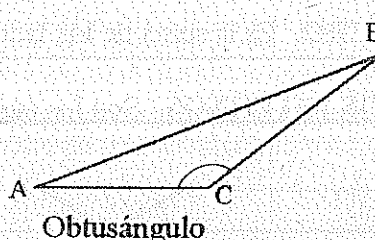
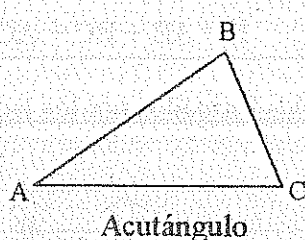
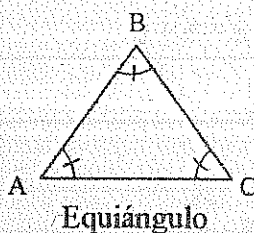
4.2.2 POR SUS ÁNGULOS

1. **EQUIÁNGULO.** Si, y sólo si, sus tres ángulos son congruentes. $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C}$
2. **ACUTÁNGULO.** Si, sus tres ángulos son agudos.
3. **OBTUSÁNGULO.** Si uno, y sólo uno, de sus ángulos es obtuso.

$$\pi/2 \text{ rad} < \hat{C} < \pi \text{ rad}$$

4. **RECTÁNGULO.** Si, y sólo si, uno de sus ángulos es recto. $\hat{A} = \pi/2 \text{ rad}$

Los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos (AB y AC) y el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa (BC).



4.2.3 OTROS

Triángulo complementario o " mediano ". Triángulo " órtico ".

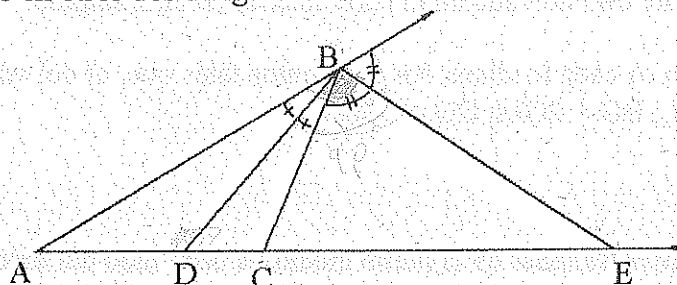
4.3. LÍNEAS Y PUNTOS FUNDAMENTALES

4.3.1 BASE

La base de un triángulo es cualquiera de sus tres lados.

4.3.2 BISECTRICES

Son los segmentos que parten de un vértice del triángulo hacia su lado opuesto y divide al ángulo en otros dos de igual medida.



\overline{BD} bisectriz interna

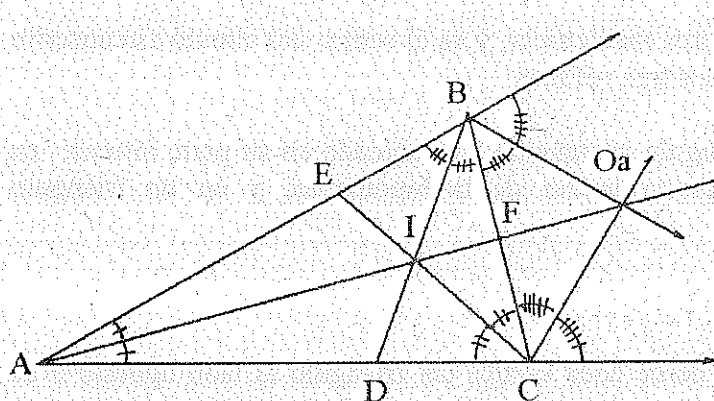
\overline{BE} bisectriz externa

$$\widehat{DBE} = 90^\circ$$

4.3.2.1 INCENTRO (I)

Es el punto de intersección de las tres bisectrices internas, centro del círculo inscrito en el triángulo, tangente a sus tres lados.

El incentro siempre está ubicado en la parte interna de un triángulo.



$$\overline{AF} = Va$$

$$\overline{BD} = Vb$$

$$\overline{CE} = Vc$$

.I Incentro

.Oa Ex-centro relativo al lado a

.Ob Ex-centro relativo al lado b

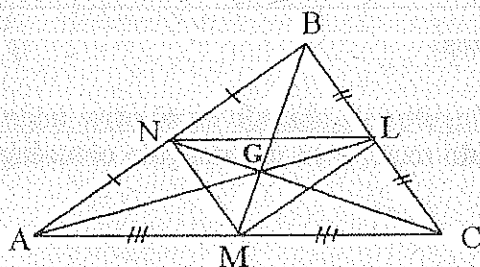
.Oc Ex-centro relativo al lado c

4.3.2.2 EX-CENTRO (Oa)

Es el punto de intersección de dos bisectrices externas y una interna del triángulo, y es el centro del círculo ex-inscrito tangente a un lado y a la prolongación de los otros dos.

4.3.3 MEDIANAS

Son los segmentos que unen un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.



$$\overline{AL} = m_a$$

$$\overline{BM} = m_b$$

$$\overline{CN} = m_c$$

.G Baricentro

ΔLMN Mediano

4.3.3.1 BARICENTRO (G)

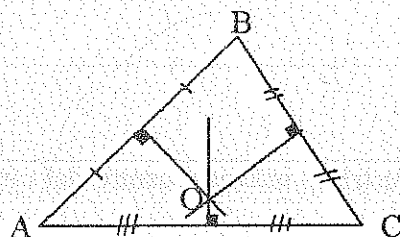
Es el punto de intersección de las tres medianas, y es el centro de gravedad del triángulo.

El baricentro siempre está ubicado en la parte interna de un triángulo.

El baricentro forma en cada mediana dos segmentos tales que, el del vértice es el doble del otro : $AG = 2GL$; $BG = 2GM$; $CG = 2GN$.

4.3.4 MEDIATRICES

Son las rectas perpendiculares trazadas en el punto medio de cada lado del triángulo.



. O Circuncentro

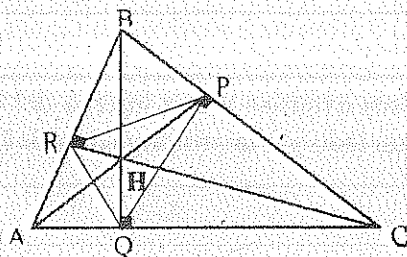
4.3.4.1 CIRCUNCENTRO (O)

Es el punto de intersección de las tres mediatrices, y es el centro del círculo circunscrito al triángulo; círculo que pasa por los tres vértices.

El circuncentro en un triángulo acutángulo está ubicado en su parte interna; en un triángulo rectángulo en el punto medio de la hipotenusa; y en un triángulo obtusángulo en su parte externa.

4.3.5 ALTURAS

Son las perpendiculares trazadas desde cada vértice del triángulo al lado opuesto o su prolongación.



$$\overline{AP} = h_a$$

$$\overline{BQ} = h_b$$

$$\overline{CR} = h_c$$

. H Ortocentro

ΔPQR Órtico

4.3.5.1 ORTOCENTRO (H)

Es el punto de intersección de las tres alturas.

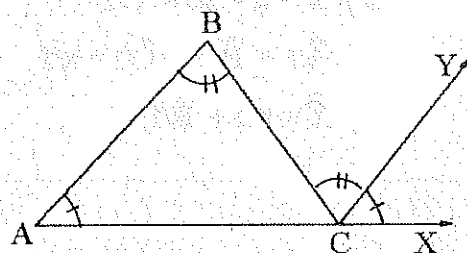
El ortocentro en un triángulo acutángulo está ubicado en su parte interna; en un triángulo rectángulo en el vértice del ángulo recto; y en un triángulo obtusángulo en su parte externa.

4.4. PROPIEDADES

4.4.1 TRIÁNGULO ESCALENO

TEOREMA # 1

En todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos internos es igual a π rad.



H) $\triangle ABC$ escaleño

$$T) \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \text{ rad}$$

D) $\overrightarrow{CY} \parallel \overrightarrow{AB}$ (construcción)

$$\widehat{XCY} = \hat{A}$$

$$\widehat{YCB} = \hat{B}$$

$$\widehat{XCY} + \widehat{YCB} = \widehat{BCX} = \hat{A} + \hat{B}$$

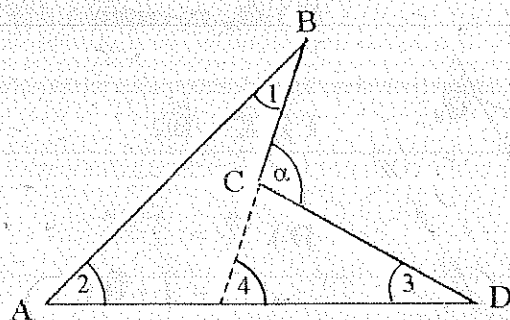
$$\widehat{BCX} + \hat{C} = \pi \text{ rad}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \text{ rad} \quad ///$$

COROLARIOS

1. Todo ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes, y por lo tanto mayor que cada uno de ellos.
2. Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto ni más de un obtuso.
3. En un triángulo rectángulo, los ángulos agudos son complementarios.

TEOREMA # 2



$$T) \hat{\alpha} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$$

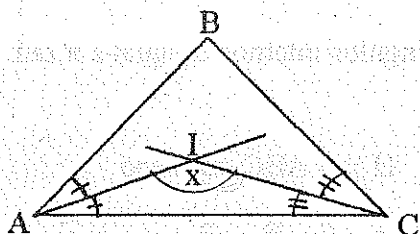
$$D) \hat{\alpha} = \hat{4} + \hat{3}$$

$$\hat{4} = \hat{1} + \hat{2}$$

$$\therefore \hat{\alpha} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$$

TEOREMA # 3

El ángulo formado por dos bisectrices internas de un triángulo es igual a $\pi/2$ rad más la mitad de la medida del ángulo no bisecado.



H) $\cdot I$ incentro del ΔABC

T) $\hat{X} = \pi/2 + \hat{B}/2$

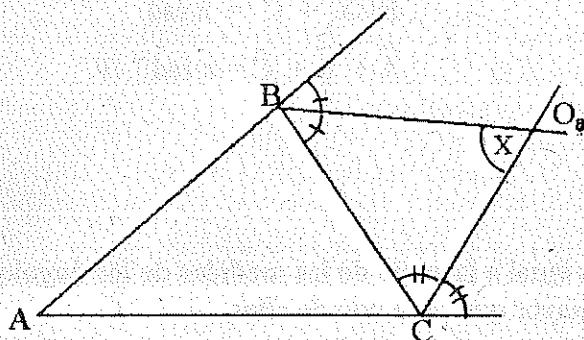
D) $\hat{X} = \pi - \hat{A}/2 - \hat{C}/2$

$$\hat{A}/2 + \hat{B}/2 + \hat{C}/2 = \pi/2$$

$$\hat{X} = \pi/2 + \hat{B}/2$$

TEOREMA # 4

El ángulo formado por dos bisectrices externas de un triángulo, es igual a $\pi/2$ rad disminuido en la mitad del ángulo interno no considerado.



H) $\cdot O_a$ ex-centro del ΔABC

T) $\hat{X} = \pi/2 - \hat{A}/2$

D) $\hat{X} = \pi - \hat{1} - \hat{2}$

$$\hat{2} = \hat{A}/2 + \hat{B}/2$$

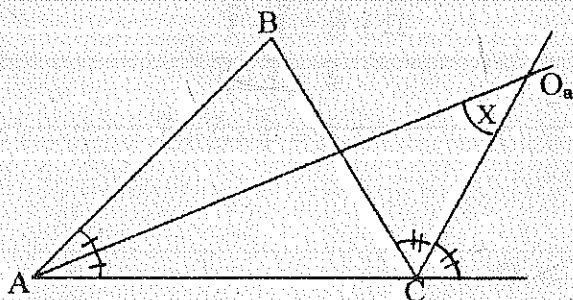
$$\hat{1} = \hat{A}/2 + \hat{C}/2$$

$$\hat{A}/2 + \hat{B}/2 + \hat{C}/2 = \pi/2$$

$$\hat{X} = \pi/2 - \hat{A}/2$$

TEOREMA # 5

El ángulo formado por las bisectrices interna y externa de dos vértices diferentes de un triángulo, es igual a la mitad de la medida del ángulo interno en el tercer vértice.



H) $\cdot O_a$ ex-centro ΔABC

T) $\hat{X} = \hat{B}/2$

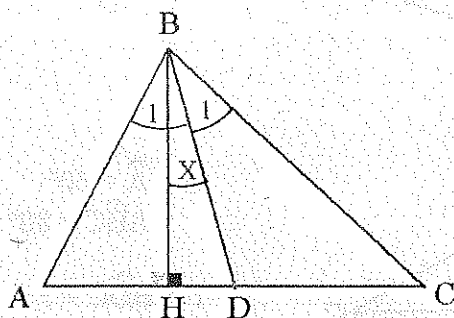
D) $\hat{X} = \hat{2} - \hat{1}$

$$\hat{2} = \hat{1} + \hat{B}/2$$

$$\hat{X} = \hat{B}/2$$

TEOREMA # 6

El ángulo formado por la bisectriz interna y la altura del mismo vértice de un triángulo es igual, a la semidiferencia de las medidas de los ángulos internos en los otros dos vértices.



H) \overline{BD} Bisectriz
 \overline{BH} Altura

$$T) \hat{X} = \hat{A}/2 - \hat{C}/2$$

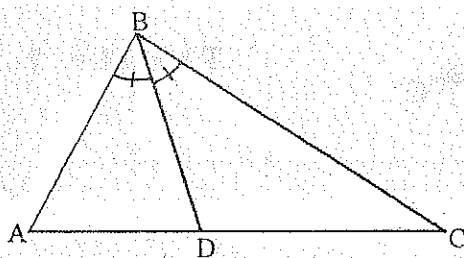
$$D) \hat{1} + \hat{X} + \hat{A} = \pi/2$$

$$\hat{1} + \hat{X} + \hat{C} = \pi/2$$

$$\hat{X} = \hat{A}/2 - \hat{C}/2$$

4.4.1.1 EJERCICIOS

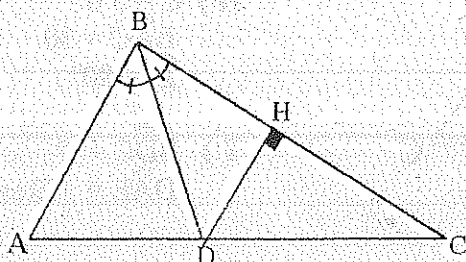
1.



H) $\hat{A} = 50^\circ$
 $\hat{B} = 100^\circ$

$$T) \hat{BDC} = ? \quad \text{Resp. } 100^\circ$$

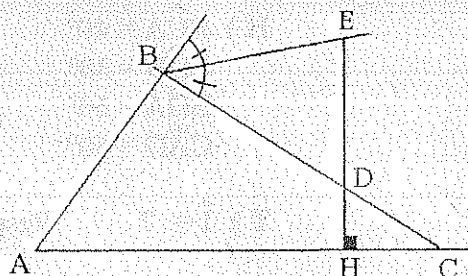
2.



H) $\hat{A} = 60^\circ$
 $\hat{B} = 80^\circ$

$$T) \hat{HDC} = ? \quad \text{Resp. } 50^\circ$$

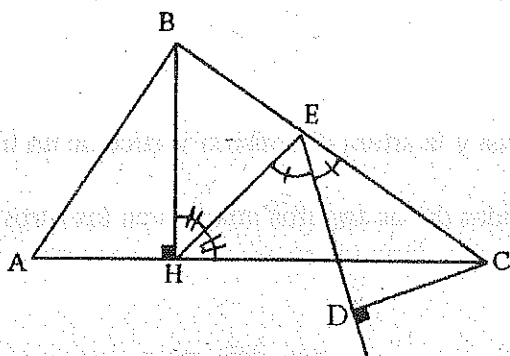
3.



H) $\hat{A} = 60^\circ$
 $\hat{C} = 54^\circ$

$$T) \hat{BED} = ? \quad \text{Resp. } 87^\circ$$

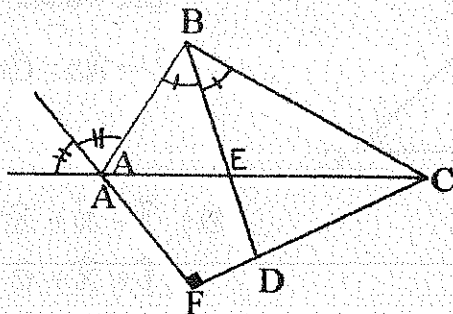
4.



H) $\hat{A} = 60^\circ$
 $\hat{ACB} = 40^\circ$

T) $\hat{BCD} = ?$ Resp. 42.5°

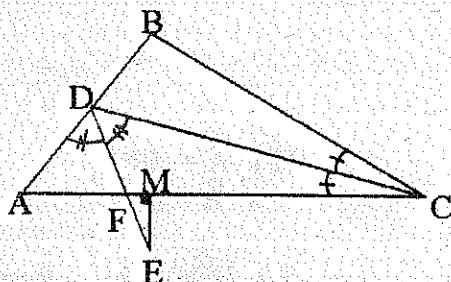
5.



H) $\hat{A} = 60^\circ$
 $\hat{ABC} = 80^\circ$

T) $\hat{BDC} = ?$ Resp. 70°

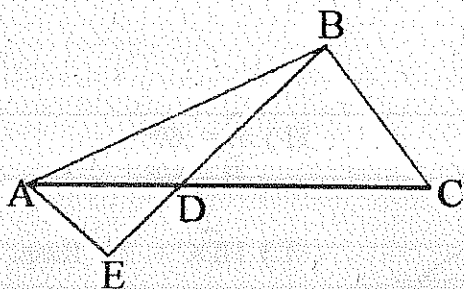
6.



H) $\hat{ABC} = 100^\circ$
 $\hat{BAC} = 60^\circ$

T) $\hat{FEM} = ?$ Resp. 25°

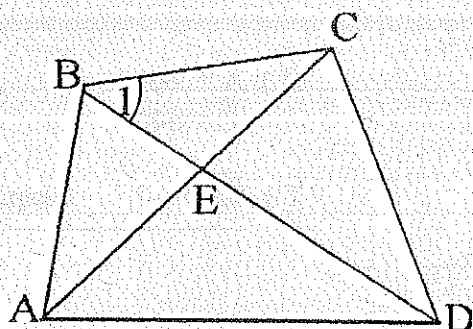
7.



H) $\hat{C} = 50^\circ$
 $\hat{BAC} = 30^\circ$
 $\hat{E} = 80^\circ$

T) $\hat{BDC} = ?$
 $\hat{DAE} = ?$ Resp. $60^\circ, 40^\circ$

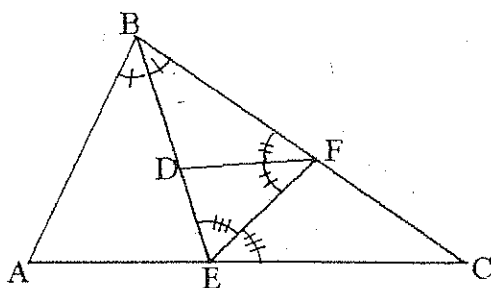
8.



H) $\hat{BCA} = 40^\circ$
 $\hat{CDB} = 30^\circ$
 $\hat{BDA} = 50^\circ$
 $\hat{CAD} = 60^\circ$

T) $\hat{I} = ?$ Resp. 70°

9.

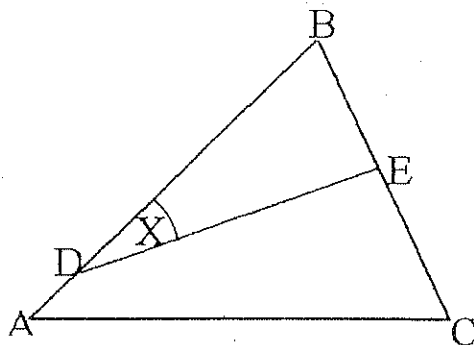


$$H) \hat{A} = 70^\circ$$

$$\hat{C} = 40^\circ$$

$$T) \hat{D} = ? \quad \text{Resp. } 81.25^\circ$$

10.



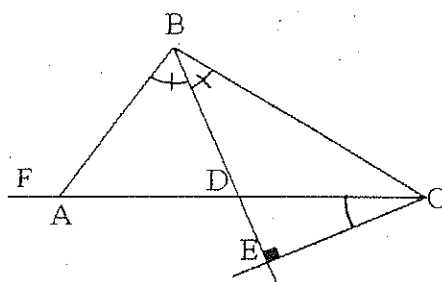
$$H) \hat{A} = 50^\circ$$

$$\hat{C} = 70^\circ$$

$$\hat{BED} = 80^\circ$$

$$T) \hat{X} = ? \quad \text{Resp. } 40^\circ$$

11.

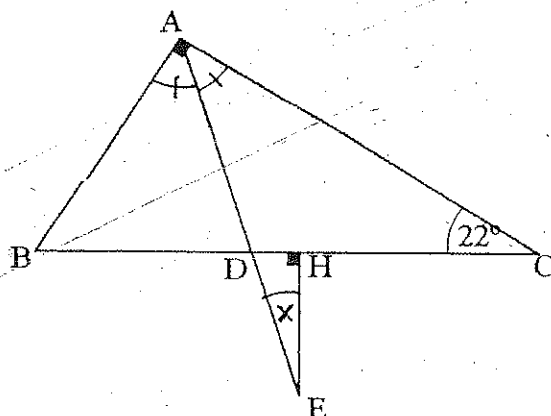


$$H) \hat{BAF} = 110^\circ$$

$$\hat{BCD} = 40^\circ$$

$$T) \hat{DCE} = ? \quad \text{Resp. } 15^\circ$$

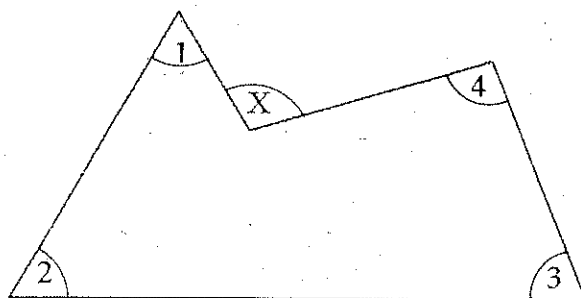
12.



$$T) \hat{X} = ?$$

$$\text{Resp. } 23^\circ$$

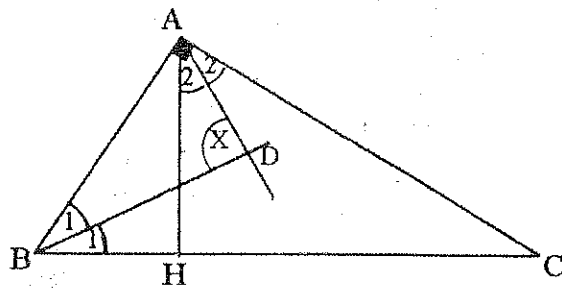
13.



$$H) \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = \hat{\alpha}$$

$$T) \hat{X} = \hat{\alpha} - 180^\circ$$

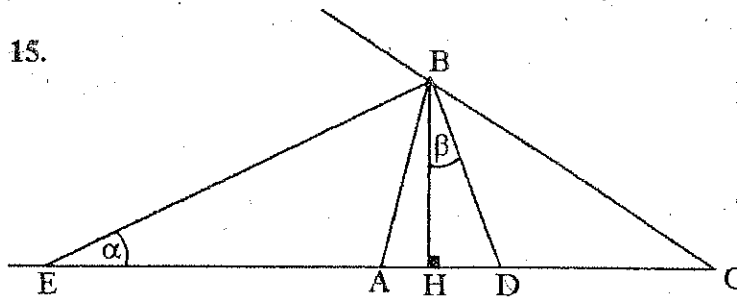
14.



T) $\hat{X} = ?$

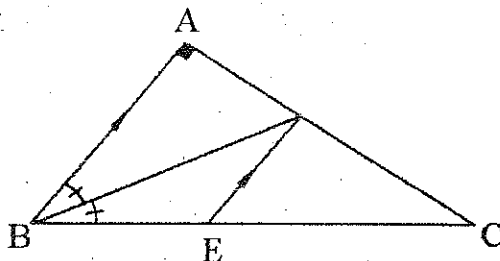
Resp. 90°

15.

H) \overline{BE} bisectriz externa $\triangle ABC$
 \overline{DB} bisectriz interna $\triangle ABC$

T) $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

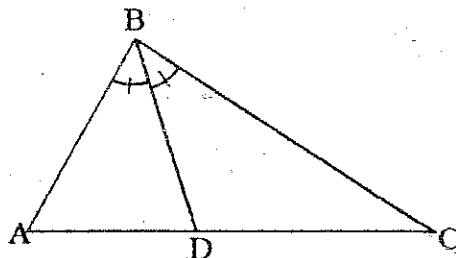
16.



H) $\hat{BDE} = 25^\circ$

T) $\hat{C} = ?$ Resp. 40°

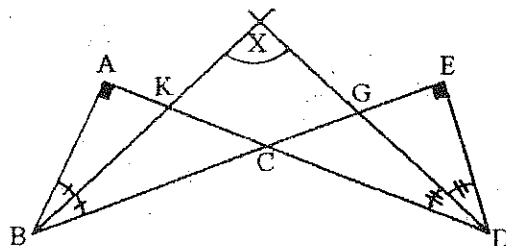
17.



H) $\hat{A} - \hat{C} = 24^\circ$

T) $\hat{BDC} = ?$ Resp. 102°

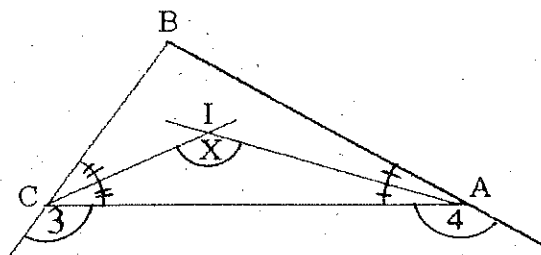
18.



T) $\hat{X} = ?$

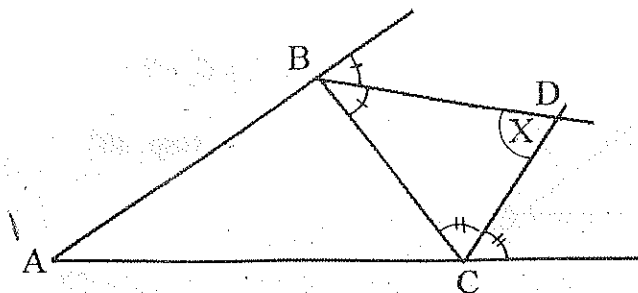
Resp. 90°

19.



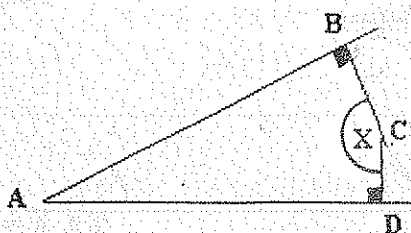
T) $\hat{X} = \frac{\hat{3} + \hat{4}}{2}$

20.



$$T) \hat{X} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$$

21.

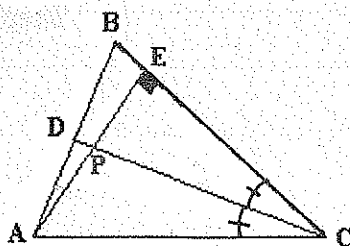


$$H) m \hat{A} = \pi/9$$

$$T) m \hat{X} = ?$$

Resp. 160°

22.



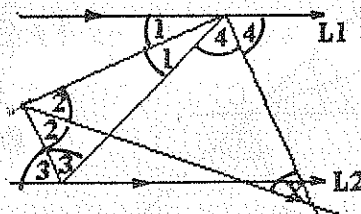
$$H) m \hat{A} = 16 \pi/45 \text{ rad}$$

$$m \hat{B} = 21 \pi/90 \text{ rad}$$

$$T) m \hat{APC} = ?$$

Resp. 127°

23.



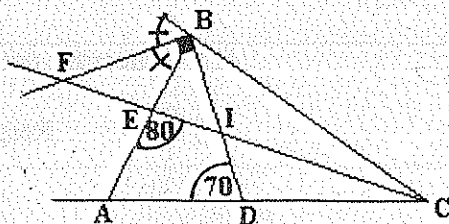
$$T) m \hat{X} = ?$$

Resp. 45°

24. En un triángulo ABC escaleno : $\hat{A} = 60^\circ$ y su bisectriz forma con el lado BC dos ángulos que difieren en 20° . Calcular los ángulos \hat{B} y \hat{C} . Resp. 50° ; 70°

25. En un triángulo ABC : $\hat{A} = 35^\circ$ y $\hat{B} = 50^\circ$. Hallar el ángulo formado por la altura del vértice B y la bisectriz del vértice C. Resp. 42.5°

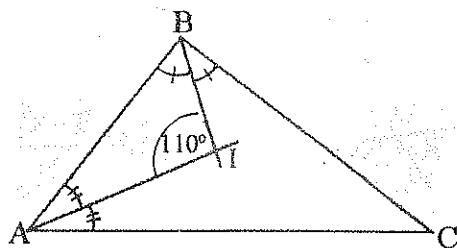
26.



$$T) m \hat{A} = ?$$

Resp. 80°

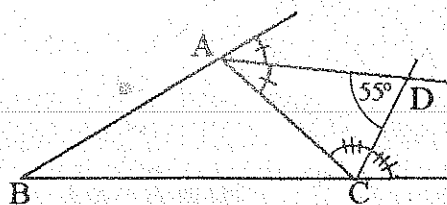
27.



T) $\hat{C} = ?$

Resp. 40°

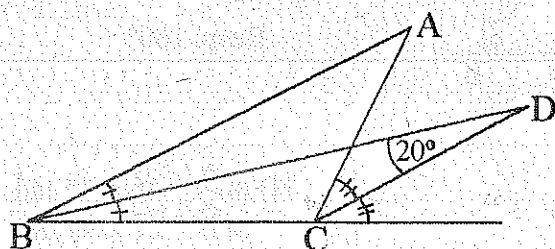
28.



T) $\hat{B} = ?$

Resp. 70°

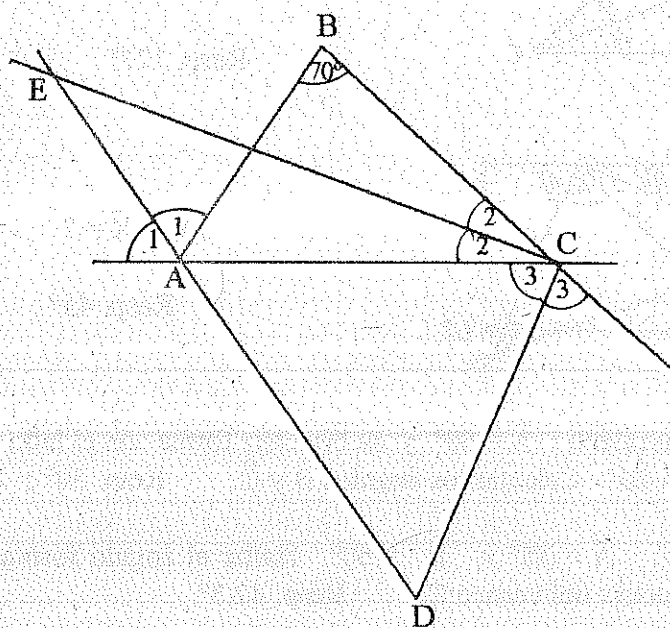
29.



T) $\hat{A} = ?$

Resp. 40°

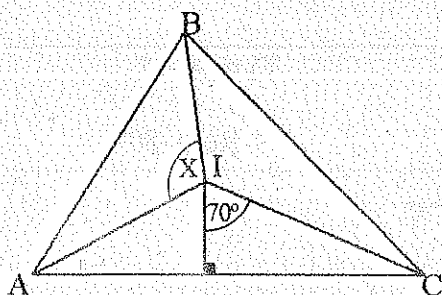
30.



T) $\hat{E} = ?$
 $\hat{D} = ?$

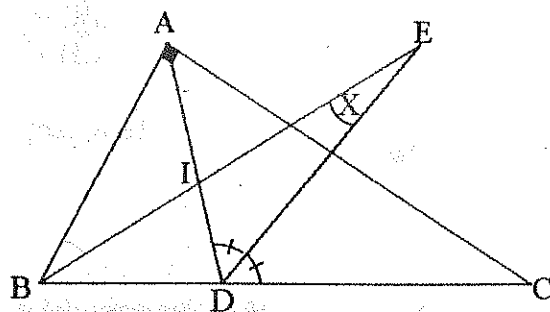
Resp. $35^\circ, 55^\circ$

31.

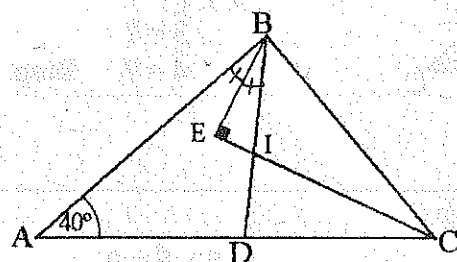
H) I incentro del ΔABC

T) $\hat{X} = ?$ Resp. 110°

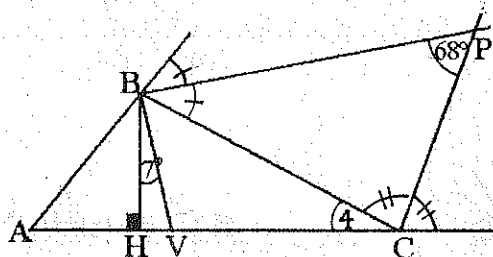
32.

H) \cdot I incentro del $\triangle ABC$ T) $\hat{X} = ?$ Resp. $22,5^\circ$

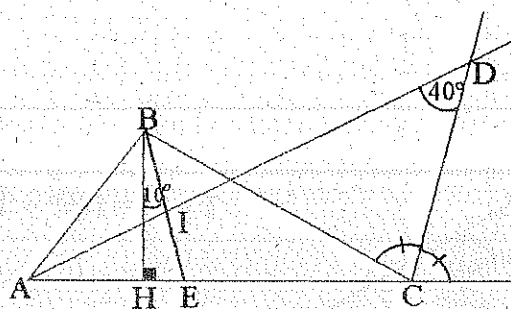
33.

H) \cdot I incentro del $\triangle ABC$ T) $\hat{C} = ?$ Resp. 60°

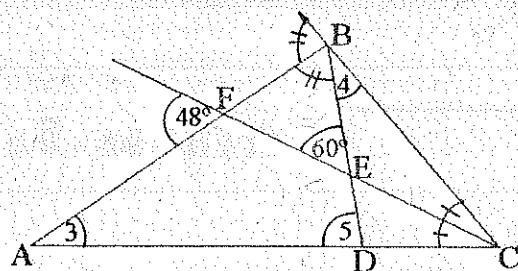
34.

H) $\hat{ABV} \equiv \hat{VBC}$ T) $\hat{4} = ?$ Resp. 30°

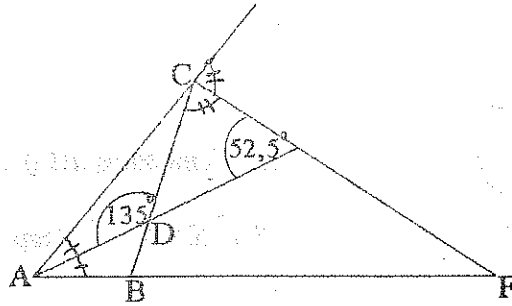
35.

H) \cdot I incentro del $\triangle ABC$ T) $\hat{A} = ?$
 $\hat{B} = ?$
 $\hat{C} = ?$ Resp. $60^\circ ; 80^\circ ; 40^\circ$

36.

T) $\hat{3} = ?$
 $\hat{4} = ?$
 $\hat{5} = ?$ Resp. $24^\circ, 36^\circ, 84^\circ$

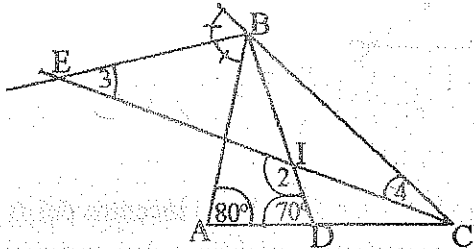
37.



T) $\widehat{BAC} = ?$
 $\widehat{ABC} = ?$
 $\widehat{ACB} = ?$

Resp. $60^\circ, 105^\circ, 15^\circ$

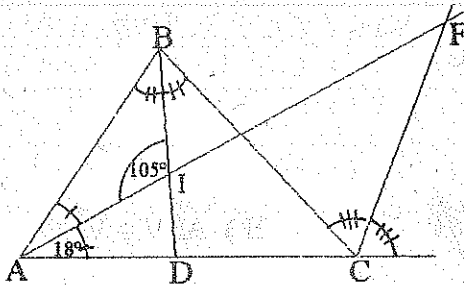
38.

H) $\cdot I$ incentro del ΔABC

T) $\widehat{2} = ?$
 $\widehat{3} = ?$
 $\widehat{4} = ?$

Resp. $130^\circ, 40^\circ, 20^\circ$

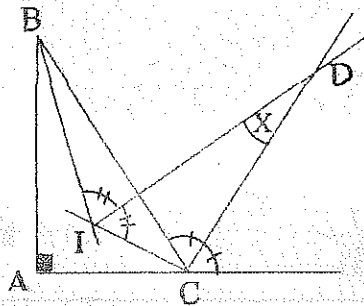
39.



T) $\widehat{F} = ?$

Resp. 57°

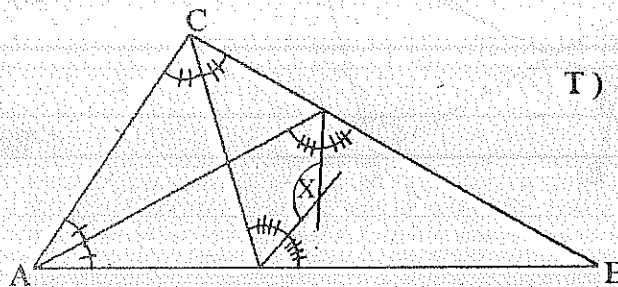
40.

H) $\cdot I$ Incentro del ΔABC

T) $\widehat{X} = ?$

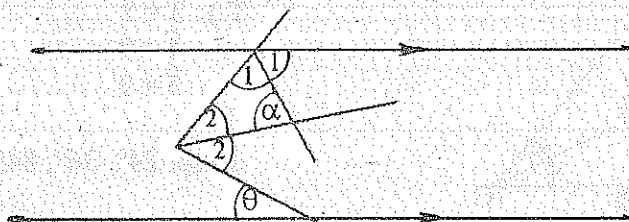
Resp. 22.5°

41.



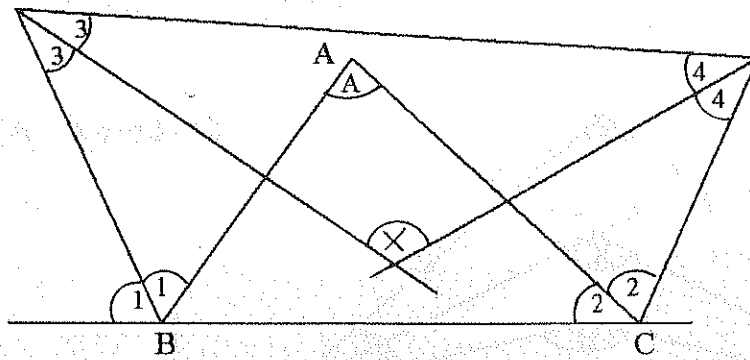
T) $\widehat{X} = 135^\circ + \widehat{B}/4$

42.



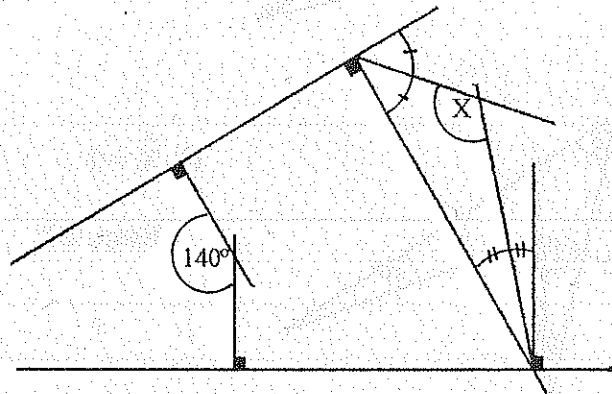
T) $\widehat{\alpha} = 90^\circ - \widehat{\theta}/2$

43.



$$T) \hat{X} = 135^\circ - \hat{A}/4$$

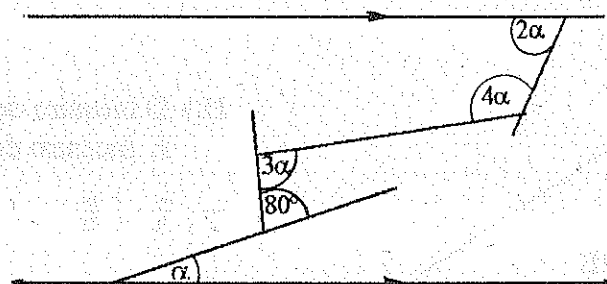
44.



$$T) \hat{X} = ?$$

Resp. 115°

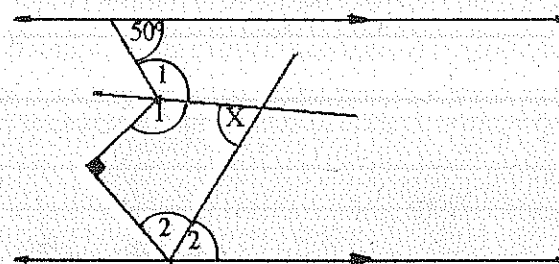
45.



$$T) \hat{\alpha} = ?$$

Resp. 40°

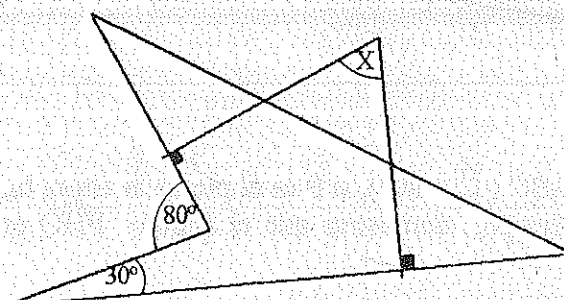
46.



$$T) \hat{X} = ?$$

Resp. 70°

47.

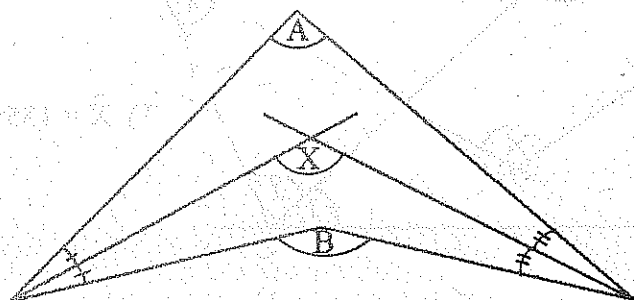


$$T) \hat{X} = ?$$

Resp. 50°

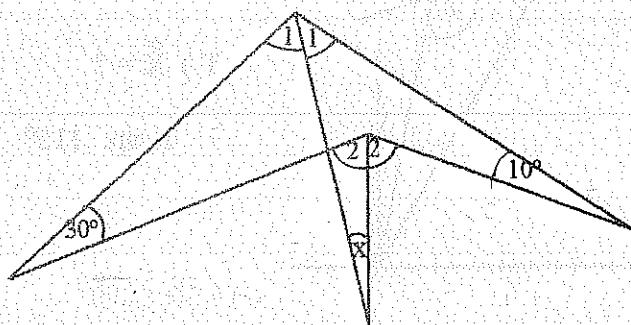
48. En un triángulo ABC, obtusángulo ($\hat{A} > 90^\circ$), H es el ortocentro. Demostrar que las bisectrices de los ángulos \widehat{HBA} y \widehat{HCA} son perpendiculares entre sí.

49.



$$T) \hat{X} = (\hat{A} + \hat{B}) / 2$$

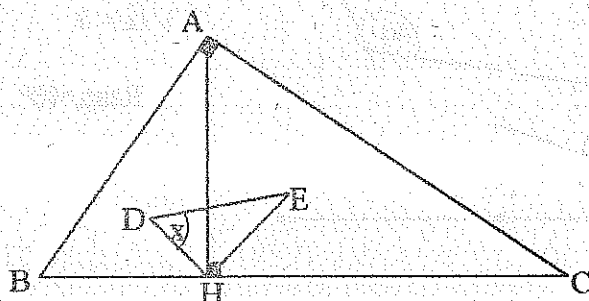
50.



$$T) \hat{X} = ?$$

Resp. 10°

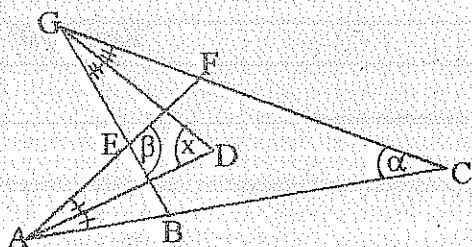
51.



H) D Incentro del $\triangle ABH$
E Incentro del $\triangle AHC$

$$T) \hat{X} = \hat{B}$$

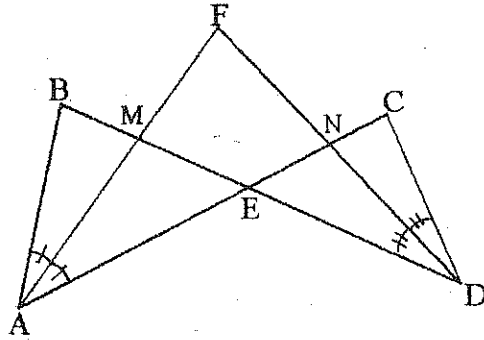
52.



$$T) \hat{X} = (\hat{\alpha} + \hat{\beta}) / 2$$

53. En un triángulo obtusángulo ABC ($\hat{C} > 90^\circ$), si P es el pie de la altura h_a , Q pie de la altura de h_b y H es el ortocentro, demostrar que el ángulo \widehat{PHQ} es igual a la suma de los ángulos \hat{A} y \hat{B} .

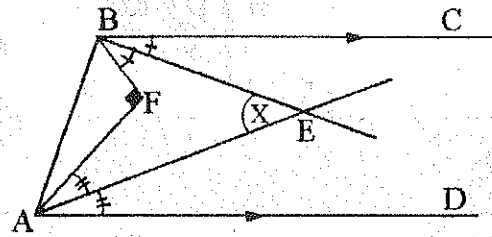
54.



$$\begin{aligned} \text{H) } \widehat{B} &= 22 \pi/45 \text{ rad} \\ \widehat{C} &= 4 \pi/9 \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\text{T) } \widehat{F} = ? \quad \text{Resp. } 84^\circ$$

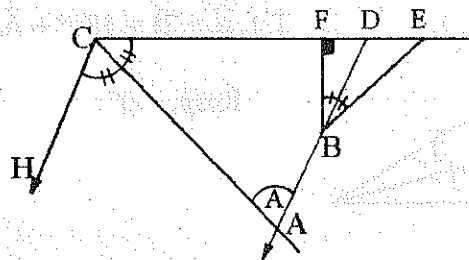
55.



$$\text{T) } \widehat{X} = ?$$

$$\text{Resp. } 45^\circ$$

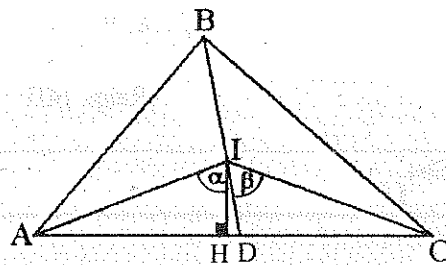
56.



$$\text{H) } \overline{DB} \parallel \overline{CH}$$

$$\text{T) } \widehat{A} = ? \quad \text{Resp. } 45^\circ$$

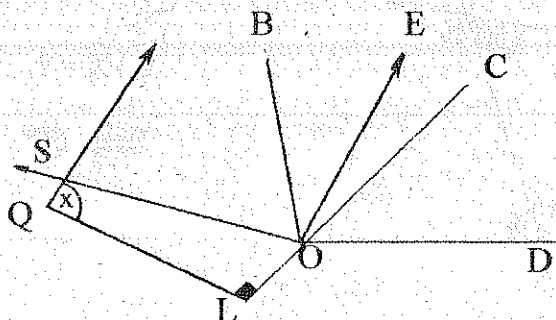
57.



$$\begin{aligned} \text{H) } \triangle ABC &\text{ Escaleno} \\ \text{I} &\text{ Incentro del } \triangle ABC \end{aligned}$$

$$\text{T) } \hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

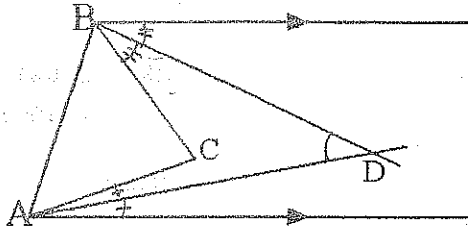
58.



$$\begin{aligned} \text{H) } \widehat{AOE} &= \widehat{EOD} \\ \widehat{AOB} &= \widehat{BOC} \\ \widehat{BOE} &= \pi/6 \text{ rad.} \\ \widehat{AOD} &= 8\pi/9 \text{ rad.} \\ \overline{QS} &\parallel \overline{OE} \end{aligned}$$

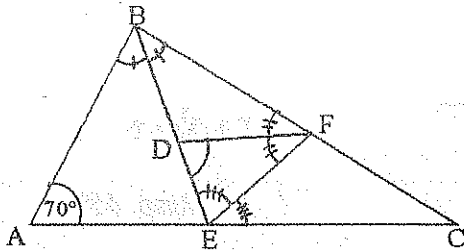
$$\text{T) } \widehat{X} = ? \quad \text{Resp. } 110^\circ$$

59.



$$T) \hat{D} = \hat{C}/2$$

60.

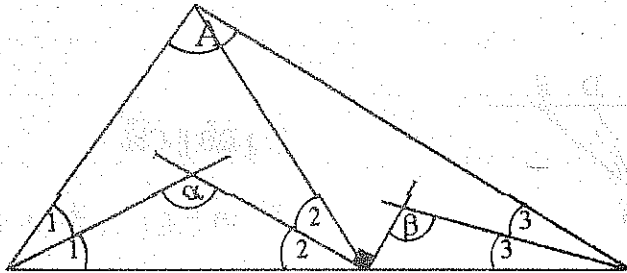


$$H) \hat{D} = 81^\circ$$

$$T) \hat{C} = ?$$

Resp. 42°

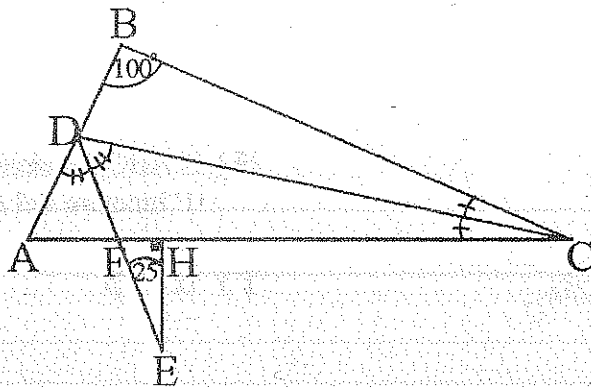
61.



$$T) \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ + \hat{A}/2$$

Resp. 60°

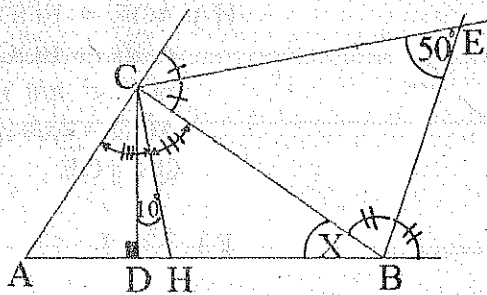
62.



$$T) \hat{A} = ?$$

Resp. 60°

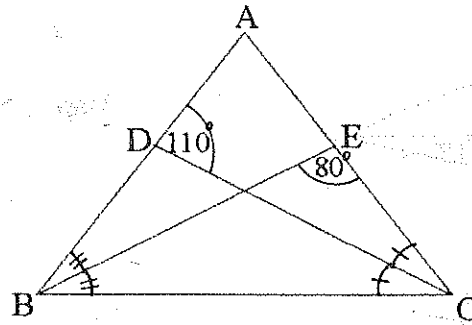
63.



$$T) \hat{X} = ?$$

Resp. 60°

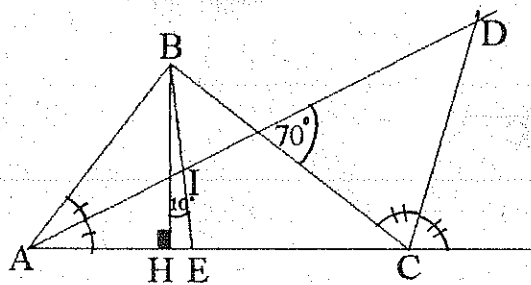
64.



$$T) \hat{A} = ?$$

Resp. 40°

65.

H) $\cdot I$ Incentro del $\triangle ABC$

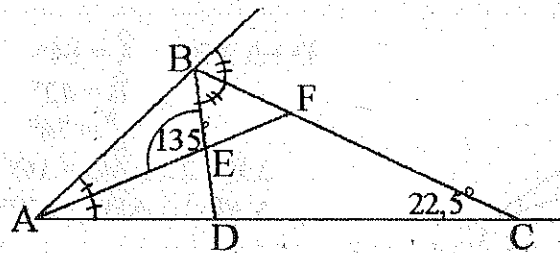
$$T) \hat{A} = ?$$

$$\hat{B} = ?$$

$$\hat{C} = ?$$

Resp. $60^\circ; 80^\circ; 40^\circ$

66.

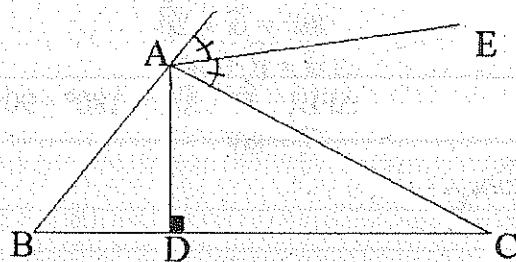


$$T) \hat{ABD} = ?$$

$$\hat{BAD} = ?$$

Resp. $15^\circ; 60^\circ$

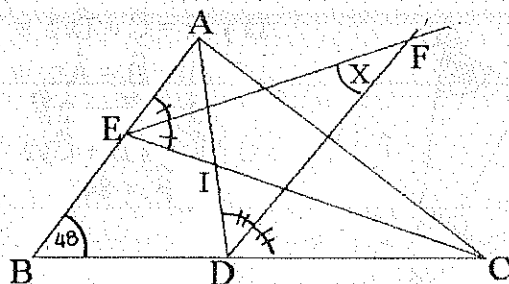
67.



$$H) \hat{B} - \hat{C} = 15^\circ$$

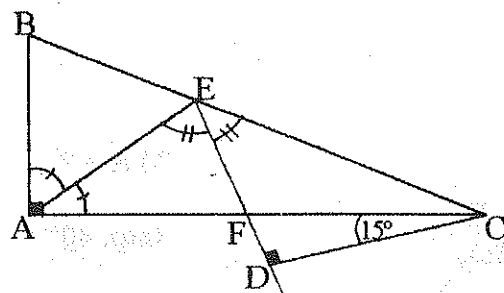
$$T) \hat{EAD} = ? \quad \text{Resp. } 97.5^\circ$$

68.

H) I incentro del $\triangle ABC$

$$T) \hat{X} = ? \quad \text{Resp. } 33^\circ$$

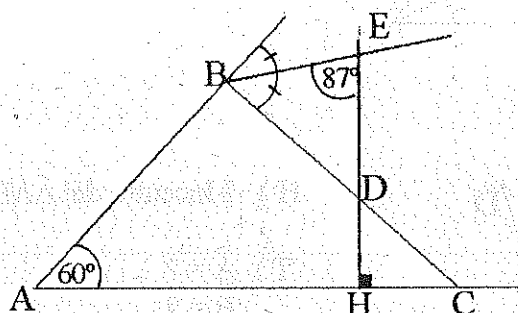
69.



$$T) \hat{B} = ?$$

Resp. 75°

70.

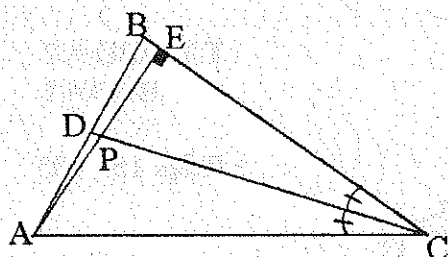


$$T) \hat{C} = ?$$

Resp. 54°

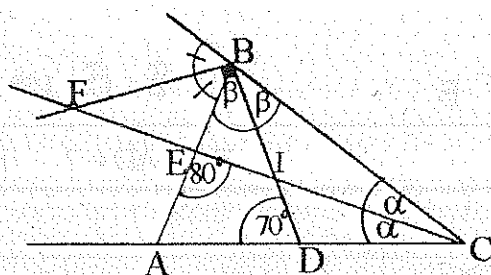
4.4.1.2 EJERCICIOS RESUELTOS

22.



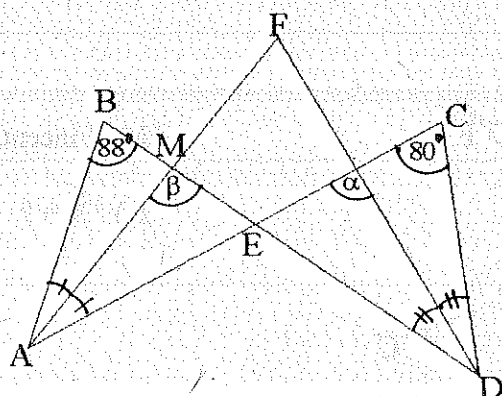
$$\begin{aligned} D) \triangle ABC : \hat{A} &= 64^\circ \\ \hat{B} &= 42^\circ \\ \therefore \hat{C} &= 74^\circ \\ \triangle EAC : \hat{EAC} &= 16^\circ \\ \triangle APC : \hat{APC} &= 127^\circ \end{aligned}$$

26.



$$\begin{aligned} D) 70^\circ &= 2\hat{\alpha} + \hat{\beta} \\ 80^\circ &= \hat{\alpha} + 2\hat{\beta} \\ \therefore \hat{\alpha} + \hat{\beta} &= 50^\circ \\ \triangle FBI : \hat{F} &= \hat{A}/2 = 180^\circ - 90^\circ - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}) \\ \therefore \hat{A} &= 80^\circ \end{aligned}$$

54.



$$\begin{aligned} D) \hat{\alpha} &= \hat{C} + \hat{D}/2 = \hat{F} + \hat{A}/2 \quad (1) \\ \hat{\beta} &= \hat{B} + \hat{A}/2 = \hat{F} + \hat{D}/2 \quad (2) \\ \hat{B} + \hat{C} &= 2\hat{F} \quad (1) + (2) \\ \hat{F} &= (\hat{B} + \hat{C})/2 \\ \therefore \hat{F} &= 84^\circ \end{aligned}$$

4.5. CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son congruentes cuando tienen sus elementos respectivamente congruentes.

Se denota este hecho escribiendo $\triangle ABC \cong \triangle FED$

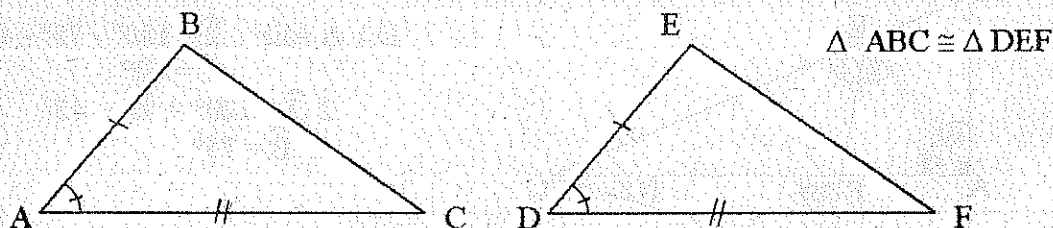
Para todo par de triángulos congruentes, la relación entre sus elementos congruentes es una correspondencia biunívoca. Entonces, en dos triángulos congruentes, a cada lado (o ángulo) del uno corresponde un lado (o ángulo) congruente en el otro, llamados correspondientes congruentes.

Se demuestra que dos triángulos son congruentes para concluir que todos los demás elementos correspondientes son congruentes.

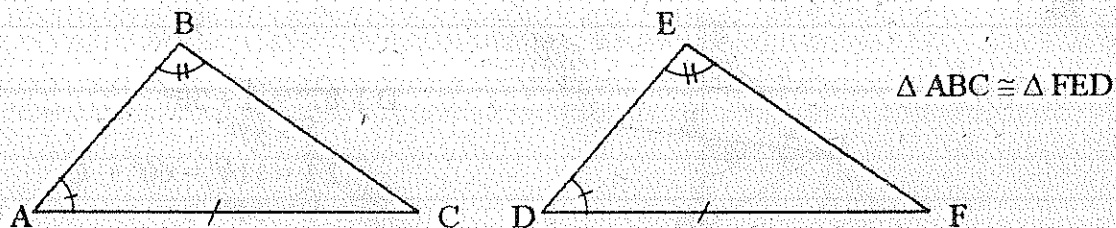
4.5.1 POSTULADOS DE CONGRUENCIA

4.5.1.1 TRIÁNGULOS ESCALENOS

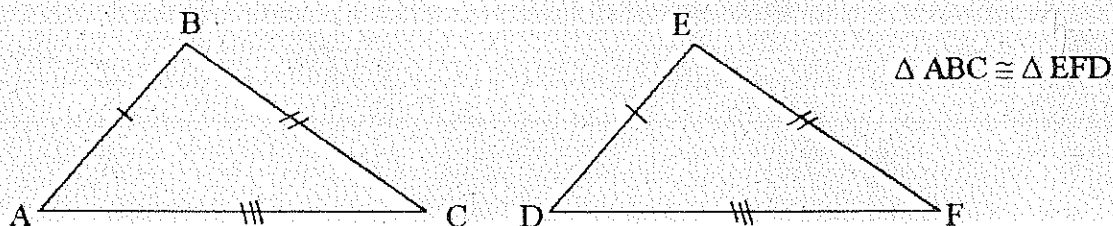
1. Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido son congruentes con las partes correspondientes de otro, entonces los dos triángulos son congruentes. Es una correspondencia (L.A.L.).



2. Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente congruentes un lado y dos ángulos. En una correspondencia (A.L.A.).

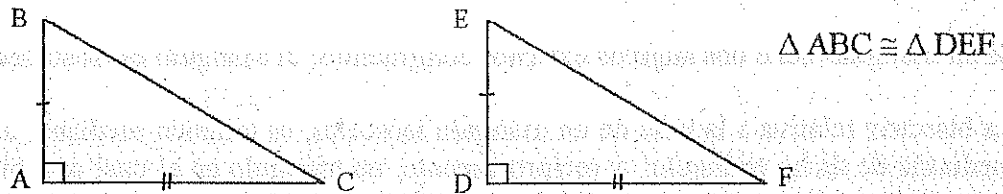


3. Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los lados correspondientes de otro, entonces los dos triángulos son congruentes. Es una correspondencia (L.L.L.).

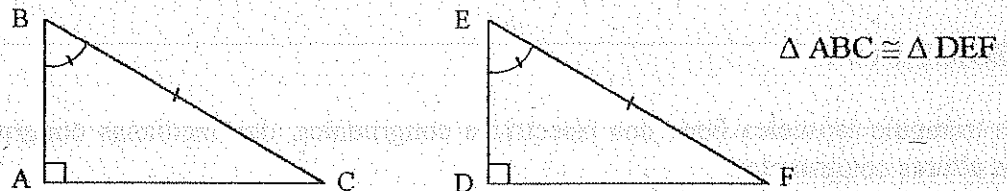


4.5.1.2 TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

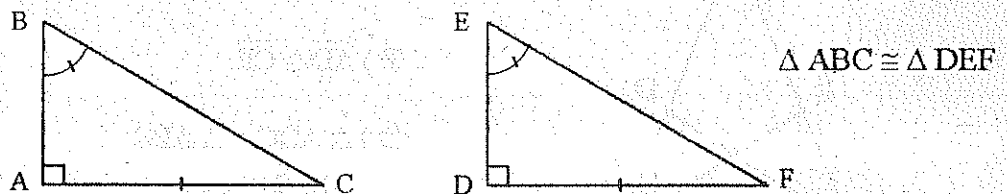
1. Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen los catetos respectivamente congruentes. Es una correspondencia (C.C).



2. Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen la hipotenusa y un ángulo agudo respectivamente congruentes. Es una correspondencia (H.A).



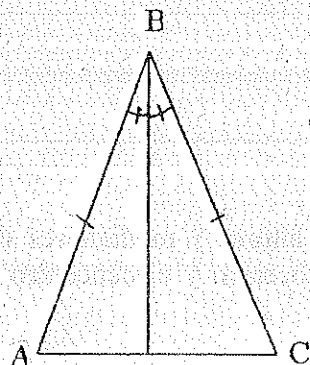
3. Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen un cateto y un ángulo agudo respectivamente congruentes. Es una correspondencia (C.A).



4.6. TRIÁNGULO ISÓSCELES Y EQUILÁTERO

TEOREMA # 1

Si dos lados de un mismo triángulo son congruentes entre si, los ángulos opuestos a dichos lados también son congruentes.



H) $\triangle ABC$ isósceles ($AB = BC$)

T) $\hat{A} \cong \hat{C}$

D) \overline{BD} bisectriz \hat{B} (construcción)

$\triangle ABD \wedge \triangle DBC$

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (L)

$\hat{A} \cong \hat{C}$ (A)

$\overline{BD} = \overline{BD}$ (L)

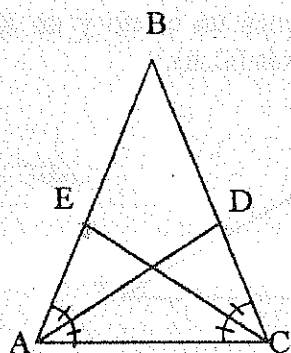
$\triangle ABD \cong \triangle DBC$ (L.A.L) $\Rightarrow \hat{A} \cong \hat{C} \quad \text{///}$

COROLARIOS.

1. Los ángulos en la base de un triángulo isósceles, son congruentes.
2. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son también congruentes.
3. Si un triángulo tiene dos ángulos externos congruentes, el triángulo es isósceles.
4. La bisectriz relativa a la base de un triángulo isósceles, es también mediana, altura y mediatriz de dicho triángulo; y recíprocamente, un triángulo en el cual una bisectriz es también mediana, altura y mediatriz es triángulo isósceles.
5. Todo triángulo equilátero es equiángulo; y recíprocamente, todo triángulo equiángulo es también equilátero.

TEOREMA # 2

Un triángulo isósceles tiene dos bisectrices congruentes, dos medianas congruentes y dos alturas congruentes.



H) $\triangle ABC$ isósceles

$$\overline{AB} = \overline{BC}$$

\overline{AD} y \overline{CE} bisectrices

$$T) \overline{AD} \cong \overline{CE}$$

D) $\triangle ADC \wedge \triangle AEC$

$$\widehat{C} \cong \widehat{A} \quad (A)$$

$$\overline{AC} \cong \overline{AC} \quad (L)$$

$$\widehat{DAC} \cong \widehat{ECA} \quad (A)$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle AEC \quad (A.L.A)$$

$$\Rightarrow \overline{AD} \cong \overline{CE} \quad ///$$

“idem, para las medianas y alturas”

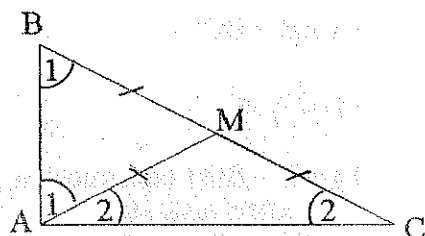
COROLARIO

En un triángulo equilátero las bisectrices, medianas, alturas y mediatrices de los tres vértices son congruentes. El incentro, baricentro, ortocentro y circuncentro coinciden en un mismo punto.

4.7. TRIÁNGULO RECTÁNGULO

TEOREMA # 1

Si la mediana de un triángulo es la mitad del lado no adyacente a ésta, el triángulo es rectángulo.



$$H) \overline{BM} \cong \overline{MC} \cong \overline{AM}$$

$$T) \triangle ABC \text{ rectángulo}$$

$$D) 2\hat{1} + 2\hat{2} = \pi \text{ rad}$$

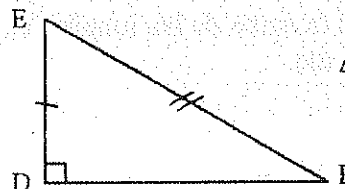
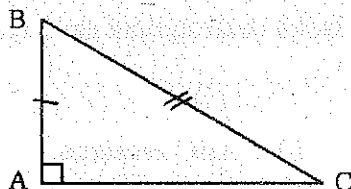
$$\hat{1} + \hat{2} = \pi/2 \text{ rad}$$

$$\widehat{BAC} = \pi/2 \text{ rad}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ es rectángulo} \quad ///.$$

COROLARIOS

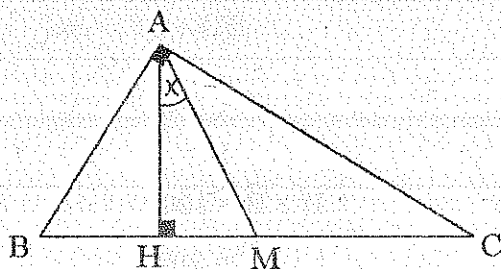
- El punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices del triángulo rectángulo, y es el circuncentro.
- Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen la hipotenusa y un cateto respectivamente congruentes. Es una correspondencia (H.C).



$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

TEOREMA # 2

El ángulo formado por la altura y la mediana relativas a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la diferencia de los ángulos agudos.



$$H) \overline{AH} \text{ altura}$$

$$\overline{AM} \text{ mediana}$$

$$T) \hat{X} = m\hat{B} - m\hat{C}$$

$$D) AM = BM = MC$$

$$\widehat{BAM} = \hat{B}$$

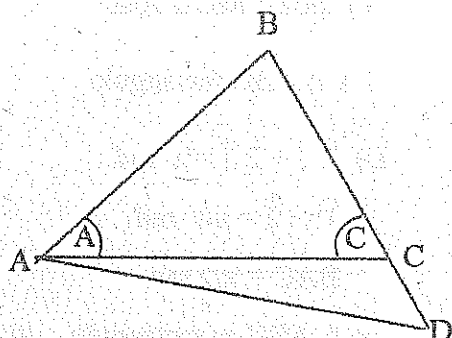
$$\widehat{BAH} = \hat{C}$$

$$\hat{X} = \hat{B} - \hat{C} \quad ///.$$

4.8. DESIGUALDADES

TEOREMA # 1

Si dos lados de un triángulo no son congruentes, los ángulos opuestos a ellos tampoco lo son y el ángulo de mayor medida se opone al lado mayor.



$$H) AB > BC$$

$$T) \hat{C} > \hat{A}$$

$$D) AB = BD \text{ (construcción)}$$

ΔABD isósceles

$$\rightarrow \hat{D} = \hat{DAC} + \hat{A}$$

$$\Rightarrow \hat{D} > \hat{A}$$

$$\hat{C} = \hat{DAC} + \hat{D}$$

$$\Rightarrow \hat{C} > \hat{D}$$

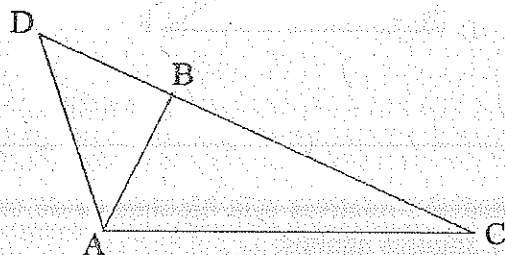
$$\hat{C} > \hat{A} \quad ///.$$

RECÍPROCO

En un mismo triángulo, a mayor ángulo se opone mayor lado.

TEOREMA # 2

En cualquier triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es mayor que la longitud del tercer lado.



$$H) \Delta ABC \text{ escaleno}$$

$$T) AB + BC > AC$$

$$D) AB = BD \text{ (construcción)}$$

$$\therefore \hat{D} \cong \hat{BAD}$$

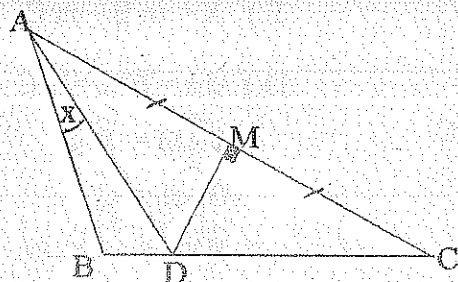
$$\rightarrow \hat{DAC} > \hat{D}$$

$$\Rightarrow DC > AC$$

$$\therefore BD + BC > AC \quad ///.$$

4.9. EJERCICIOS

1.

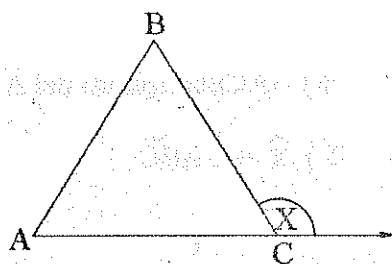


$$H) \hat{B} = 100^\circ$$

$$\hat{C} = 30^\circ$$

$$T) \hat{X} = ? \quad \text{Resp. } 20^\circ$$

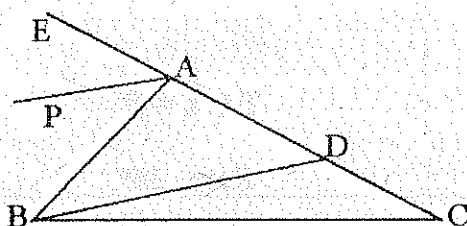
2.

H) $AB = BC$

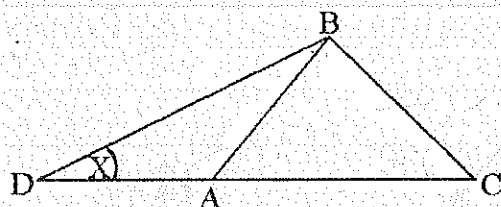
$$\widehat{B} = 5\pi/18$$

T) $\widehat{X} =$ Resp. 115°

3.

H) $AD = AB$ \overline{AP} bisectriz de \widehat{EAB} T) $\overline{BD} \parallel \overline{AP}$

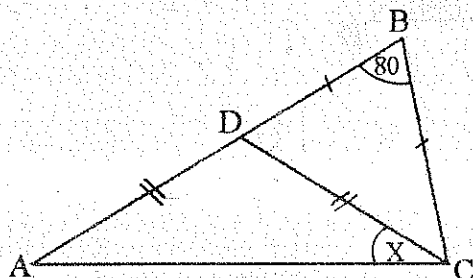
4.

H) $AB = BC = AD$

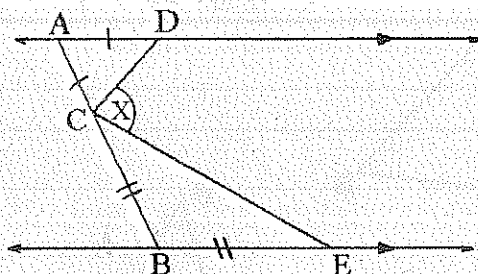
$$\widehat{C} = 40^\circ$$

T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 20°

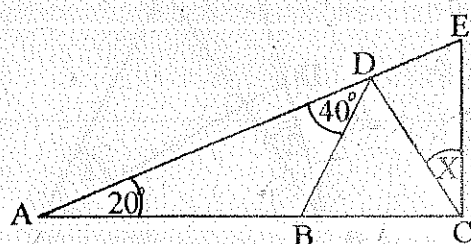
5.

T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 25°

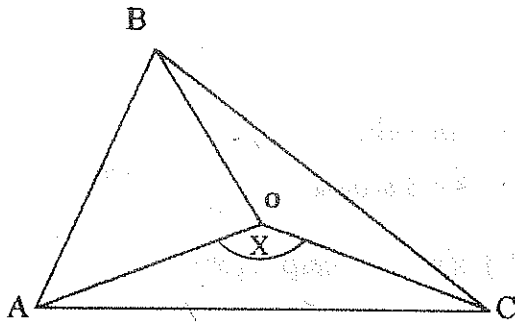
6.

T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 90°

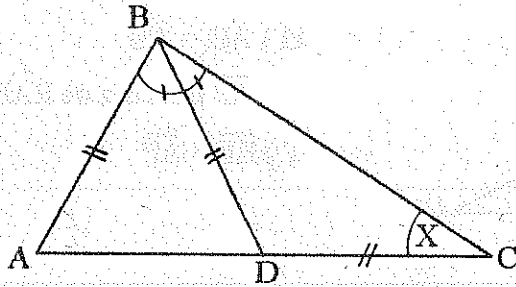
7.

H) $BD = BC = EC$ T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 20°

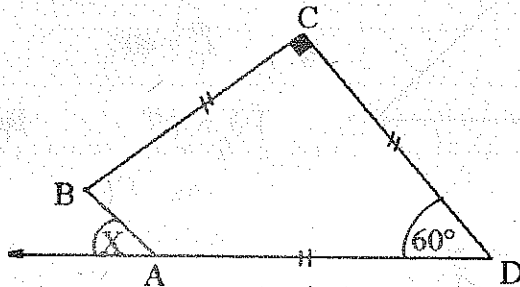
8.

H) $\cdot O$ Circuncentro del ΔABC T) $\hat{X} = 2 \hat{ABC}$

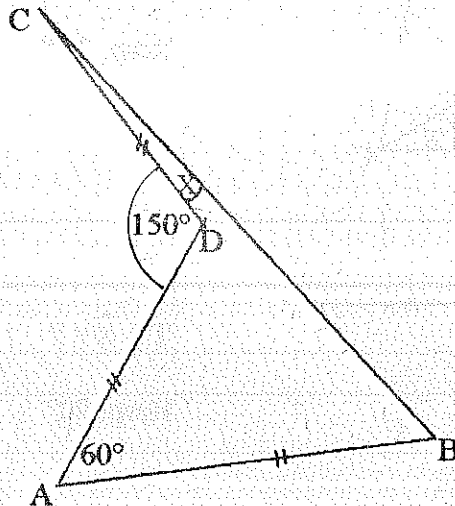
9.

T) $\hat{X} = ?$ Resp. 36°

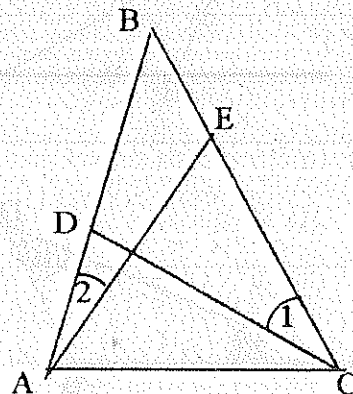
10.

T) $\hat{X} = ?$ Resp. 45°

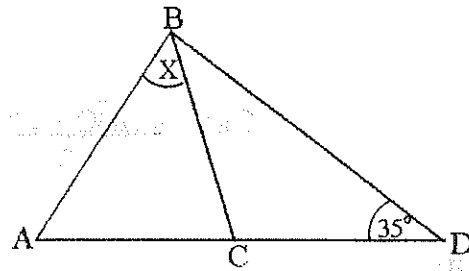
11.

T) $\hat{X} = ?$ Resp. 15°

12.

H) $CA = CD = CE$ T) $\hat{1} = 2 \hat{2}$ 

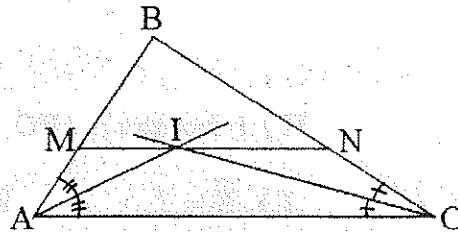
13.



H) $CD = BC = AB$

T) $m\hat{X} = ?$ Resp. 40°

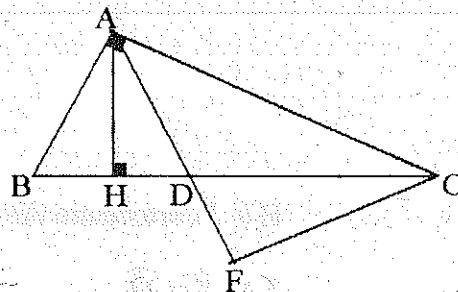
14.



H) $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$

T) $MN = AM + NC$

15.

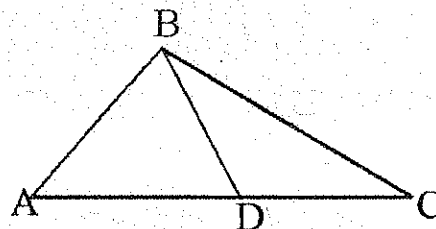


H) $\overline{BH} \cong \overline{HD}$

$\hat{ACD} \cong \hat{ECD}$

T) $\hat{E} = ?$ Resp. 90°

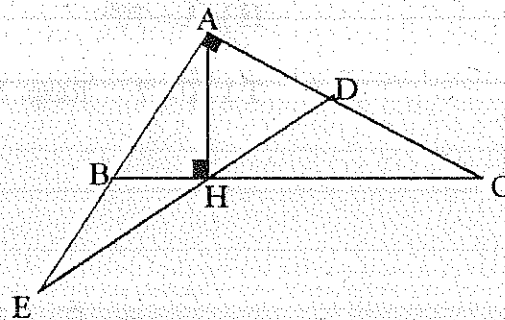
16.



H) $AD = AB$
 $BD = DC$

T) $\hat{ABC} = 3 \hat{C}$

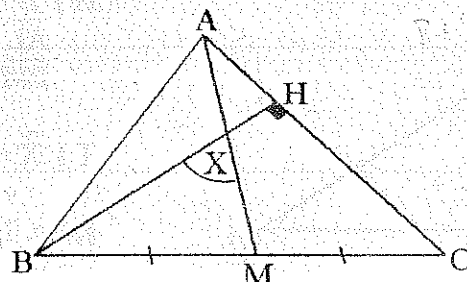
17.



H) $\hat{B} = 2 \hat{C}$
 $\overline{BH} \cong \overline{BE}$

T) $AD = DC = DH$

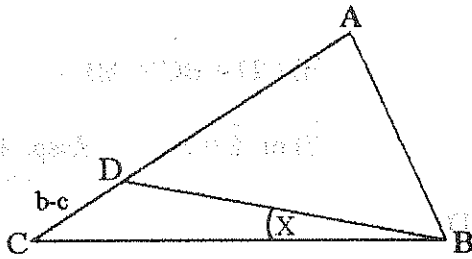
18.



H) $\hat{BAC} = 70^\circ$
 $\hat{C} = 55^\circ$

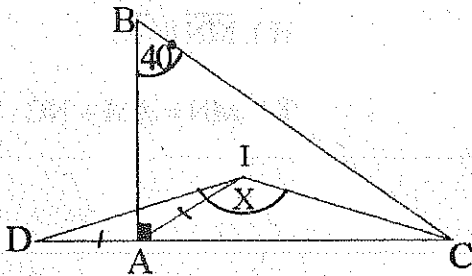
T) $\hat{X} = ?$ Resp. 55°

19.



$$T) \hat{X} = \frac{\hat{ABC} - \hat{C}}{2}$$

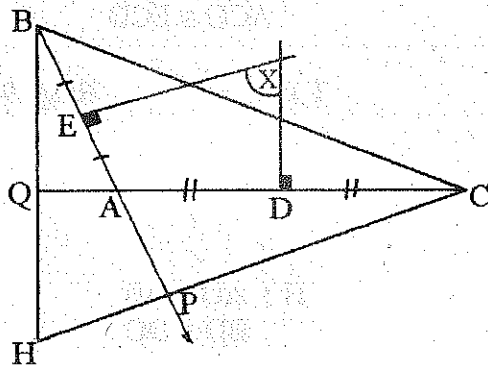
20.

H) I incentro ΔABC

$$T) \hat{X} = ?$$

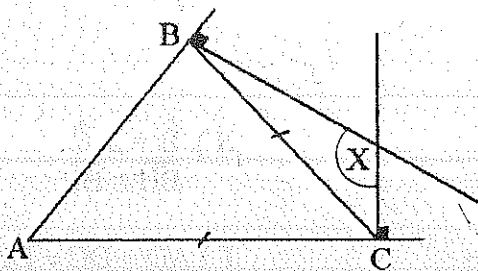
Resp. 132.5°

21.

H) H ortocentro del ΔABC

$$T) \hat{X} \cong \hat{H}$$

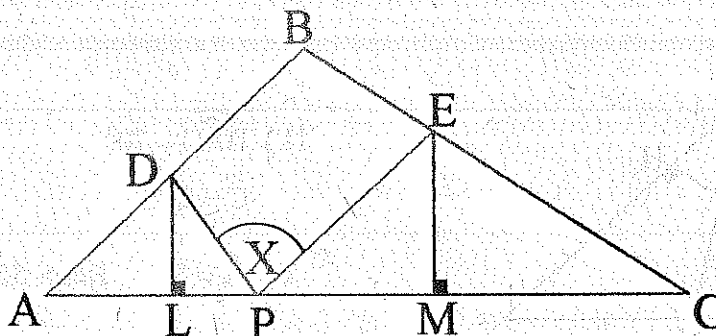
22.



$$H) \hat{A} = 70^\circ$$

$$T) \hat{X} = ? \quad \text{Resp. } 110^\circ$$

23.



$$H) \hat{B} = 10 \pi / 18 \text{ rad}$$

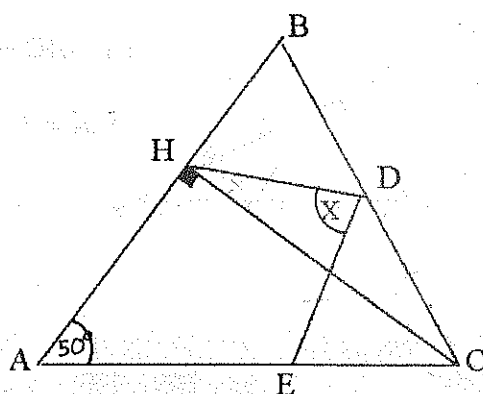
$$\overline{AL} \cong \overline{LP}$$

$$\overline{PM} \cong \overline{MC}$$

$$T) \hat{X} = ?$$

Resp. 100°

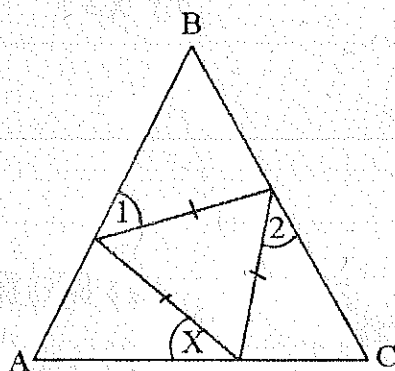
24.



$$H) DC = DE = DH$$

$$T) \hat{X} = ? \quad \text{Resp. } 80^\circ$$

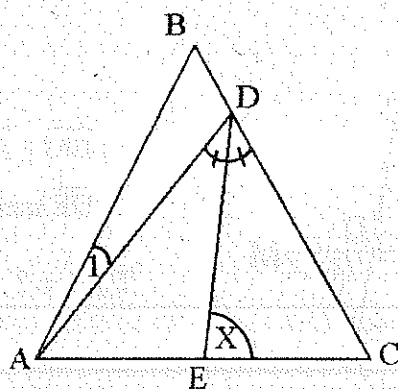
25.



$$H) AB = BC$$

$$T) \hat{X} = (\hat{1} + \hat{2}) / 2$$

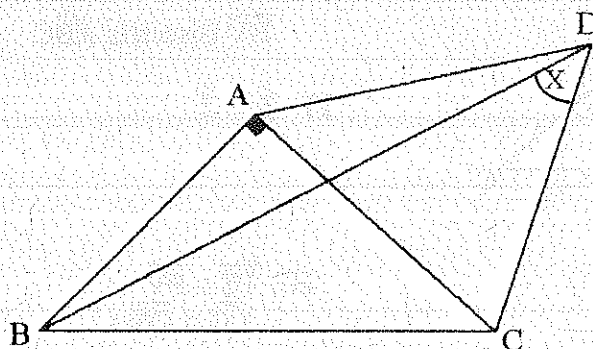
26.



$$H) AB = BC$$

$$T) \hat{X} = (180^\circ - \hat{1}) / 2$$

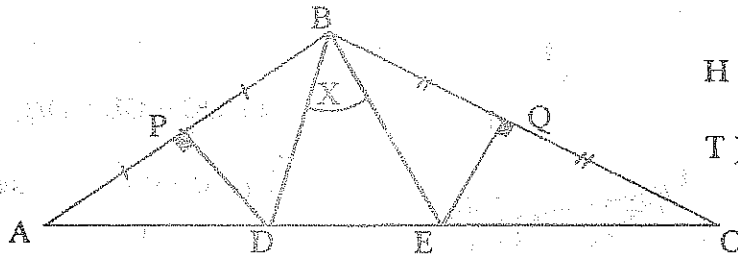
27.



$$H) AB = AC = AD$$

$$T) \hat{X} = ? \quad \text{Resp. } 45^\circ$$

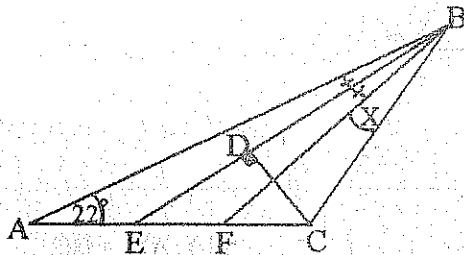
28.



$$H) \widehat{ABC} = 61 \pi/90 \text{ rad}$$

$$T) \widehat{X} = ? \quad \text{Resp. } 64^\circ$$

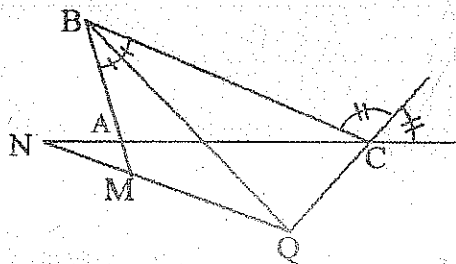
29.



$$H) \overline{BD} \cong \overline{DE}$$

$$T) \widehat{X} = ? \quad \text{Resp. } 22^\circ$$

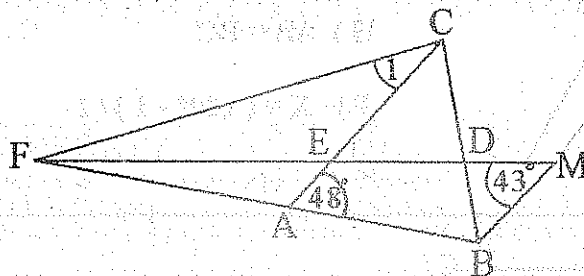
30.



$$H) \overline{NQ} \parallel \overline{BC}$$

$$T) MN = CN - BM$$

31.

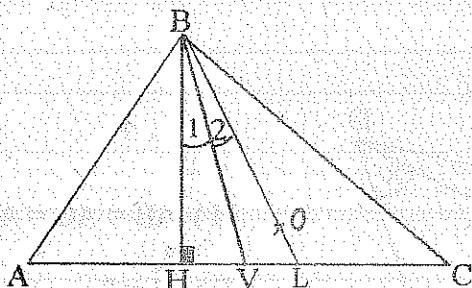


$$H) \overline{BM} \parallel \overline{AC}$$

 \overline{DE} mediatriz del ΔABC

$$T) \widehat{1} = ? \quad \text{Resp. } 38^\circ$$

32.

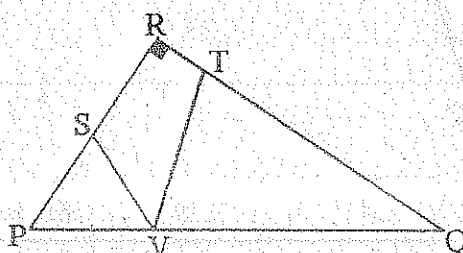


$$H) \cdot O \text{ circuncentro del } \Delta ABC$$

 \overline{BV} Bisectriz \widehat{ABC}

$$T) \widehat{1} = \widehat{2}$$

33.

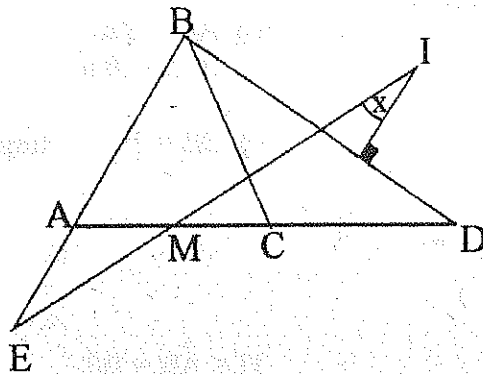


$$H) \overline{PS} \cong \overline{PQ}$$

$$\overline{QT} \cong \overline{QV}$$

$$T) \widehat{SVT} = ? \quad \text{Resp. } 45^\circ$$

34.



$$H) \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD}$$

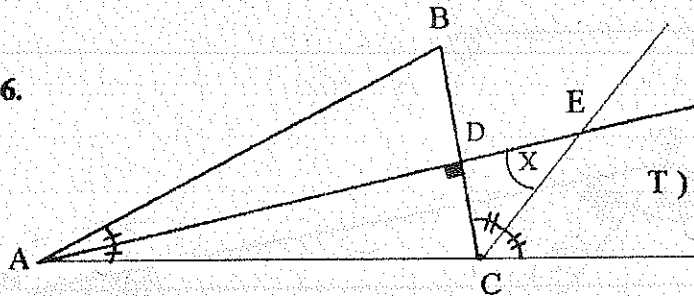
$$\overline{AE} \cong \overline{AM} \cong \overline{MC}$$

$$\widehat{AEM} = 9 \pi / 90 \text{ rad}$$

$$T) \widehat{X} = \quad \text{Resp. } 4^\circ$$

35. En el triángulo escaleno ABC : el ángulo \widehat{B} mide 110° y O es el circuncentro.
¿Cuánto mide el ángulo \widehat{AOC} ? Resp. 140°

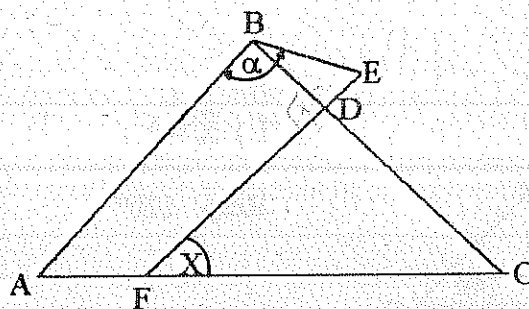
36.



$$T) \widehat{X} = \frac{\pi - m\widehat{BAC}}{4}$$

37. En un triángulo obtusángulo ABC, los ángulos \widehat{A} y \widehat{B} están en la razón $2/3$, el ángulo $\widehat{PHQ} = 60^\circ$, P es pie la altura de A, Q es el pie de la altura de B y H es el ortocentro. Hallar los ángulos \widehat{A} , \widehat{B} y \widehat{C} . Resp. 24° ; 36° ; 120°

38.

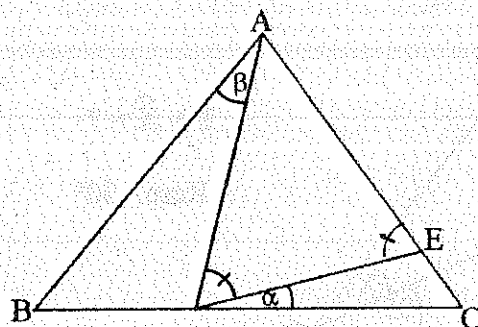


$$H) BD = BE$$

$$AB = BC$$

$$T) \widehat{X} = \widehat{\alpha} / 2$$

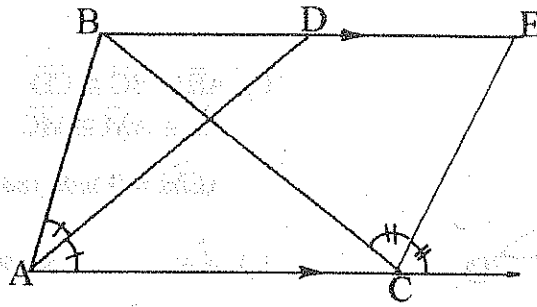
39.



$$H) AB = AC$$

$$T) \widehat{\alpha} = \widehat{\beta} / 2$$

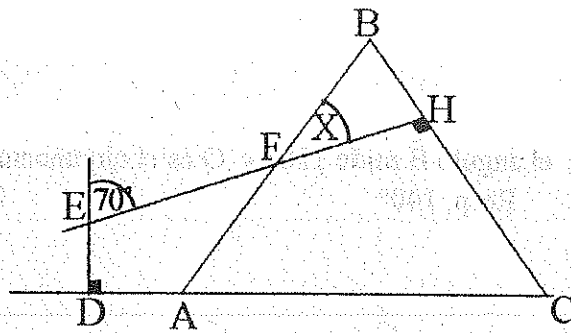
40.



H) $AB = 8u$
 $BC = 10u$

T) $DE = ?$ Resp. $2u$

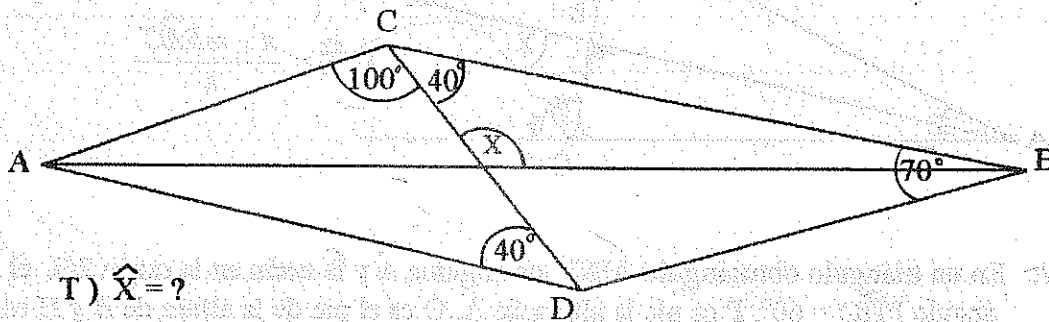
41.



H) $AB = BC$

T) $\hat{X} = ?$ Resp. 50°

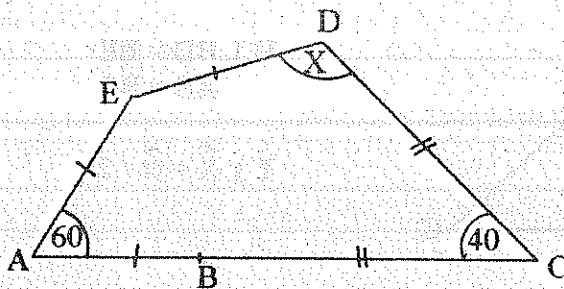
42.



T) $\hat{X} = ?$

Resp. 120°

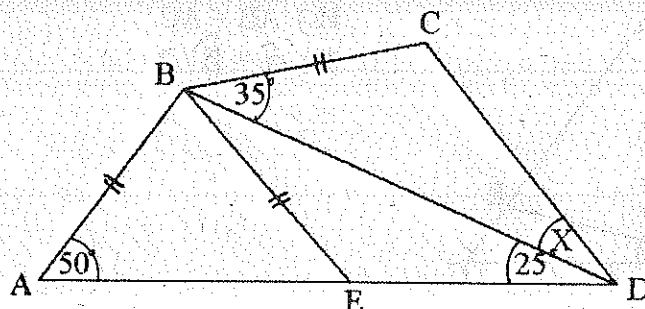
43.



T) $\hat{X} = ?$

Resp. 120°

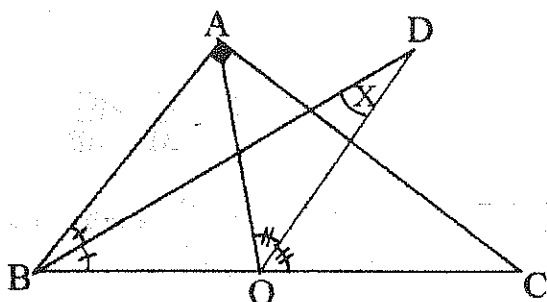
44.



T) $\hat{X} = ?$

Resp. 30°

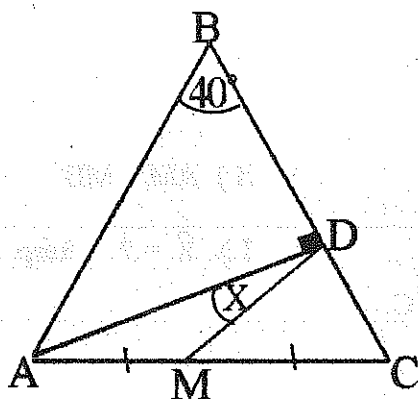
45.

H) O circuncentro del $\triangle ABC$

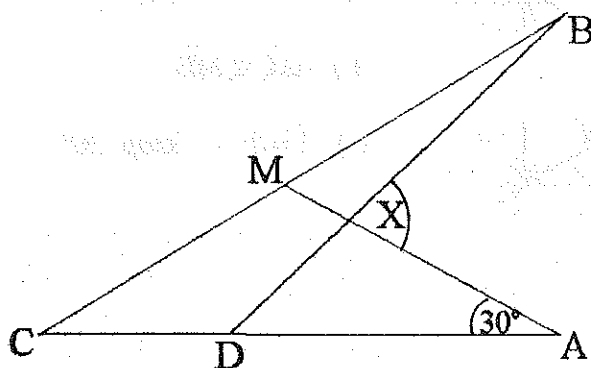
$$\hat{C} = 40^\circ$$

T) $\hat{X} = ?$ Resp. 25°

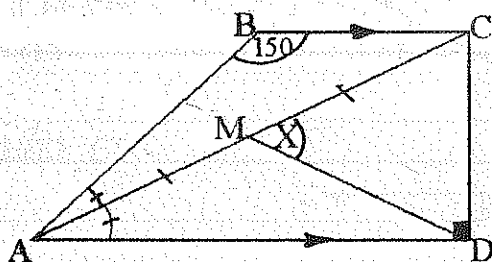
46.

H) $AB = BC$ T) $\hat{X} = ?$ Resp. 20°

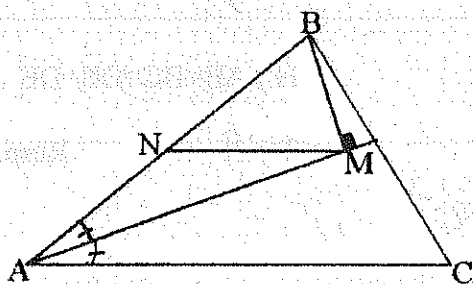
47.

H) $CM = MA = MB = AD$ T) $\hat{X} = ?$ Resp. 75°

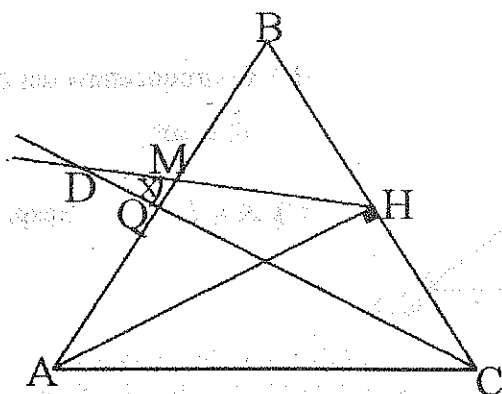
48.

T) $\hat{X} = ?$ Resp. 30°

49.

H) $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ T) $\overline{AN} \cong \overline{NB}$

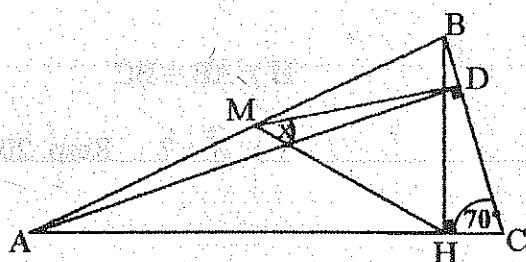
50.



$$\text{H) } \overline{AB} \cong \overline{BC} \\ \overline{AM} \cong \overline{MB}$$

$$\text{T) } \hat{X} = (5\hat{B} - \pi)/4$$

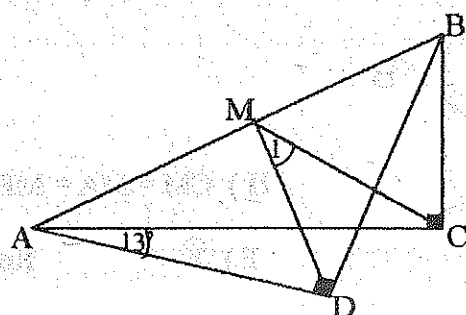
51.



$$\text{H) } AM = MB$$

$$\text{T) } \hat{X} = ? \quad \text{Resp. } 40^\circ$$

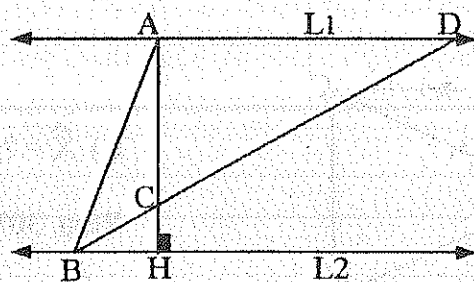
52.



$$\text{H) } \overline{AM} \cong \overline{MB}$$

$$\text{T) } \hat{1} = ? \quad \text{Resp. } 26^\circ$$

53.

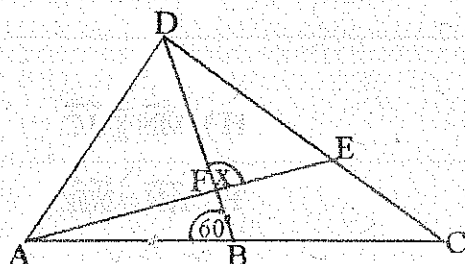


$$\text{H) } \overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$$

$$CD = 2 AB$$

$$\text{T) } \hat{CBH} = \frac{\hat{ABH}}{3}$$

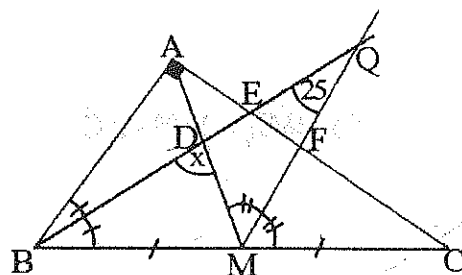
54.



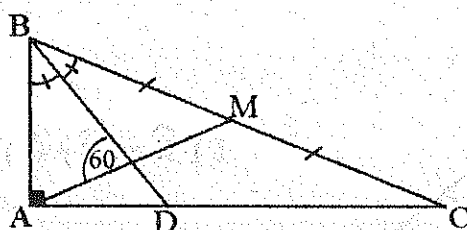
$$\text{H) } AB = BC = DB = DE$$

$$\text{T) } \hat{X} = ? \quad \text{Resp. } 105^\circ$$

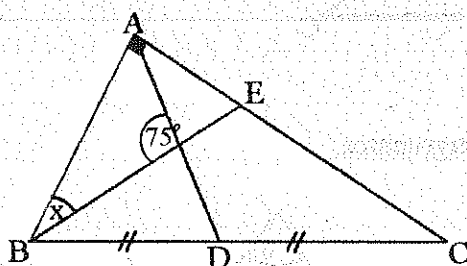
55.

T) $\hat{X} = ?$ Resp. 75°

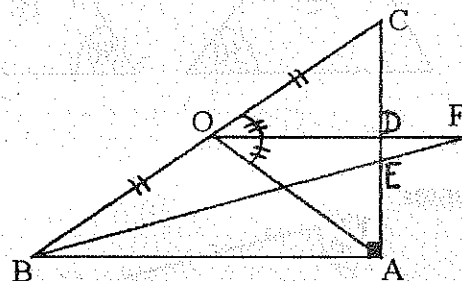
56.

T) $\hat{C} = ?$ Resp. 10°

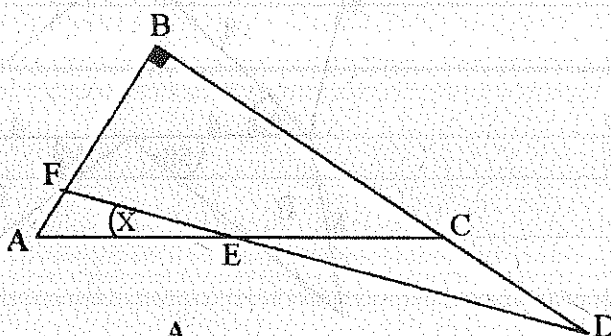
57.

H) $BE = EC$ T) $\hat{X} = ?$ Resp. 40°

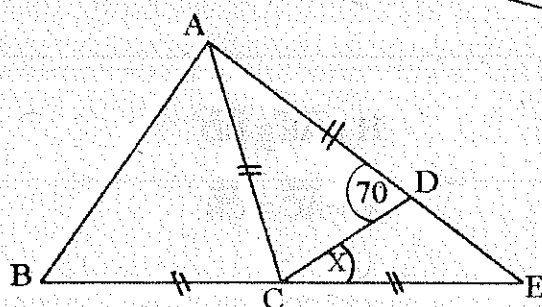
58.

T) $\overline{OF} \perp \overline{AC}$

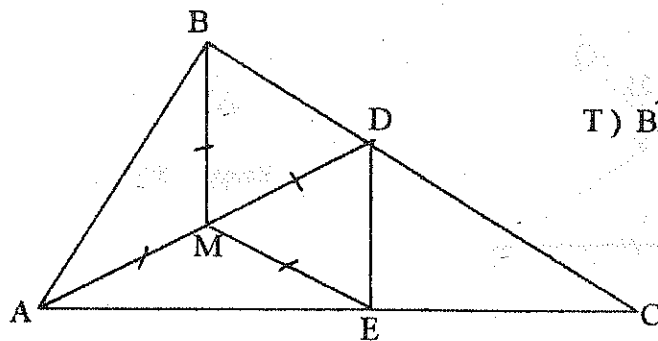
59.

H) $AB = EC = CD$
 $FB = FE$ T) $\hat{X} = ?$ Resp. 18°

60.

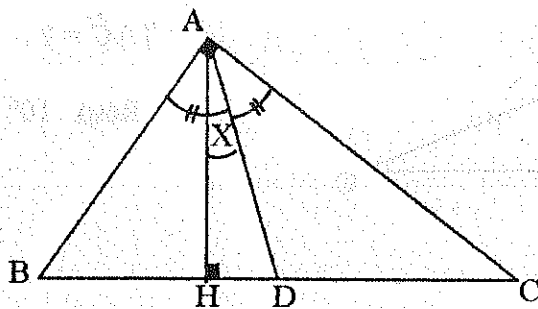
T) $\hat{X} = ?$ Resp. 30°

61.



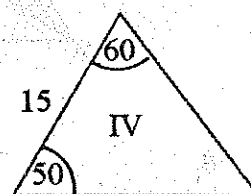
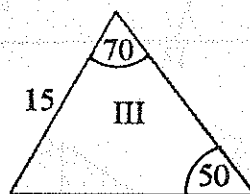
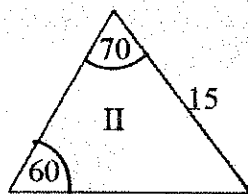
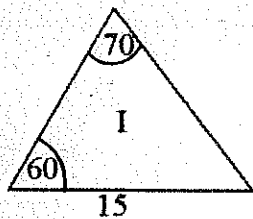
$$T) \widehat{BME} = 180^\circ - 2\widehat{C}$$

62.

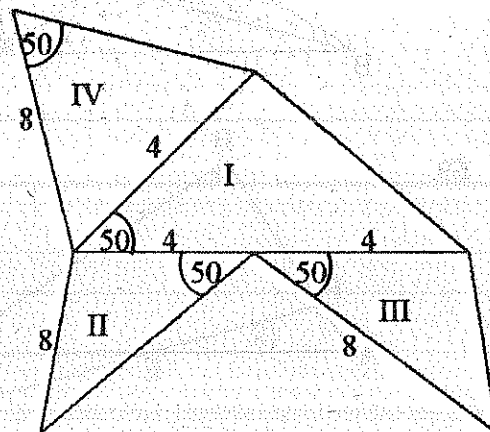


$$T) \widehat{X} = (\widehat{B} + \widehat{C}) / 2$$

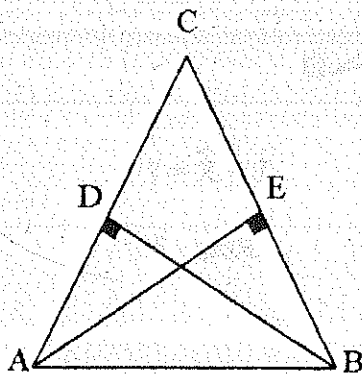
63. Indique que par de triángulos son congruentes.

Resp. I \cong IV

64. Indique que par de triángulos son congruentes.

Resp. I \cong III

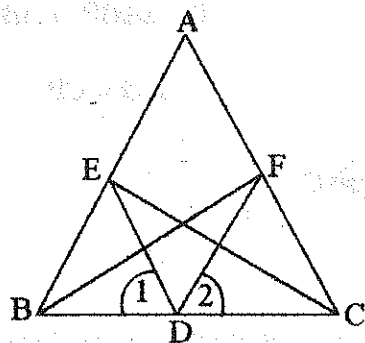
65.



$$H) \overline{AE} \cong \overline{BD}$$

$$T) \overline{AC} \cong \overline{CB}$$

66.



$$H) \overline{AB} \cong \overline{AC}$$

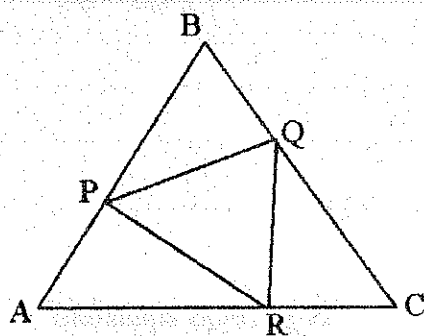
$$\overline{BD} \cong \overline{DC}$$

$$\hat{1} \cong \hat{2}$$

$$T) \overline{BF} \cong \overline{EC}$$

67. Sobre los lados de un triángulo ABC se construyen los triángulos equiláteros BPC, CQA, ARB. Demostrar que : $\overline{AP} \cong \overline{BQ} \cong \overline{CR}$

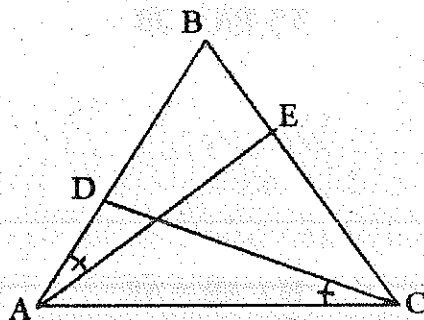
68.



H) $\triangle ABC$ y $\triangle PQS$ equiláteros

T) $\triangle APS \cong \triangle BPQ \cong \triangle CSQ$

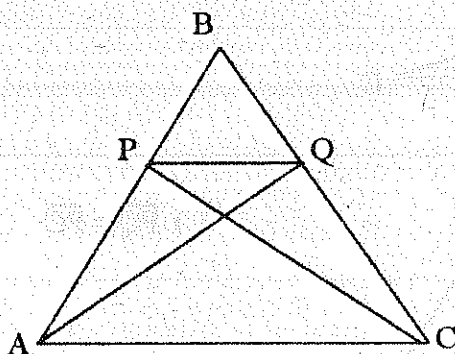
69.



H) $\triangle ABC$ equilátero

T) $AC = AD + EC$

70.

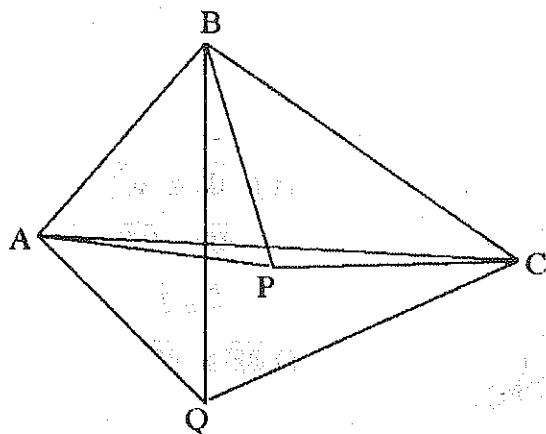


H) $\triangle ABC$ equilátero

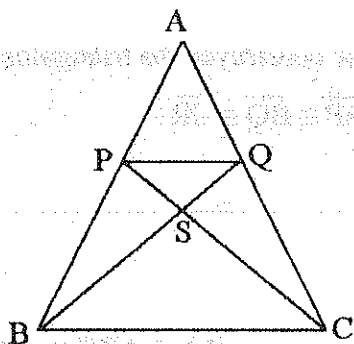
$\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$

T) $AQ = CP$

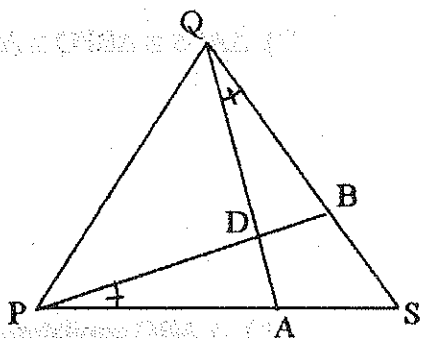
71.

H) $\triangle ABP$ y $\triangle BCQ$ equiláterosT) $AQ = CP$

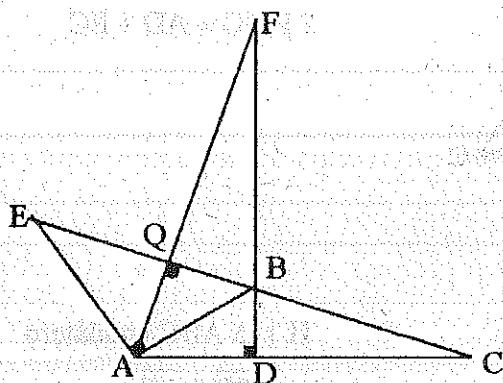
72.

H) $AP = AQ$
 $PS = SQ$ T) $BS = SC$

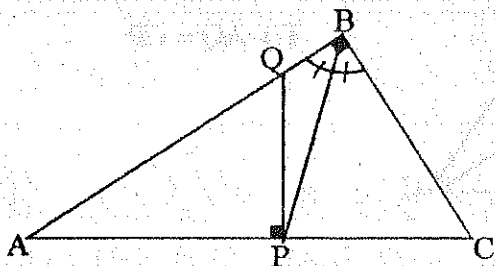
73.

H) $\triangle PQS$ equiláteroT) $PA = QB$

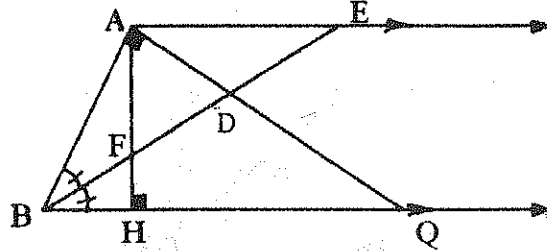
74.

H) $AB = AE$ T) $\triangle ABF \cong \triangle AEC$

75.

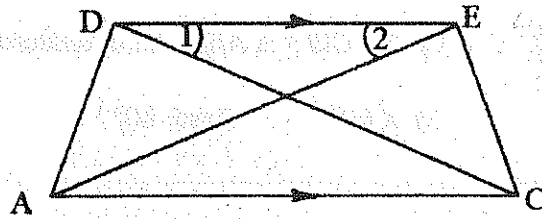
T) $\overline{PQ} \cong \overline{PC}$

76.



T) $BF = ED$

77.

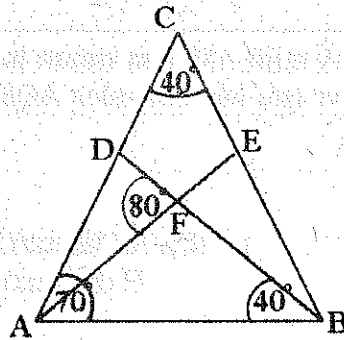


H) $AD = EC$

$\hat{A} \cong \hat{C}$

T) $\hat{1} \cong \hat{2}$

78.

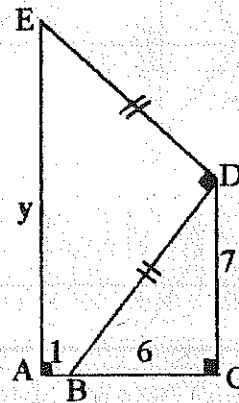


T) $DC = CE$

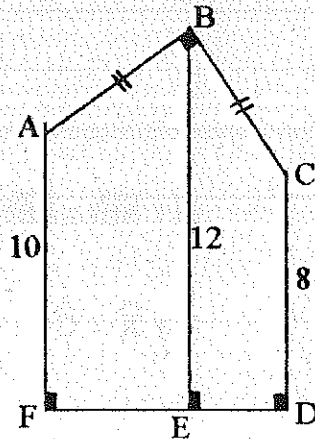
79.

T) $Y = ?$

Resp. 13



80.



T) $FD = ?$

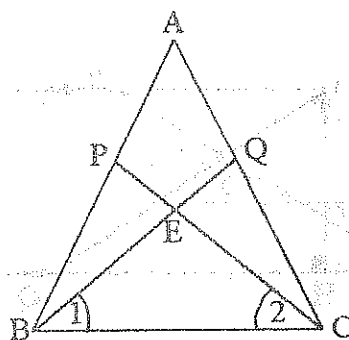
Resp. 6

81.

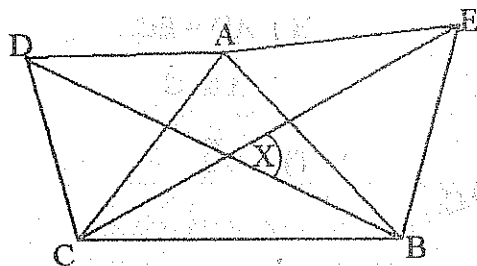
$$H) AP = AQ$$

$$PB = QC$$

$$T) \hat{1} \cong \hat{2}$$



82.



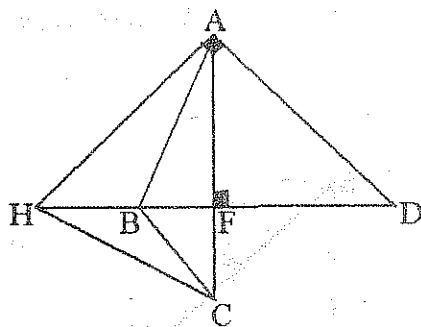
H) $\triangle ACD$ y $\triangle AEB$ son equiláteros

$$T) \hat{X} = ?$$

Resp. 60°

83. En un triángulo obtusángulo ABC el ángulo \hat{A} mide 45° y se trazan la alturas \overline{AP} y \overline{CQ} cortándose en el ortocentro H. Demostrar que los triángulos AQH y CQB son congruentes.

84.

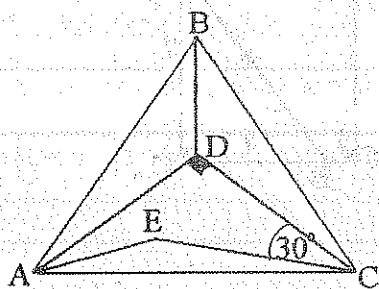


H) \overline{AF} bisectriz $\angle HAD$
H ortocentro $\triangle ABC$

$$T_1) \triangle ABF \cong \triangle CFH$$

$$T_2) \triangle ABD \cong \triangle ACH$$

85.

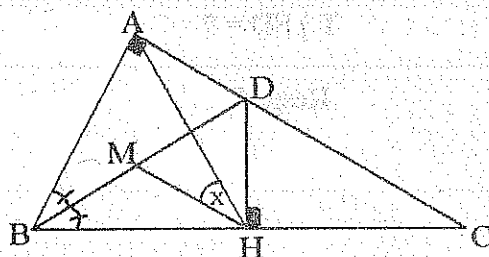


H) $\triangle ABC$ equilátero
 $\triangle ADC$ isósceles
 $EC = AD = DC$

$$T) \hat{DAE} = ?$$

Resp. 15°

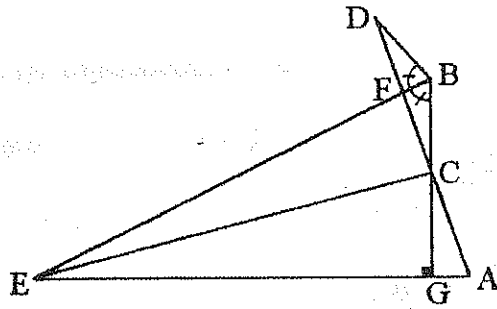
86.



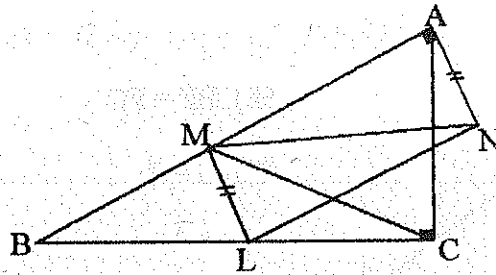
$$H) \overline{MB} \cong \overline{MD}$$

$$T) \hat{X} = \hat{C}$$

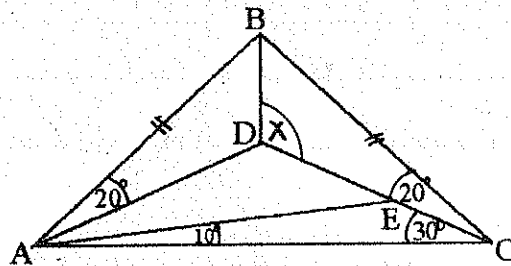
87.

H) $BD = BC = AC$ T) \overline{EC} bisectriz FEG

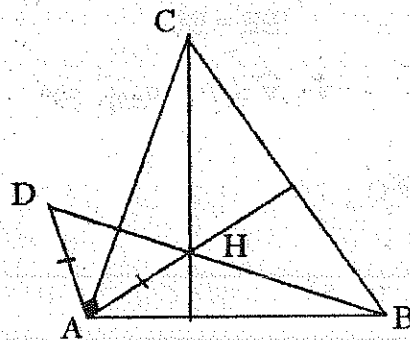
88.

H) $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$
 $AM = MB = MC$
 $ML = AN$ T) $\triangle AMN \cong \triangle MNL$

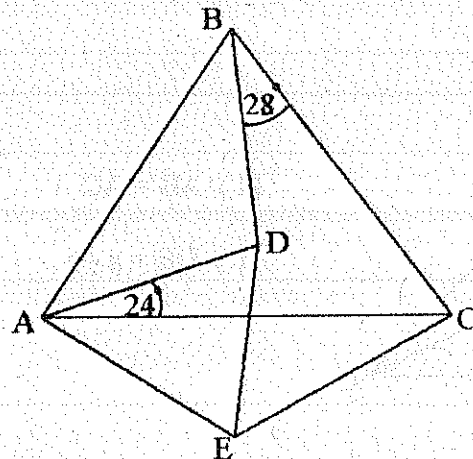
89.

T) $\hat{X} = ?$ Resp. 120°

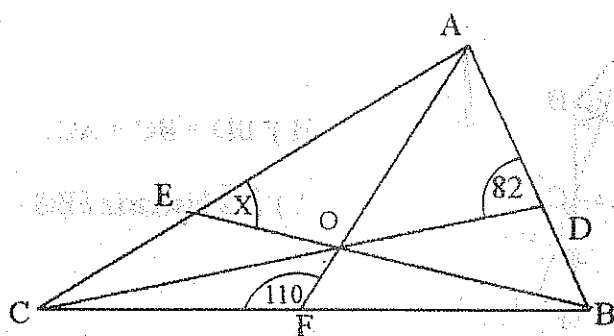
90.

H) $\triangle ABC$ Escaleno
 • H OrtocentroT) $\triangle ACH = \triangle BDA$

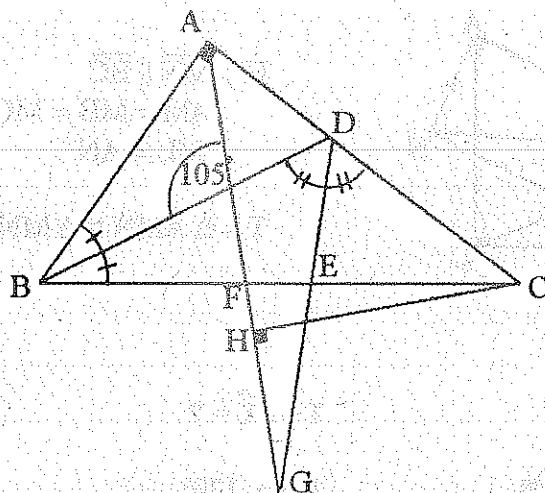
91.

H) $\triangle ABC$ equilátero
 $\triangle ADE$ equiláteroT) $BD = EC$

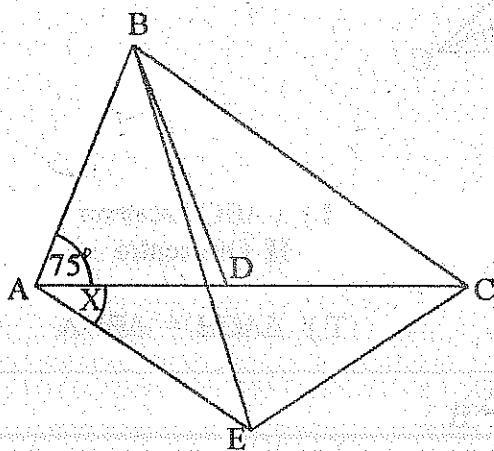
92.

H) O circuncentro del $\triangle ABC$ T) $\hat{X} = ?$ Resp. 62°

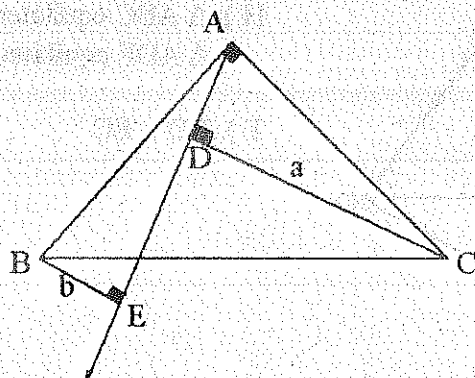
93.

H) $BF = FC$ T) $\hat{G} = ?$

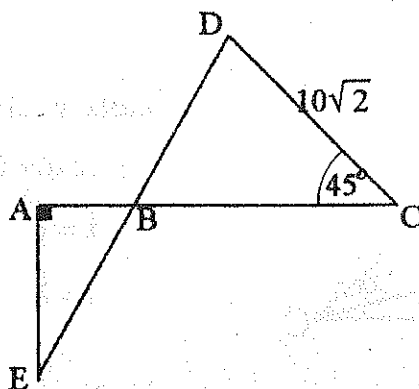
94.

H) $AB = BD$
 $BE = BC$ T) $\hat{X} = ?$ Resp. 30°

95.

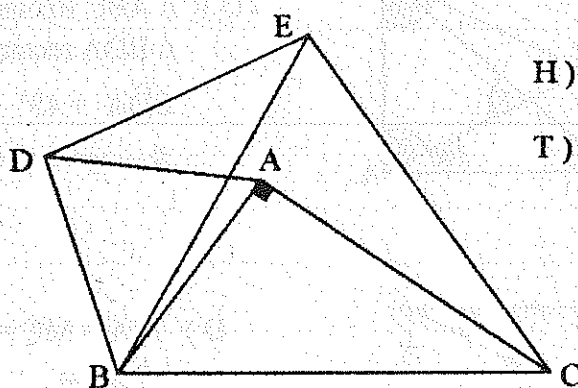
H) $AB = AC$ T) $DE = a - b$

96.

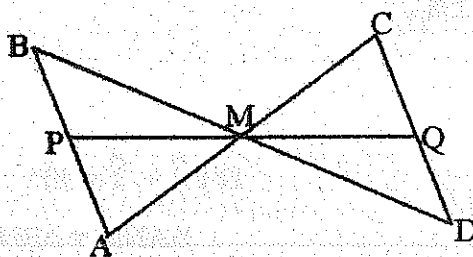
T) $AE = ?$

Resp. 10

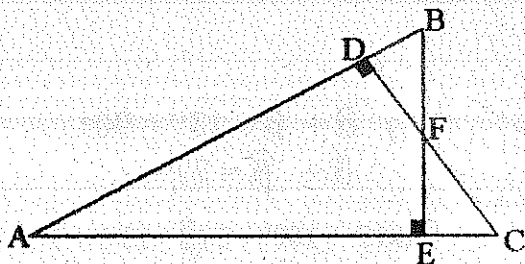
97.

H) $\triangle ABD$ y $\triangle BEC$ equiláterosT) $DE = AC$

98.

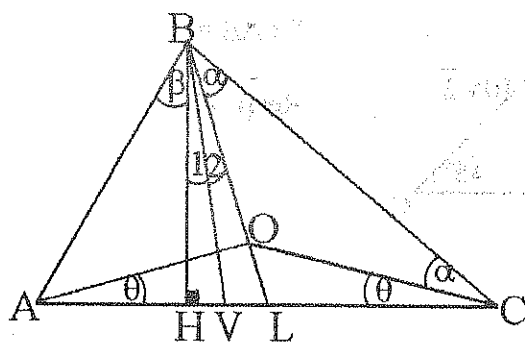
H) $BM = MD$
 $AM = MC$ T) $PM = MQ$

99.

H) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ T) $\overline{BF} \cong \overline{FC}$

4.9.1 EJERCICIOS RESUELTOS

32.

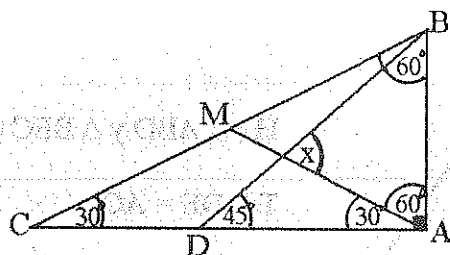
D) $\triangle CBH$ y $\triangle HBA$ (rectángulos)

$$\hat{1} + \hat{2} + 2\hat{\alpha} + \hat{\theta} = \hat{\beta} + \hat{\theta} + (\hat{1} + \hat{2} + \hat{\beta})$$

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

$$\therefore \hat{1} = \hat{2}$$

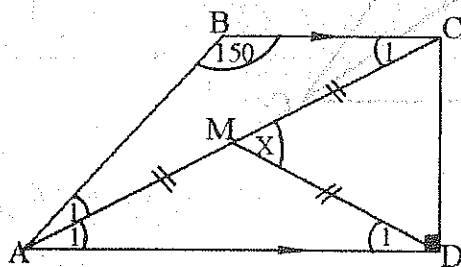
47.

D) $\triangle ABC$ Rectángulo $\triangle BDA$ rectángulo isósceles

$$\widehat{BDA} = 45^\circ$$

$$\therefore \widehat{x} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$$

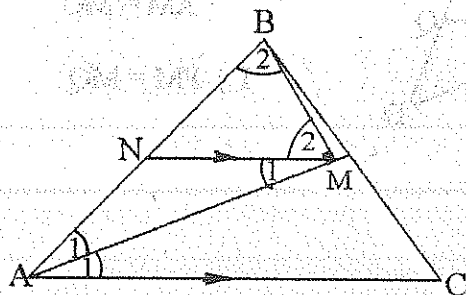
48.

D) $MA = MC = MD$

$$\hat{1} = 15^\circ$$

$$\therefore \widehat{x} = 30^\circ$$

49.

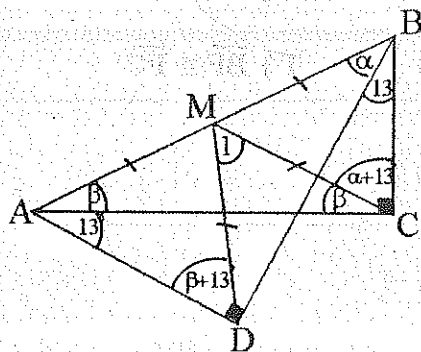


$$D) \hat{1} + \hat{2} = 90^\circ$$

 $\triangle ANM$ y $\triangle BNM$ isósceles

$$\therefore MN = AN = BM$$

52.



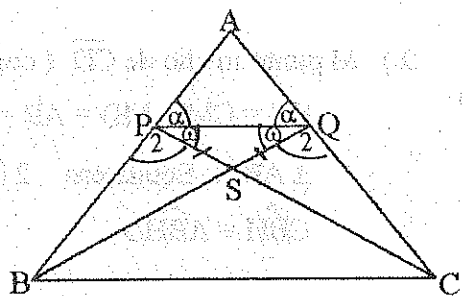
$$D) \hat{\alpha} + \hat{\beta} + 13^\circ = 90^\circ$$

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 77^\circ$$

$$\widehat{AMC} = 180^\circ - 2(\hat{\beta} + 13^\circ) + \hat{1} = 2(\hat{\alpha} + 13^\circ)$$

$$\therefore \hat{1} = 26^\circ$$

72.



$$D) \hat{\alpha} = \hat{\alpha}$$

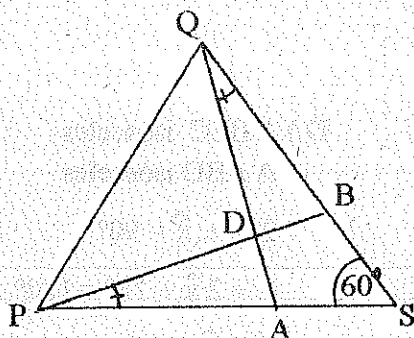
$$\hat{m} = \hat{m}$$

$$\hat{2} = \hat{2}$$

$$\therefore \triangle PSB \cong \triangle QSC \text{ (A.L.A.)}$$

$$\therefore BS = SC$$

73.



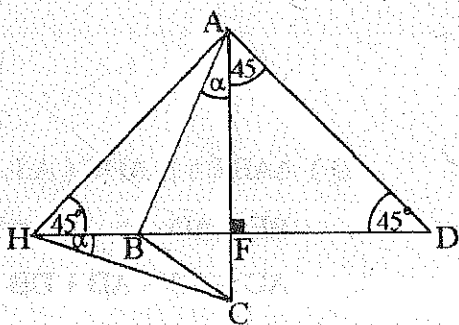
$$D) \triangle AQS \cong \triangle PBS \text{ (A.L.A.)}$$

$$\therefore AS = BS$$

$$PS - AS = QS - BS$$

$$PA = BQ$$

84.



$$D) \cdot F \text{ Circuncentro del } \triangle ADH$$

$$HF = FD = AF$$

$$\hat{\alpha} \cong \hat{\alpha} \text{ Complementos de}$$

$$\triangle ABF \cong \triangle CFH \text{ (ángulo, cateto)}$$

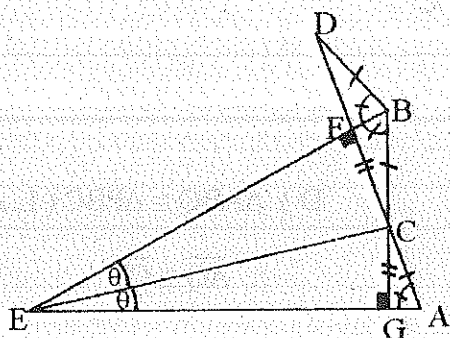
$$AB = CH$$

$$AD = AH$$

$$45^\circ + \hat{\alpha} = 45^\circ + \hat{\alpha}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACH \text{ (L.A.L.)}$$

87.

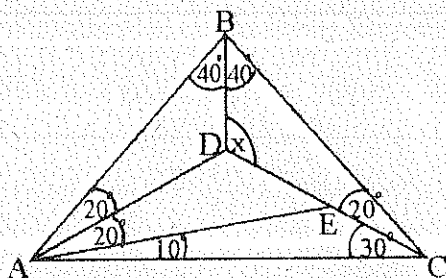


$$D) \triangle EFC \cong \triangle EGC \text{ (A.L.A.)}$$

$$\therefore \hat{\theta} = \hat{\theta}$$

$$\overline{EC} \text{ bisectriz de } \widehat{FEG}$$

89.

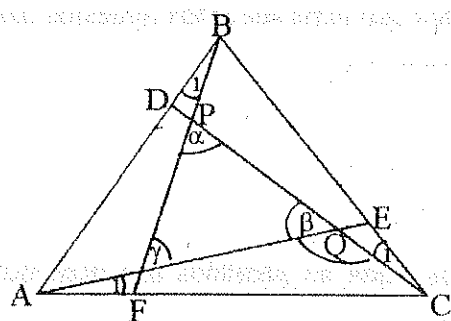


$$D) \triangle ABD \cong \triangle CBD \text{ (L.A.L.)}$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{DBC} = 40^\circ$$

$$\therefore \hat{x} = 120^\circ$$

100.

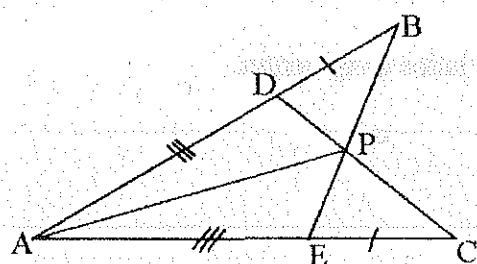


$$D) \hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{\gamma} = (60^\circ - \hat{1}) + \hat{1}$$

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{\gamma}$$

$\therefore \triangle PQR$ equilátero

102.



$$D) a) \triangle ABE \cong \triangle ADC \text{ (L.A.L.) } \therefore \hat{B} = \hat{C}$$

$$\triangle DBP \cong \triangle EPC \text{ (A.L.A.) } \therefore BP = CP$$

$$\triangle ABP \cong \triangle ACP \text{ (L.A.L.) } \therefore \hat{BAP} = \hat{CAP}$$

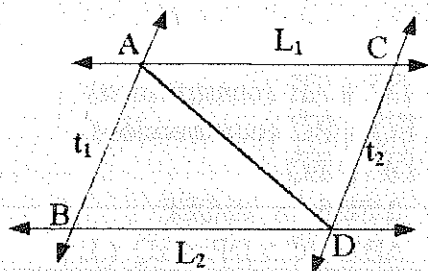
$$b) \triangle DPB \cong \triangle EPC \text{ (L.A.L.) } \therefore \hat{B} = \hat{C}$$

$$\triangle ABP \cong \triangle APC \text{ (L.A.L.) } \therefore \hat{DAP} = \hat{EAP}$$

4.10. TRANSVERSALES

TEOREMA # 1

Los segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas, son congruentes.



$$H) \vec{L_1} \parallel \vec{L_2}$$

$$T) \overline{AB} \cong \overline{CD}$$

$$\overline{AC} \cong \overline{BD}$$

$$D) \triangle ABD \wedge \triangle ACD$$

$$\hat{BAD} \cong \hat{ADC} \text{ (A)}$$

$$\overline{AD} \cong \overline{AD} \text{ (L)}$$

$$\hat{ADB} \cong \hat{CAD} \text{ (A)}$$

$$\triangle ABD \cong \triangle CDA \text{ (A.L.A.)}$$

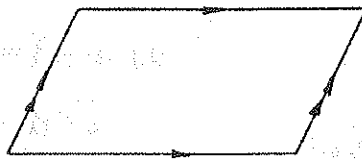
$$\Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{CD}$$

$$\overline{AC} \cong \overline{BD} \text{ ///}$$

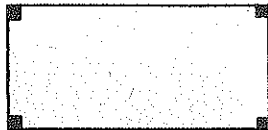
COROLARIO

Dos rectas paralelas son equidistantes en toda su extensión.

PARALELOGRAMO. Es la figura geométrica que tiene sus lados opuestos paralelos.



RECTÁNGULO. Es el paralelogramo cuyos lados no paralelos son perpendiculares entre sí.

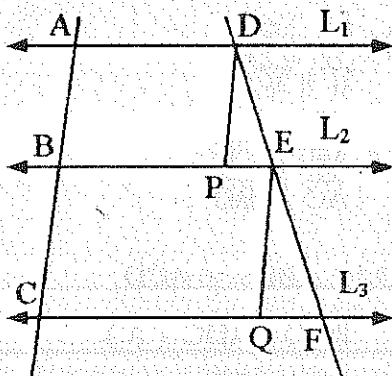


CUADRADO. Es un rectángulo que tiene sus cuatro lados congruentes.



TEOREMA # 2

Si tres o más rectas paralelas determinan segmentos congruentes en una transversal, determinan segmentos congruentes en cualquier otra transversal.



$$H) \vec{L_1} \parallel \vec{L_2} \parallel \vec{L_3}$$

$$\overline{AB} \cong \overline{BC}$$

$$T) \overline{DE} \cong \overline{EF}$$

$$D) \overline{DP} \parallel \overline{AB} \text{ (construcción)}$$

$$\overline{EQ} \parallel \overline{BC} \text{ (construcción)}$$

$$\overline{DP} \parallel \overline{EQ}$$

$$\triangle PDE \wedge \triangle QEF$$

$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{DP} \cong \overline{EQ} \text{ (L)}$$

$$\widehat{PDE} \cong \widehat{QEF} \text{ (A)}$$

$$\widehat{PED} \cong \widehat{QFE} \text{ (A)}$$

$$\therefore \triangle PDE \cong \triangle QEF \text{ (A.L.A.)}$$

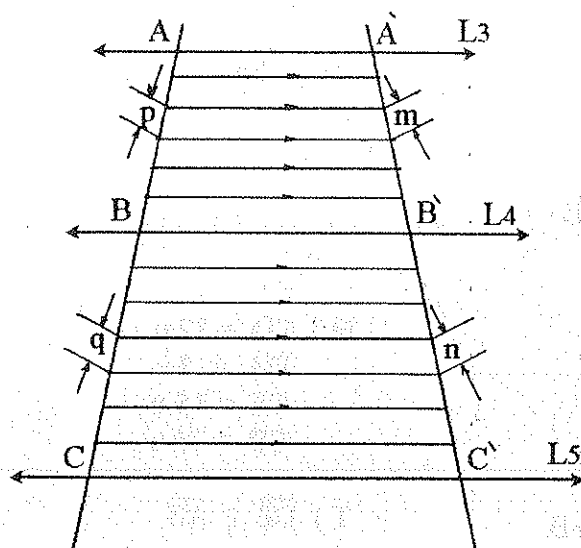
$$\Rightarrow \overline{DE} \cong \overline{EF} \text{ ///}$$

COROLARIO

Si se divide un lado de un triángulo en partes congruentes y por los puntos de división se trazan paralelas a otro lado, el tercer lado queda dividido en igual número de partes congruentes.

TEOREMA # 3

Los segmentos de dos transversales interceptados entre paralelas, son proporcionales.



$$H) \overline{L_3} \parallel \overline{L_4} \parallel \overline{L_5}$$

$$T) \frac{BC}{BA} = \frac{B'C'}{B'A'}$$

- D) 1. Dividimos AB en q segmentos de igual longitud (f) y BC en p segmentos de igual longitud (f).
2. Por los puntos de división trazamos paralelas a $\overline{L_3}$
3. Se obtienen q segmentos de longitud m en $\overline{A'B'}$ y p segmentos de longitud m en $\overline{B'C'}$.

$$4. f = \frac{AB}{q} = \frac{BC}{p} \longrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{q}{p} \quad \text{y} \quad m = \frac{A'B'}{q} = \frac{B'C'}{p} \longrightarrow \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{q}{p}$$

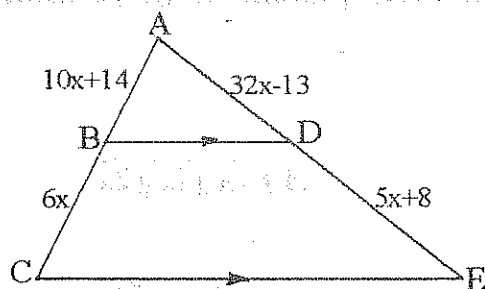
$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

COROLARIOS

1. Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo, divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales y cada uno de los lados son proporcionales a los segmentos correspondientes determinados en ellos.
2. La recta que biseca un lado de un triángulo y es paralela a otro lado, biseca también al tercer lado.
3. La recta que une los puntos medios de los lados de un triángulo, es paralela al tercer lado.

4.10.1 EJERCICIOS

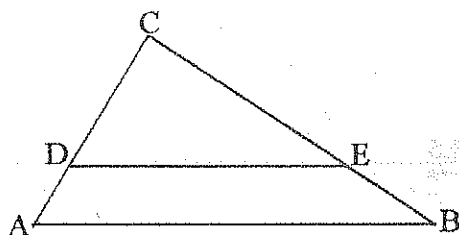
1.



T) $x = ?$

Resp. 2 u

2.



H) $CD = 12 \text{ u}$

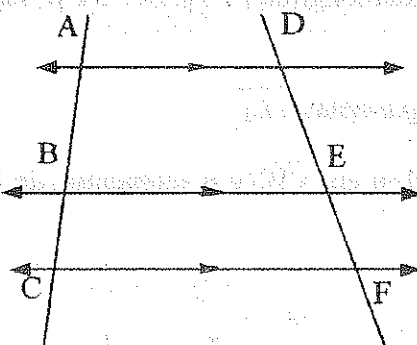
$DA = 8 \text{ u}$

$CE = 15 \text{ u}$

$CB = 25 \text{ u}$

T) $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

3.



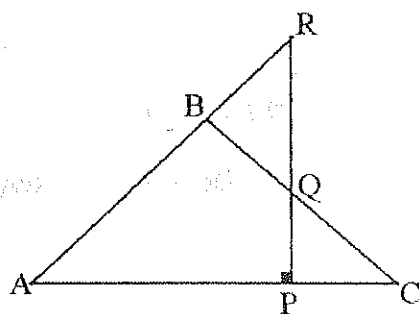
H) $AB = 2 \text{ BC}$

$DF = 24 \text{ u}$

T) $DE = ?$ Resp. 16 u

4. En un triángulo isósceles, la suma de las perpendiculares trazadas desde un punto cualquiera de la base a los lados congruentes, es siempre constante.
5. Si el triángulo ABC es equilátero y P un punto interior del triángulo; desde P se trazan : PQ , PR y PS perpendiculares a los lados. Demostrar que: $PQ + PR + PS$ es una constante.
6. Demostrar que la diferencia de las perpendiculares trazadas a los lados de un triángulo isósceles o a su prolongación desde la prolongación de su base, es constante.
7. Si desde un punto exterior a un triángulo equilátero, se trazan perpendiculares a los tres lados, el exceso de la suma de dos de dichas perpendiculares sobre la tercera es constante.

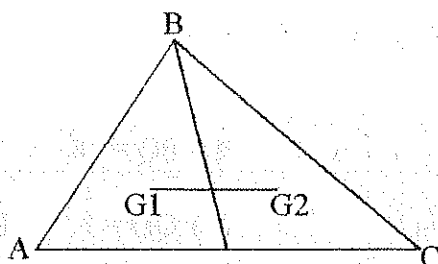
8.



$$H) \overline{AB} \cong \overline{BC}$$

T) $(PQ + PR)$ es constante

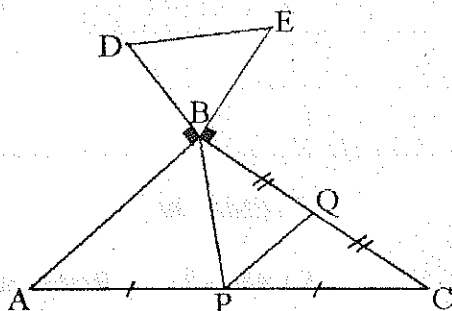
9.



H) G_1 baricentro $\triangle ABC$
 G_2 baricentro $\triangle BCD$

$$T) \overline{G_1G_2} \parallel \overline{AD}$$

10.



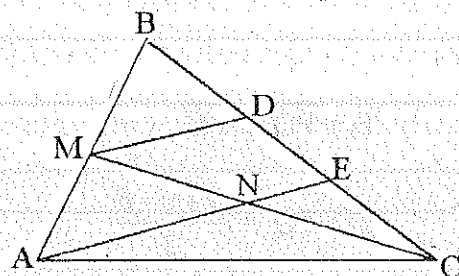
$$H) BD = \frac{AB}{2}$$

$$BE = \frac{BC}{2}$$

$$T) \triangle DEB \cong \triangle BPQ$$

11. En un triángulo ABC ($\hat{B} > 90^\circ$) los puntos medios de los lados \overline{BC} , \overline{CA} y \overline{AB} son L, M y N respectivamente. Si D es el pie de la altura de A demostrar que los triángulos LMN y DMN son congruentes.

12.



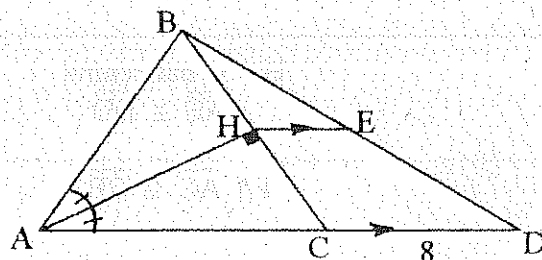
$$H) \overline{AM} \cong \overline{MB}$$

$$\overline{MN} \cong \overline{NC}$$

$$\overline{MD} \parallel \overline{AN}$$

$$T) MD = \frac{2}{3} AN$$

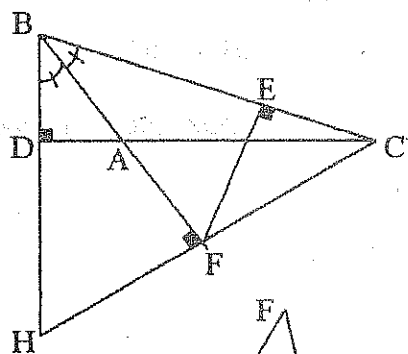
13.



$$T) HE = ?$$

Resp. 4

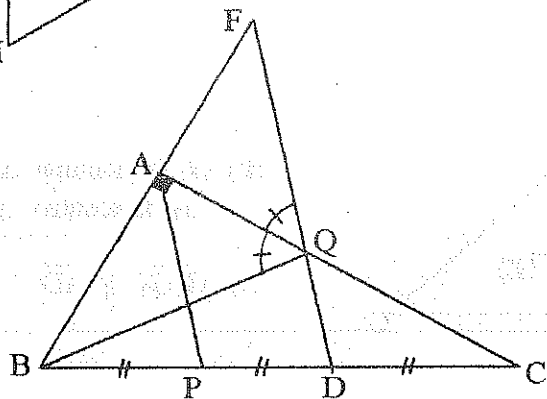
14.



H) $FE = 6$

T) $DC = ?$ Resp. 12

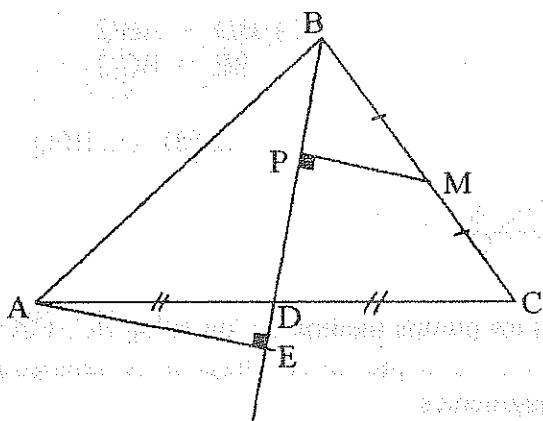
15.



H) $BQ = 18$

T) $QD = ?$ Resp. 6

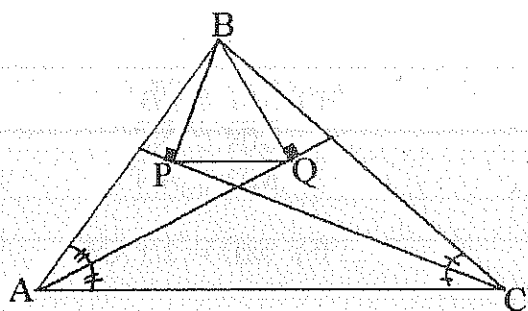
16.



H) $PM = 3u$

T) $AE = ?$ Resp. $6u$

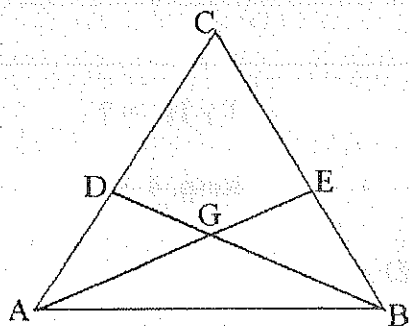
17.



T₁) $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$

T₂) $PQ = \frac{a+c-b}{2}$

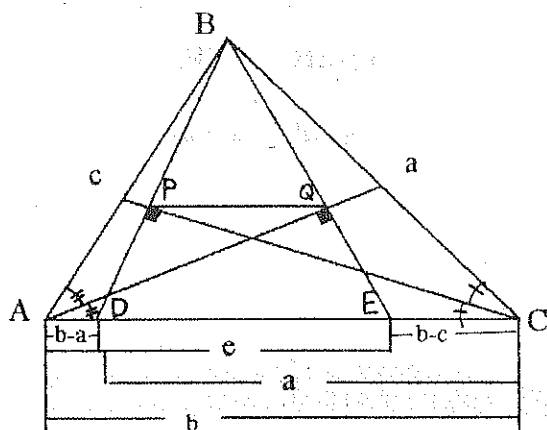
18.



H) G baricentro
 $\overline{AE} \cong \overline{BD}$

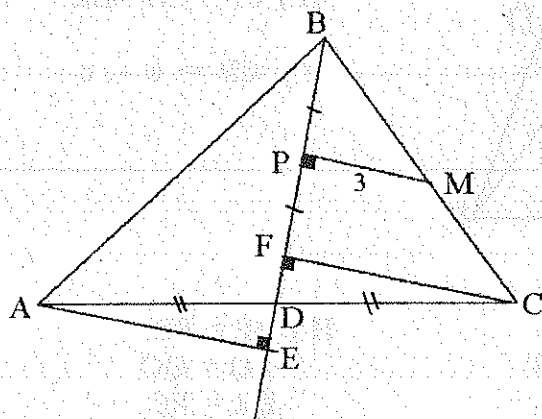
T) $\overline{AC} \cong \overline{CB}$

17.



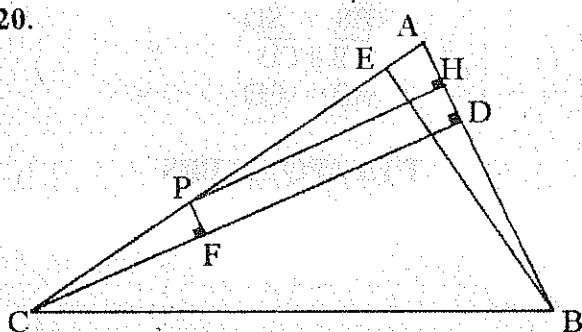
- D) P punto medio de BD
 Q punto medio de BE
 $PQ = \frac{1}{2}(DE) = \frac{1}{2}(b - a + a - b + c)$
 $PQ = \frac{1}{2}(a + c - b)$

16.



- D) $CF = 2 PM = 6$
 $\triangle AED \cong \triangle CDF$ (A.L.A.)
 $\therefore CF = AE = 6$

20.

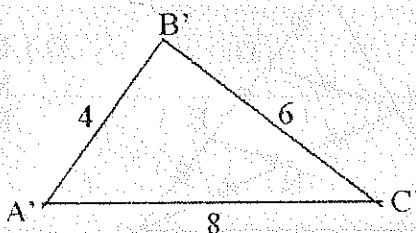
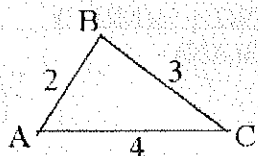


- D) $CF = CD - FD \quad \therefore BE = DF = PH$
 $\triangle PAH \cong \triangle EBA \quad \therefore PA = c$
 $CP = b - c$

4.11. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

La definición de semejanza exige dos condiciones:

1. Los ángulos correspondientes deben ser congruentes, y
2. Los lados correspondientes deben ser proporcionales.



Si los ángulos correspondientes son congruentes:

$$\hat{A} \cong \hat{A}'$$

$$\hat{B} \cong \hat{B}'$$

$$\hat{C} \cong \hat{C}'$$

y los lados correspondientes son proporcionales:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{1}{2}, \text{ entonces}$$

decimos que la correspondencia es una semejanza, y se escribe $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$.

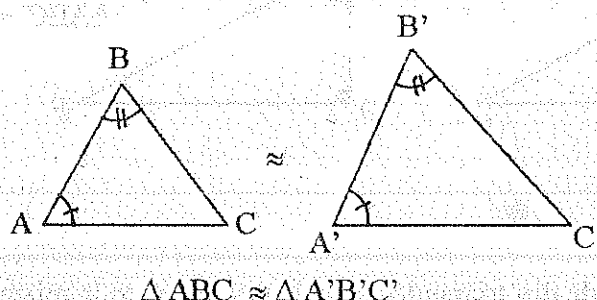
La razón de dos lados correspondientes cualesquiera ($1/2$) es la relación de semejanza.

Desde luego esta correspondencia no es una congruencia porque la longitud de cada lado del segundo triángulo es dos veces la del lado correspondiente del primero, por lo tanto, dos triángulos serán congruentes cuando su razón de semejanza sea igual a la unidad.

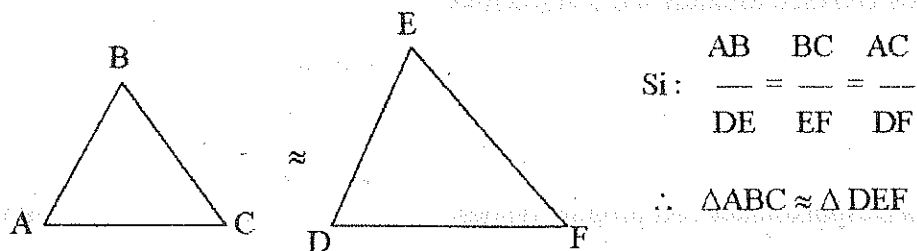
4.11.1. POSTULADOS DE SEMEJANZA

4.11.1.1. TRIÁNGULOS ESCALENOS

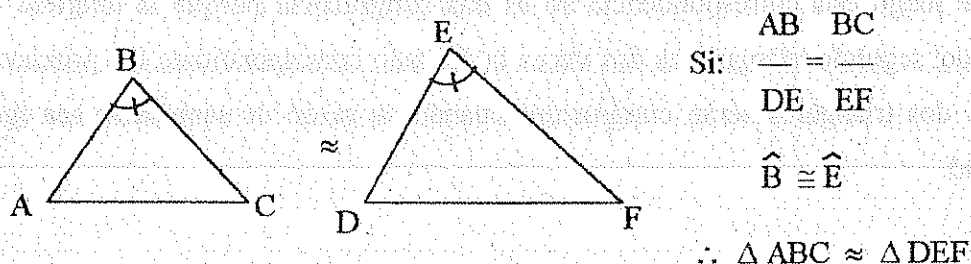
1. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos correspondientes de otro, los dos triángulos son semejantes.



2. Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo, da origen a otro triángulo semejante con el primero.
3. Dos triángulos son semejantes si tienen lados respectivamente paralelo o perpendiculares.
4. Si los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, los dos triángulos son semejantes.

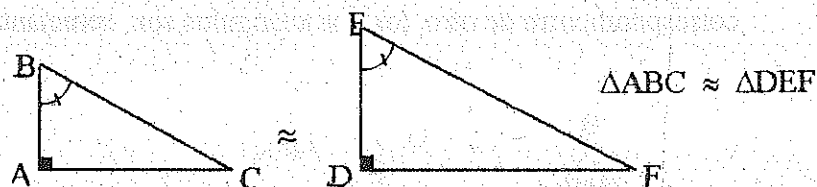


5. Si en dos triángulos, dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos son congruentes, los triángulos son semejantes.



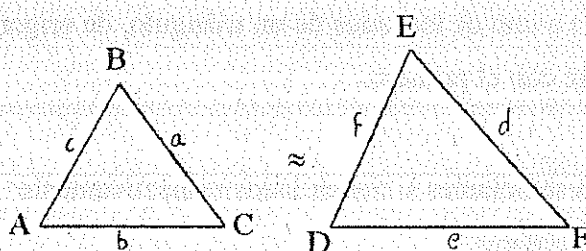
4.11.1.2. TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

1. Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo correspondiente congruente.



TEOREMA #1

Los perímetros de dos triángulos semejantes, están en la misma relación que los lados homólogos.

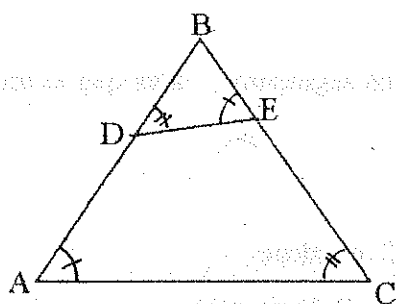


$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

$$\frac{a+b+c}{d+e+f} = \frac{a}{d} = \frac{b}{e}$$

$$\frac{P}{P_1} = \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \dots$$

4.11.2. ANTIPARALELAS



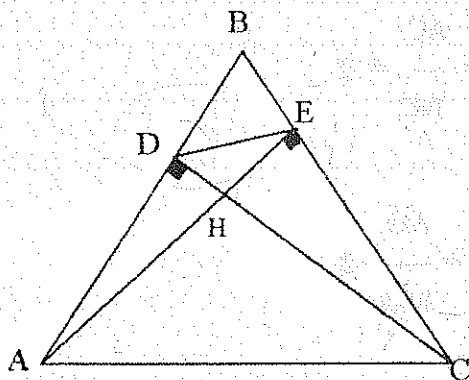
$$\text{Si: } \hat{A} \cong \hat{E}$$

$$\hat{C} \cong \hat{D}$$

$\therefore \overline{DE}$ es antiparalela del lado \overline{AC}

TEOREMA #2

El segmento que une los pies de dos alturas de un triángulo es antiparalela de un lado.



H) $\triangle ABC$ escaleno

H ortocentro

T) \overline{DE} Antiparalela del lado \overline{AC}

D) $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ (rectángulos) y \hat{B} común

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DBC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BE}{BD} = \frac{AE}{DC} \quad \text{y} \quad \frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BD}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DBE$$

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BD} \quad \text{y} \quad \hat{B} \text{ común}$$

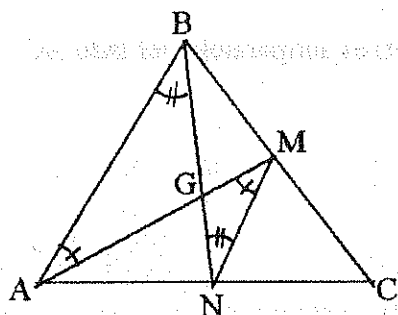
$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DBE \Rightarrow \frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{DE}$$

$$\therefore \hat{BAC} \cong \hat{BED}$$

$$\hat{BCA} \cong \hat{BDE} \Rightarrow \overline{DE} \text{ es antiparalela del lado } \overline{AC}$$

TEOREMA #3. (Propiedad del Baricentro)

El Baricentro divide a cada una de las medianas en dos segmentos, tales que el uno es el doble del otro.



H) $\triangle ABC$ escaleno

G baricentro

T) $AG = 2GM$

D) $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$

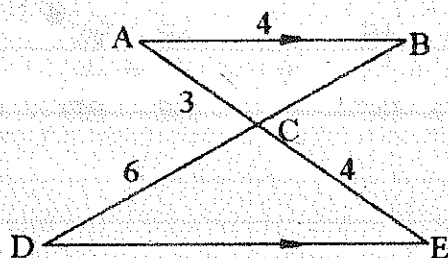
$$\therefore \triangle ABC \approx \triangle MNC \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{MC} = \frac{AC}{NC} = 2$$

$$\therefore \triangle ABG \approx \triangle MNG \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BG}{NG} = \frac{AG}{MG} = 2$$

$$\therefore AG = 2MG$$

4.11.3 EJERCICIOS

1.

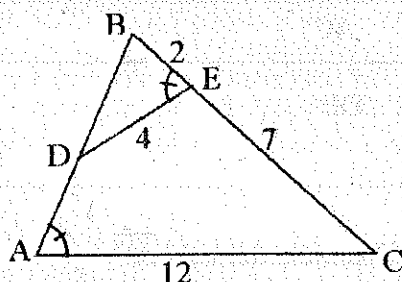


T) $BC = ?$

$DE = ?$

Resp. 4,5 ; 5,33

2.

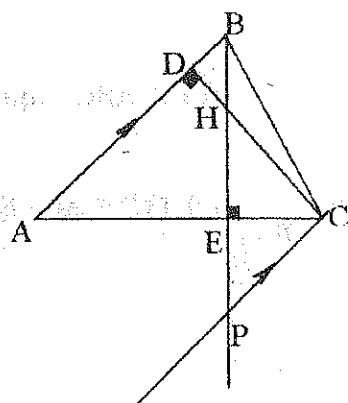


T) $AB = ?$

$BD = ?$

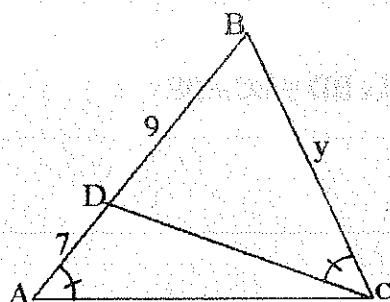
Resp. 6 ; 3

3.



$$T) EC \times BH = DH \times CP$$

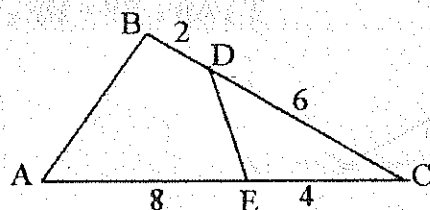
4.



$$T) y = ?$$

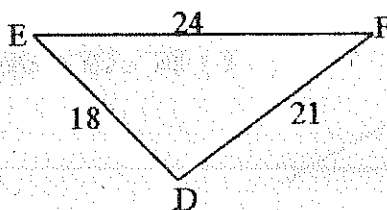
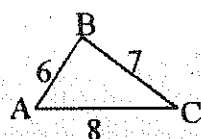
Resp. 12

5.



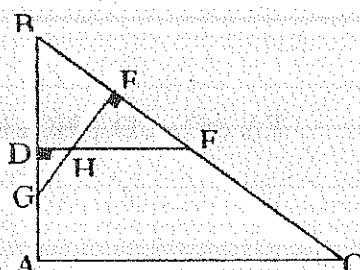
$$T) \triangle ABC \approx \triangle DEC$$

6.



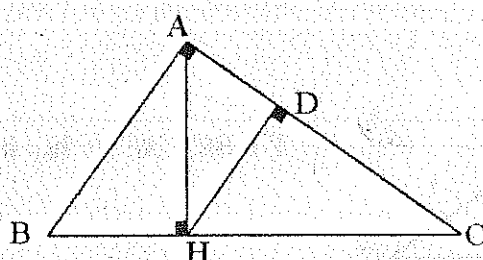
$$T) \triangle ABC \approx \triangle DEF$$

7.



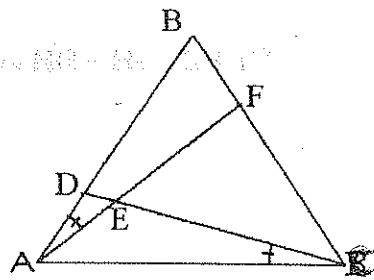
$$T) DH \times BC = AB \times HG$$

8.



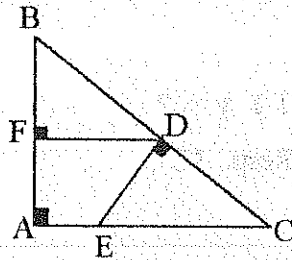
$$T) AH^2 = AB \times HD$$

9.

H) $\triangle ABC$ equilátero

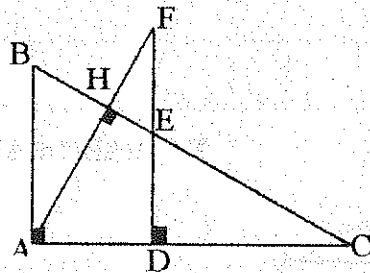
T) $FC^2 = AF \times EF$

10.



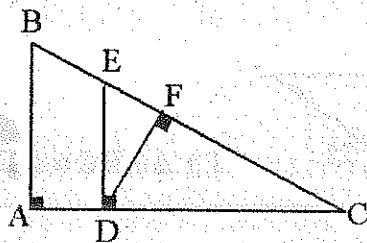
T) $DE \times BD = EC \times BF$

11.



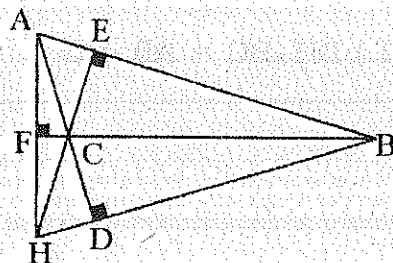
T) $AB \times EF = HE \times BC$

12.



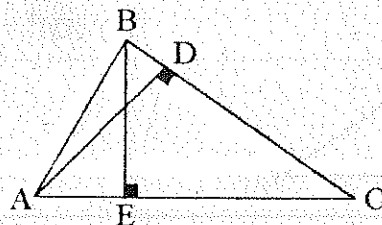
T) $BC \times DF = DE \times AC$

13.



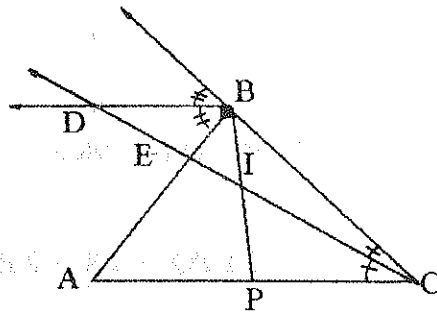
T) $AC \times CD = HC \times CE$

14.



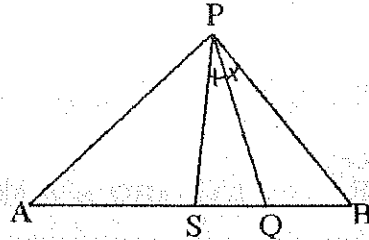
T) $BC / AC = h_b / h_a$

15.



$$T) CD \times AI = AC \times BD$$

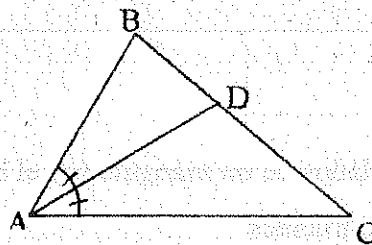
16.



$$H) AP = AQ$$

$$T) AQ^2 = AB \times AS$$

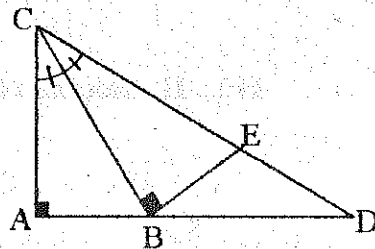
17.



$$H) \hat{C} = \hat{A} / 2$$

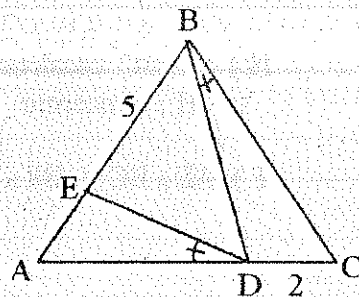
$$T) AB^2 = BC \times BD$$

18.



$$T) DB^2 = DC \times DE$$

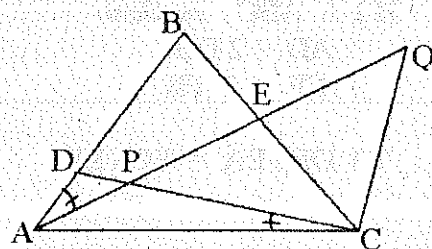
19.



$$H) \triangle ABC \text{ Equilátero}$$

$$T) BC = ? \quad \text{Resp. } 6, 4$$

20.

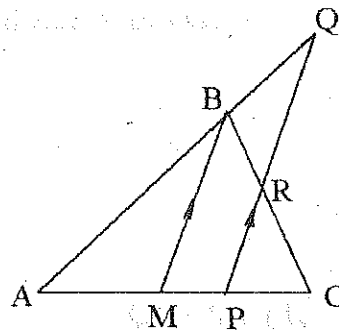


$$H) \triangle ABC \text{ equilátero}$$

$$CP = CQ$$

$$T) EQ \times DA = EC \times DP$$

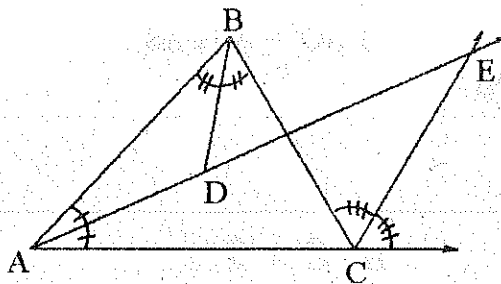
21.



$$H) AM = MC$$

$$T) PQ + PR = 2 BM$$

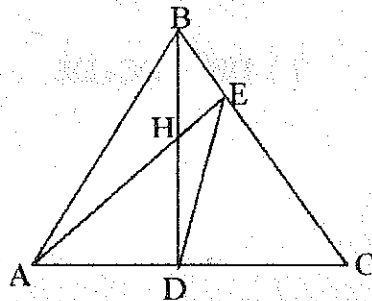
22.



$$T) \triangle ABD \approx \triangle AEC$$

23. Demostrar que las paralelas trazadas a dos lados de un triángulo por el baricentro, dividen al tercer lado en tres segmentos congruentes

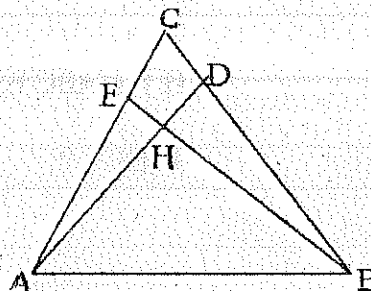
24.



$$H) H \text{ ortocentro del } \triangle ABC$$

$$T) \triangle ABC \approx \triangle CDE$$

25.

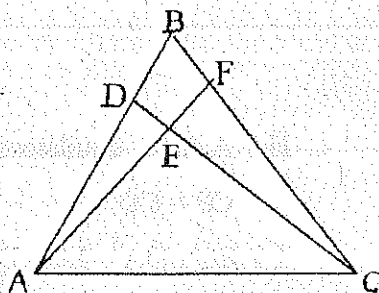


$$H) \triangle ABC \text{ escaleno}$$

$$H \text{ ortocentro}$$

$$T) AE \times EC = BE \times EH$$

26.



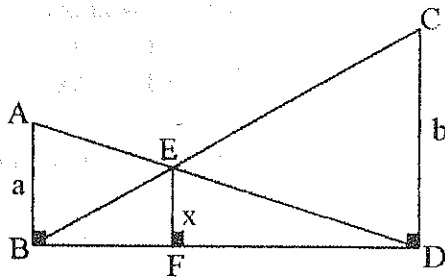
$$H) \triangle ABC \text{ escaleno}$$

$$AD = 2 DB$$

$$CF = 2 FB$$

$$T) DE \times EA = EC \times EF$$

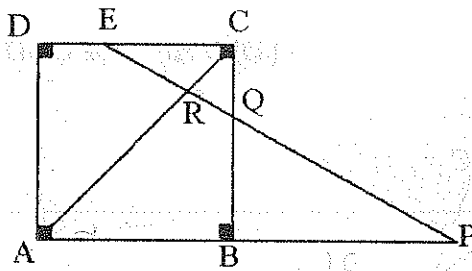
33.



$$T) x = f(a, b) ?$$

$$\text{Resp. } a \cdot b / (a + b)$$

34.



$$H) AD = 7 u.$$

$$BP = 10 u.$$

$$BQ = 4 u.$$

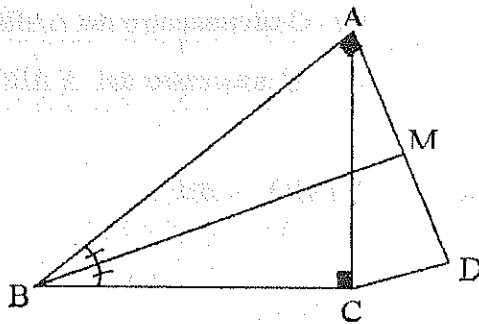
y

$$\frac{CR}{RA} = \frac{2}{5}$$

$$T) AB = ?$$

$$\text{Resp. } 8,75 u$$

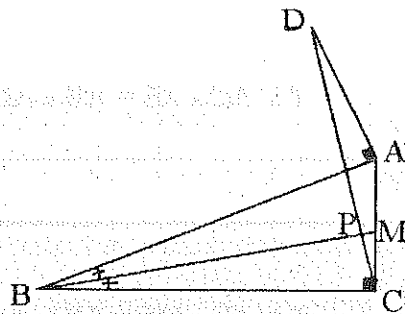
35.



$$H) \overline{AC} \cong \overline{AD}$$

$$T) AB \times MD = BC \times AM$$

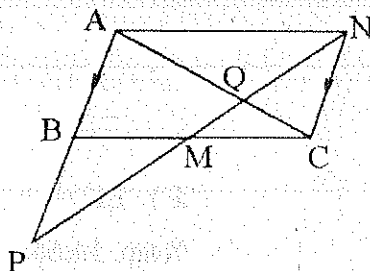
36.



$$H) \overline{AD} \cong \overline{AC}$$

$$T) AB \times PC = AM \times BP$$

37.



$$H) \overline{AN} \parallel \overline{BC}$$

$$\overline{BM} \cong \overline{MC}$$

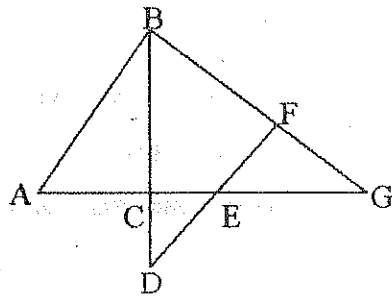
$$QN = 20 u$$

$$QM = 12 u$$

$$T) MP = ?$$

$$\text{Resp. } 48u$$

38.

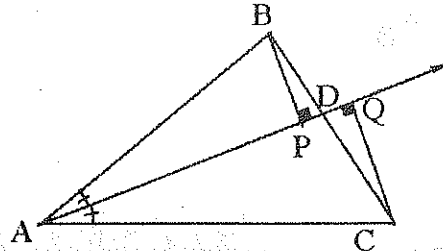
H) $\triangle ABC$ escaleno

$$\overline{DF} \parallel \overline{AB}$$

$$DE = EF$$

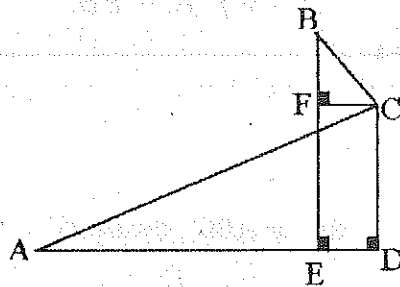
$$T) \frac{AC}{CE} = \frac{AG}{EG}$$

39.



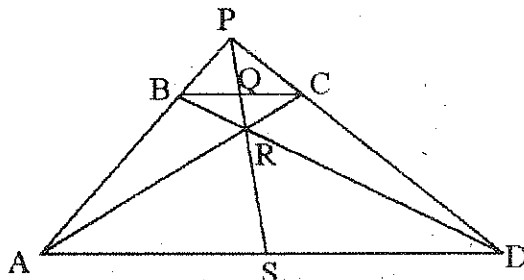
$$T) \frac{AP}{PD} = \frac{AQ}{DQ}$$

40.



$$T) \frac{BE}{AB} = \frac{AD}{AC} \times \frac{BC}{AB} + \frac{CD}{AC} \times \frac{AC}{AB}$$

41.

H) $\triangle APD$ escaleno

$$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$$

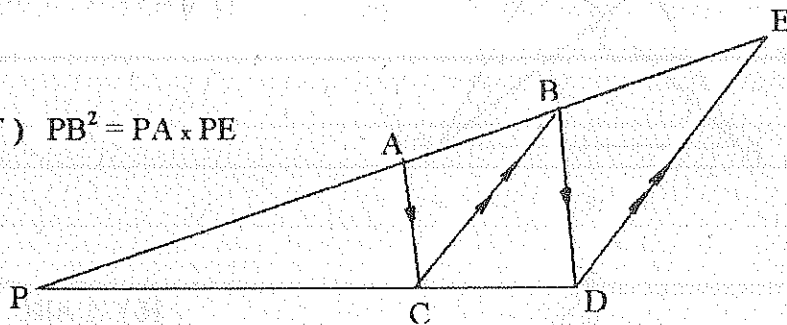
$$BQ = QC$$

$$T) a.) AS = SD$$

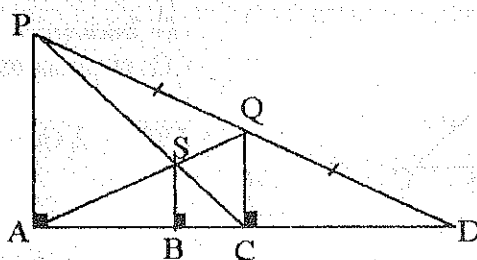
$$b) \frac{SR}{RQ} = \frac{SP}{PQ}$$

42.

$$T) PB^2 = PA \times PE$$

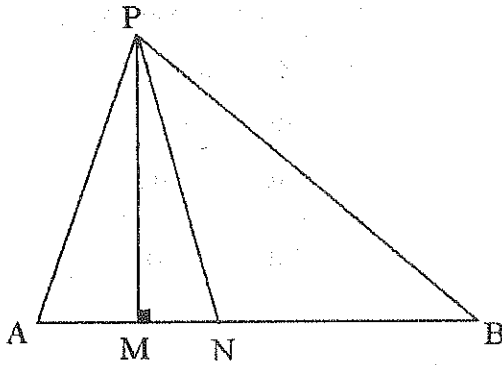


43.



$$T) \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

44.

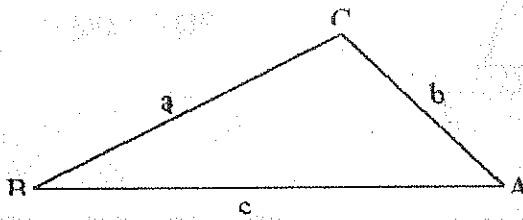


$$H) AN^2 = AB \times AM$$

$$AP = AN$$

$$T) \overline{PN} \text{ bisectriz } \widehat{MPB}$$

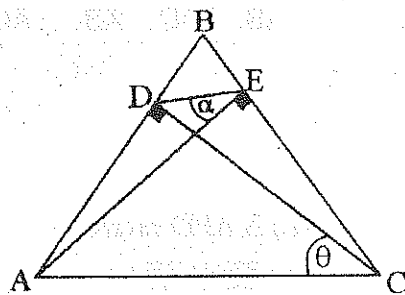
45.



$$H) a^2 = b^2 + bc$$

$$T) \hat{A} = 2\hat{B}$$

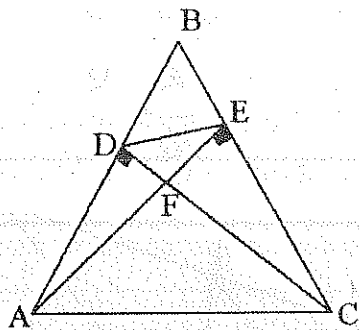
46.



$$H) \triangle ABC \text{ escaleno}$$

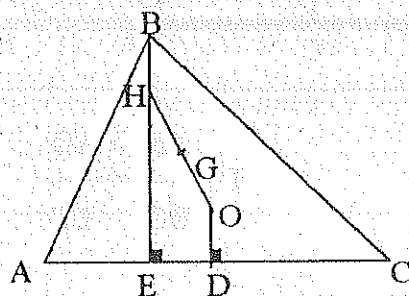
$$T) \hat{\alpha} = \hat{\theta}$$

47.



$$T) DE \times FC = AC \times EF$$

48.



$$H) \triangle ABC \text{ escaleno}$$

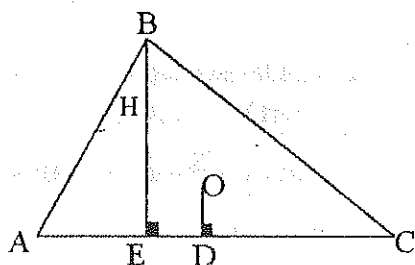
$$\cdot H \text{ ortocentro}$$

$$\cdot G \text{ baricentro}$$

$$\cdot O \text{ circuncentro}$$

$$T) HG = 2GO$$

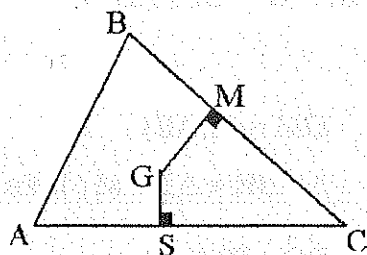
49.



- H) $\triangle ABC$ escaleno
 H su ortocentro
 O su circuncentro

T) $BH = 2 OD$

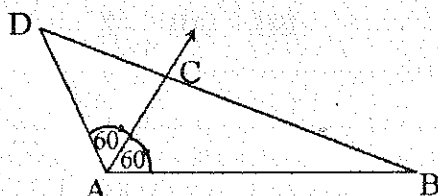
50.



- H) $\triangle ABC$ escaleno
 G baricentro
 $BC = a$
 $AC = b$

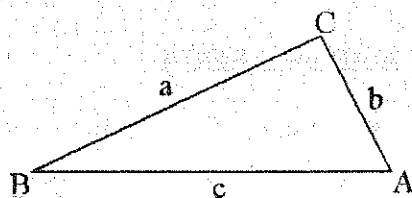
T) $\frac{GS}{GM} = \frac{a}{b}$

51.



T) $\frac{1}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}$

52.

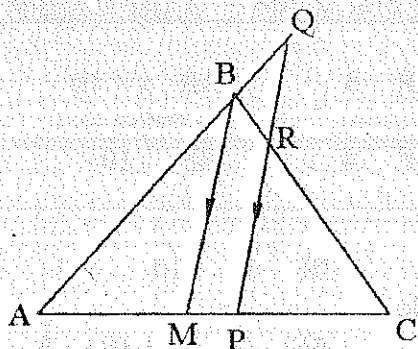


H) $\hat{A} = 2 \hat{B}$

T) $a^2 = b^2 + b \times c$

4.11.3.1 EJERCICIOS RESUELTOS

21.

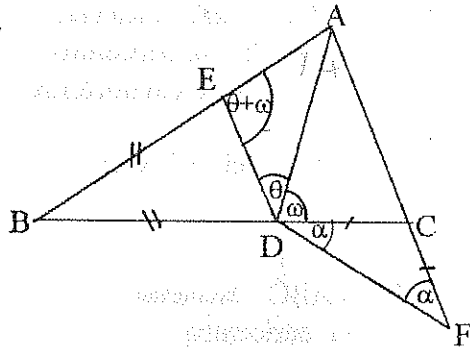


D) $\frac{PQ}{BM} = \frac{AP}{AM} \quad (\triangle AQP \approx \triangle ABM)$

$\frac{PR}{BM} = \frac{PC}{MC} \quad (\triangle PRC \approx \triangle BMC)$

$$PQ + PR = BM \times \frac{2(AP + PC)}{AB} = 2BM \quad ///$$

28.

D) $\triangle BDE$ isósceles $\therefore \hat{\theta} + \hat{\omega} = \hat{\theta} + \hat{\omega}$ $\triangle EAD$ y $\triangle ADF$

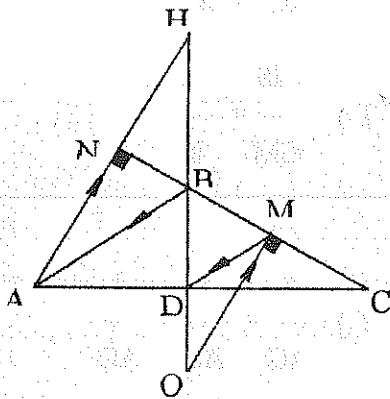
$$180^\circ - \hat{\theta} - \hat{\theta} - \hat{\omega} = 180^\circ - \hat{\omega} - \hat{\alpha} - \hat{\alpha}$$

$$\hat{\alpha} = \hat{\theta}$$

 $\triangle EAD \approx \triangle ADF$

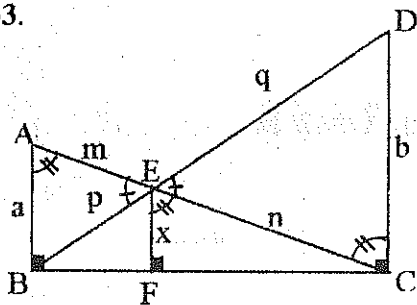
$$DE \times AF = DF \times AD \quad ///$$

29.

D) $DM = \frac{1}{2}(AB)$ $\triangle ABH \approx \triangle DOM$ (lados paralelos)

$$\frac{DO}{BH} = \frac{DM}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow DO = \frac{1}{2} BN \quad ///$$

33.

D) $(\triangle ABC \approx \triangle EFC)$

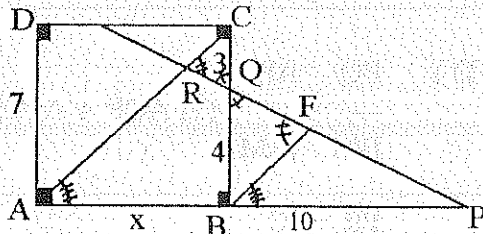
$$\frac{x}{a} = \frac{n}{m+n}$$

 $(\triangle ABE \approx \triangle EDC)$

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{b}{a+b} = \frac{n}{m+n}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow x = \frac{ab}{a+b}$$

34.

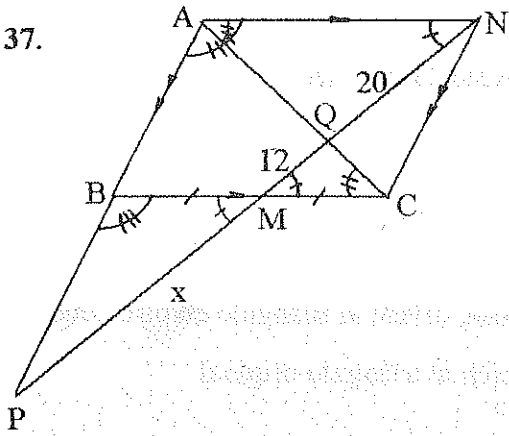
D) $\triangle RCQ \approx \triangle QBF$; $\triangle ARP \approx \triangle BFP$

$$\frac{CR}{BF} = \frac{3}{4} ; \frac{AR}{BF} = \frac{x+10}{10}$$

$$\text{dividiendo} \quad \frac{CR}{AR} = \frac{3}{4} * \frac{10}{x+10} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore X = 8.75 \text{ u}$$

37.



$$D) \triangle MQC \approx \triangle AQN$$

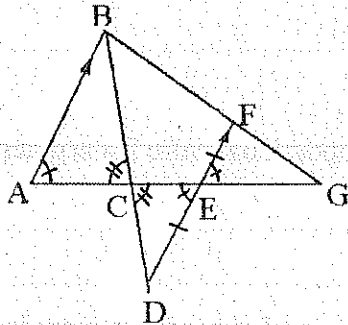
$$\frac{MC}{AN} = \frac{12}{20}$$

$$\triangle PAN \approx \triangle PBM$$

$$\frac{BM}{AN} = \frac{x}{32+x}$$

$$\therefore \frac{12}{20} = \frac{x}{32+x} \Rightarrow x = 48 \text{ u}$$

38.



$$D) \triangle ABC \approx \triangle CDE \Rightarrow$$

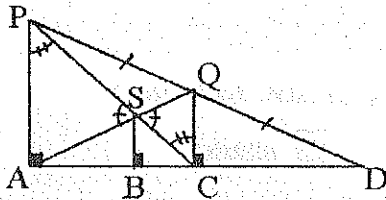
$$\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{ED}$$

$$\triangle ABG \approx \triangle EFG \Rightarrow$$

$$\frac{AG}{EG} = \frac{AB}{EF}$$

$$\therefore \frac{AC}{CE} = \frac{AG}{EG} \quad ///$$

43.



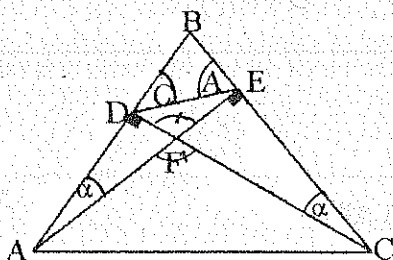
$$D) \triangle APS \approx \triangle SQC \Rightarrow$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AS}{SQ} ; \frac{AP}{CQ} = \frac{AS}{SQ}$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{AP}{QC} ; \frac{AD}{BC} = \frac{AP}{CQ}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} \quad ///$$

47.



$$D) \triangle DFE \approx \triangle AFC$$

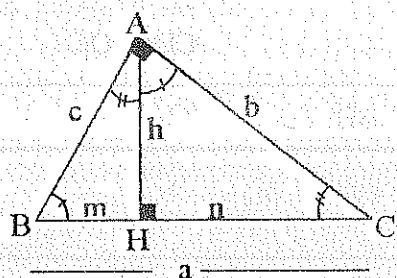
$$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC} ; \frac{BD}{BC} = \frac{EF}{CF}$$

$$\therefore \frac{DE}{AC} = \frac{EF}{CF} \Rightarrow DE \times CF = AC \times EF \quad ///$$

4.12. RELACIONES MÉTRICAS Y TRIGONOMÉTRICAS

4.12.1. TRIÁNGULO RECTÁNGULO

1. La altura correspondiente a la hipotenusa, divide al triángulo en otros dos semejantes entre si y semejantes también al triángulo original.
2. Un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección en la hipotenusa
3. La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos que determina en la hipotenusa.
4. El producto de las longitudes de los catetos es igual al producto entre las longitudes de la hipotenusa y su altura relativa.
5. El cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos

H) $\triangle ABC$ rectángulo \overline{AH} alturaT) 1. $\triangle ABC \approx \triangle CAH \approx \triangle ABH$

2. $b^2 = a \times n$

3. $h^2 = m \times n$

4. $b \cdot c = a \times h$

5. $a^2 = b^2 + c^2$

D) 1. $\triangle ABH \approx \triangle ABC$ rectángulos

$\hat{B} = \hat{B} \quad \therefore \triangle ABH \approx \triangle ABC$

 $\triangle CAH \approx \triangle ABC$ rectángulos

$\hat{C} = \hat{C} \quad \therefore \triangle CAH \approx \triangle ABC$

$\Rightarrow \triangle ABH \approx \triangle CAH \approx \triangle ABC$

$$2. \triangle CAH \approx \triangle ABC \quad \therefore \frac{n}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = a \cdot n$$

$$3. \triangle ABH \approx \triangle CAH \quad \therefore \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

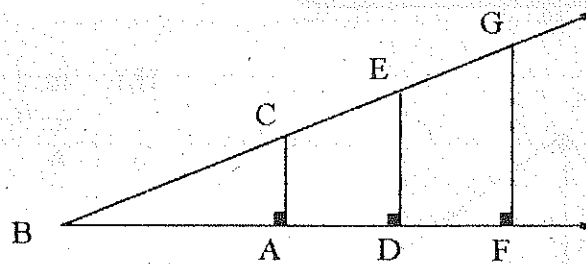
$$4. \triangle ABH \approx \triangle ABC \quad \therefore \frac{c}{a} = \frac{h}{b} \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h$$

$$5. b^2 = a \cdot n$$

$$c^2 = a \cdot m$$

$$b^2 + c^2 = a(m + n) = a \cdot a \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \quad ///$$

4.12.1.1 DE UN ANGULO AGUDO

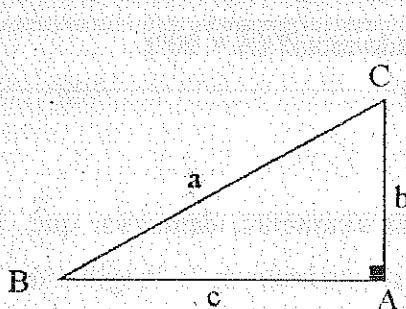


$$\frac{AC}{BC} = \frac{DE}{BE} = \frac{GF}{BG} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \text{Sen } \hat{\alpha}$$

$$\frac{BA}{BC} = \frac{BD}{BE} = \frac{BF}{BG} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \text{Cos } \hat{\alpha}$$

$$\frac{AC}{BA} = \frac{DE}{BD} = \frac{GF}{BF} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \text{Tan } \hat{\alpha}$$

4.12.1.2 DE ANGULOS COMPLEMENTARIOS

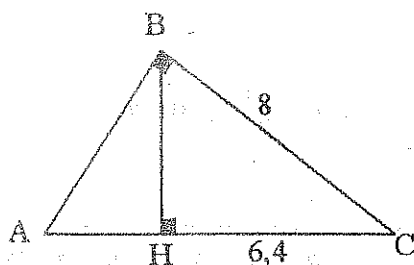


$$\text{Sen } \hat{B} = \frac{b}{a} = \text{Cos } \hat{C} = \text{Cos } (90^\circ - \hat{B})$$

$$\text{Cos } \hat{B} = \frac{c}{a} = \text{Sen } \hat{C} = \text{Sen } (90^\circ - \hat{B})$$

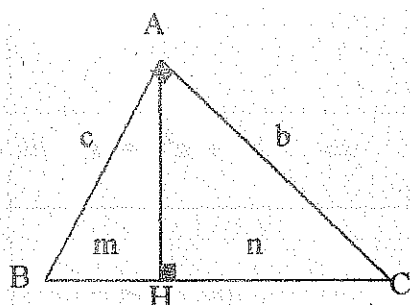
4.12.13 EJERCICIOS

1.

T) $AB = ?$

Resp. 6

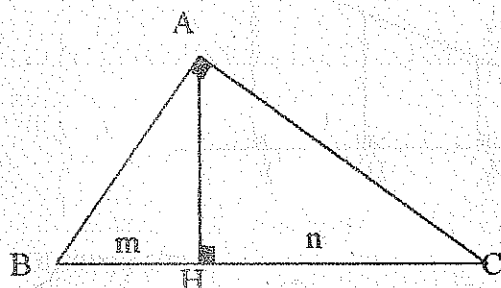
2.



$$H) \frac{m}{n} = \frac{9}{16}$$

$$T) \frac{c}{b} = ? \quad \text{Resp. } 3/4$$

3.



$$H) \frac{m}{n} = \frac{9}{16} \quad \text{y} \quad b \times c = 8$$

$$T) BC = ? \quad \text{Resp. } 4,08$$

4. Resolver un triángulo rectángulo ABC, $\hat{A} = 90^\circ$ dados :

$$a) \ m \hat{B} = 37^\circ, \ p = 137 \text{ u} \quad \text{Resp. } a = 115 \text{ u}$$

$$b) \ c - b = 7.60 \text{ u}, \ m \hat{B} = 42^\circ \quad \text{Resp. } b = 68.7 \text{ u}$$

$$c) \ p = 12 \text{ u}, \ h_a = 4.80 \text{ u} \quad \text{Resp. } a = 10 \text{ u}$$

$$d) \ a = 10 \text{ u}, \ v_a = 3.40 \text{ u} \quad \text{Resp. } b = 4.38$$

5. ¿Cuál es la relación numérica entre los catetos de un triángulo rectángulo para que las medianas m_a y m_b se corten en un ángulo recto? ($\hat{A} = 90^\circ$).

$$\text{Resp. } \sqrt{2}/2$$

6. Si en un triángulo las medianas se cortan perpendicularmente, demostrar que la suma de los cuadrados de sus longitudes es igual al cuadrado de la longitud de la tercera mediana.

7.-La distancia del ortocentro al baricentro en un triángulo rectángulo mide $25 / 3$ m.

Calcular el valor de la hipotenusa.

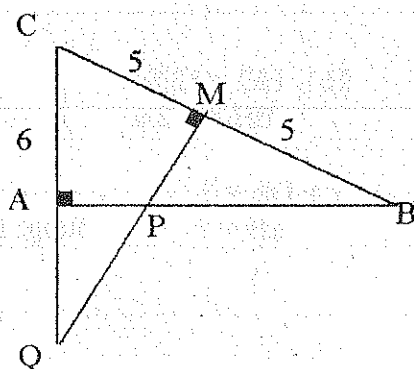
Resp. 25m

8. Calcular el valor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que la altura relativa al ángulo recto, divide a la hipotenusa en dos segmentos, el uno es el triple del otro.

Resp. 30° ; 60°

9. Demostrar que el triángulo ABC es rectángulo si la altura y la mediana trazadas desde el vértice B divide al B en tres partes congruentes.

10.

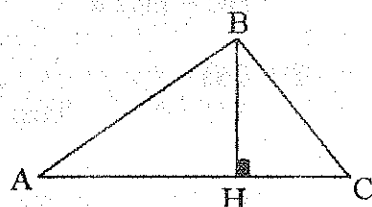


T) $AP = ?$

$PQ = ?$

Resp. 1.78 u ; 3.08 u

11.



H) $BH = \sqrt{3} u$
 $AC = 3 u$

T) $AB = ?$ Resp. $\sqrt{7} u$

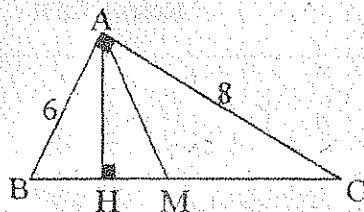
12. Los lados de un triángulo que se quiere convertir a un triángulo rectángulo son 9 u, 10 u y 11 u, aumentando o disminuyendo dichos lados una misma cantidad.

¿Cuál es esa cantidad? Resp. 2u

13. Una persona camina 7 Km al norte, 6 Km al este y 4 Km al norte. ¿A qué distancia está del punto de partida?

Resp. 12,54 Km

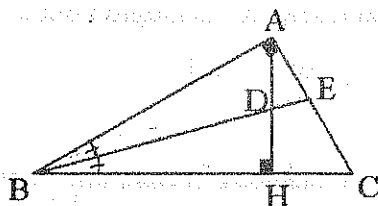
14.



H) $BM = MC$

T) $HM = ?$ Resp. 1.4 u

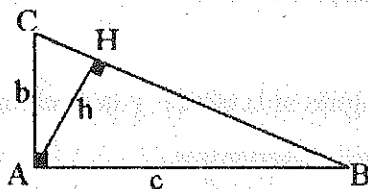
15.



$$\begin{aligned} \text{H) } AB &= 6 \\ BC &= 8 \end{aligned}$$

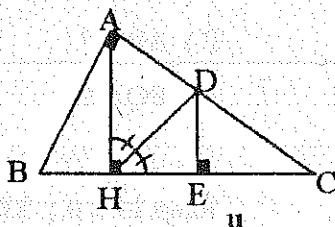
$$\text{T) } DE = ? \quad \text{Resp. } 1.6 \text{ u}$$

16.



$$\text{T) } \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

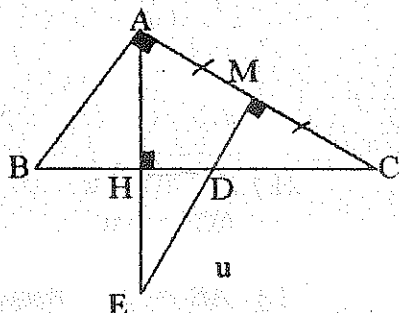
17.



$$\begin{aligned} \text{H) } HC &= 12.8 \text{ u} \\ BH &= 7.2 \text{ u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{T) } DE &= ? \\ AB &= ? \end{aligned} \quad \text{Resp. } 12. \text{ u} ; 5.45$$

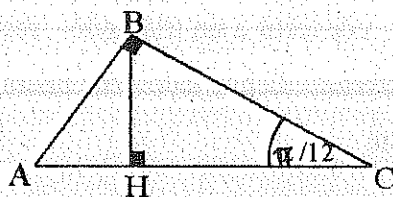
18.



$$\begin{aligned} \text{H) } AB &= 18 \text{ u} \\ HC &= 19.2 \text{ u} \end{aligned}$$

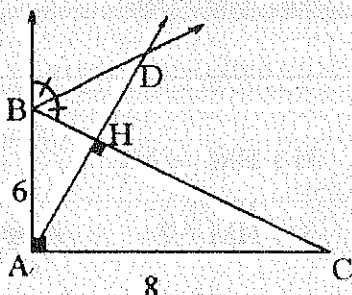
$$\begin{aligned} \text{T) } DM &= ? \\ HD &= ? \end{aligned} \quad \text{Resp. } 9.0 \text{ u} ; 4.2$$

19.



$$\text{T) } BH = \frac{AC}{4}$$

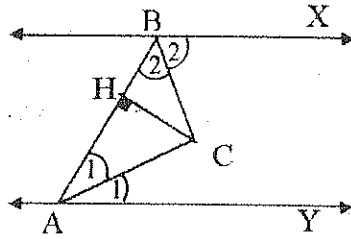
20.



$$\text{T) } HD = ?$$

$$\text{Resp. } 7.2 \text{ u}$$

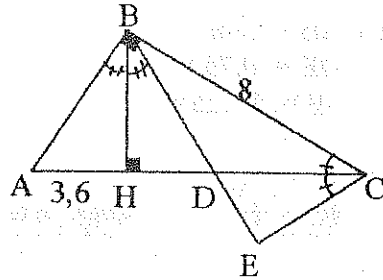
21.



H) $\overrightarrow{AY} \parallel \overrightarrow{BX}$
 $AH = 3BH$

T) $\hat{1} = ?$
 $\hat{2} = ?$ Resp. $30^\circ ; 60^\circ$

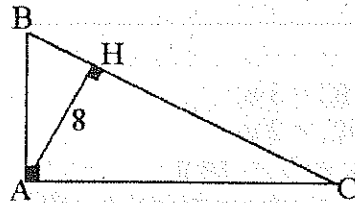
22.



T) $DE = ?$

Resp. 1.68 u

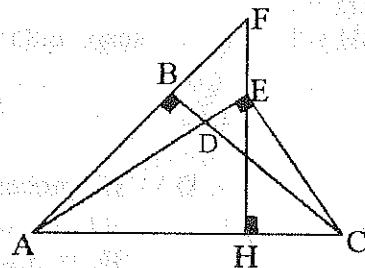
23.



H) $BC = 20$

T) $AB = ?$ Resp. 8.94 u

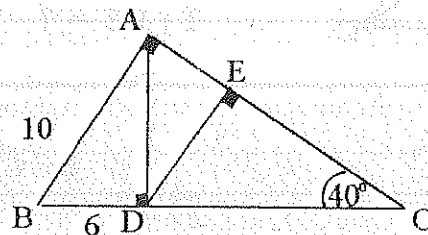
24.



H) $FD = 9u$
 $DH = 3u$

T) $EH = ?$ Resp.

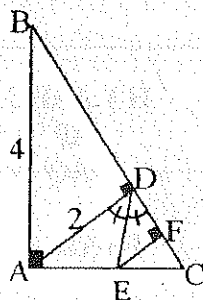
25.



T) $AE = ?$

Resp. 5.86 u

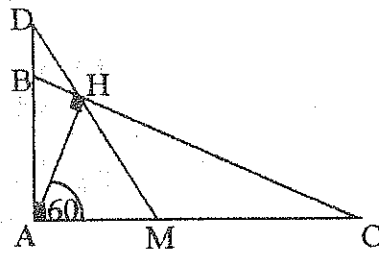
26.



T) $EF = ?$

Resp. 0.86

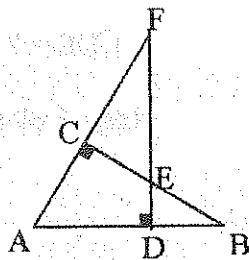
27.



H) $\overline{AM} \cong \overline{MC}$

T) $AB = 2 BD$

28.



H) $AB = 10 u$

$DE = 0.75 u$

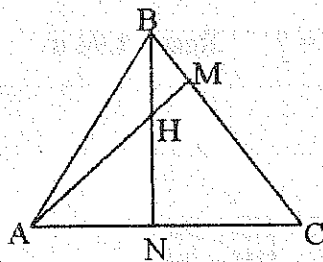
$EF = 11.25 u$

T) $AC = ?$

$BC = ?$

Resp. $6 u ; 8 u$

29.



H) $MC = 3 u$

$NC = 2 u$

$a + b = 14 u$

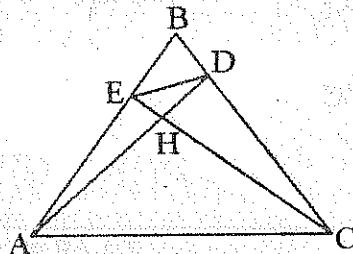
H ortocentro del $\triangle ABC$

T) $AH = ?$

$BH = ?$

Resp. $6.85 u ; 2.78 u$

30.



D) H ortocentro del $\triangle ABC$

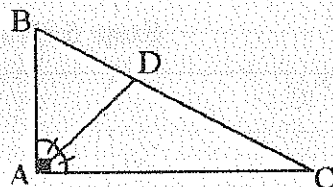
$BD = 2 u$

$BE = 3 u$

$AB + BC = 20 u$

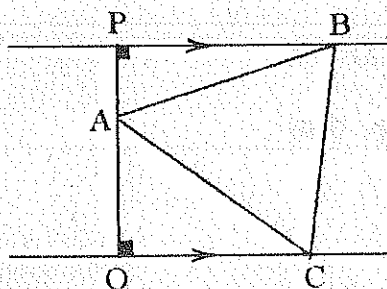
T) $DE = ?$ Resp. $3.16 u$

31.



T) $AD = \frac{bc \sqrt{2}}{b + c}$

32.



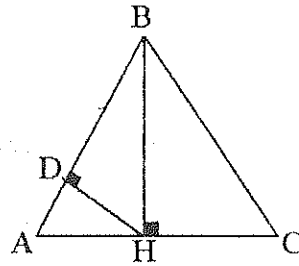
H) $\triangle ABC$ equilátero

$AP = 3 u$

$AQ = 7 u$

T) $AB = ?$ Resp. $11.84 u$

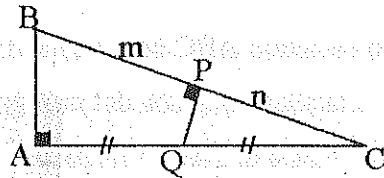
33.



$$\begin{aligned} \text{H) } AB &= BC \\ AC &= 30 \text{ u} \\ BH &= 20 \text{ u} \end{aligned}$$

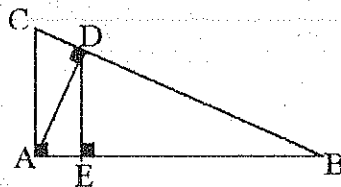
$$\text{T) } HD = ? \quad \text{Resp. } 12 \text{ u}$$

34.



$$\text{T) } m^2 - n^2 = AB^2$$

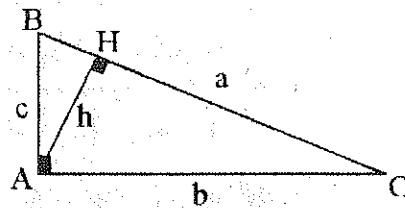
35.



$$\begin{aligned} \text{H) } CB &= 40 \text{ u} \\ AB &= 32 \text{ u} \end{aligned}$$

$$\text{T) } DE = ? \quad \text{Resp. } 15.36 \text{ u}$$

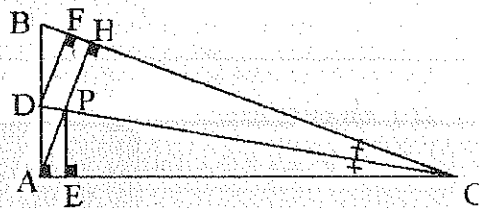
36.



$$\begin{aligned} \text{H) } BC + b + c &= 72 \text{ u} \\ h &= 14.4 \text{ u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{T) } a &= ? \\ b &= ? \\ c &= ? \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

37.

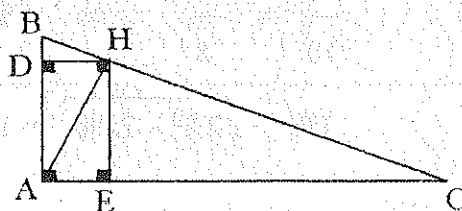


$$\begin{aligned} \text{H) } DF &= 20 \text{ u} \\ PE &= 15 \text{ u} \\ AB &= 50 \text{ u} \end{aligned}$$

$$\text{T) } AC = ? \quad \text{Resp. } 49 \text{ u}$$

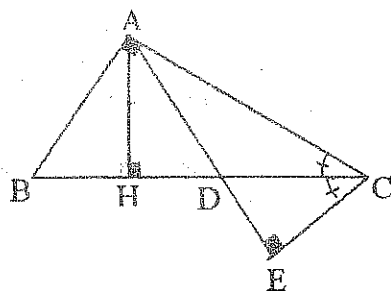
38. En un triángulo isósceles ABC, el A mide 110° , $BA = 10 \text{ u}$. Hallar la distancia entre el ortocentro y el circuncentro del triángulo ABC. Resp. 14.7 u

39.



$$\text{T) } \frac{b^3}{c^3} = \frac{CE}{BD}$$

40.



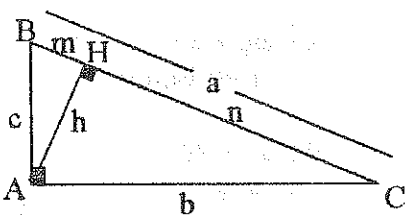
$$T) AC^2 = \frac{AB \cdot DC \cdot HC}{DE}$$

41. Las medianas \overline{AD} y \overline{BE} de un triángulo escaleno ABC son perpendiculares entre sí y miden 12 u y 9u, respectivamente. Calcular los lados del triángulo.

Resp. $AB = 10 \text{ u}$; $BC = 14,4 \text{ u}$; $AC = 17,08 \text{ u}$.

4.12.1.3.1 EJERCICIOS RESUELTOS

16.

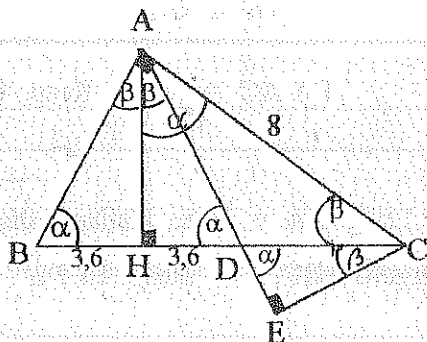


$$D) \quad b^2 = a \cdot m; \quad c^2 = a \cdot n; \quad h^2 = m \cdot n$$

$$h^2 = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{c^2}{a} = \frac{b^2 \cdot c^2}{b^2 + c^2}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$$

22.



D) En el $\triangle ABC$:

$$8^2 = (7.2 + DC)(3.6 + DC)$$

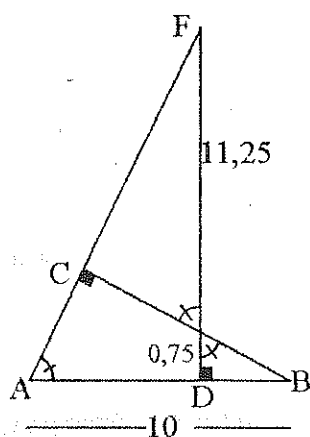
$$\therefore DC = 2.8$$

$$\triangle CED \sim \triangle ABC$$

$$\frac{X}{10} = \frac{CE}{8} \Rightarrow CE = 2.24$$

$$DE = \sqrt{2.8^2 - 2.24^2} = 1.68 \text{ u}$$

28.



D) $\triangle AFD \approx \triangle BDE$

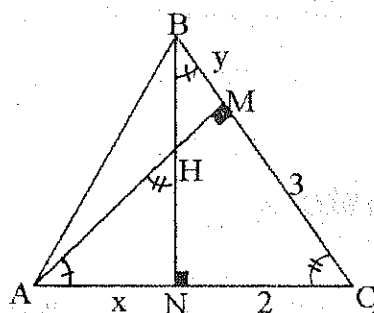
$$\frac{12}{DB} = \frac{10 - DB}{0.75} \Rightarrow DB = 1$$

$$\operatorname{Tg} \hat{1} = \frac{1}{0.75} \Rightarrow \hat{1} = 53.13^\circ$$

$$\cos \hat{1} = \frac{AC}{10} \Rightarrow AC = 6$$

$$CB = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

29.



D) $(x+2) + (y+3) = 14$

$$\therefore x + y = 9$$

$\triangle ACM \approx \triangle BCN$

$$\frac{x+2}{y+3} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 6.4 ; y = 2.6$$

$$y + 3 = 2$$

BN = 5.2 (Pitágoras)

$$\frac{AH}{5.6} = \frac{6.4}{5.2} \quad (\triangle AHN \approx \triangle BCN)$$

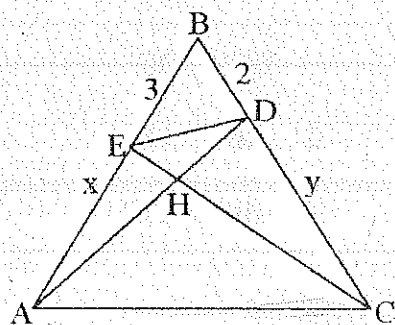
$$5.6 \quad 5.2$$

$$\therefore AH = 6.85 \text{ u}$$

HN = 2.56 u (Pitágoras)

BH = 2.78

30.



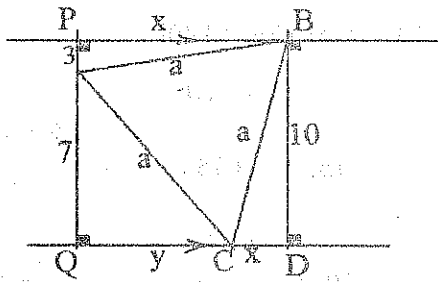
$$\text{D) } \frac{2}{3+x} = \frac{3}{2+y} \quad (\triangle ABC \approx \triangle EBD)$$

$$(x+3) + (y+2) = 20 \Rightarrow x = 5 ; y = 10$$

EC = 11.62 ; AC = 12.64 (Pitágoras)

$$\frac{ED}{12.64} = \frac{2}{8} \Rightarrow DE = 3.16$$

32.



$$D) x^2 = a^2 - 9$$

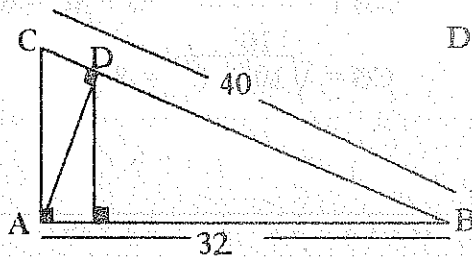
$$y^2 = a^2 - 49$$

$$z^2 = a^2 - 100$$

$$x = y + z$$

$$a = 11.84 \text{ u}$$

35.



$$D) AC = 24 \text{ (Pitágoras)}$$

$$AD \cdot 40 = 32 \cdot 24 \Rightarrow AD = 19.2 \text{ u}$$

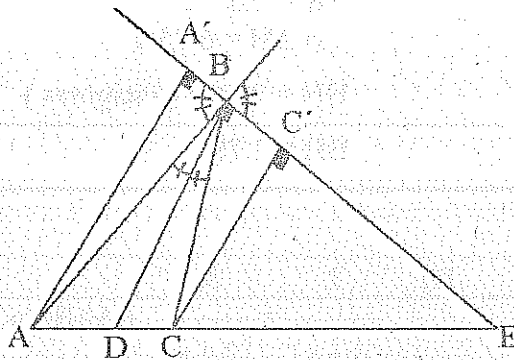
$$DB = 25.6 \text{ (Pitágoras)}$$

$$DE \cdot 32 = 19.2 \cdot 25.6 \Rightarrow DE = 15.36$$

4.12.2 TRIÁNGULO ESCALENO

4.12.2.1 PROPIEDADES DE LAS BISECTRICES

En todo triángulo, la bisectriz de un ángulo interno o externo divide al lado opuesto en partes proporcionales a los otros dos lados del triángulo



H) $\triangle ABC$ escaleno

$\overline{BD} \wedge \overline{BE}$ bisectrices

$$T) 1. \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

$$2. \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CE}$$

D) $\overline{AA'} \wedge \overline{CC'} \perp \overline{BE}$ construcción

$$\overline{AA'} \parallel \overline{BD} \parallel \overline{CC'}$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{A'B}{BC'}$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{A'B}{BC'}$$

$$\triangle ABA' \cong \triangle CBC' \quad \therefore \triangle AA'B \approx \triangle CC'B$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{A'B}{BC'} = \frac{AA'}{CC'} \quad \therefore \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \quad \text{bisectriz interna}$$

$$\triangle AA'E \approx \triangle CC'E$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{AA'}{CC'} \quad \therefore \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC} \quad \text{bisectriz externa}$$

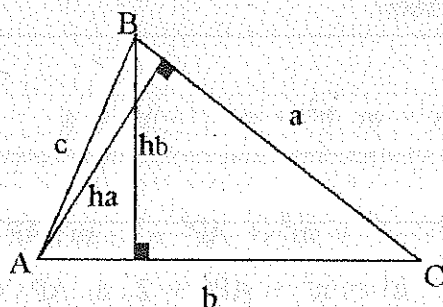
COROLARIO

Las bisectrices interna y externa en un mismo vértice de un triángulo, divide armónicamente al lado opuesto en la razón de los otros dos lados del triángulo.

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC}$$

4.12.2.2. LEY DE SENOS

Los lados de un triángulo son proporcionales a las funciones seno de los ángulos opuestos.



$$\text{Sen } \hat{A} = \frac{hb}{c}$$

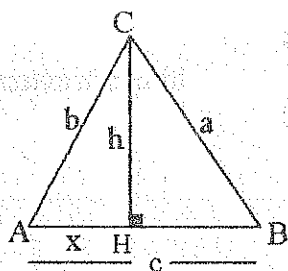
$$\text{Sen } \hat{B} = \frac{ha}{c}$$

$$\text{Sen } \hat{C} = \frac{hb}{a} = \frac{ha}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\text{Sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{Sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{Sen } \hat{C}}$$

4.12.2.3 LEY DE COSENOS

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de dichos lados, por el coseno del ángulo que forman.



$$D) \triangle BCH \text{ rectángulo } \therefore h^2 = a^2 - (c \pm x)^2$$

$$\triangle ACH \text{ rectángulo } \therefore h^2 = b^2 - x^2$$

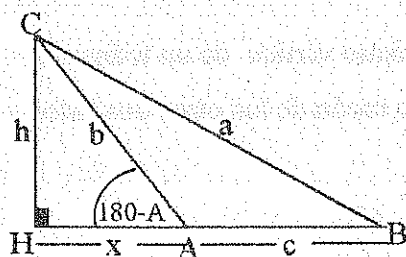
$$a^2 - (c \pm x)^2 = b^2 - x^2$$

$$a^2 - c^2 \pm 2cx - x^2 = b^2 - c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2cx$$

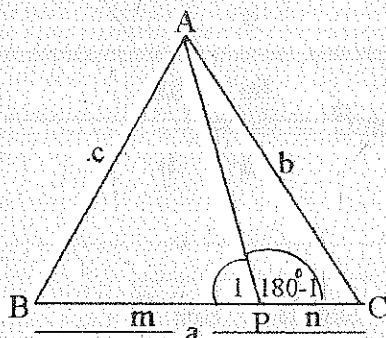
$$\cos A = \frac{x}{b} = -\cos(180^\circ - A) = -\frac{x}{b}$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



4.12.2.4. TEOREMA DE STEWART

El cuadrado de la longitud del segmento que une el vértice de un triángulo con un punto interior cualquiera del lado opuesto, multiplicado por dicho lado, es igual a la suma de los productos de las longitudes de los segmentos determinados multiplicado por el cuadrado de las longitudes de los lados no consecutivos, menos el producto de dichos segmentos por el lado en el que están contenidos.



$$T) AP^2 \cdot a = m \cdot b^2 + n \cdot c^2 - m \cdot n \cdot a$$

$$D) \triangle ABP : c^2 = m^2 + AP^2 - 2 \cdot m \cdot AP \cdot \cos \hat{I} \quad (1)$$

$$\triangle APC : b^2 = n^2 + AP^2 + 2 \cdot n \cdot AP \cdot \cos(180^\circ - \hat{I})$$

$$\cos(180^\circ - \hat{I}) = -\cos \hat{I}$$

$$\therefore b^2 = n^2 + AP^2 + 2 \cdot n \cdot AP \cdot \cos \hat{I} \quad (2)$$

$$(1) = (2)$$

$$\frac{m^2 + AP^2 - c^2}{2m \cdot AP} = \frac{b^2 - n^2 - AP^2}{a \cdot n \cdot AP}$$

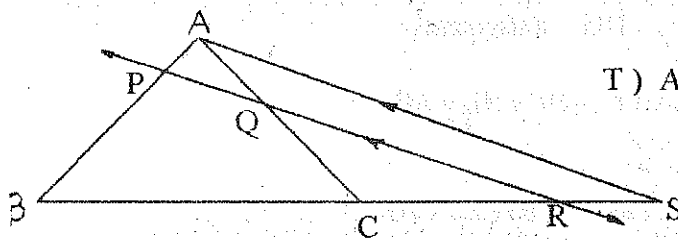
$$nm^2 + nAP^2 - nc^2 = mb^2 - mn^2 - mAP^2$$

$$AP^2(m+n) = mb^2 + nc^2 - mn(m+n)$$

$$\therefore AP^2 a = mb^2 + nc^2 - mna$$

4.12.2.5. TEOREMA DE MENELAO

Si una transversal determina sobre los lados de un triángulo seis segmentos, el producto de tres de ellos que no tengan extremos comunes es igual al producto de los otros tres



$$T) AP \times BR \times QC = PB \times CR \times AQ$$

D) $\overline{AS} \parallel \overline{PR}$ construcción

$$\frac{AP}{PB} = \frac{RS}{BR}$$

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{RS}{CR}$$

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{RS}{CR}$$

$$\therefore RS = \frac{AQ \times CR}{QC} = \frac{AP \times BR}{PB}$$

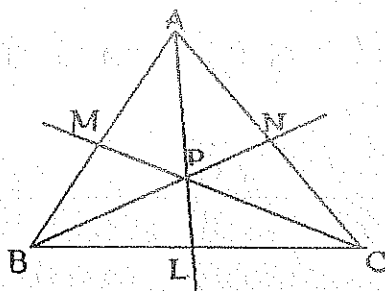
$$\Rightarrow AP \times BR \times QC = PB \times CR \times AQ$$

COROLARIO

Si tres puntos en los lados de un triángulo determinan seis segmentos que cumplen el teorema de Menelao, los tres puntos son colineales.

4.12.2.6. TEOREMA DE CEVA

Si desde los vértices de un triángulo se trazan rayos que pasan por un punto exterior, se obtienen seis segmentos sobre los lados del triángulo tal que, el producto de los tres segmentos que no tengan extremos comunes es igual al producto de los otros tres.



$$T) AM \times BL \times NC = MB \times LC \times AN$$

D) $\triangle ABL$, CM transversal

$$AM \times BC \times PL = MB \times LC \times AP$$

$\triangle ACL$, BN transversal

$$AN \times BC \times PL = NC \times BL \times AP$$

$$\therefore \frac{AM \times BC \times PL}{AN \times BC \times PL} = \frac{MB \times LC \times AP}{NC \times BL \times AP}$$

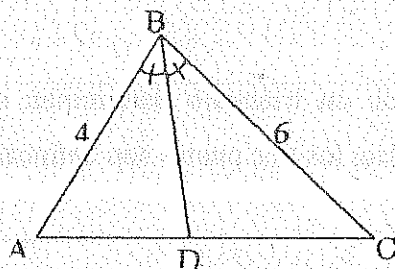
$$\Rightarrow AM \times BL \times NC = MB \times LC \times AN$$

COROLARIO

Si desde los vértices de un triángulo se trazan rayos que determinen seis segmentos en los lados, que cumplen el teorema de Ceva, los rayos son concurrentes.

4.12.2.7. EJERCICIOS

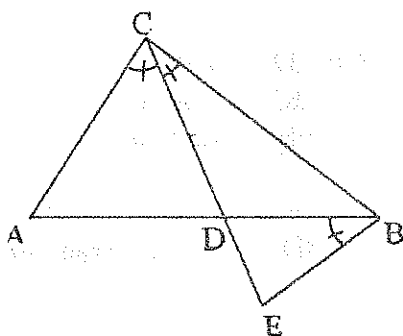
1.



$$T) \hat{C} = ?$$

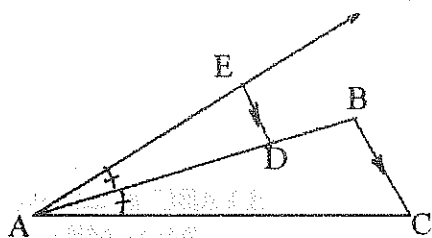
Resp. 41.4°

7.



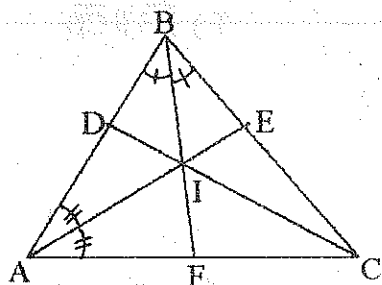
$$T) BE = \frac{AB \times BC}{AC + BC}$$

8.



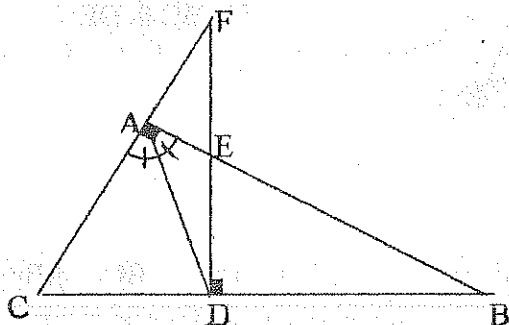
$$T) \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

9.



$$T) \frac{BI}{IF} = \frac{BD}{DA} + \frac{BE}{EC}$$

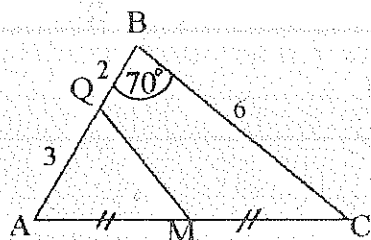
10.



$$T) a) EB = CF$$

$$b) CF = CB^2 / (AC + AB)$$

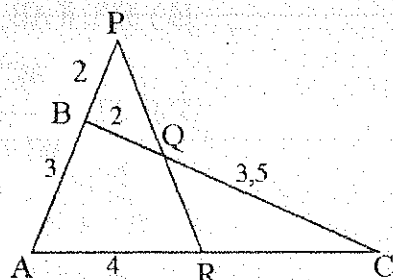
11.



$$T) QM = ?$$

$$\text{Resp. } 3.2$$

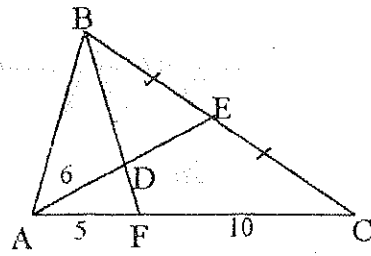
12.



$$T) RC = ?$$

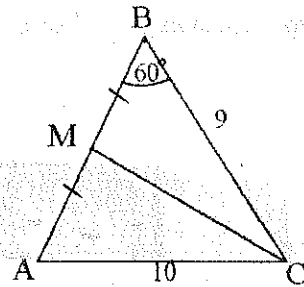
$$\text{Resp. } 3$$

13.

T) $DE = ?$

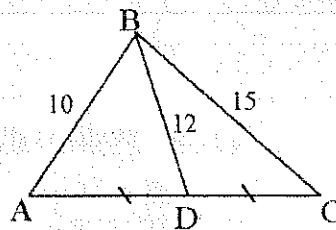
Resp. 6

14.

T) $MC = ?$

Resp. 7,84

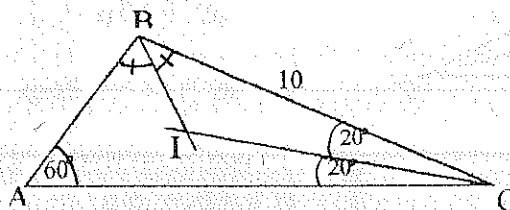
15.

T) $\hat{A} = ?$ Resp. 107.6°

16. En un triángulo rectángulo se traza la bisectriz del ángulo recto. Hallar la distancia entre los ortocentros de los triángulos formados. Si los catetos son b y c ($b > c$).

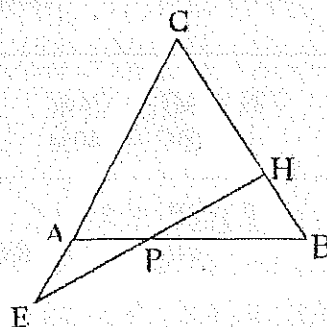
Resp. $\frac{b - c}{b + c} \sqrt{b^2 + c^2}$

17.

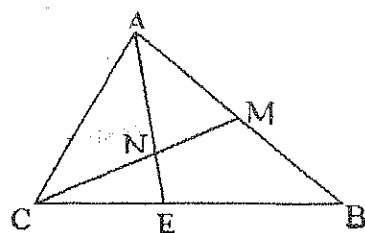
T) $BI = ?$ Resp. $3.9u$

18. Los lados de un triángulo son : $a = 20u$; $b = 13u$; $c = 15u$. Encontrar la distancia entre el vértice A y el ortocentro. Resp. 0.3

19.

H) $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ $\overline{AE} \cong \overline{BH}$ T) $\overline{EP} \cong \overline{PH}$

20.

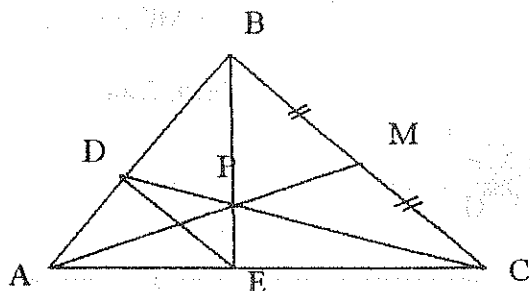


H) \overline{CM} mediana del $\triangle ABC$
 $\overline{CN} \cong \overline{NM}$

T) $EB = 2 EC$

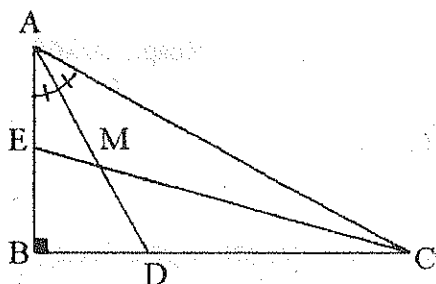
21. En un triángulo ABC, \overline{AD} es bisectriz del A, $AD = 8$ cm, $AB = 7$ cm. y $BD = 3$ cm.
 Encontrar la longitud de AC y BC. Resp. 11.2cm. ; 7.7 cm.

22.



T) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

23.



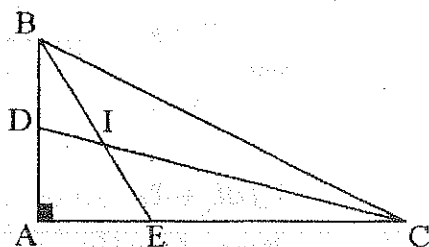
H) \overline{EC} mediana del $\triangle ABC$

$AB = 6$ u
 $BC = 8$ u

D) $EM = ?$

$MD = ?$ Resp. 2.39 u ; 2.92 u

24.

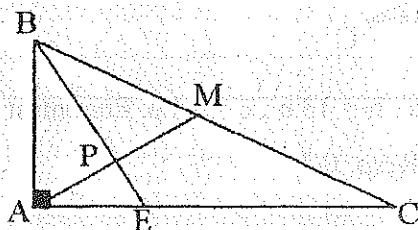


H) I incentro del $\triangle ABC$

$AB = 6$ u
 $AC = 10$ u

T) $IE = ?$ Resp. 2.49 u

25.



H) $AB = 5$ u

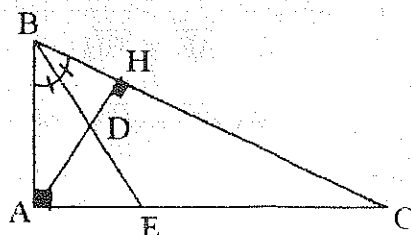
$AC = 5\sqrt{3}$ u

$\overline{AP} = \overline{PM}$

\overline{AM} mediana del $\triangle ABC$

T) $= ?$ Resp. 2.89 u

26.



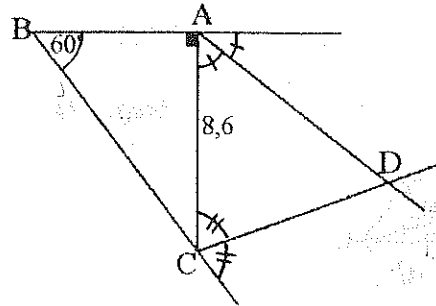
H) $AB = 24$ u

$BC = 40$ u

T) $DE = ?$

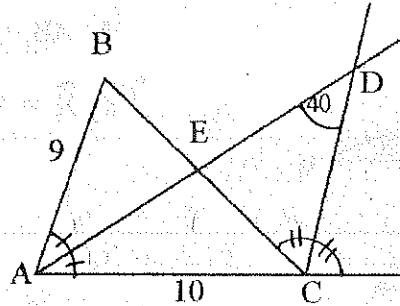
$DH = ?$ Resp 10.73; 7.2

27.

T) $AD = ?$

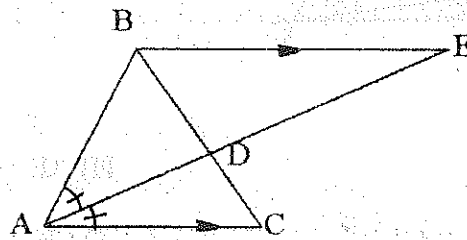
Resp 9,6

28.

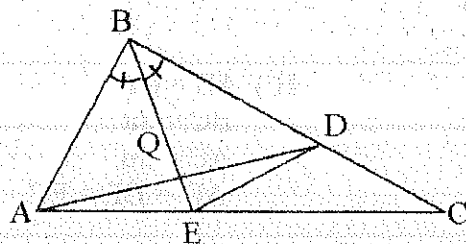
T) $DE = ?$

Resp. 4.33

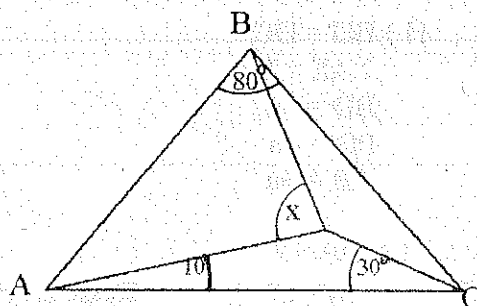
29.

H) $AC = 2u$ $AB = 4u$ $BC = 3u$ T) $DE = ?$ Resp.

30.

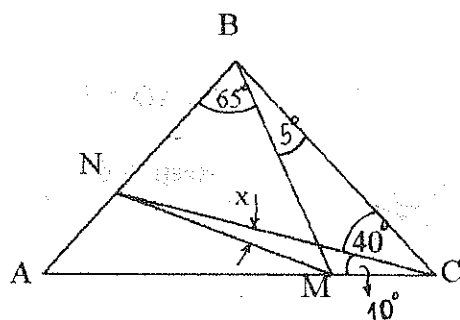
H) $AB = 8u$ $BC = 2u$ $BD = 12u$ $AD = 10u$ T) $DE = ?$ Resp.

31.

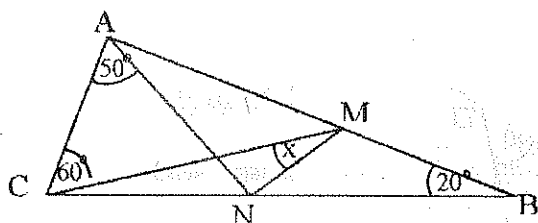
T) $\hat{X} = ?$

Resp.

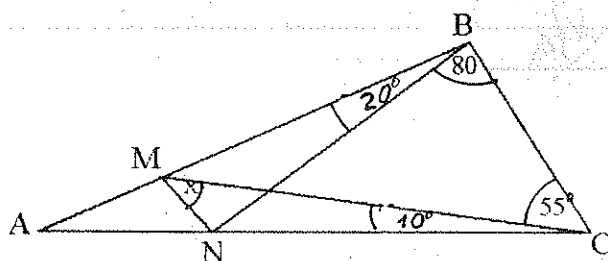
32.

T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 30°

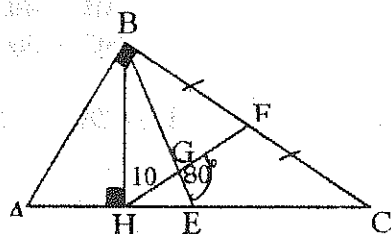
33.

H) $AB = BC$ T) $\widehat{X} = ?$ Resp.

34.

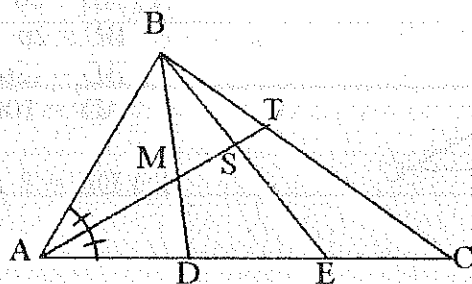
T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 25°

35.

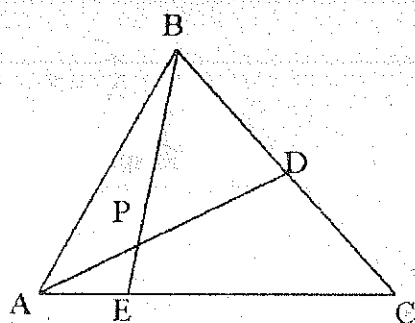
H) $AE = EC$ T) $GE = ?$

Resp: 5.6 u

36.

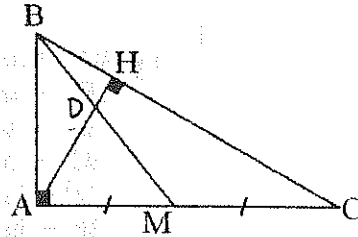
H) $AB = 6u$ $BC = 8u$ $AC = 9u$ $AD = DE = EC$ T) $BM = ?$ $BS = ?$ Resp. 3.48 ; 3.0

37.

H) $BD = DC$ $2 AE = EC$ $BD = 3u$ $PD = 4u$ $AB = 6u$ T) $BP = ?$ $AC = ?$

Resp. 2.55u ; 10.48u

38.



$$\begin{aligned} \text{H) } AB &= 12u \\ BC &= 20u \end{aligned}$$

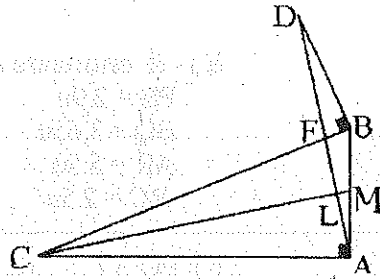
$$\text{T) } DH = ?$$

$$DM = ? \quad \text{Resp. } 2,53 ; 6,78$$

39. Si se sabe que los lados del triángulo ABC satisfacen la relación :

$$AC \cdot AB = BC^2 - AC^2, \text{ demostrar que : } \hat{A} = 2 \hat{B}.$$

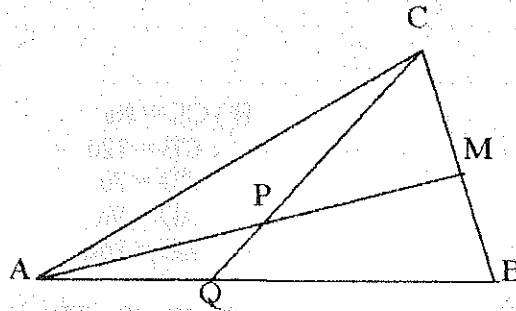
40.



$$\begin{aligned} \text{H) } AM &= MB \\ AB &= BD = 6u \\ AC &= 8u \end{aligned}$$

$$\text{T) } LM = ? \quad \text{Resp. } 0,95u$$

41.

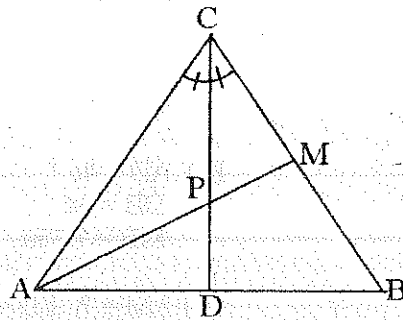


$$\begin{aligned} \text{H) } \overline{AM} &\text{ mediana del } \triangle ABC \\ AP &= PM \\ QB &= 6u \\ CP &= 6u \\ BM &= 3u \end{aligned}$$

$$\text{T) } CQ = ?$$

$$AC = ? \text{ esp. } 8u ; 10,24u$$

42.



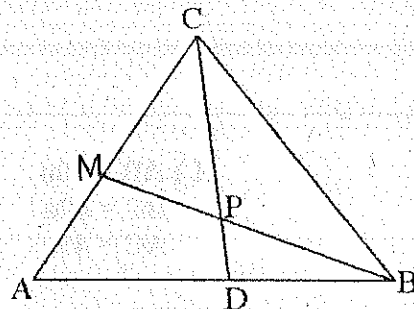
$$\begin{aligned} \text{H) } \overline{CD} &\text{ bisectriz del } \angle ACB \\ \overline{AM} &\text{ mediana} \\ AD &= 27u \\ DB &= 30u \\ DP &= 23u \end{aligned}$$

$$\text{T) } AC = ?$$

$$PM = ?$$

$$\text{Resp. } 73,06 ; 20,51u$$

43.



$$\text{H) } \overline{BM} \text{ mediana del } \triangle ABC$$

$$\overline{CD} \text{ bisectriz del } \angle ACB$$

$$AB = 7u$$

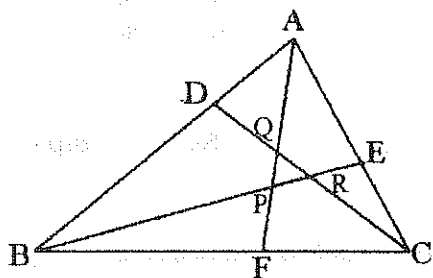
$$DB = 3u$$

$$PD = 1,8u$$

$$\text{T) } PM = ?$$

$$AC = ? \quad \text{Resp. } 2,05u ; 8u$$

44.

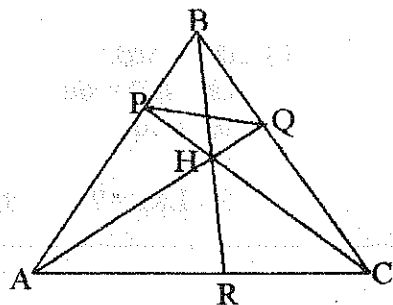


H) $AD = 2u$
 $BD = 6u$
 $AE = 3u$
 $EC = 2u$
 $CF = 3u$
 $BF = 5u$

T) $RQ = ?$; $PR = ?$; $PQ = ?$

Resp. $1.12u$; $1.17u$; $1.12u$

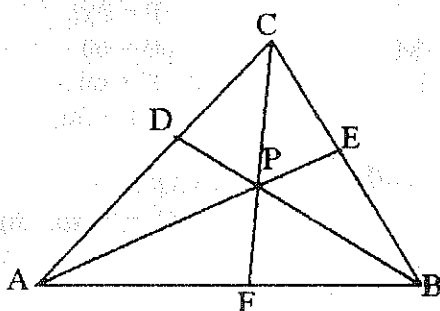
45.



H) H ortocentro del $\triangle ABC$
 $PB = 2.9u$
 $BQ = 3.65u$
 $AR = 5.5u$
 $RC = 2.5u$

T) $PQ = ?$ Resp. $3.47u$

46.

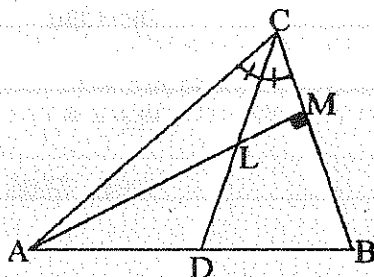


H) $CE = 8u$
 $CB = 12u$
 $CD = 7u$
 $AD = 9u$
 $AB = 16u$

T) $AF = ?$, $PD = ?$

Resp. $11.52u$; $6.03u$

47.

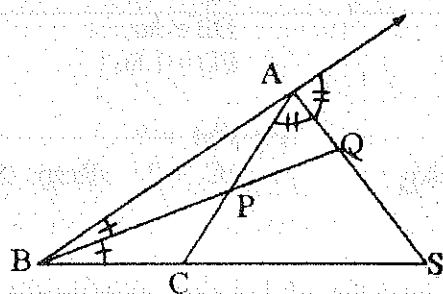


H) $AD = 4u$
 $DB = 3u$
 $MB = 1.75u$

T) $LM = ?$; $LD = ?$

Resp. $2.32u$; $1.12u$

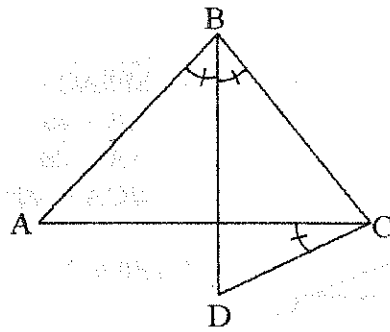
48.



H) $AB = 70u$
 $BC = 40u$
 $AC = 45u$

T) $PQ = ?$ Resp. $33.45u$

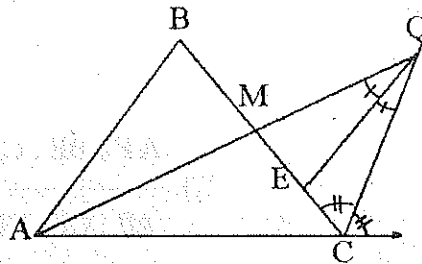
49.



$$\begin{aligned} \text{H) } AB + BC &= 16u \\ BD &= AC = 8u \end{aligned}$$

$$\text{T) } DC = ? \quad \text{Resp. } 4u$$

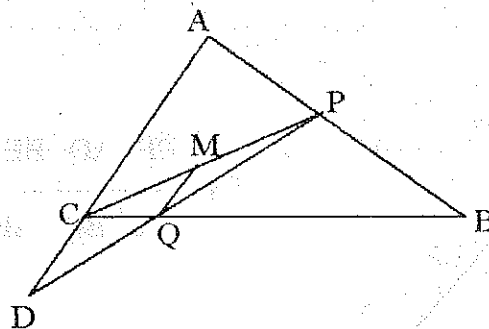
50.



$$\begin{aligned} \text{H) } BM &= MC \\ AB &= 24u \\ BM &= 14u \\ AC &= 31u \end{aligned}$$

$$\text{T) } EQ = ? \quad \text{Resp. } 18.91u$$

51.

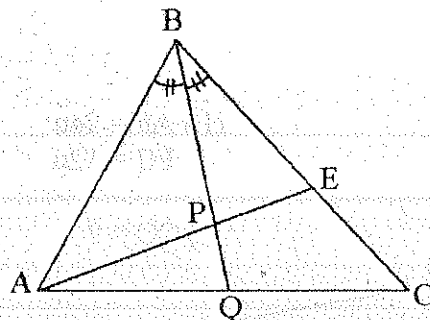


$$\begin{aligned} \text{H) } AP &= PB \\ CM &= MP \\ AB &= 10u \\ CQ &= 2.27u \\ A &= 60^\circ \\ B &= 40^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{T) } MQ &= ? \\ DQ &= ? \end{aligned}$$

$$\text{Resp. } 1.65u ; 4.48u$$

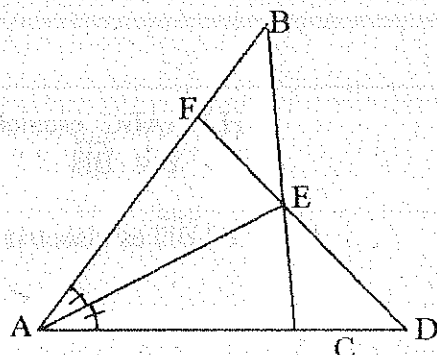
52.



$$\begin{aligned} \text{H) } AP &= PE \\ CE &= 6u \\ AQ &= 4u \\ AB &= 12u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{T) } PQ &= ? \\ PE &= ? \quad \text{Resp. } 2.31u ; 3.26u \end{aligned}$$

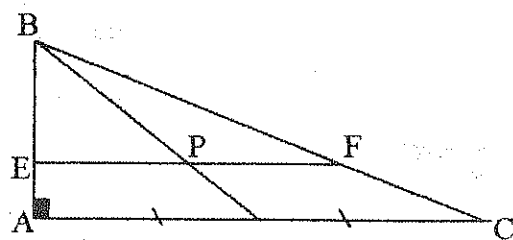
53.



$$\begin{aligned} \text{H) } AB &= BC \\ AF &= AD \\ AC &= 10u \\ CD &= 3u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{T) } BE &= ? \\ EC &= ? \quad \text{Resp. } 12.0u ; 6.57u \end{aligned}$$

54.

H) $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$

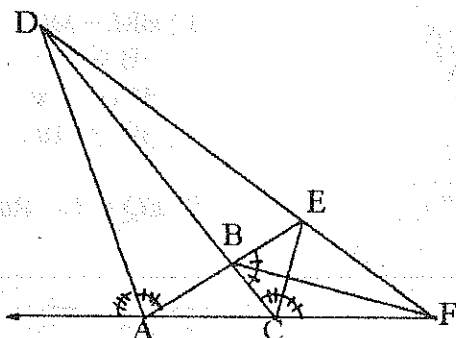
BE = 4u

EA = 2u

$\angle BCA = 40^\circ$

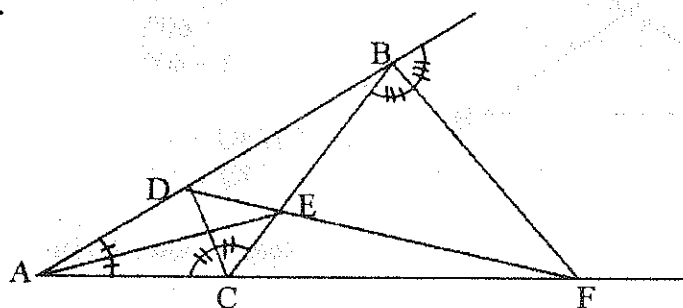
T) PF = ? Resp. 2.38u

55.



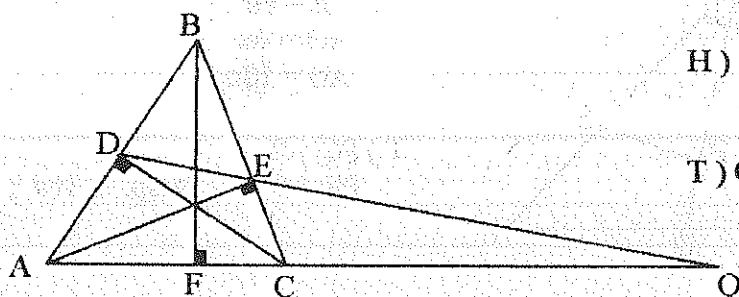
$$T) \frac{AF \cdot BE \cdot CD}{AE \cdot CF \cdot BD} = 1$$

56.



$$T) \frac{CF \cdot AD \cdot BE}{CE \cdot BD \cdot AF} = 1$$

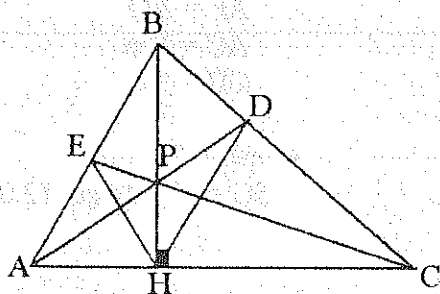
57.



$$H) \begin{aligned} AF &= 24u \\ FC &= 12u \end{aligned}$$

T) CQ = ?

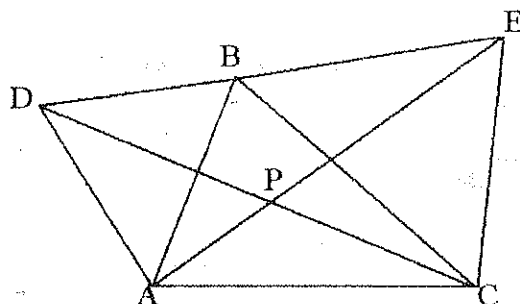
58.



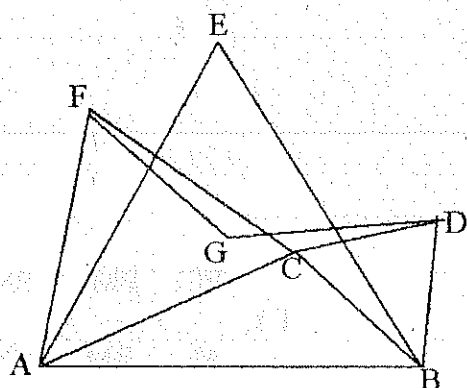
$$H) \begin{aligned} \triangle ABC &\text{ escaleno} \\ P &\in \overline{BH} \end{aligned}$$

T) \overline{BH} es bisectriz del \widehat{DHE}

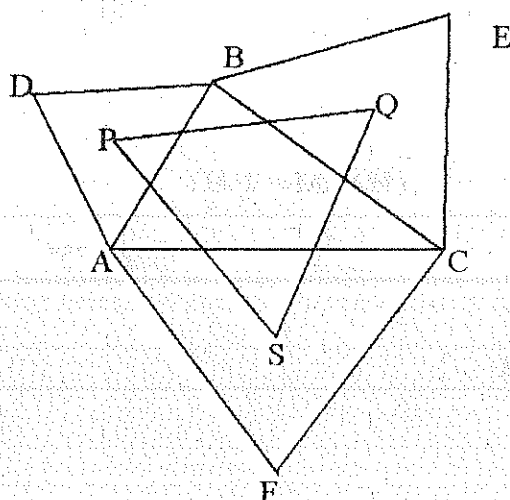
59.

H) $\triangle ADE$ y $\triangle BCE$ equiláterosT) $AP + BP + CP = AE = CD$

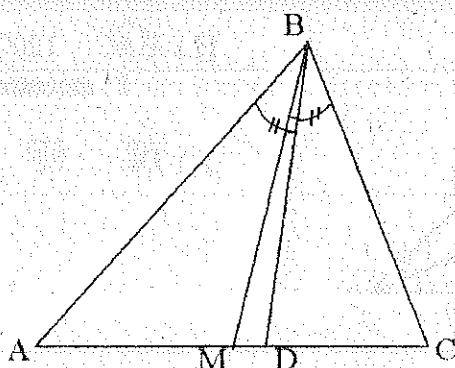
60.

H) $\triangle ACF$, $\triangle ABCD$ y $\triangle ABE$
Son equiláterosG baricentro del $\triangle ABE$ T) $FG = GD$ $\widehat{FGD} = 2\pi/3$ rad

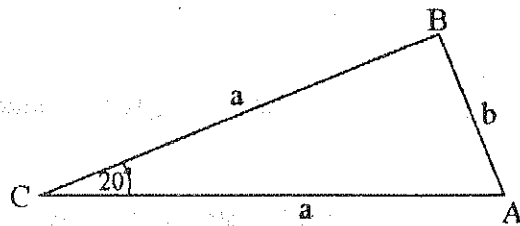
61.

H) $\triangle ABD$, $\triangle BCE$, $\triangle ACF$
Son equiláteros
P, Q, S Sus baricentrosT) $\triangle PQS$ equilátero

62.

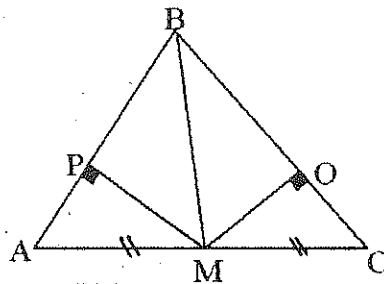
H) $\overline{AM} \cong \overline{MC}$ $\widehat{ABD} \cong \widehat{MBC}$ T) $\frac{AM \cdot AD}{MC \cdot DC} = \frac{c^2}{a^2}$

63.



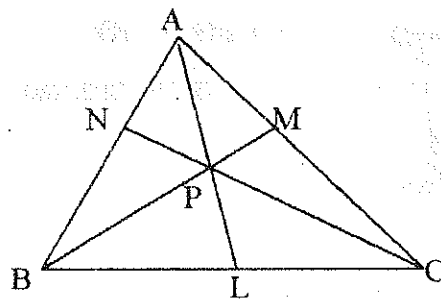
$$T) a^3 + b^3 = 3ab^2$$

64.



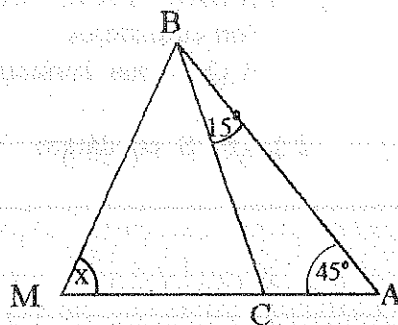
$$T) \frac{c}{a} = \frac{MQ}{MP}$$

65.



$$T) \frac{PL}{AL} + \frac{PM}{BM} + \frac{PN}{CN} = 1$$

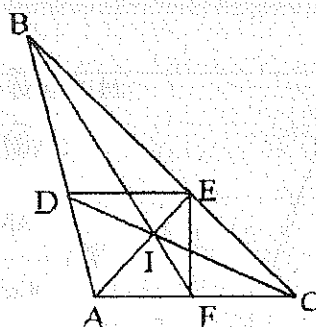
66.



$$H) CM = 2AC$$

$$T) \hat{X} = ? \quad \text{Resp. } 75^\circ$$

67.



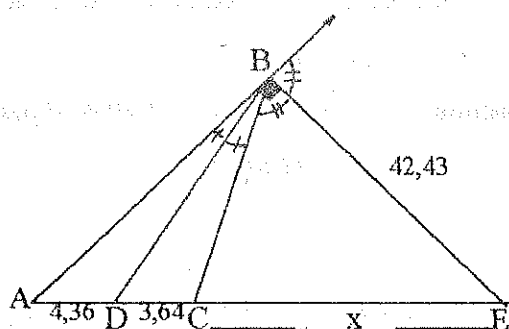
$$H) \hat{BAC} = 120^\circ$$

I. incenter of $\triangle ABC$

$$T) \overline{DE} \parallel \overline{EF}$$

4.12.2.7.1 EJERCICIOS RESUELTOS

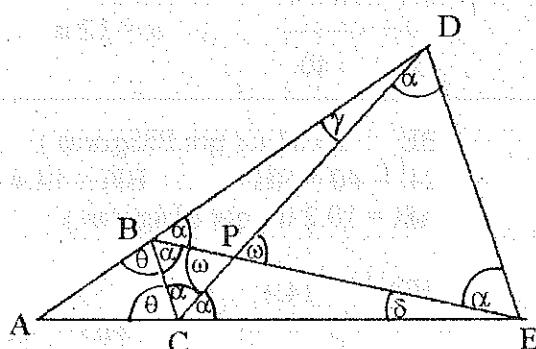
2.



$$D) \quad \frac{4.36}{3.64} = \frac{4.36 + x}{x} \Rightarrow x = 40.44 \text{ u}$$

$$BD = 44^2 - 42.43^2 = 11.8 \text{ u} ///$$

4.



D)

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}$$

$$2 \hat{\alpha} = 2 \hat{\alpha}$$

 $\triangle BCP$ Isósceles

$$\hat{\omega} = \hat{\alpha} + \hat{\gamma} = \hat{\alpha} + \hat{\delta}$$

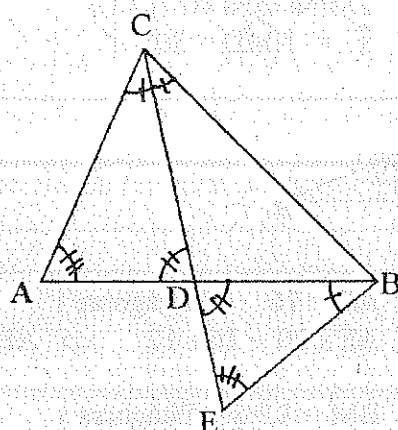
$$\hat{\gamma} = \hat{\delta}$$

 $\triangle BPD \cong \triangle CPE$ (A.L.A.)

$$PD = PE$$

 $\triangle PDE$ Isósceles: $\hat{PDE} = \hat{PED} = \hat{\alpha}$ $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ (ángulos alternos internos iguales) ///.

7.



D)

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}, \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AC + CB}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AC + CB}$$

 $\triangle ACD \approx \triangle BEC$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BE}{CE}$$

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC + BC}, \quad \frac{BE}{AC + BC} = \frac{AB * EC}{AC + BC} ///$$

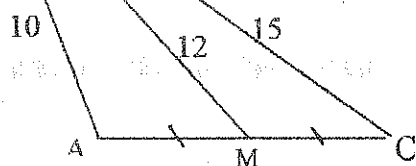
15.

D) Teorema de Stewart : $12^2 \cdot AC = 10^2 \cdot AC/2 + 15^2 \cdot AC/2 - C \cdot AC/2 \cdot AC/2$

$$AC = 8.6 \text{ u}$$

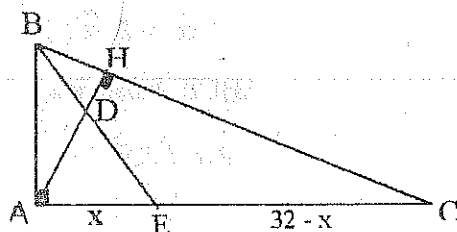
Ley Cosenos : $12^2 = 10^2 + 4.3^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4.3 \cdot \cos \hat{A}$

$$\hat{A} = 107.6^\circ$$



26.

D) $AC = 32$ (por Pitágoras)



$$\frac{x}{24} = \frac{32 - x}{40} \quad \therefore x = 12 \text{ u}$$

$$BE = 26.83 \text{ u (por Pitágoras)}$$

$$24^2 = 40 \cdot BH \quad \therefore BH = 14.4 \text{ u}$$

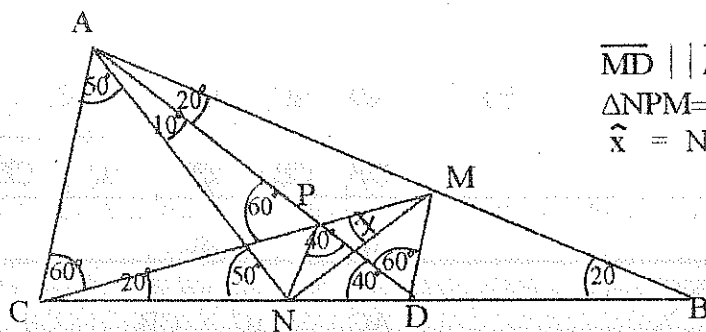
$$AH = 19.2 \text{ u (por Pitágoras)}$$

$$\frac{HD}{19.2 - HD} = \frac{14.4}{24} \quad \therefore HD = 7.2 \text{ u}$$

$$BD = 16.1 \text{ u (por Pitágoras)}$$

$$DE = 26.83 - 16.1 = 10.73 \text{ u} \quad ///$$

33.



$$\overline{MD} \parallel \overline{AC}$$

$$\triangle NPM \cong \triangle NDM \text{ (LLL)}$$

$$\hat{x} = \angle NMD = 30^\circ \quad ///$$

38.

D) $AC = 16$ (Pitágoras)

$$AE \times 20 = 16 \times 12 \quad \Rightarrow AE = 9.6 \text{ u}$$

$$BM = 8.9 \text{ u (Pitágoras)}$$

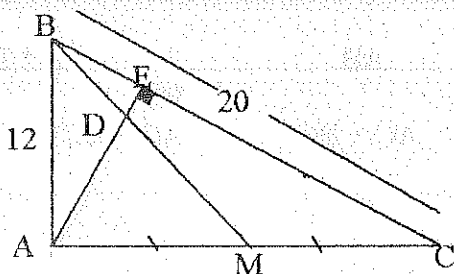
$$EC = 12.8 \text{ u (Pitágoras)}$$

$$DM \times BE \times AC = BD \times EC \times AM$$

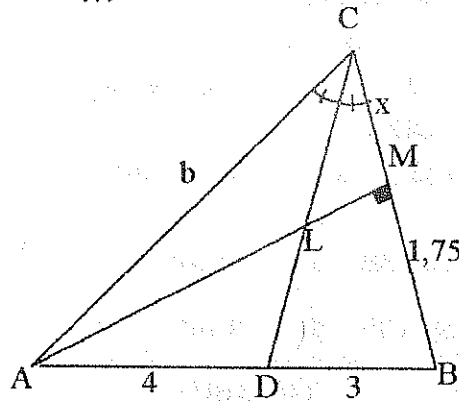
$$DM \times 7.2 \times 16 = (8.9 - DM) \times 12.8 \times 8$$

$$DM = 4.18 \text{ u}$$

$$DE = 2.54 \text{ u (Menelao en } \triangle AEC \text{)}$$



47.



$$D) \quad \frac{AM^2}{4} = \frac{7^2 + 1.75^2}{b} = \frac{b^2 - x^2}{b} \Rightarrow x = 6.42 \quad y \quad b = 10.86u$$

$$CD = 8.76 \quad (\text{Stewart})$$

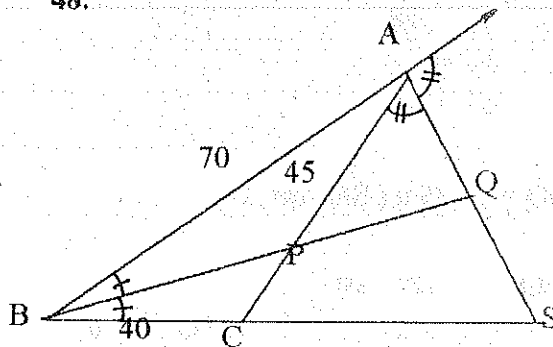
$$LM \times 4 \times 8.17 = (7.21 - LM) \times 3 \times 6.42$$

$$\Rightarrow LM = 2.67 u$$

$$CL = 7.6 u \quad (\text{Stewart en } \triangle ACM)$$

$$LD = CD - CL = 1.16 u$$

48.



$$D) \quad \frac{CS}{CS + 40} = \frac{45}{70} \quad \therefore CS = 72 u$$

$$AS = 70 u$$

$$\frac{AP}{45 - AP} = \frac{70}{40} \quad \therefore AP = 28.63 u$$

$$CP = 16.36 u$$

$$BP = \sqrt{70 \times 40 - 28.63 \times 16.37} = 48.28$$

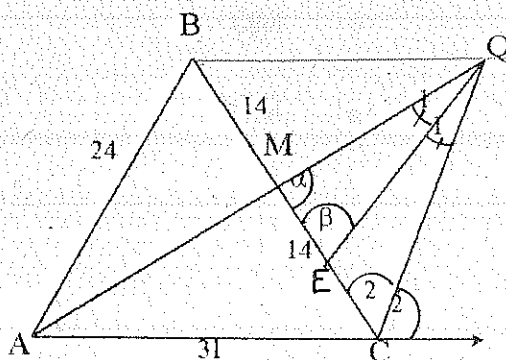
$$\frac{AQ}{70 - AQ} = \frac{70}{112} \quad \therefore AQ = 26.92 u$$

$$QS = 43.08 u$$

$$BQ = \sqrt{112 \times 70 - 26.92 \times 43.08} = 81.73 u$$

$$PQ = 81.73 - 48.28 = 33.45 u \quad ///.$$

50.



$$D) \quad 31^2 = 24^2 + 28^2 - 2 \times 24 \times 28 \times \cos \hat{B}$$

$$\hat{B} = 72.72^\circ \quad y \quad 2 \hat{1} = \hat{B}/2$$

$$\hat{1} = 18.18^\circ$$

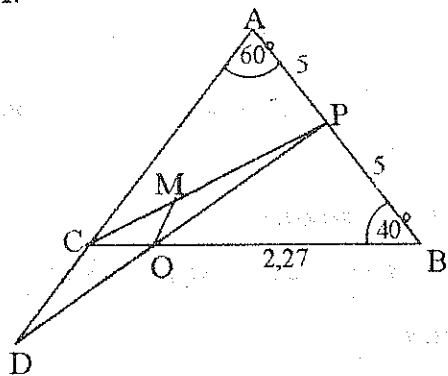
$$\hat{A} = 59.59^\circ : \hat{C} = 47.68^\circ \quad (\text{Ley Senos})$$

$$\hat{2} = 66.15^\circ ; \hat{\beta} = 84.33^\circ ; \hat{\alpha} = 77.48^\circ$$

$$QM = 21.59 u \quad (\text{Ley Seno en } \triangle MQC)$$

$$EQ = 18.91 u \quad (\text{Ley Seno en } \triangle MQE)$$

51.

D) Ley de Senos en $\triangle ABC$

$$AC = 6.52 \text{ y } QB = 6.52$$

$$QP^2 = 5^2 + 6.52^2 - 2 \times 5 \times 6.52 \times \cos 40^\circ$$

$$QP = 4.2 \text{ u.} = QD$$

$$PC^2 = 5^2 + 6.52^2 - 2 \times 5 \times 6.52 \times \cos 60^\circ$$

$$PC = 5.9 \text{ u}$$

$$\text{Ley de Sen } \triangle QPB \quad \hat{\alpha} = 86.24^\circ$$

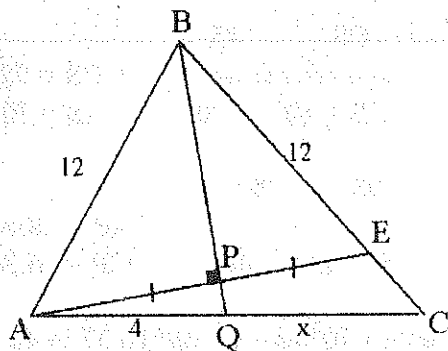
$$\text{Ley de Sen } \triangle ACP \quad \hat{\beta} = 73.14^\circ$$

$$\hat{\theta} = 20.61^\circ$$

$$MQ^2 = 2.95^2 + 2.1^2 - 2 \times 2.95 \times 2.1 \times \cos 20.61^\circ$$

$$MQ = 3.7 \text{ u} \quad ///$$

52.



D)

$$\frac{x}{4} = \frac{18}{12}$$

$$\frac{4}{12}$$

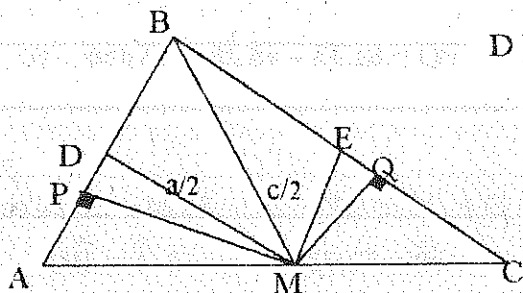
$$BQ = 13.85 \text{ u (Stewart)}$$

$$\frac{PQ}{BQ-PQ} = \frac{12}{6} = \frac{10}{4} \Rightarrow PQ = 3 \text{ u}$$

$$PB = 13.85 - 2.3 = 11.54 \text{ u}$$

$$PE = 3.29 \text{ u (Pitágoras)}$$

64.



D) D punto medio de AB

E punto medio de BC

$$\triangle PDM \approx \triangle EMQ$$

$$\frac{c}{a} = \frac{MQ}{MP}$$

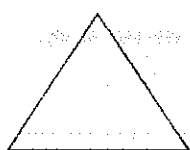
$$\frac{c}{a} = \frac{MQ}{MP}$$

4.13. ÁREA DE UN TRIÁNGULO

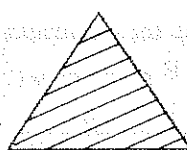
La palabra área se emplea de dos modos diferentes. Área puede significar una región, por ejemplo : un parque, un terreno, etc. o, es el número asociado a la medida de una región triangular.

4.13.1 REGIÓN TRIANGULAR

Es la unión de un triángulo y su interior.



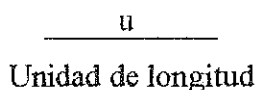
TRIÁNGULO



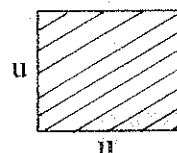
REGIÓN TRIANGULAR

4.13.2 UNIDAD DE ÁREA

Es la región determinada por un cuadrado, que tiene por lado la unidad de longitud.



Unidad de longitud



Unidad de área

4.13.3 ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

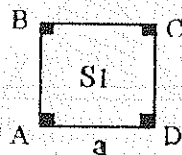
Es un número que expresa cuantas veces está contenida la unidad de área en la región triangular.

La longitud de un segmento puede medirse directamente usando una regla o una cinta métrica; la medida de un ángulo se obtiene con un graduador o transportador, pero el área de una región triangular no puede medirse, porque en la mayoría de los casos es inexacta, razón por la cual el área de una región se calcula mediante una fórmula.

Con el objeto de acortar su nombre, se usará área del triángulo como equivalente al área de una región triangular.

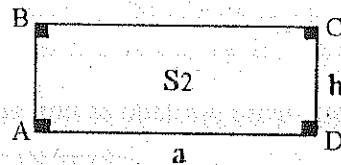
4.13.3.1 POSTULADOS

1. Si dos triángulos son congruentes, tienen áreas iguales.
2. Si dos triángulos tienen áreas iguales, son equivalentes.
3. El área de un triángulo es la suma de las áreas de los triángulos en que se pueda descomponer.
4. El área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado.



$$A_{ABCD} = A_1 = a^2$$

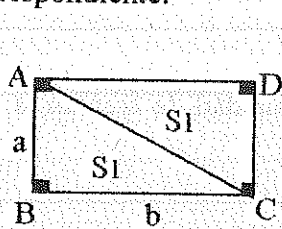
5. El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.



$$A_{ABCD} = A_2 = a \times h$$

4.13.3.2 TEOREMAS

1. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura correspondiente.

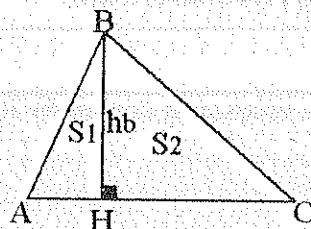


D) ABCD rectángulo

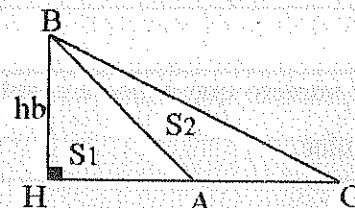
$$A_{\square ABCD} = 2 A_1$$

$$b \times a = 2 A_1$$

$$A_1 = A_{\triangle ABC} = \frac{b \times a}{2}$$



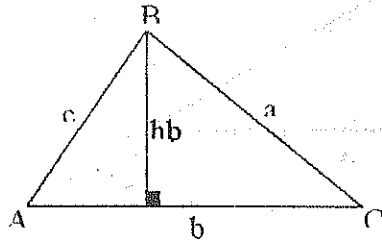
$$D) A_{\triangle ABC} = A_1 + A_2$$



$$A_{\triangle ABC} = \frac{HC \times hb}{2} + \frac{HA \times hb}{2}$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{b \times hb}{2}$$

2. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo formado por éstos lados.



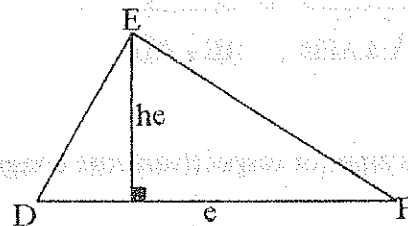
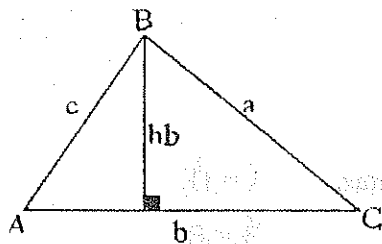
$$A_{\Delta ABC} = \frac{b \times h_b}{2}$$

$$\text{Sen } A = \frac{h_b}{c}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{b \times c \times \text{Sen } \hat{A}}{2}$$

4.13.4 RELACIONES ENTRE ÁREAS DE TRIÁNGULOS

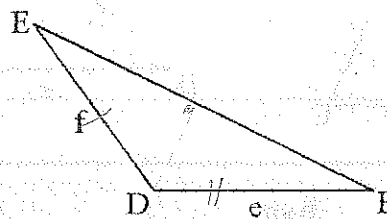
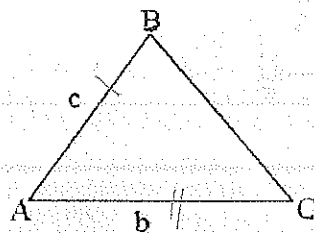
1. Si tienen un lado respectivamente congruente. $b = e$



$$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta DEF}} = \frac{h_b}{h_e}$$

2. Si tienen dos lados respectivamente congruentes. $b = e$

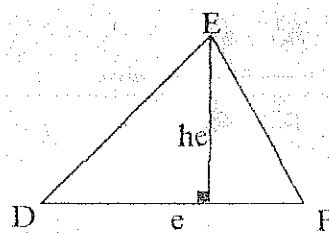
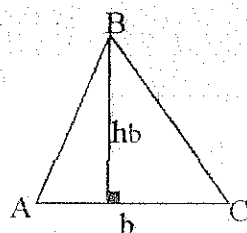
$$c = f$$



$$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta DEF}} = \frac{\text{Sen } \hat{A}}{\text{Sen } \hat{D}}$$

3. Si tienen tres lados respectivamente congruentes, son equivalentes. $A_1 = A_2$

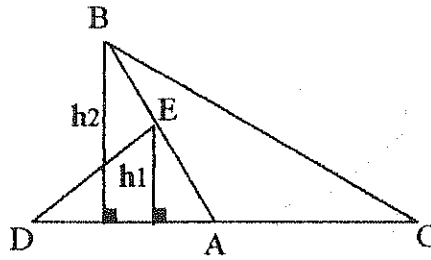
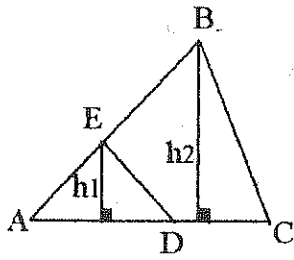
4. Si tienen una altura respectivamente congruente. $h_b = h_e$



$$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta DEF}} = \frac{b}{e}$$

5. Si tienen ángulos congruentes o suplementarios. $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}$

$$\widehat{BAC} + \widehat{EAD} = 180^\circ$$



$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle ADE}} = \frac{AC \times h_2}{AD \times h_1}$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{AB}{AE}$$

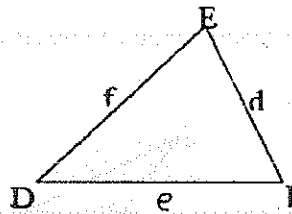
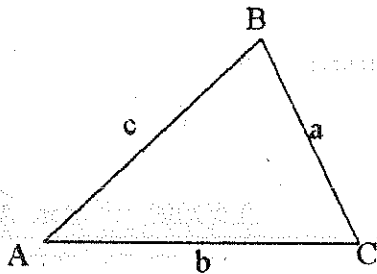
$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle AED}} = \frac{AC \times AB}{AE \times AD}$$

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle AED}} = \frac{AC \times AB}{AE \times AD}$$

6. Si tienen dos ángulos respectivamente congruentes.

$$\widehat{A} = \widehat{D}$$

$$\widehat{B} = \widehat{E}$$



$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle DEF}} = \frac{b \times c}{f \times e}$$

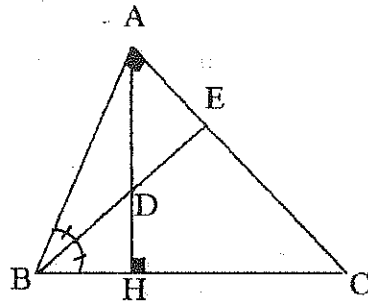
$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle DEF}} = \frac{b \times c}{f \times e}$$

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle DEF}} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2}{d^2} = \dots$$

4.13.5 EJERCICIOS

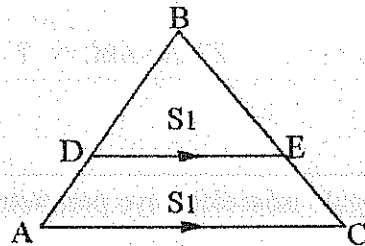
1.



$$\begin{aligned} \text{H) } AB &= 15u \\ AD &= 3.75u \end{aligned}$$

$$\text{T) } A_{\triangle BDH} = ? \quad \text{Resp. } 17.03u^2$$

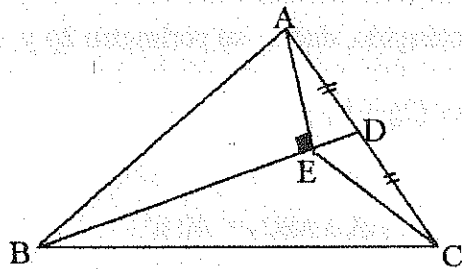
2.



$$\text{H) } DE = 4u$$

$$\text{T) } AC = ? \quad \text{Resp. } 4\sqrt{2}u^2$$

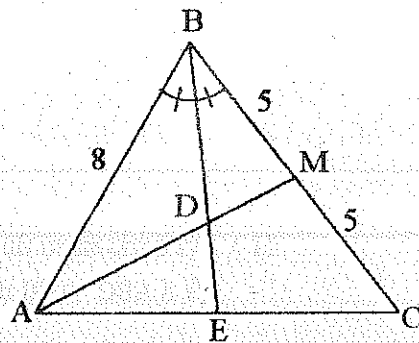
3.



$$\begin{aligned} \text{H) } AC &= 10u \\ AE &= 4u \end{aligned}$$

$$\text{T) } A_{\triangle AEC} = ? \quad \text{Resp. } 12u^2$$

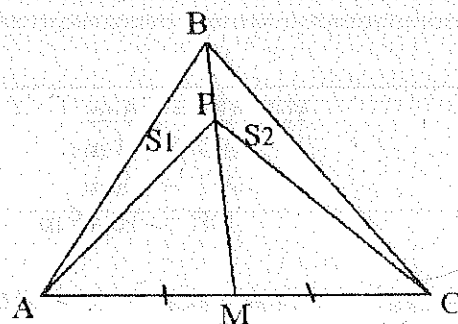
4.



$$\text{H) } A_{\triangle ABC} = 20u^2$$

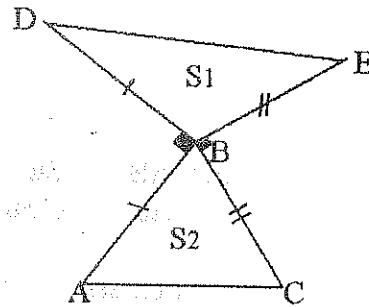
$$\text{T) } A_{\triangle ABD} = ? \quad \text{Resp. } 6.14u^2$$

5.



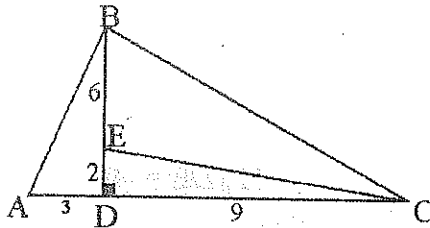
$$\text{T) } S_1 = S_2$$

6.



$$T) S_1 = S_2$$

7.



$$H) A_{\triangle BEC} = 27 u^2$$

$$T) A_{\triangle ABC} = ? \quad \text{Resp. } 48 u^2$$

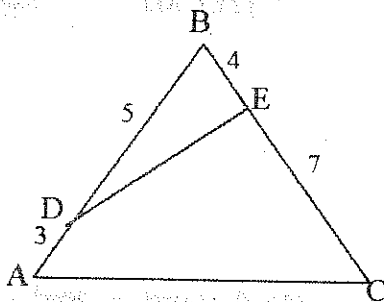
8. Calcular el área de un triángulo rectángulo isósceles cuyo perímetro es de 25m.

$$\text{Resp. } 26.87 m^2$$

9. Hallar la superficie de un triángulo rectángulo, dados su perímetro $2p$ y su altura h .

$$\text{Resp. } p^2 \times h / (2p + h)$$

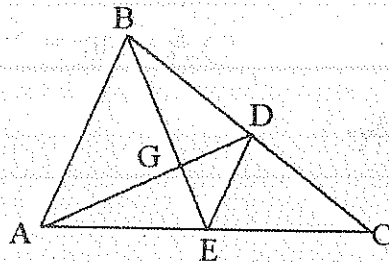
10.



$$H) A_{\triangle ABC} = 40 u^2$$

$$T) A_{\triangle BDE} = ? \quad \text{Resp. } 9.09 u^2$$

11.

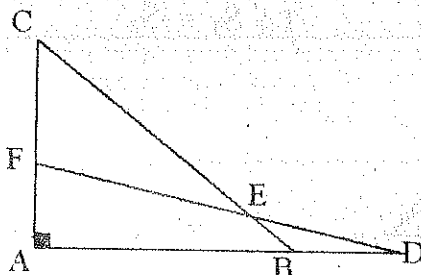


$$H) G \text{ baricentro del } \triangle ABC$$

$$A_{\triangle ABC} = 40 u^2$$

$$T) A_{\triangle BED} = ? \quad \text{Resp. } 10 u^2$$

12.



$$H) AB = 6 m$$

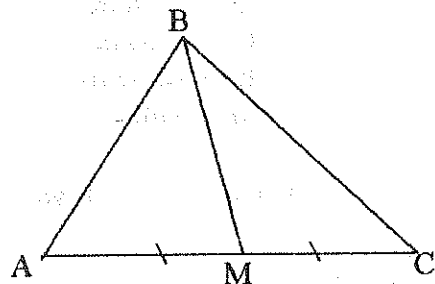
$$BD = 4 m$$

$$AC = 8 m$$

$$DF = 10.45 m$$

$$T) A_{\triangle FCE} = ? \quad \text{Resp. } 12 m^2$$

13.



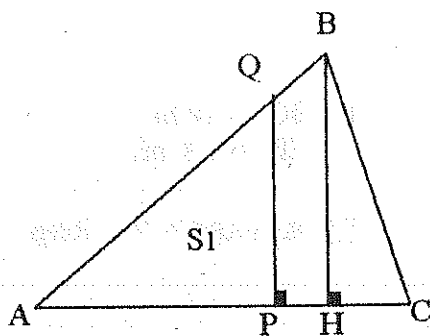
H) $AC = 27 \text{ m}$

$BC = 29 \text{ m}$

$CM = 26 \text{ m}$

T) $A_{\triangle ABC} = ?$ Resp. 270 m^2

14.



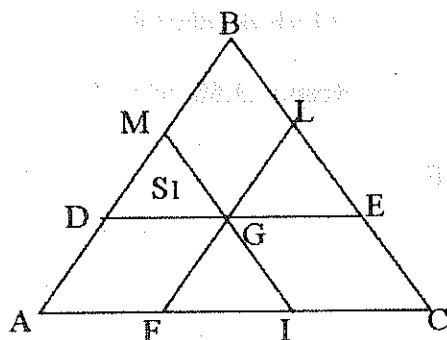
H) $AH = 36 \text{ m}$

$HC = 14 \text{ m}$

$A_1 = A_{\triangle ABC}/2$

T) $AP = ?$ Resp. 30 m

15.



H) G baricentro del $\triangle ABC$

$\overline{FL} \parallel \overline{AB}$

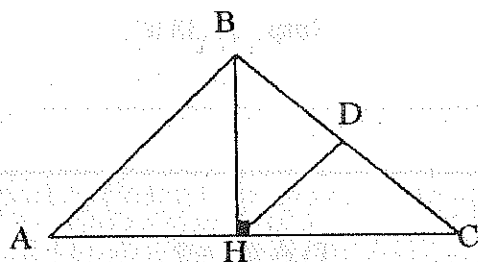
$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

$\overline{MI} \parallel \overline{CB}$

$S_{\triangle ABC} = 81 \text{ m}^2$

T) $A_1 = ?$ Resp. 9 m^2

16.



H) $AB = BC$

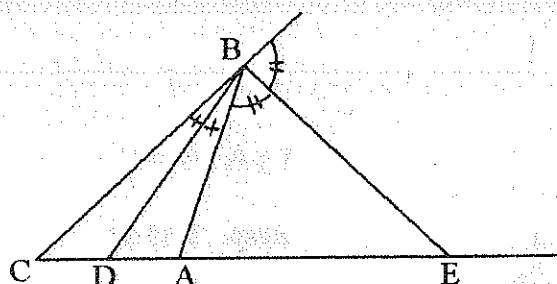
$BD = DC$

$AC = 12 \text{ m}$

$BH = HD$

T) $A_{\triangle ABC} = ?$ Resp. $12\sqrt{3} \text{ m}^2$

17.



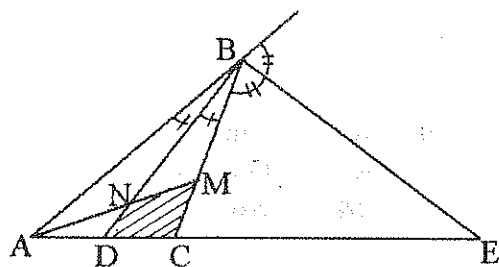
H) $a = 14 \text{ m}$

$b = 9 \text{ m}$

$c = 10 \text{ m}$

T) $A_{\triangle DCE} = ?$ Resp. 98.26 m^2

18.

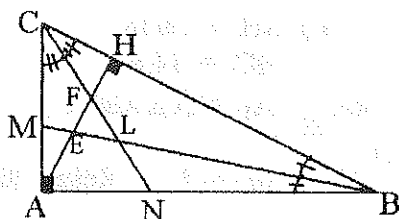


- H) $AD = 4.36 \text{ m}$
 $DC = 3.64 \text{ m}$
 $BE = 42.43 \text{ m}$
 $BM = MC$

T) $A_{\text{shaded}} = ?$ Resp. 16.48 m^2

19. La superficie de un triángulo es : $S = a^2 - (b - c)^2$. Hallar el A . Resp. 28°

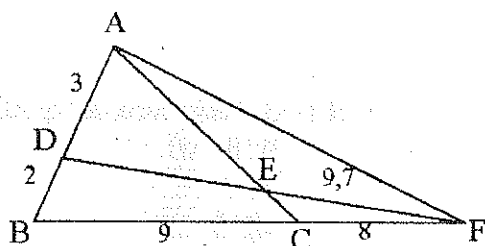
20.



- H) $BC = 10 \text{ m}$
 $EF = 1/3 \text{ m}$

T) $A_{\triangle ABC} = ?$ Resp. 24 m^2

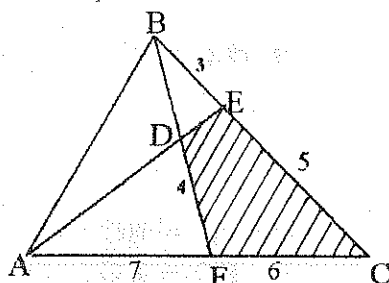
21.



T) $A_{\triangle AEF} = ?$

Resp. 13.80 u^2

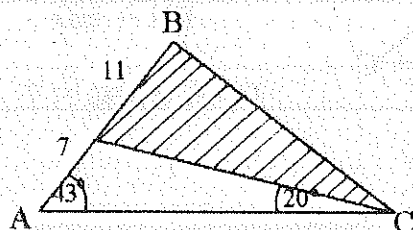
22.



T) $A_{\text{shaded}} = ?$

Resp. 18.38 u^2

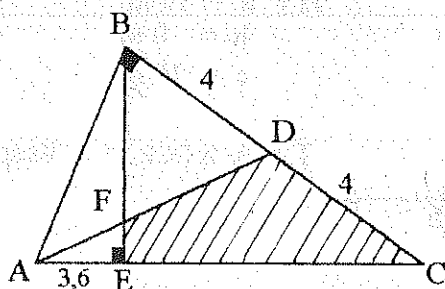
23.



T) $A_{\text{shaded}} = ?$

Resp. 68.36 u^2

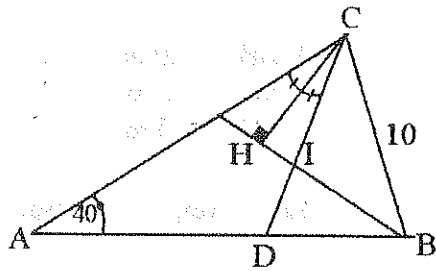
24.



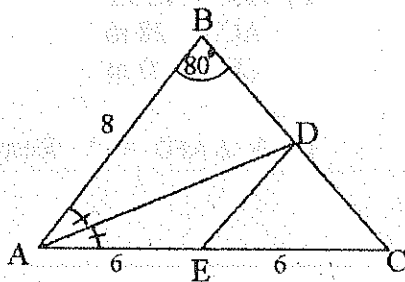
T) $A_{\text{shaded}} = ?$

Resp. 5.65 u^2

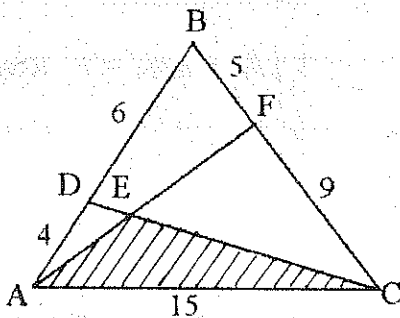
31.

H) · I incentro del $\triangle ABC$ T) $A_{\triangle BIC} = ?$ Resp. $17.10 u^2$

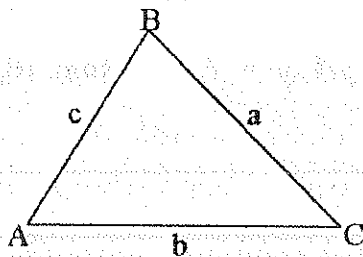
32.

T) $A_{\triangle ADE} = ?$ Resp. $12.32 u^2$

33.

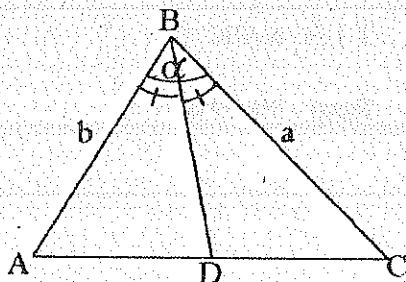
T) $A_{///} = ?$ Resp. $22.14 u^2$

34.



$$T) A_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \operatorname{Sen} \hat{B} \times \operatorname{Sen} \hat{C}}{2 \operatorname{Sen} \hat{A}}$$

35.

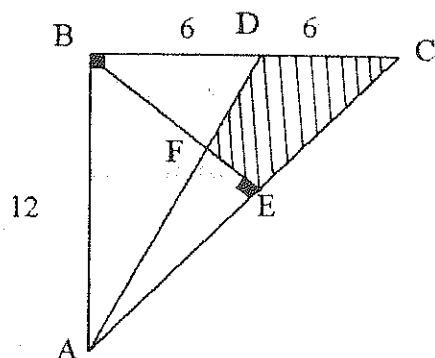


$$T) BD = \frac{2 a b \operatorname{Cos} \hat{\alpha}/2}{(a+b)^2}$$

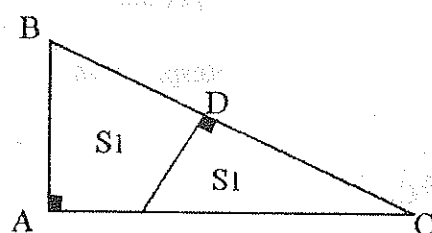
36. La mediana de un triángulo es igual a m y divide al ángulo recto en razón 1: 2. Hallar el área del triángulo.

Resp. $m^2 \sqrt{3}/2$

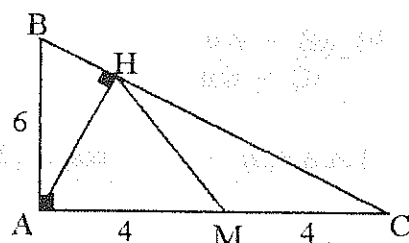
37.

T) $A_{\text{shaded}} = ?$ Resp. $27 u^2$

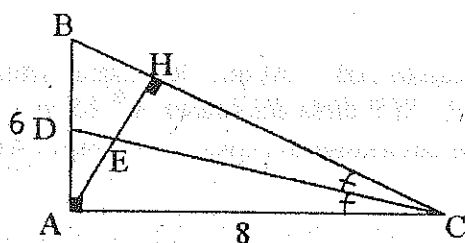
38.

H) $AB = 6u$ $AC = 8u$ T) $DC = ?$ Resp

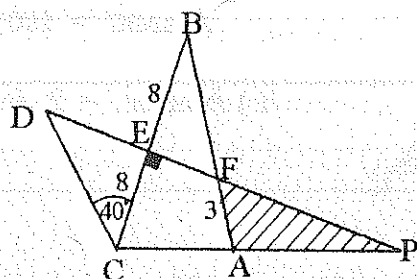
39.

T) $A_{\triangle HMC} = ?$ Resp. $7.68 u^2$

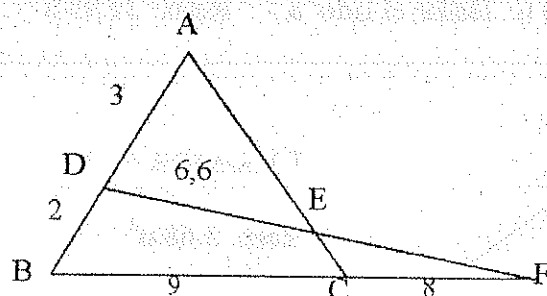
40.

T) $A_{\triangle ADE} = ?$ Resp. $3.6 u^2$

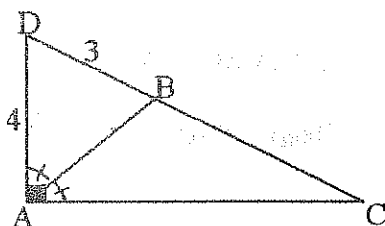
41.

T) $A_{\text{shaded}} = ?$ Resp. 6.22

42.

T) $A_{\triangle DAE} = ?$ Resp. $9.45 u^2$

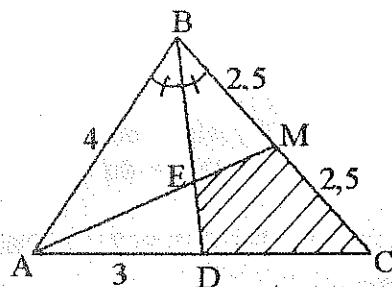
43.



$$T) A_{\triangle ABC} = ?$$

$$\text{Resp. } 11.33 u^2$$

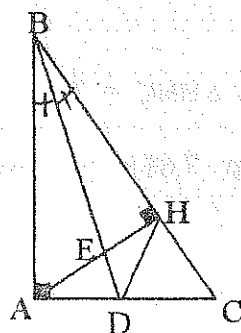
44.



$$T) A_{\text{shaded}} = ?$$

$$\text{Resp. } 4.48$$

45.



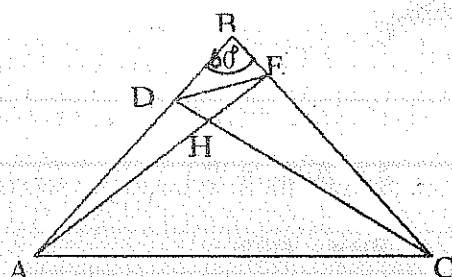
$$H) AB = 8 u$$

$$AC = 6 u$$

$$T) A_{\triangle EDH} = ? \quad \text{Resp. } 1.73$$

46. En un triángulo rectángulo ABC de cateto $AB = 50 \text{ m}$. Se traza la altura \overline{AH} y la bisectriz \overline{CD} , las cuales se cortan en P. Si P dista del cateto \overline{AC} 15 m y D dista de la hipotenusa \overline{BC} 20 m. Hallar el área del triángulo ABC. Resp. 544.8 m^2

47.



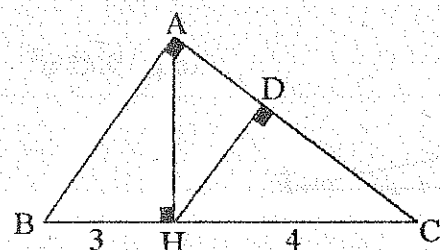
$$H) H \text{ ortocentro del } \triangle ABC$$

$$A_{\triangle ABC} = 100 u^2$$

$$T) A_{\triangle DBE} = ? \quad \text{Resp. } 25 u^2$$

48. Los lados de un triángulo ABC son: $b = 36 u$, $c = 25 u$ y es equivalente a un triángulo equilátero de lado 30 u. Hallar el lado a. Resp. $31.95 u$

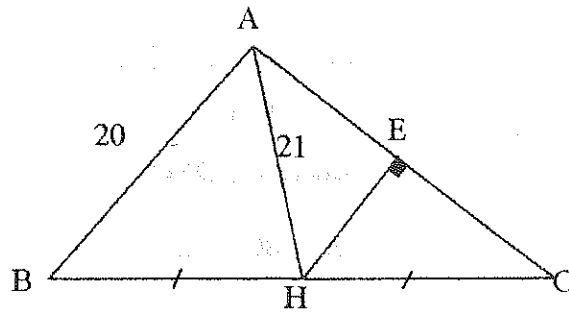
49.



$$T) A_{\triangle ADH} = ?$$

$$\text{Resp. } 3.68 u^2$$

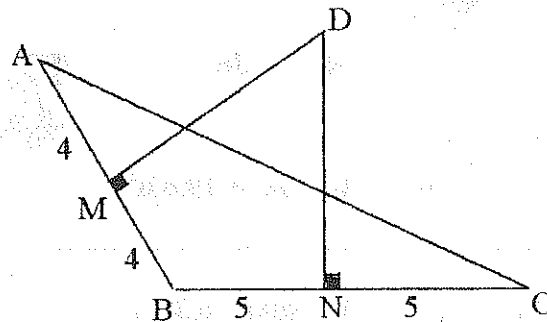
50.



$$H) BC = 34u$$

$$T) A_{\triangle AEM} = ? \quad \text{Resp. } 91.4 u^2$$

51.



$$H) AC = 16u$$

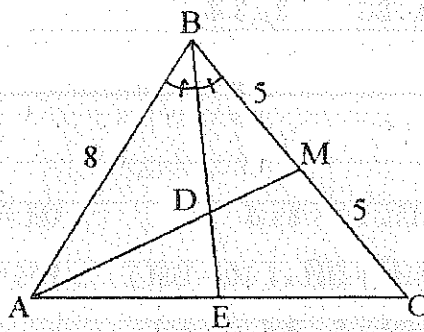
$$T) A_{\triangle DFG} = ? \quad \text{Resp. } 16.5 u^2$$

52. Hallar el área de un triángulo rectángulo, sabiendo que las proyecciones de los catetos sobre la bisectriz del ángulo recto miden 58 u y 62 u respectivamente.

$$\text{Resp. } 3595.76u^2$$

4.13.5.1 EJERCICIOS RESUELTOS

4.



$$D) 20 u^2 = (80 \times \text{Sen } \hat{B})/2 \quad \therefore \hat{B} = 30^\circ$$

$$AM^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \text{Cos } 30^\circ$$

$$\therefore AM = 4.44 u$$

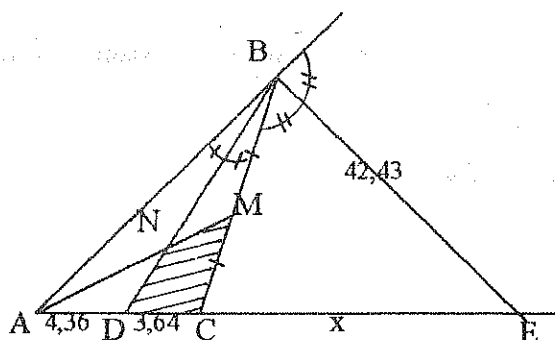
$$\frac{AD}{4.44 - AD} = \frac{8}{5} \quad \therefore AD = 2.73 u$$

$$DM = 1.71u$$

$$\frac{A_{\triangle ABM}}{A_{\triangle ABM}} = \frac{2.73}{4.44} \Rightarrow A_{\triangle ABM} = 6.14 u^2$$

$$CE = 40.44 \text{ u} \quad y \quad BD = 11.18 \text{ u}$$

Menelao Δ DNC



$$\frac{BN}{ND} \times \frac{MC}{BM} \times \frac{AD}{AC} = 1$$

$$\therefore \frac{BN}{ND} = \frac{8}{4.36} \Rightarrow \frac{BN}{BD} = \frac{8}{12.36}$$

A Δ DBC 3.64

A Δ DBE 44.08

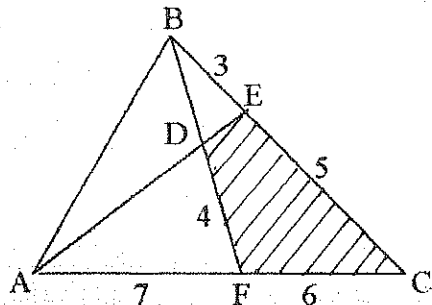
| A Δ NBM | BN x BM |
|---------|---------|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |
| 5 | 5 |
| 6 | 6 |
| 7 | 7 |
| 8 | 8 |
| 9 | 9 |
| 10 | 10 |
| 11 | 11 |
| 12 | 12 |
| 13 | 13 |
| 14 | 14 |
| 15 | 15 |
| 16 | 16 |
| 17 | 17 |
| 18 | 18 |
| 19 | 19 |
| 20 | 20 |
| 21 | 21 |
| 22 | 22 |
| 23 | 23 |
| 24 | 24 |
| 25 | 25 |
| 26 | 26 |
| 27 | 27 |
| 28 | 28 |
| 29 | 29 |
| 30 | 30 |
| 31 | 31 |
| 32 | 32 |
| 33 | 33 |
| 34 | 34 |
| 35 | 35 |
| 36 | 36 |
| 37 | 37 |
| 38 | 38 |
| 39 | 39 |
| 40 | 40 |
| 41 | 41 |
| 42 | 42 |
| 43 | 43 |
| 44 | 44 |
| 45 | 45 |
| 46 | 46 |
| 47 | 47 |
| 48 | 48 |
| 49 | 49 |
| 50 | 50 |
| 51 | 51 |
| 52 | 52 |
| 53 | 53 |
| 54 | 54 |
| 55 | 55 |
| 56 | 56 |
| 57 | 57 |
| 58 | 58 |
| 59 | 59 |
| 60 | 60 |
| 61 | 61 |
| 62 | 62 |
| 63 | 63 |
| 64 | 64 |
| 65 | 65 |
| 66 | 66 |
| 67 | 67 |
| 68 | 68 |
| 69 | 69 |
| 70 | 70 |
| 71 | 71 |
| 72 | 72 |
| 73 | 73 |
| 74 | 74 |
| 75 | 75 |
| 76 | 76 |
| 77 | 77 |
| 78 | 78 |
| 79 | 79 |
| 80 | 80 |
| 81 | 81 |
| 82 | 82 |
| 83 | 83 |
| 84 | 84 |
| 85 | 85 |
| 86 | 86 |
| 87 | 87 |
| 88 | 88 |
| 89 | 89 |
| 90 | 90 |
| 91 | 91 |
| 92 | 92 |
| 93 | 93 |
| 94 | 94 |
| 95 | 95 |
| 96 | 96 |
| 97 | 97 |
| 98 | 98 |
| 99 | 99 |
| 100 | 100 |

$$A \Delta \text{NBM} = 6.34 \text{ u}^2$$

$$A \Delta DBC \quad BD \times BC$$

$$A_{\text{||||}} = 19.6 - 6.34 = 13.01 \text{u}^2$$

22.

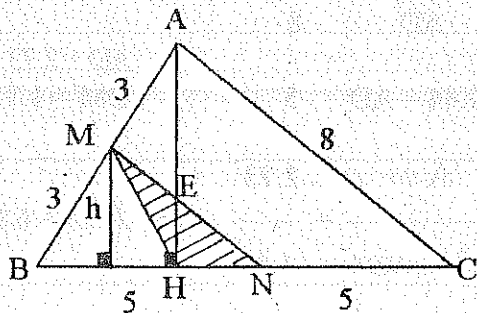


$$D) \frac{BD \times 5 \times 7}{4 \times 3 \times 13} = 1 \quad \therefore BD = 4.45 \text{ u}$$

$$A_{\Delta FBC} = 22.94 \text{ u}^2$$

$$\frac{A_{\Delta DBE}}{A_{\Delta FBC}} = \frac{3 \times 4.45}{8 \times 8.4} \therefore \Delta DBE = 4.52 \text{ u}^2$$

27.



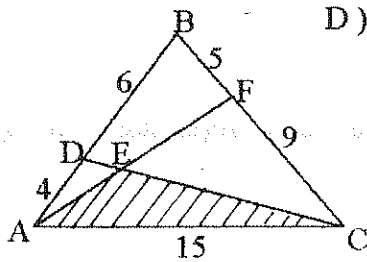
D) $AH \times 10 = 8 \times 6 \quad \therefore AH = 4.8 \text{ u}$

$$AH^2 = BH \times (10 - BH) \quad \therefore BH = 3.6 \text{ u}$$

$$\text{HN} = 5 - 3.6 = 1.4 \text{ u}$$

$$\Rightarrow A_{III} = (HN/2) \times (AH/2) = 1.68 \text{ u}^2$$

33.



$$D) \quad 15^2 = 14^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 14 \cos B \quad \therefore B = 75.31^\circ$$

$$DC^2 = 14^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cos 75.31^\circ \quad \therefore DC = 13.76$$

$$x \cdot 10 \cdot 9 = (13.76 - x) \cdot 4 \cdot 5 \quad \therefore x = 2.5 \text{ u}$$

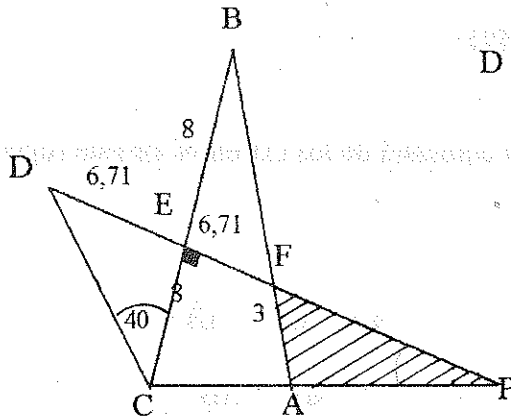
$$EC = 11.26 \text{ u}$$

$$A_{ABC} = 70 \text{ u}^2$$

$$A_{\triangle ADC} = \left(\frac{4}{10}\right) \cdot 70 = 28 \text{ u}^2$$

$$\Rightarrow A_{\text{shaded}} = \left(\frac{11.26}{13.76}\right) \cdot 28 = 22.14 \text{ u}^2$$

41.



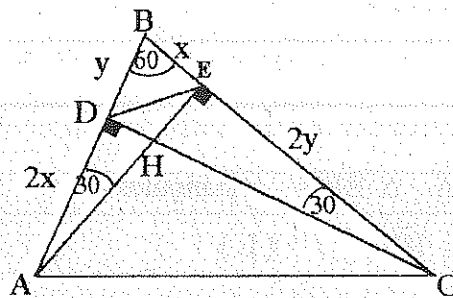
$$D) \quad \cos 40^\circ = 8/CD \quad \therefore CD = 10.44 \text{ u}$$

$$\sin 40^\circ = DE / 10.44 \quad \therefore DE = 6.71 \text{ u}$$

$$\frac{PF}{PF + 13.42} = \frac{3}{10.44} \quad \therefore PF = 5.41 \text{ u}$$

$$\Rightarrow A_{\text{shaded}} = (3 \times 5.41 \times \sin 50^\circ) / 2 = 6.218 \text{ u}^2$$

47.



$$\frac{A_{\triangle DBE}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{x \cdot y}{2x \cdot 2y}$$

$$\therefore A_{\triangle DBE} = 25 \text{ u}^2$$

4.14. LUGARES GEOMETRICOS BÁSICOS

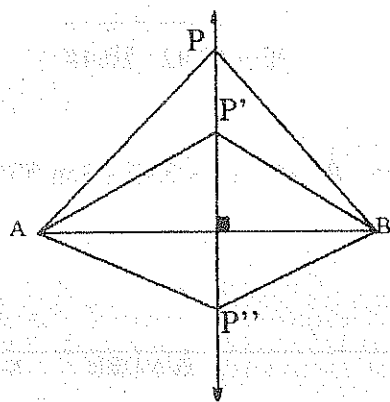
4.14.1 DEFINICIÓN

Se llama lugar geométrico de los puntos que gozan de cierta propiedad, a la figura geométrica tal que:

1. Todos los puntos gozan de esa propiedad:
2. Todos los puntos que gozan de esa propiedad pertenecen a la figura.
3. Todos los puntos que no sean elementos del lugar geométrico no deben cumplir las condiciones dadas

4.14.2. MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de este segmento.



$$H) \overline{LM} \perp \overline{AB}$$

$$\overline{AH} \cong \overline{HB}$$

$$T) \overline{AP} \cong \overline{BP}$$

$$D) \triangle APH \cong \triangle BPH \text{ rectángulos}$$

$$\overline{AH} \cong \overline{HB} \quad (L)$$

$$\overline{HP} \cong \overline{HP} \quad (L)$$

$$\therefore \triangle APH \cong \triangle BPH \text{ (L.A.L.)}$$

$$\Rightarrow \overline{AP} \cong \overline{BP}$$

$$\text{idem. } \overline{AP'} \cong \overline{BP'}$$

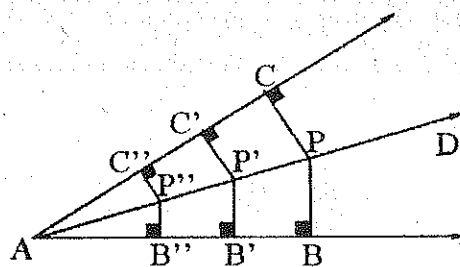
$$\overline{AP''} \cong \overline{BP''}$$

COROLARIOS.

1. Todo punto que equidista de los extremos de un segmento, pertenece a la mediatriz de dicho segmento.
2. Si una recta tiene dos puntos equidistantes de los extremos de un segmento, será mediatriz del segmento.
3. Si dos rectas se cortan de manera que dos puntos de la una equidistan de dos puntos de la otra, dichas rectas son perpendiculares entre si.
4. La mediatriz de un segmento, es el lugar geométrico de los extremos de dicho segmento.

4.14.3 BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.



H) \overline{AD} bisectriz del \hat{A}

T) $\overline{PB} \cong \overline{PC}$

D) $\triangle APB \wedge \triangle APC$ rectángulos

$$\overline{AP} \cong \overline{AP} \quad (L)$$

$$\hat{BAP} \cong \hat{CAP} \quad (A)$$

$$\therefore \triangle APB \cong \triangle APC \quad (A. L. A.)$$

$$\Rightarrow \overline{PB} \cong \overline{PC}$$

$$\text{idem } \overline{P'B'} \cong \overline{P'C'}$$

$$\overline{P''B''} \cong \overline{P''C''}$$

COROLARIOS

1. Todo punto equidistante de los lados de un ángulo, pertenece a la bisectriz de dicho ángulo.
2. La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos internos al ángulo y equidistantes de los lados del ángulo.

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

10-11-1964

UNIDAD 5

5. EL CIRCULO

5.1. DEFINICIONES BASICAS

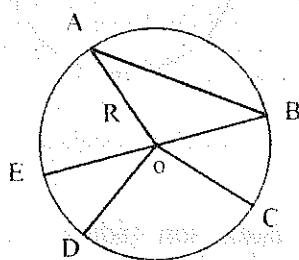
5.1.1. CIRCUNFERENCIA

Es el lugar geométrico de los puntos de un plano que se encuentran a la misma distancia R del centro O ; la longitud constante R se llama radio.

5.1.2. CIRCULO

Es el conjunto de todos los puntos de la circunferencia y de los puntos internos a la misma.

Una circunferencia y un círculo se representan por su centro y su radio.



$\odot (O, R)$

• O centro

$OA = OB = OC = OD = \dots = R$

5.2. LINEAS Y PUNTOS FUNDAMENTALES

5.2.1. CUERDA

Es el segmento cuyos extremos son puntos de la circunferencia. Cuerda \overline{AB}

5.2.2. DIAMETRO

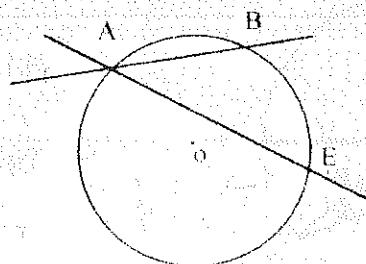
Es la cuerda que contiene el centro del círculo, es la mayor de las cuerdas e igual al doble del radio.

Dímetro $BE = 2R$

5.2.3. SECANTE

Es una recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

Secantes \overline{AB} y \overline{AE}

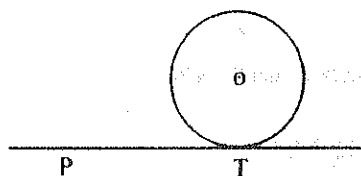


5.2.4. TANGENTE

Es una recta que interseca a la circunferencia en un solo punto, llamado punto de tangencia o punto de contacto.

Tangente \overline{PT}

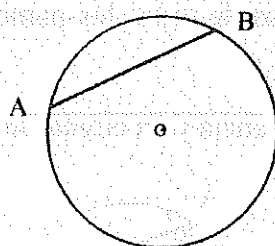
Punto de tangencia $\cdot T$



5.2.5. ARCO (\widehat{AB})

Es una parte cualquiera de la circunferencia comprendida entre dos puntos. Los extremos de una cuerda dividen a la circunferencia en dos arcos, llamados arcos subtendidos por la cuerda.

Salvo indicación contraria, el arco subtendido por una cuerda se refiere al arco menor de los dos.

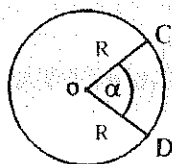


5.3. ANGULOS EN UN CIRCULO

5.3.1. ANGULO CENTRAL ($\hat{\alpha}$)

Es el ángulo cuyo vértice es el centro del círculo y sus lados son radios.

$$m \widehat{COD} = m \hat{\alpha} = m \widehat{CD}$$



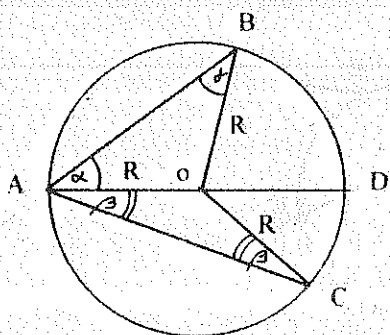
Se dice que el \widehat{COD} interseca al \widehat{CD} y que el \widehat{CD} subtiene al ángulo central \widehat{COD} .

Por definición, un ángulo central se mide por el arco intersecado por sus lados.

5.3.2. ANGULO INSCRITO

Es el ángulo cuyos lados son cuerdas del círculo y su vértice pertenece a la circunferencia.

La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco intersecado por sus lados.



H) \widehat{BAC} inscrito en $\odot (O, R)$

$$T) m \widehat{BAC} = \frac{m \widehat{BC}}{2}$$

D) $\triangle AOB$ y $\triangle AOC$ Isósceles

$$m \widehat{BOD} = 2 m \hat{\alpha} = m \widehat{BD}$$

$$m \widehat{COD} = 2 m \hat{\beta} = m \widehat{DC}$$

$$m \hat{\alpha} = \frac{m \widehat{BD}}{2} \quad \text{y} \quad m \hat{\beta} = \frac{m \widehat{DC}}{2}$$

$$m \widehat{BAC} = \frac{m \widehat{BD} + m \widehat{DC}}{2}$$

$$m \widehat{BAC} = \frac{m \widehat{BC}}{2} \quad III.$$

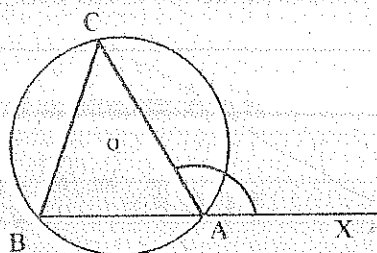
COROLARIOS.

- 1.- En un círculo, el ángulo central es el doble del ángulo inscrito, cuando sus lados intersecan en el mismo arco.
- 2.- Todos los ángulos inscritos en un mismo arco o en arcos congruentes son congruentes.
- 3.- Todo ángulo inscrito en un semicírculo, es un ángulo recto.

5.3.3. ANGULO EX-INSCRITO

Es el ángulo formado por una cuerda y la prolongación de otra.

La medida de un ángulo ex-inscrito es igual a la semisuma de los arcos subtendidos por las cuerdas.



H) \widehat{CAX} ex-inscrito en $\odot (O, R)$

$$T) m \widehat{CAX} = \frac{m \widehat{AC} + m \widehat{AB}}{2}$$

$$D) m \widehat{CAX} = m \hat{C} + m \hat{B}$$

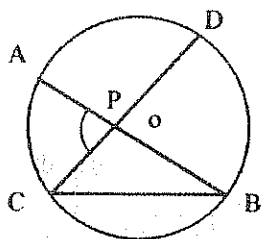
$$m \widehat{CAX} = \frac{m \widehat{AB}}{2} + \frac{m \widehat{AC}}{2}$$

$$m \widehat{CAX} = \frac{m \widehat{AB} + m \widehat{AC}}{2} \quad III.$$

5.3.4. ANGULO INTERNO

Es el ángulo formado por dos cuerdas que se cortan.

La medida de un ángulo interno es igual a la semisuma de los arcos comprendidos entre los lados del ángulo y los lados de su ángulo opuesto por el vértice.



H) \widehat{APC} interno en $\odot (O, R)$

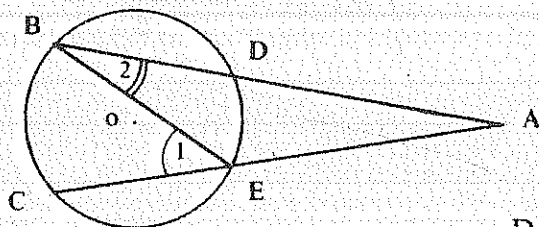
$$T) m \widehat{APC} = \frac{m \widehat{AC} + m \widehat{BD}}{2}$$

$$\begin{aligned} D) \quad m \widehat{ABC} &= \frac{m \widehat{AC}}{2} \\ m \widehat{DCB} &= \frac{m \widehat{BD}}{2} \\ m \widehat{APC} &= m \widehat{ABC} + m \widehat{DCB} \\ m \widehat{APC} &= \frac{m \widehat{AC}}{2} + \frac{m \widehat{BD}}{2} \\ m \widehat{APC} &= \frac{m \widehat{AC} + m \widehat{BD}}{2} \quad ///. \end{aligned}$$

5.3.5. ANGULO EXTERNO

Es el ángulo cuyo vértice está fuera del círculo y sus lados pueden ser dos secantes, dos tangentes o una secante y una tangente.

La medida de un ángulo externo es igual a la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.



H) \widehat{A} externo al $\odot (O, R)$

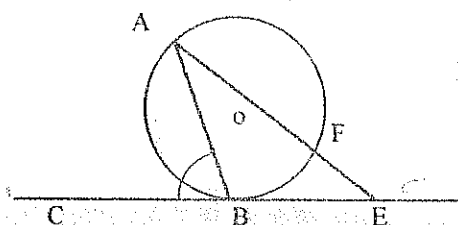
$$T) m \widehat{A} = \frac{m \widehat{BC} - m \widehat{DE}}{2}$$

$$\begin{aligned} D) \quad m \widehat{1} &= \frac{m \widehat{BC}}{2} \\ m \widehat{2} &= \frac{m \widehat{DE}}{2} \\ m \widehat{A} &= m \widehat{1} - m \widehat{2} = \frac{m \widehat{BC}}{2} - \frac{m \widehat{DE}}{2} \\ m \widehat{A} &= \frac{m \widehat{BC} - m \widehat{DE}}{2} \quad ///. \end{aligned}$$

5.3.6. ANGULO SEMI-INSCRITO

Es el ángulo formado por una cuerda y una tangente y su vértice es el punto de contacto.

La medida de un ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del arco subtendido por la cuerda.



H) \overline{CE} tang. $\odot (O, R)$ en $\cdot B$

\widehat{ABC} semi-inscrito en $\odot (O, R)$

$$T) m \widehat{ABC} = \frac{m \widehat{AB}}{2}$$

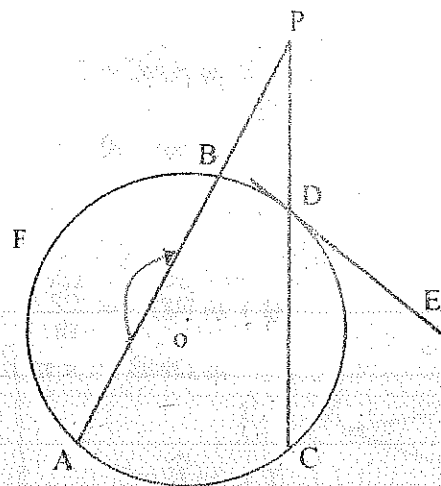
$$D) m \widehat{ABC} = m \widehat{A} + m \widehat{E}$$

$$m \widehat{ABC} = \frac{m \widehat{BF}}{2} + \left(\frac{m \widehat{AB} - m \widehat{BF}}{2} \right)$$

$$m \widehat{ABC} = \frac{m \widehat{AB}}{2} \quad III.$$

5.4. EJERCICIOS

1.-



H) \overline{DE} tang. $\odot (O, R)$

$$m \widehat{EDC} = \frac{\pi}{3}$$

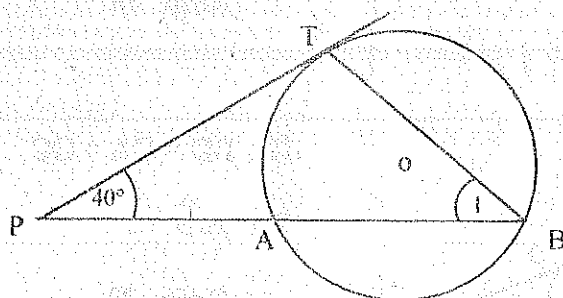
$$m \widehat{APC} = \frac{\pi}{9}$$

$$m \widehat{AC} = \frac{4\pi}{9}$$

$$T) m \widehat{AFB} = ?$$

$$\text{Resp. } \frac{2\pi}{3}$$

2.-



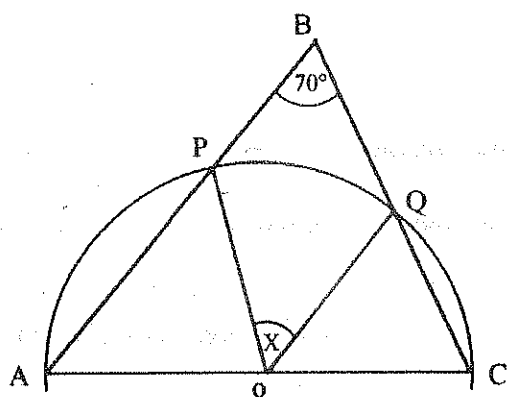
H) \overline{PT} tang. $\odot (O, R)$

$$m \widehat{AB} = \frac{5\pi}{9}$$

$$T) m \widehat{I} = ?$$

$$\text{Resp. } \frac{\pi}{4}$$

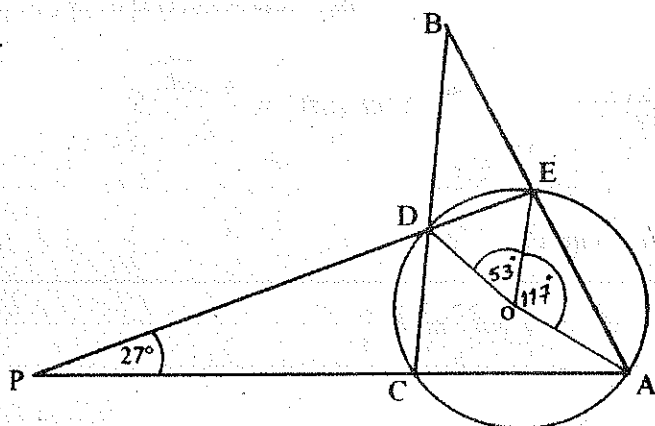
3.-



T) $m\hat{X} = ?$

Resp. 40°

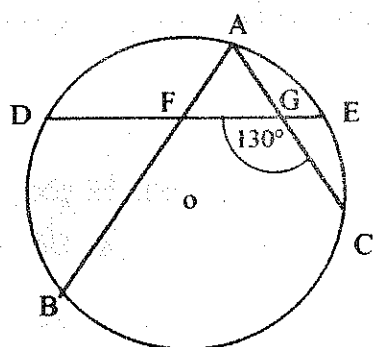
4.-



T) $m\hat{B} = ?$

Resp. 37°

5.-



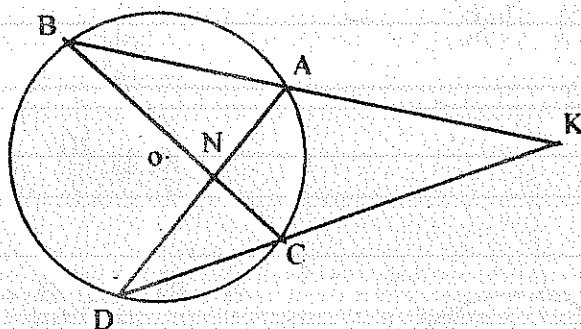
H) $\widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\widehat{AE} = \widehat{EC}$

T) $m\hat{BAC} = ?$

Resp. 80°

6.-



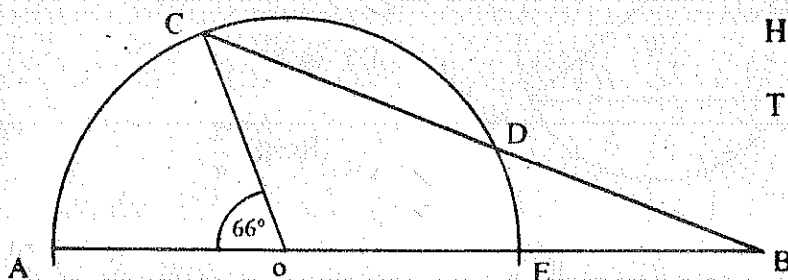
H) $m\widehat{BD} = \frac{7\pi}{18}$

$m\hat{DNB} = 4 m\hat{K}$

T) $m\hat{K} = ?$

Resp. 14°

7.-

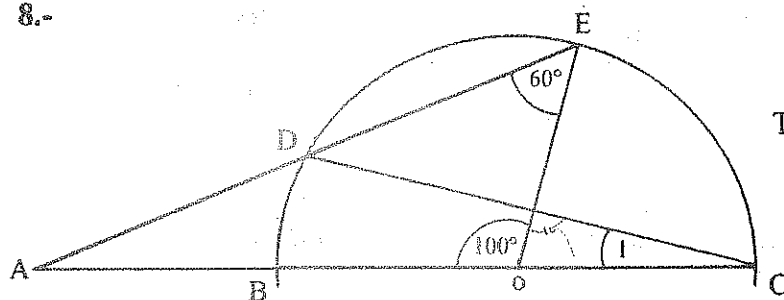


H) $BD = OA = OC$

T) $m\hat{B} = ?$

Resp. 22°

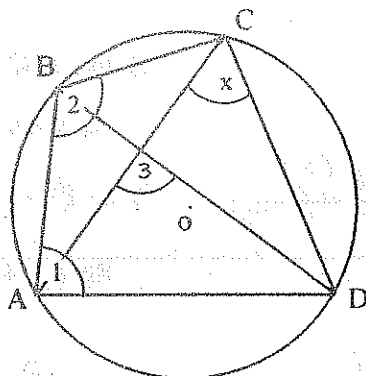
8.-



$$T) m \hat{1} = ?$$

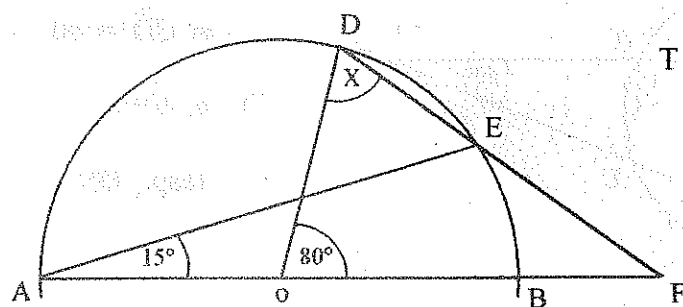
Resp. 20°

9.-



$$T) \hat{x} = \frac{\hat{2} + \hat{3} - \hat{1}}{2}$$

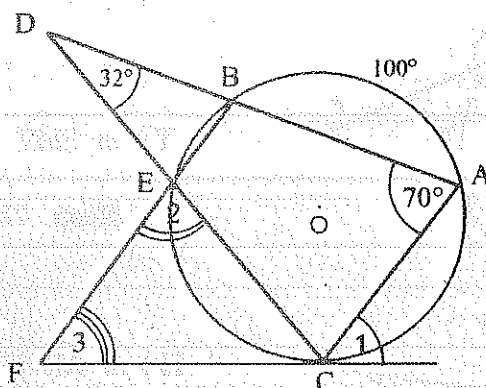
10.-



$$T) m \hat{X} = ?$$

Resp. 65°

11.-

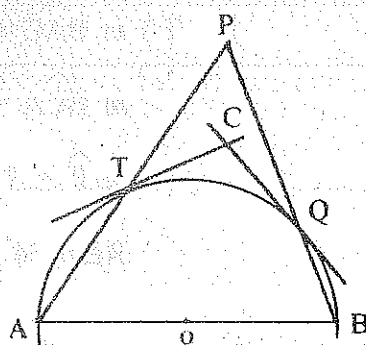


$$H) \overline{FC} \text{ tang. } \odot (O, R)$$

$$T) \hat{1}; \hat{2}; \hat{3} = ?$$

Resp. $60^\circ, 70^\circ, 58^\circ$

12.-



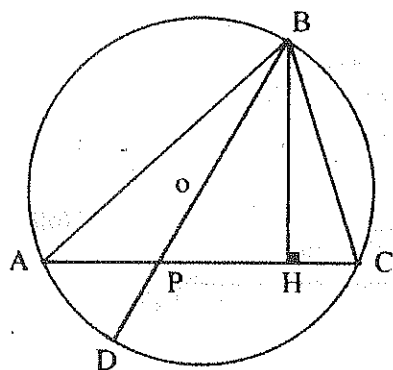
$$H) m \hat{P} = 60^\circ$$

$$\overline{CT} \text{ y } \overline{CQ} \text{ tang. } \odot (O, R)$$

$$T) m \hat{TCQ} = ?$$

Resp. 120°

13.-



H) $m \widehat{PBH} = 30^\circ$

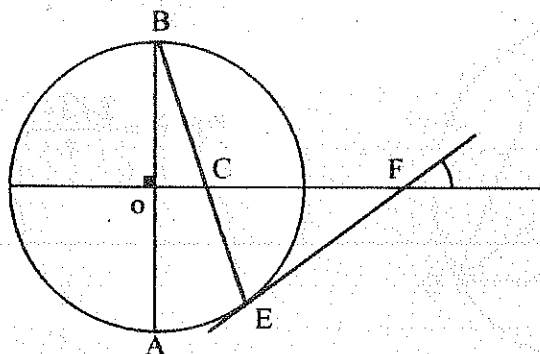
$m \widehat{ABC} = 60^\circ$

T) $m \widehat{A} = ?$

$m \widehat{C} = ?$

Resp. $45^\circ, 75^\circ$

14.-



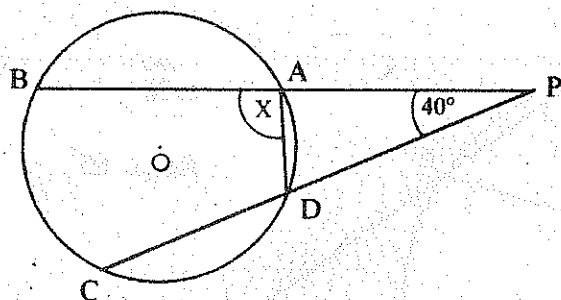
H) $m \widehat{OBC} = \frac{3\pi}{20}$

 \overline{EF} tang. $\odot (O, R)$

T) $m \widehat{F} = ?$

Resp. 54°

15.-



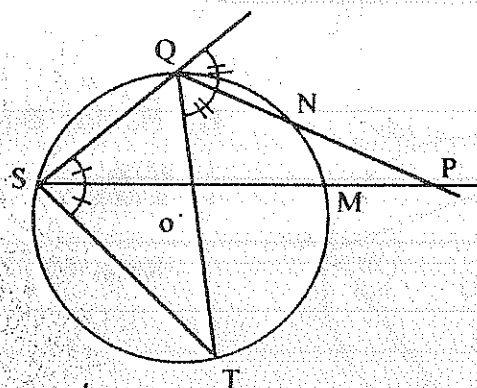
H) $m \widehat{AB} = 120^\circ$

$m \widehat{CD} = 60^\circ$

T) $m \widehat{X} = ?$

Resp. 95°

16.-



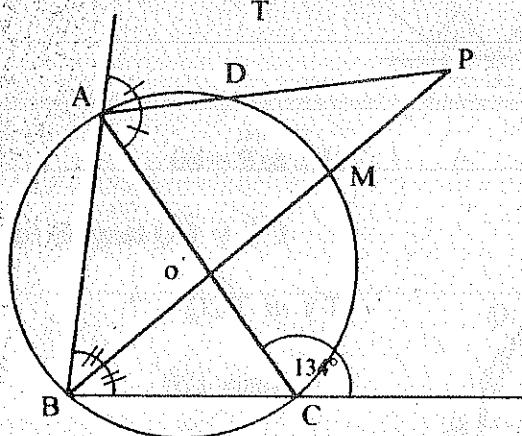
H) $m \widehat{QN} = 10^\circ$

$m \widehat{P} = 23^\circ$

T) $m \widehat{SMT} = ?$

Resp. 78°

17.-



H) $m \widehat{AD} = 34^\circ$

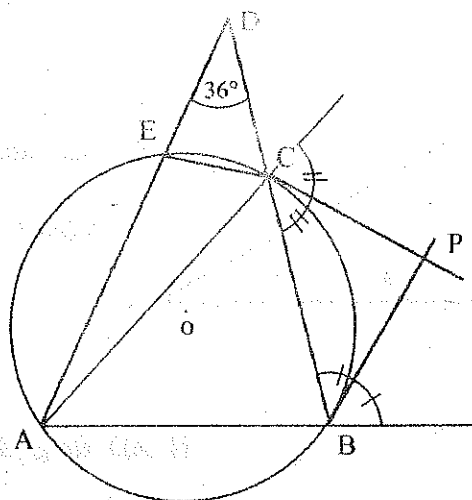
T) $m \widehat{BAC} = ?$

$m \widehat{BCA} = ?$

$m \widehat{P} = ?$

Resp. $54^\circ, 46^\circ, 23^\circ$

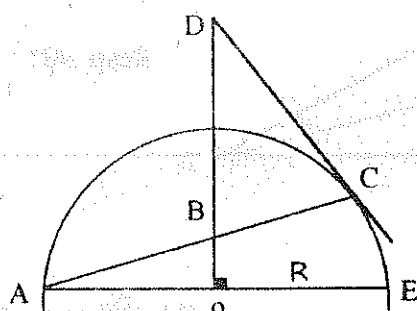
18.-

H) \overline{CP} tang. $\odot (O, R)$

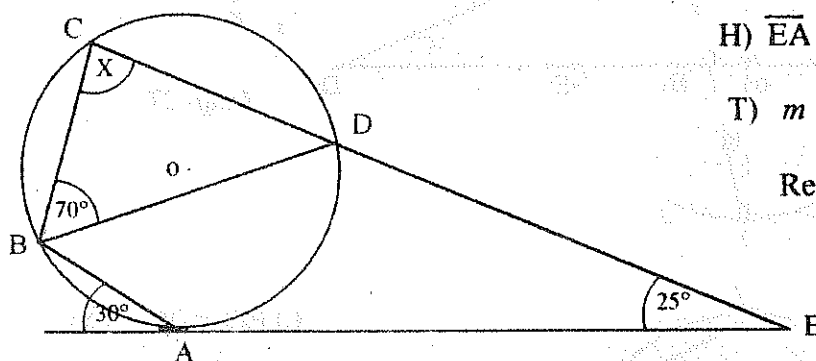
$$m \widehat{CPB} = 63^\circ$$

T) $m \widehat{ECA} = ?$ Resp. 18°

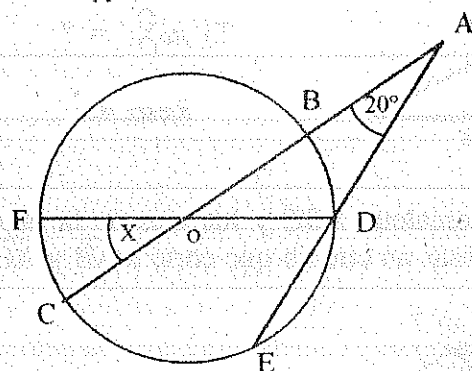
19.-

H) $m \widehat{BDC} = 54^\circ$ \overline{DC} tang. $\odot (O, R)$ T) $m \widehat{OAB} = ?$ Resp. 27°

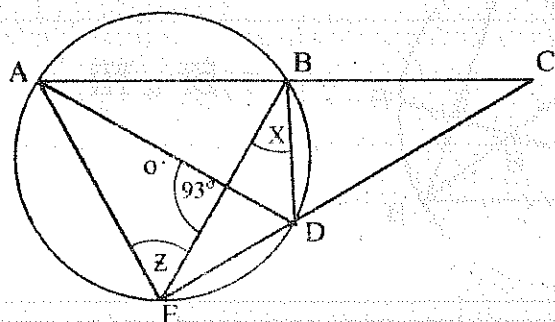
20.-

H) \overline{EA} tang. $\odot (O, R)$ T) $m \widehat{X} = ?$ Resp. $72,5^\circ$

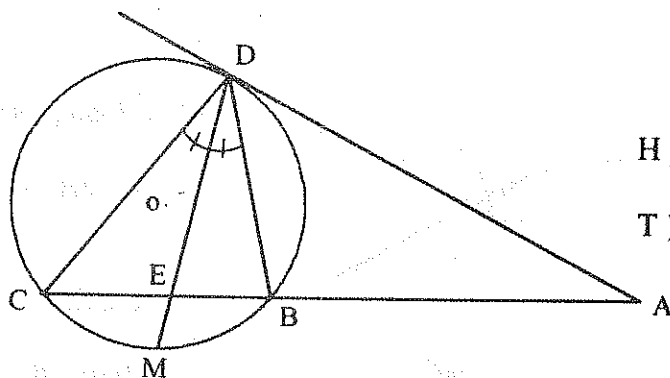
21.-

H) $\widehat{DE} = 80^\circ$ T) $m \widehat{X} = ?$ Resp. 30°

22.-

H) $\widehat{AB} - \widehat{DE} = 30^\circ$ T) $m \widehat{X} ; m \widehat{Z} = ?$ Resp. $36^\circ, 51^\circ$

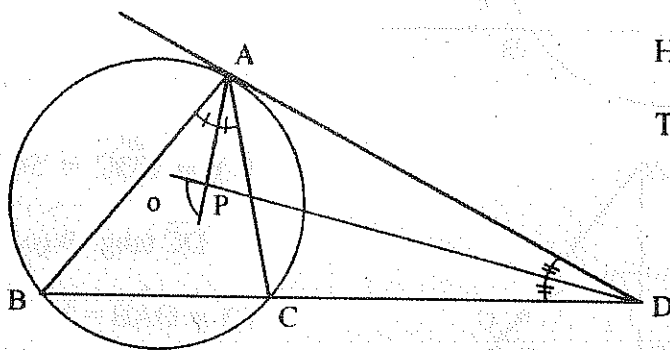
23.-



H) \overline{AD} tang. $\odot (O, R)$

T) ΔEDA isósceles

24.-

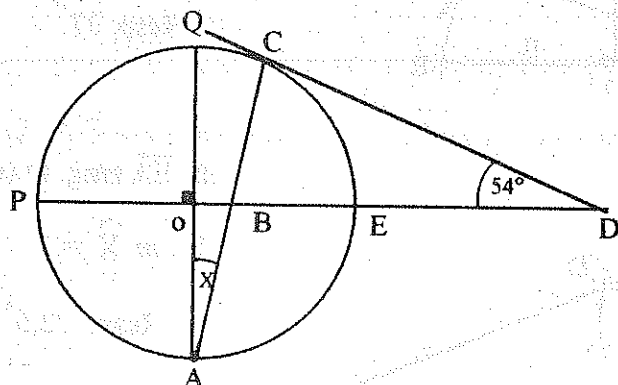


H) \overline{AD} tang. $\odot (O, R)$

T) $m \hat{P} = ?$

Resp. 90°

25.

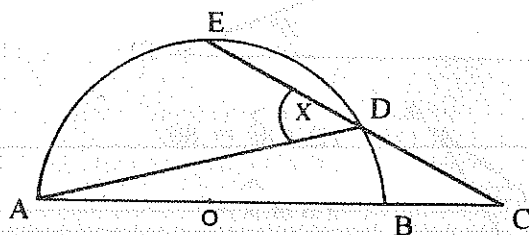


H) \overline{DC} tang. $\odot (O, R)$

T) $\hat{X} = ?$

Resp. 27°

26.-



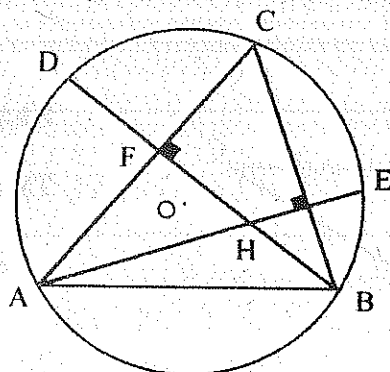
H) $ED = DC = OA$

T) $m \hat{X} = ?$

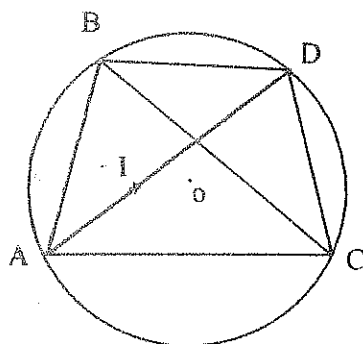
Resp. 45°

27.- Por el vértice A de un triángulo escaleno ABC y los pies de la mediana y la bisectriz relativas al $\angle A$, se hace pasar un círculo que corte a \overline{AB} y \overline{AC} en P y Q. Demostrar que $BP = CQ$.

28.-


$$T) \overline{DF} \cong \overline{FH}$$

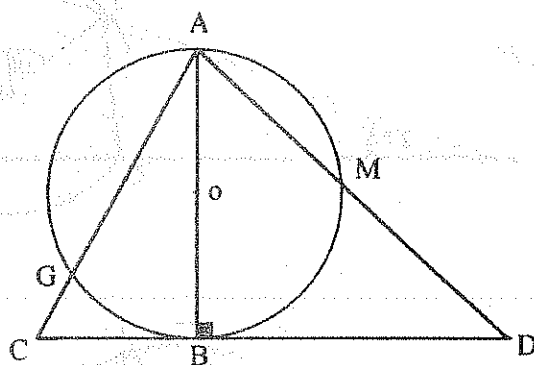
29.-

H) $\triangle ABC$ escaleno

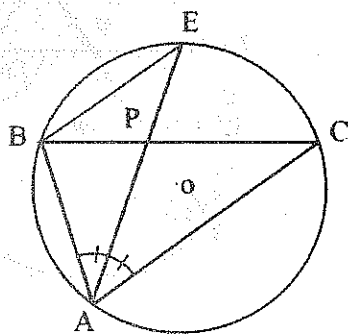
•I su incentro

T) $\overline{BD} \cong \overline{DC} \cong \overline{DI}$

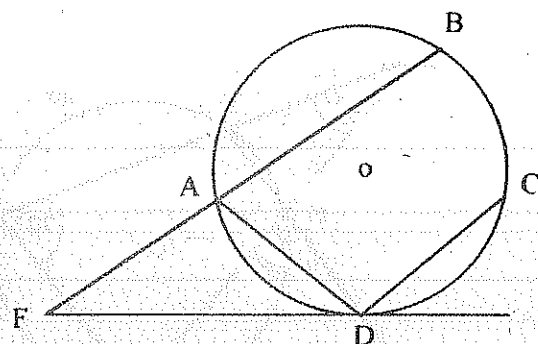
30.-

T) $AC \times AG = AD \times AM$

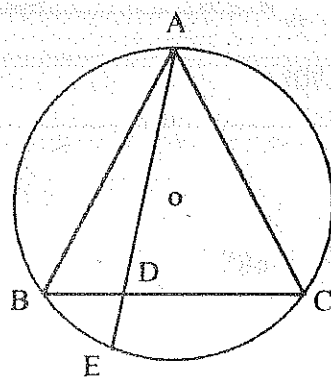
31.-

T) $BE^2 = EP \times AE$

32.-

H) \overline{FD} tang. $\odot (O, R)$ $\overline{AD} \cong \overline{DC}$ T) $BD^2 = BC \times BF$

33.-

H) $AB = AC$ T) $AB^2 = AD \times AE$

5.4.1. EJERCICIOS RESUELTOS

4.-

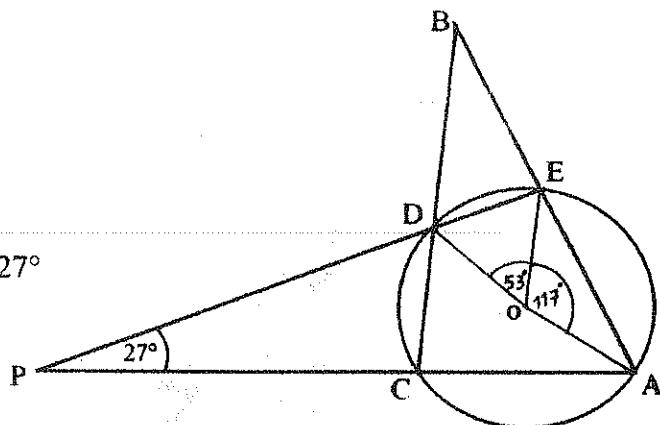
$$1.- \widehat{DOE} = \widehat{DE} = 53^\circ$$

$$2.- \widehat{EOA} = \widehat{EA} = 117^\circ$$

$$3.- 27^\circ = \frac{\widehat{EA} - \widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{DC} = 63^\circ$$

$$4.- \widehat{AC} = 360^\circ - \widehat{DC} - \widehat{DE} - \widehat{EA} = 127^\circ$$

$$5.- \widehat{B} = \frac{127^\circ - 53^\circ}{2} = 32^\circ$$



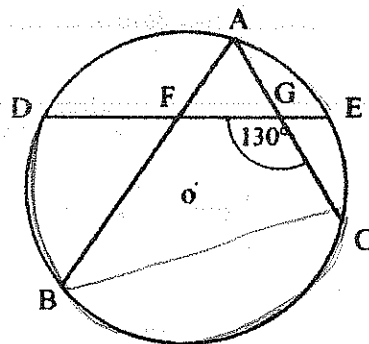
5.-

$$1.- 2\widehat{BD} + 2\widehat{AE} + \widehat{BC} = 360^\circ$$

$$2.- 130^\circ = \frac{(\widehat{BC} + \widehat{BD}) + \widehat{AE}}{2} = \frac{360^\circ + \widehat{BC}}{4}$$

$$\Rightarrow \widehat{BC} = 160^\circ$$

$$3.- \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} = 80^\circ$$



11.-

$$1.- \widehat{AC} - \widehat{BE} = 2 \times 32^\circ = 64^\circ$$

$$2.- \widehat{EC} + \widehat{BE} = 2 \times 70^\circ = 140^\circ$$

$$\therefore \widehat{AC} + \widehat{EC} = 204^\circ$$

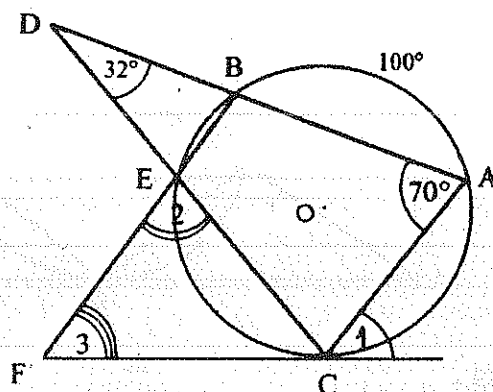
$$3.- \widehat{AC} + \widehat{EC} + \widehat{BE} + 100^\circ = 360^\circ$$

$$\therefore \widehat{BE} = 56^\circ$$

$$\widehat{EC} = 84^\circ \Rightarrow \widehat{2} = \frac{\widehat{BE} + \widehat{EC}}{2} = 70^\circ$$

$$\widehat{AC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{1} = \frac{\widehat{AC}}{2} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{3} = \frac{100^\circ + \widehat{AC} - \widehat{EC}}{2} = 68^\circ$$



13.-

1.- \overline{AD} Construcción

2.- $\widehat{DAB} = 90^\circ$

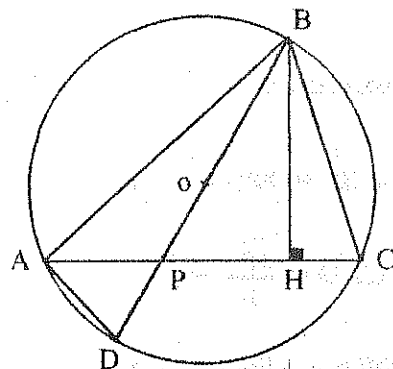
3.- $\widehat{C} = \widehat{D} = \frac{\widehat{AB}}{2}$

4.- $\widehat{ABD} = 90^\circ - \widehat{C} = \widehat{CBH}$

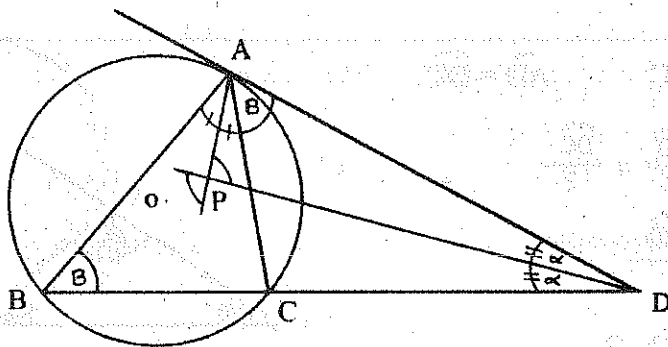
5.- $\widehat{PBH} = 30^\circ$

6.- $\widehat{ABC} = 60^\circ = 90^\circ - \widehat{C} + 30^\circ + 90^\circ - \widehat{C} \Rightarrow \widehat{C} = 75^\circ$

7.- $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ = \widehat{A} + 60^\circ + 75^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 45^\circ$



24.-



1.- $\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

2.- $\widehat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2}$

3.- $\widehat{B} = \widehat{CAQ} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{C} - \widehat{B}}{2}$

4.- $\widehat{P} + \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{B} + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \widehat{P} = 90^\circ$

25.-

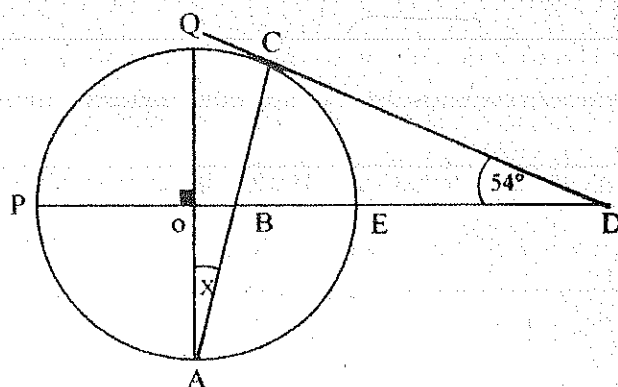
1.- $180^\circ = \widehat{PC} + \widehat{CE}$

2.- $54^\circ = \frac{\widehat{PC} - \widehat{CE}}{2}$

$$\Rightarrow \widehat{PC} = 144^\circ = 90^\circ + \widehat{QC}$$

$$\therefore \widehat{QC} = 54^\circ$$

3.- $\widehat{X} = \frac{\widehat{QC}}{2} = 27^\circ$



28.-

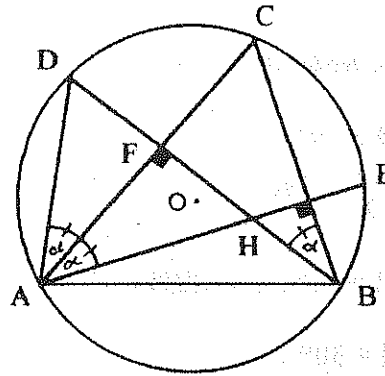
1.- \overline{AD} Construcción

$$2.- \widehat{CAH} = \widehat{CBH} = 90^\circ - \widehat{C} = \widehat{\alpha}$$

$$3.- \widehat{CBD} = \widehat{CAD} = \frac{\widehat{DC}}{2} = \widehat{\alpha}$$

$$4.- \therefore \triangle ADF \cong \triangle AFH \text{ (A,L,A)}$$

$$\Rightarrow DF = FH$$



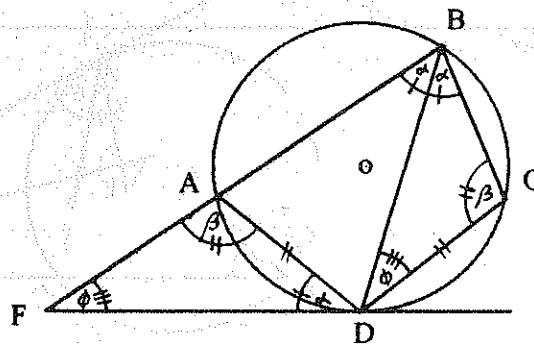
32.-

$$1.- AD = DC \quad \therefore \widehat{AD} = \widehat{DC}$$

$$2.- \widehat{\alpha} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{DC}}{2}$$

$$\widehat{\beta} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AD}}{2}$$

$$\widehat{\phi} = 180^\circ - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}$$



$$3.- \therefore \triangle BFD \sim \triangle BDC \text{ (A,A,)}$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{BD}{BC}$$

$$\Rightarrow BD^2 = BC \times BF$$

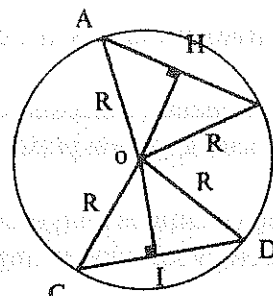
5.5. CUERDAS

TEOREMA #1

En un mismo círculo las cuerdas equidistantes del centro son congruentes y recíprocamente, cuerdas congruentes equidistan del centro.

$$\begin{aligned} H) \quad \overline{OH} &\perp \overline{AB} \\ \overline{OI} &\perp \overline{CD} \\ \overline{OH} &\cong \overline{OI} \end{aligned}$$

$$T) \quad \overline{AB} \cong \overline{CD}$$



$$D) \quad \triangle AOH \wedge \triangle COI \quad \text{Rectángulos}$$

$$OA = OC = R \quad (L)$$

$$\overline{OH} \cong \overline{OI} \quad (L)$$

$$\triangle AOH \cong \triangle COI \quad (L.L.) \Rightarrow AH = CI$$

$$\text{Idem } \triangle BOH \cong \triangle DOI \Rightarrow HB = ID$$

$$\therefore AH + HB = CI + ID$$

$$\therefore AB = CD$$

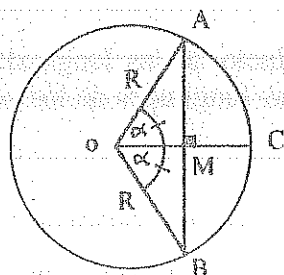
$$\Rightarrow AB \cong CD \quad ///.$$

COROLARIOS

- 1.- En un mismo círculo, las cuerdas congruentes subtienden arcos congruentes y recíprocamente, arcos congruentes intersecan cuerdas congruentes.
- 2.- En un mismo círculo las cuerdas son congruentes si, y solo si, tienen ángulos centrales congruentes.

TEOREMA #2

Una recta que pasa por el centro de un círculo y es perpendicular a una cuerda, biseca a la cuerda y al arco que lo subtiende.



$$H) \quad \overline{OC} \perp \overline{AB}$$

$$\begin{aligned} T) \quad \overline{AM} &\cong \overline{MB} \\ \overline{AC} &\cong \overline{CB} \end{aligned}$$

$$D) \quad \triangle AOM \wedge \triangle BOM \quad \text{Rectángulos}$$

$$OA = BO = R \quad (L)$$

$$\overline{OM} \cong \overline{OM} \quad (L)$$

$$\triangle AOM \cong \triangle BOM \quad (L.L.) \Rightarrow \overline{AM} \cong \overline{MB} \quad ///.$$

$$\begin{aligned} m \widehat{AOM} &= m \widehat{BOM} = m \hat{\alpha} \\ \therefore m \hat{\alpha} &= m \widehat{AC} = m \widehat{CB} \Rightarrow \widehat{AC} \cong \widehat{CB} \quad ///. \end{aligned}$$

COROLARIOS

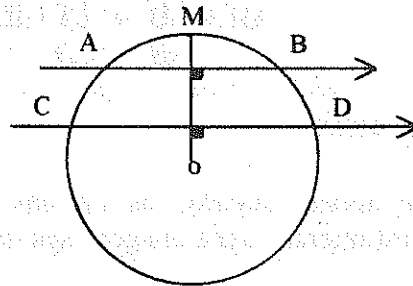
- 1.- La mediatriz de una cuerda, pasa por el centro del círculo.
- 2.- Todo diámetro perpendicular a una cuerda, divide a ésta y a los arcos que subtienden en dos partes congruentes.
- 3.- Todo diámetro biseca al círculo y cada parte congruente se llama semicírculo.
- 4.- Dos diámetros perpendiculares entre sí, dividen al círculo en cuatro partes congruentes, y cada parte se llama cuadrante.
- 5.- Angulos centrales congruentes intersecan arcos congruentes y recíprocamente, arcos congruentes subtienden ángulos centrales congruentes.

TEOREMA # 3

En todo círculo, dos cuerdas o secantes paralelas intersecan arcos congruentes.

$$H) \overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

$$T) \widehat{AC} \cong \widehat{BD}$$



$$D) \overline{OM} \perp \overline{AB} \therefore \widehat{AM} = \widehat{MB}$$

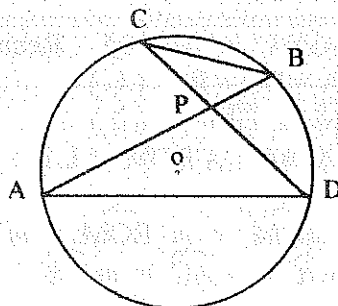
$$\overline{OM} \perp \overline{CD} \therefore \widehat{CM} = \widehat{MD}$$

$$m\widehat{CM} - m\widehat{AM} = m\widehat{MD} - m\widehat{MB}$$

$$m\widehat{AC} = m\widehat{BD} \Rightarrow \widehat{AC} \cong \widehat{BD} \quad ///.$$

TEOREMA # 4

Si dos cuerdas se cortan dentro de un círculo, el producto de las longitudes de los segmentos formados en la una, es igual al producto de las longitudes de los segmentos formados en la otra.



$$T) AP \times PB = CP \times PD$$

$$D) \triangle APD \cong \triangle CPB$$

$$\widehat{APD} \cong \widehat{CPB} \quad (A)$$

$$m\widehat{PAD} = m\widehat{PCB} = \frac{m\widehat{BD}}{2} \quad (A)$$

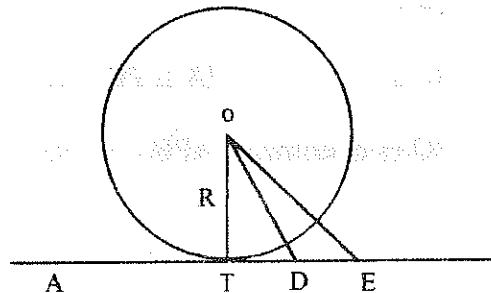
$$\therefore \triangle APD \sim \triangle CPB \quad (A, A) \Rightarrow \frac{AP}{CP} = \frac{PD}{PB} = \frac{AD}{CB}$$

$$\therefore AP \times PB = CP \times PD \quad ///.$$

5.6. TANGENTES Y SECANTES

TEOREMA # 1 (TANGENTE EN UN PUNTO)

Si una recta es tangente a un círculo, es perpendicular al radio que tiene por extremo el punto de contacto.



$$H) \overline{AE} \text{ tang } \odot (O, R) \text{ en } T$$

$$OT = R$$

$$T) \overline{AE} \perp \overline{OT}$$

$$D) \overline{AE} \not\perp \overline{OT}$$

$$\overline{OD} \perp \overline{AE} \quad (\text{Suposición temporal})$$

$$\overline{DE} \cong \overline{TD} \quad (\text{Construcción})$$

$$\therefore m\widehat{TDO} = m\widehat{EDO} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \triangle DOT \cong \triangle DOE \quad (\text{L.A.L}) \Rightarrow OT = OE = R$$

$$\Rightarrow \overline{TE} \text{ Cuerda}$$

$$\overline{TE} \in \overline{AE} \text{ tangente (absurdo)}$$

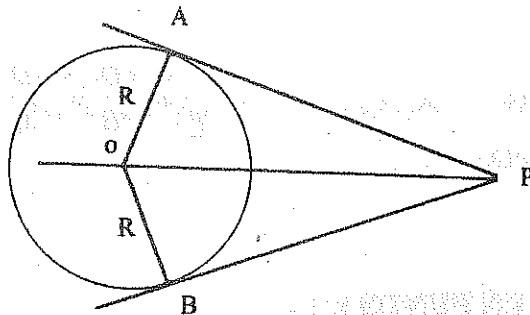
$$\therefore \overline{AE} \perp \overline{OT} \quad ///.$$

COROLARIOS

1. Toda recta perpendicular a un radio en su extremo es tangente al círculo.
2. La perpendicular a una tangente en el punto de contacto, pasa por el centro del círculo.
3. La perpendicular bajada del centro de un círculo a una tangente pasa por el punto de contacto.

TEOREMA # 2 (TANGENTES DESDE UN PUNTO)

Si desde un punto exterior se trazan dos segmentos tangentes a un círculo, éstos son congruentes y el segmento trazado del mismo punto al centro del círculo, es bisectriz del ángulo externo que forman las dos tangentes.



H) \overline{PA} y \overline{PB} tang. $\odot (O, R)$

T) $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

\overline{PO} bisectriz de \widehat{APB}

D) $\triangle OAP \wedge \triangle OBP$

$OA = OB = R$ (L)

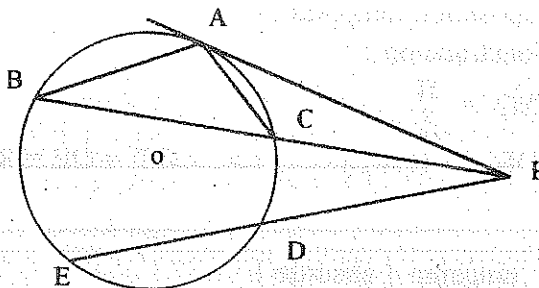
$OP = OP$ (L)

$\therefore \triangle OAP \cong \triangle OBP$ (L. L.) $\Rightarrow \overline{PA} \cong \overline{PB} \quad ///$

$\widehat{APO} \cong \widehat{BPO} \Rightarrow \overline{PO}$ es bisectriz de $\widehat{APB} \quad ///$

TEOREMA # 3

Si desde un punto exterior a un círculo se trazan a él una tangente y una secante, la tangente es media proporcional entre la secante y su parte externa.



H) \overline{PA} tang. $\odot (O, R)$

T) $PA^2 = BP \times CP$

D) $\triangle APB \wedge \triangle ACP$

$m \widehat{ABP} = m \widehat{CAP} = \frac{m \widehat{AC}}{2}$ (A)

$\widehat{P} = \widehat{P}$ (A)

$\triangle APB \sim \triangle ACP$ (A, A) $\Rightarrow \frac{PA}{CP} = \frac{BP}{PA} = \frac{AB}{AC}$

$\therefore PA^2 = BP \times CP \quad ///$

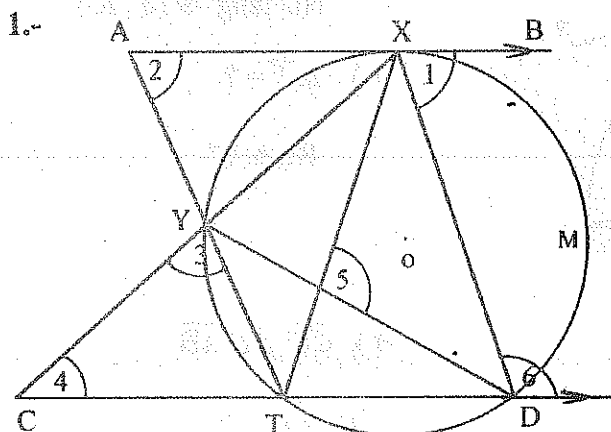
COROLARIO

Si desde un punto exterior a un círculo se trazan a él dos secantes, el producto de las longitudes de una secante por su parte externa, es igual al producto de las longitudes de la otra secante por su parte externa.

$$PA^2 = BP \times CP$$

$$PA^2 = EP \times DP \Rightarrow BP \times CP = EP \times DP \quad ///.$$

5.7. EJERCICIOS



H) $\overline{AB} \text{ tang. } \odot (O, R)$

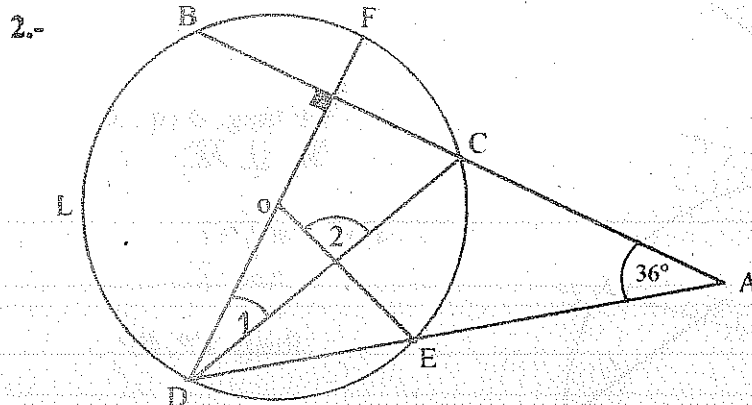
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$$m \widehat{XMD} = 140^\circ$$

$$m \widehat{YT} = 50^\circ$$

T) Hallar las medidas de los ángulos:
1, 2, 3, 4, 5 y 6

Resp. $70^\circ, 65^\circ, 70^\circ, 45^\circ, 95^\circ, 110^\circ$

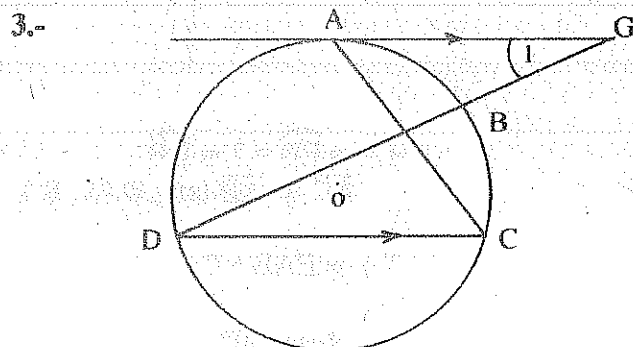


$$H) m \widehat{BLD} = 128^\circ$$

$$T) m \widehat{1} = ?$$

$$m \widehat{2} = ?$$

Resp. $26^\circ, 98^\circ$



$$H) \overline{AG} \parallel \overline{DC}$$

$\overline{AG} \text{ tang. } \odot (O, R)$

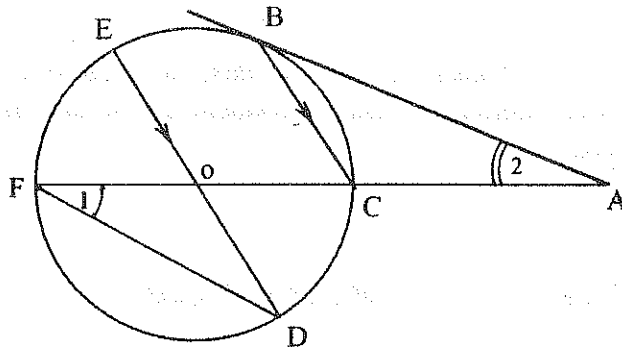
$$m \widehat{AB} = 50^\circ$$

$$m \widehat{AC} = 110^\circ$$

$$T) m \widehat{1} = ?$$

Resp. 30°

4.-

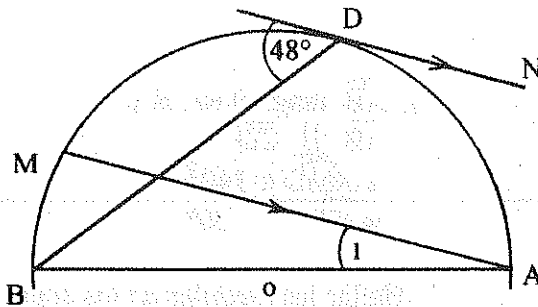


$$\begin{aligned} \text{H) } \overline{ED} &\perp \overline{BC} \\ \overline{AB} &\text{ tang. } \odot (O, R) \\ m\angle CBA &= 20^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{T) } m\hat{1} &= ? \\ m\hat{2} &= ? \end{aligned}$$

Resp. $25^\circ, 10^\circ$

5.-

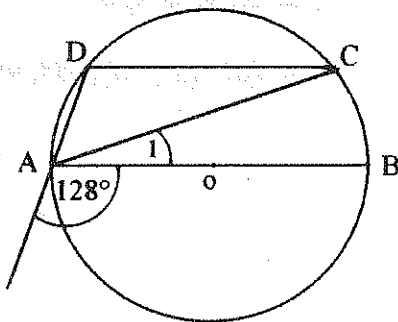


$$\begin{aligned} \text{H) } \overline{ND} &\perp \overline{AM} \\ \overline{ND} &\text{ tang. } \odot (O, R) \end{aligned}$$

$$\text{T) } m\hat{1} = ?$$

Resp. 6°

6.-

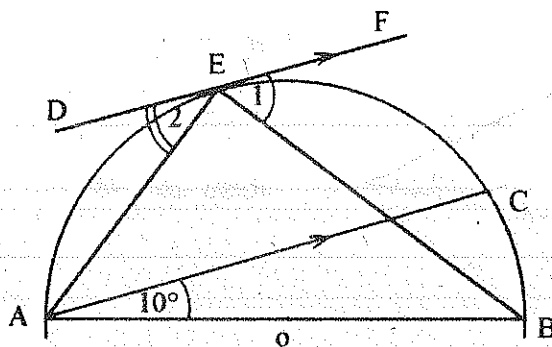


$$\text{H) } \overline{CD} \perp \overline{AB}$$

$$\text{T) } m\hat{1} = ?$$

Resp. 38°

7.-

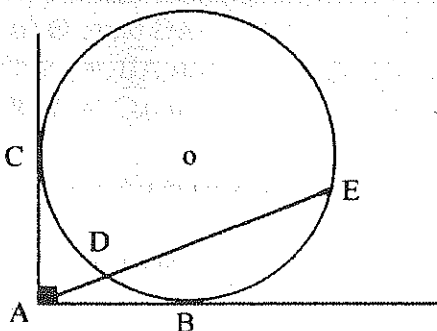


$$\begin{aligned} \text{H) } \overline{DF} &\text{ tang. } \odot (O, R) \\ \overline{DF} &\perp \overline{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{T) } m\hat{1} &= ? \\ m\hat{2} &= ? \end{aligned}$$

Resp. $50^\circ, 40^\circ$

8.-

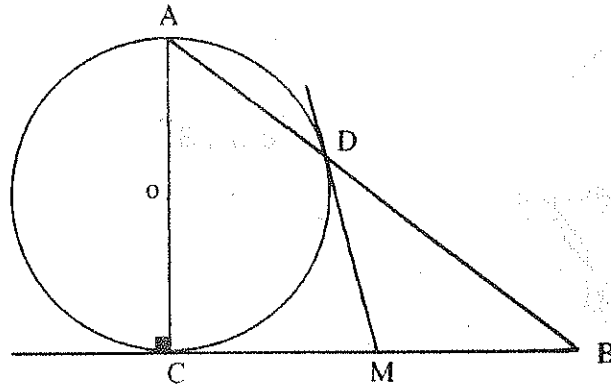


$$\begin{aligned} \text{H) } m\widehat{EB} &= 2 m\widehat{DB} \\ \overline{AC} \text{ y } \overline{AB} &\text{ tang. } \odot (O, R) \end{aligned}$$

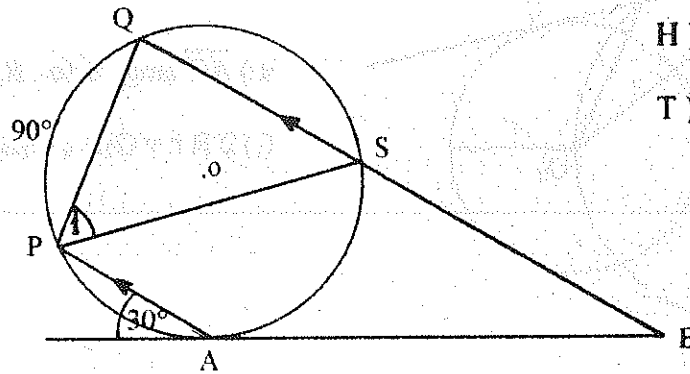
$$\text{T) } m\angle EAB = ?$$

Resp. 30°

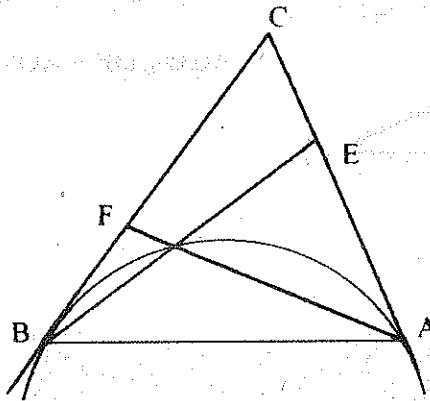
9.-

H) \overline{DM} tang. $\odot (O, R)$ T) $\overline{BM} \cong \overline{MC}$

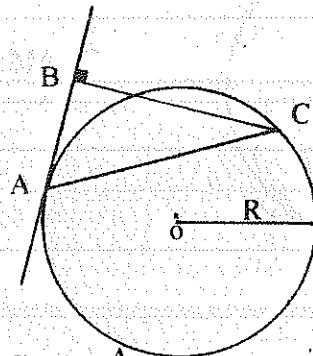
10.-

H) \overline{AB} tang. $\odot (O, R)$ T) $m \hat{I} = ?$ Resp. 60°

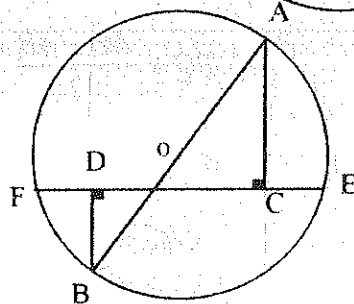
11.-

H) $\widehat{AB} = 120^\circ$ \overline{CA} tang. $\odot (O, R)$ \overline{CB} tang. $\odot (O, R)$ T) $CE + CF = AB$

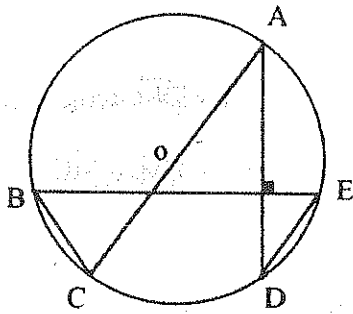
12.-

H) \overline{AB} tang. $\odot (O, R)$ T) $AC^2 = 2R \times BC$

13.-

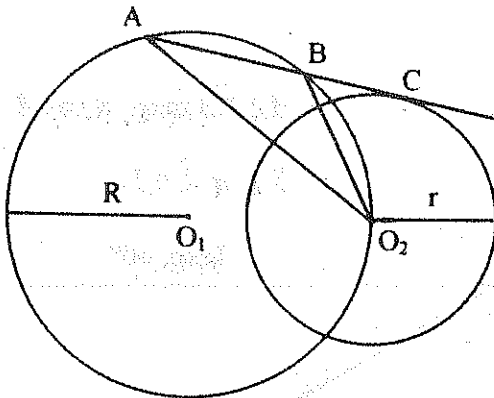
T) $\overline{CE} \cong \overline{FD}$

14.-



$$T) \overline{DE} \cong \overline{CB}$$

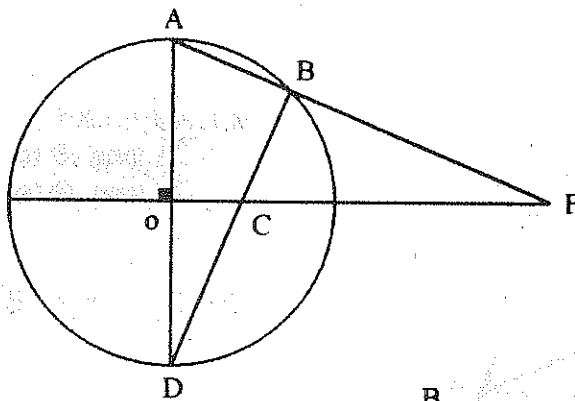
15.-



$$H) \overline{AC} \text{ tang. } \odot (O_2, r)$$

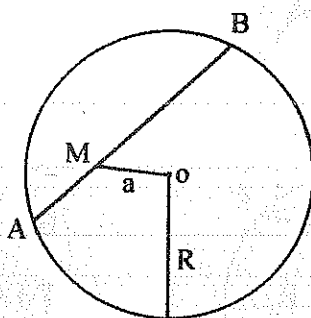
$$T) 2Rr = O_2A \times O_2B$$

16.-



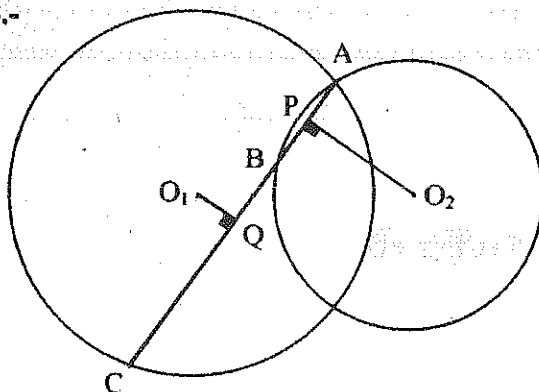
$$T) CO \times OF = AO^2$$

17.-



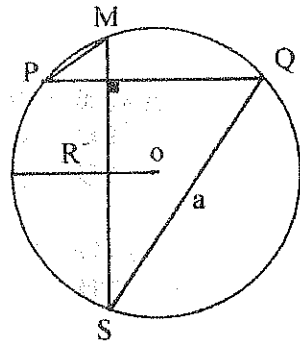
$$T) AM \times MB = R^2 - a^2$$

18.-



$$T) PQ = \frac{AC - AB}{2}$$

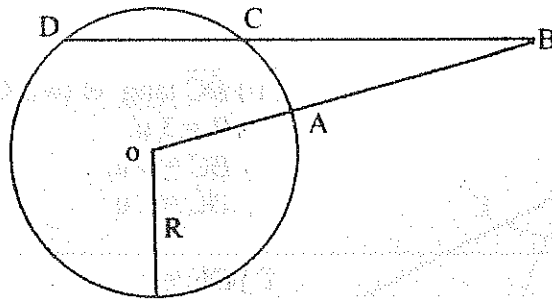
19.-



$$T) MP = f(a, R)$$

$$\text{Resp. } \sqrt{4R^2 - a^2}$$

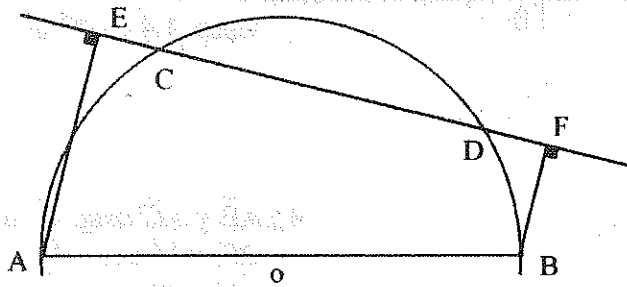
20.-



$$H) OB = a$$

$$T) BD \times BC = a^2 - R^2$$

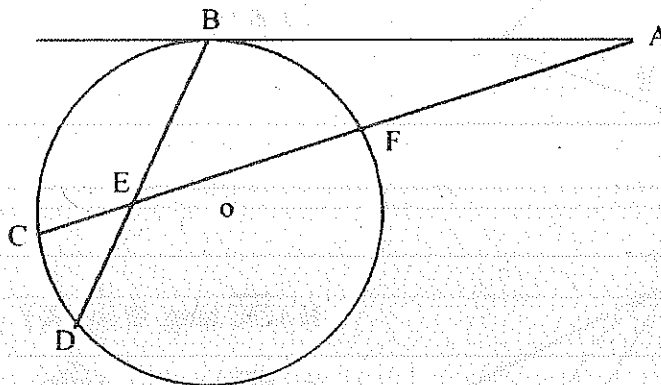
21.-



$$T_1) \overline{EC} \cong \overline{DF}$$

$$T_2) AE \times BF = DE \times DF$$

22.-



$$H) \overline{AB} \text{ tang. } \odot (O, R)$$

$$AC = 20 \text{ u}$$

$$AE = 17 \text{ u}$$

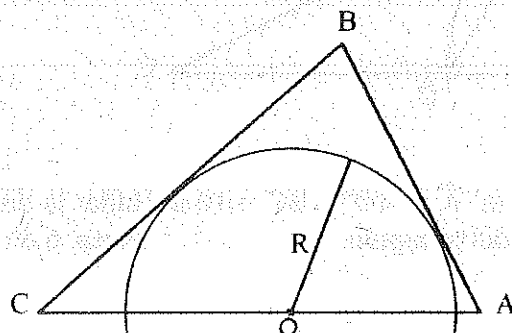
$$BE = 6 \text{ u}$$

$$DE = 4 \text{ u}$$

$$T) AB = ?$$

$$\text{Resp. } 13,41 \text{ u}$$

23.-



$$H) AB = 6 \text{ u}$$

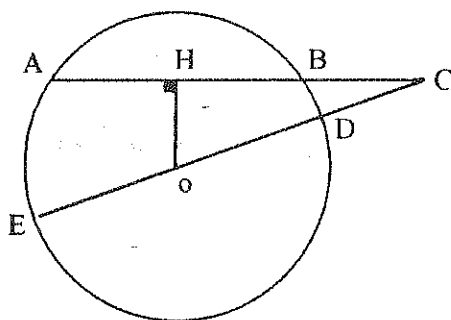
$$BC = 7 \text{ u}$$

$$CA = 8 \text{ u}$$

$$T) R = ?$$

$$\text{Resp. } 3,13 \text{ u}$$

24.-



$$H) AB = 40 \text{ u}$$

$$BC = 16 \text{ u}$$

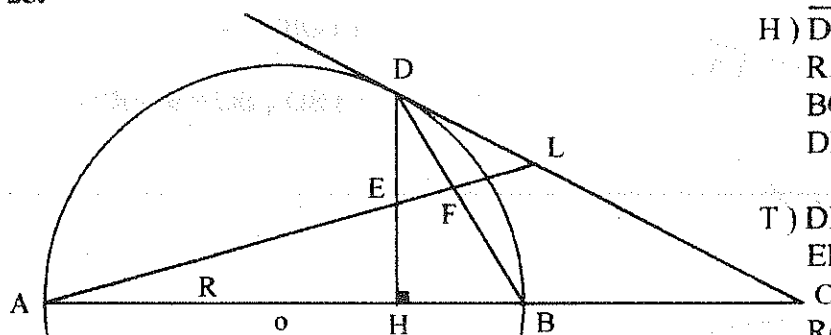
$$CD = 14 \text{ u}$$

$$T) R = ?$$

$$OH = ?$$

Resp. 25,15 u

25.-



$$H) \overline{DC} \text{ tang. } \odot (o, R)$$

$$R = 3 \text{ u}$$

$$BC = 4 \text{ u}$$

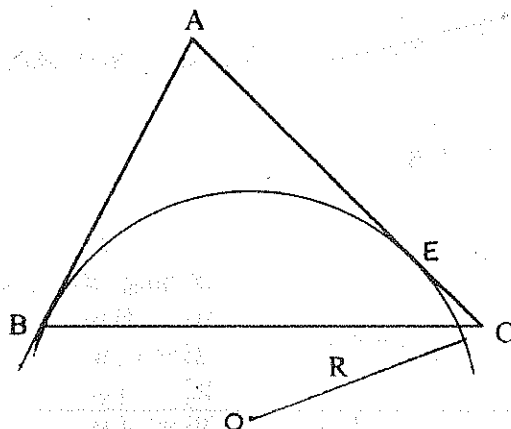
$$DL = 2 \text{ u}$$

$$T) DF = ?$$

$$EH = ?$$

Resp. 1,4 ; 1,29 u

26.-



$$H) \overline{AB} \text{ y } \overline{AC} \text{ tang. } \odot (o, R)$$

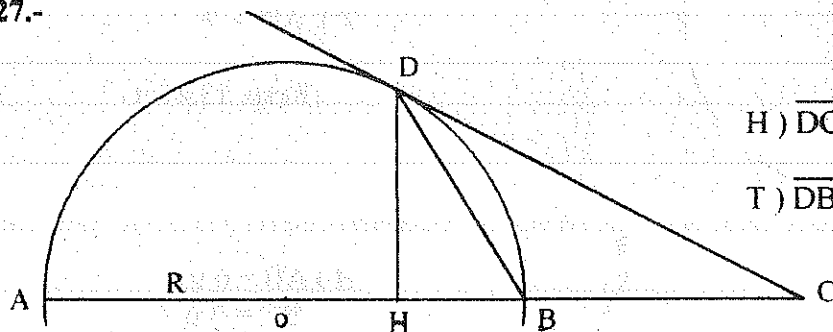
$$BC = 14 \text{ u}$$

$$AC = 10 \text{ u}$$

$$m \hat{ABC} = 70^\circ$$

$$T) R = ?$$

27.-



$$H) \overline{DC} \text{ tang. } \odot (o, R)$$

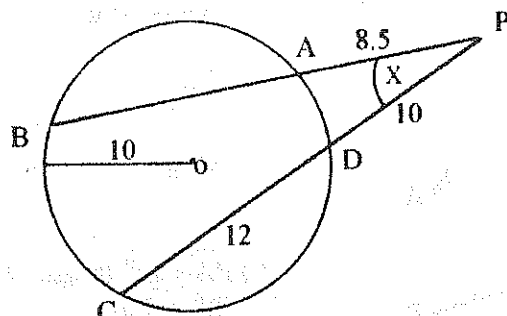
$$T) \overline{DB} \text{ bisectriz } \hat{HDC}$$

28.- En un triángulo isósceles ABC $m \hat{A} = 100^\circ$ y $BC = 10 \text{ u}$. Hallar la distancia entre el ortocentro y el circuncentro del triángulo.

Resp. 6,86 u

29.- Desde un punto A se trazan las tangentes \overline{AB} y \overline{AC} al círculo de radio R. Demostrar que la distancia del centro del círculo al incentro del ABC es R.

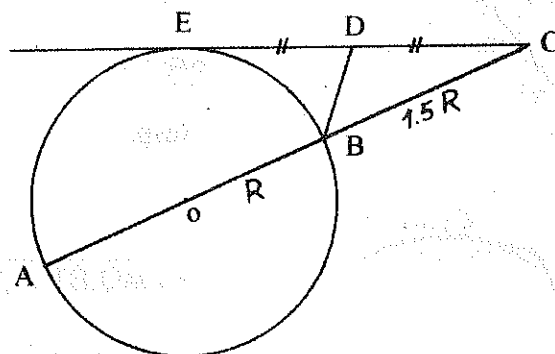
30.-



T) $m\hat{X} = ?$

Resp. $42,6^\circ$

31.-

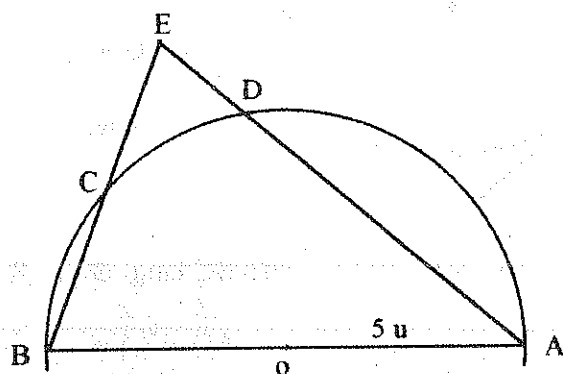


H) \overline{EC} tang. $\odot(O, R)$

T) $m\hat{BDC} = ?$

Resp.

32.-

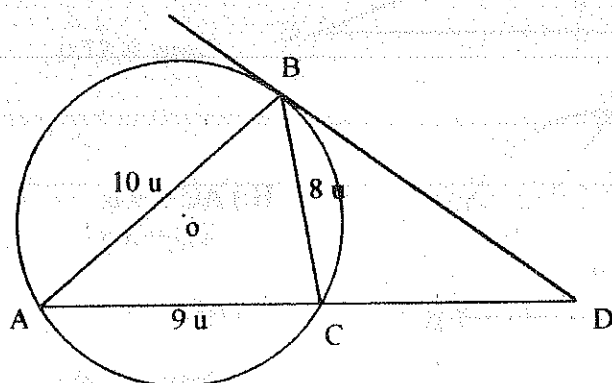


H) $\widehat{BC} = \widehat{CD} = 40^\circ$

T) $DE = ?$

Resp. 2,33

33.-

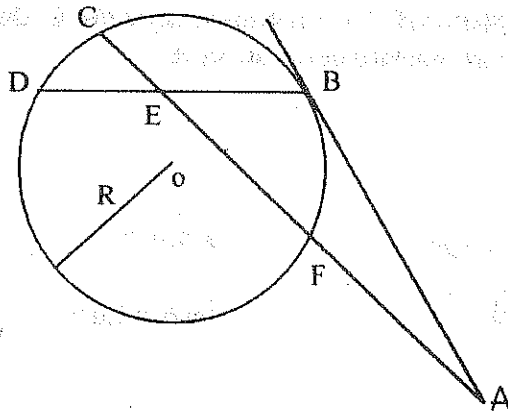


H) \overline{DB} tang. $\odot(O, R)$

T) $BD = ?$

Resp.

34.-

H) \overline{AB} tang. $\odot (O, R)$

$AC = 20 \text{ u}$

$BE = 6 \text{ u}$

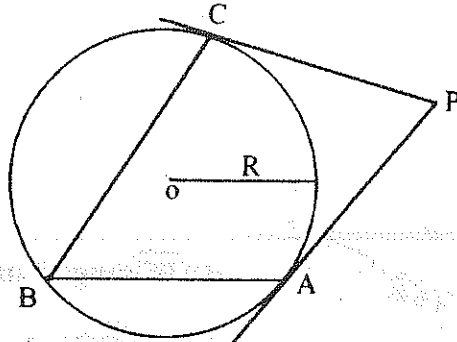
$DE = 4 \text{ u}$

$AE = 17 \text{ u}$

T) $R = ?$

Resp.

35.-

A H) \overline{PA} y \overline{PC} tangs. $\odot (O, R)$

$BC = 4 \text{ u}$

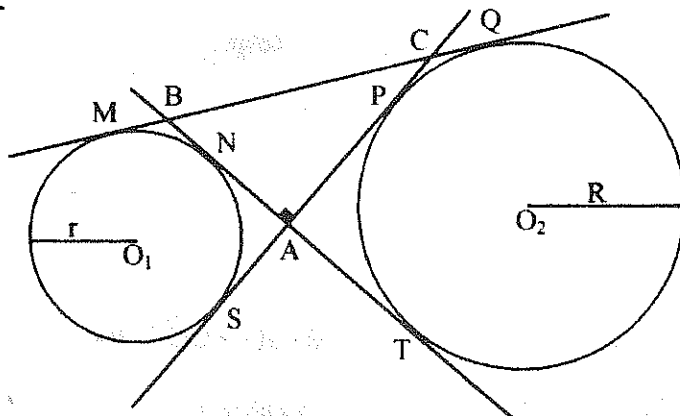
$AP = 2 \text{ u}$

$R = 2,15 \text{ u}$

T) $AB = ?$

Resp.

36.-

H) $\overline{MQ}, \overline{BT}, \overline{CS}$ tangs. comunes

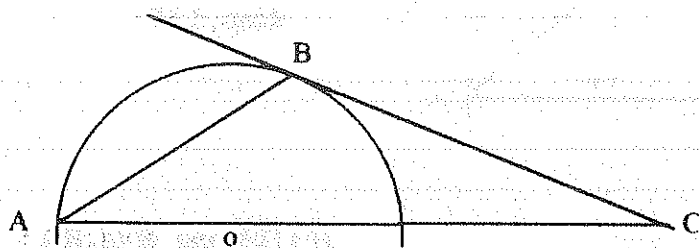
$R = 8 \text{ u.}$

$r = 6 \text{ u.}$

T) $BC = ?$

Resp.

37.-

H) \overline{BC} tang. $\odot (O, R)$

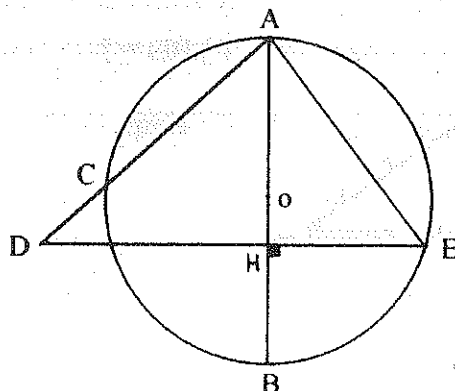
$AB = 4 \text{ u}$

$AO = 2,5 \text{ u}$

T) $BC = ?$

Resp. 8,57 u

38.-

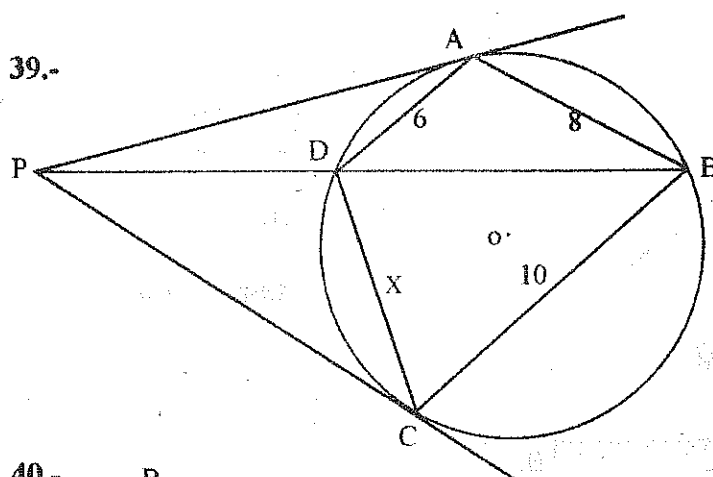
H) $AC = 9 \text{ u}$

$CD = 3 \text{ u}$

T) $AE = ?$

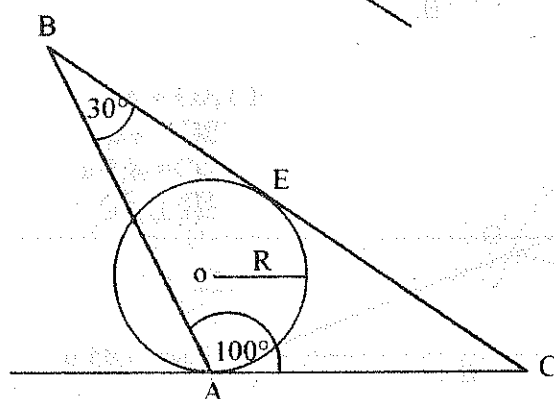
Resp. 10,39 u

39.-

H) \overline{PA} y \overline{PC} tang. $\odot (o, R)$ T) $x = ?$

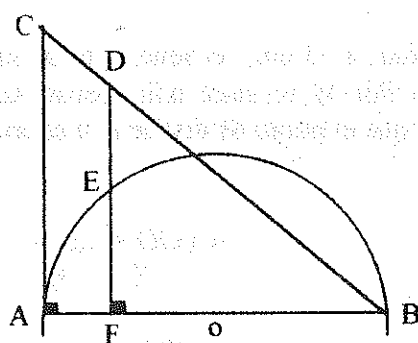
Resp. 7,5 u

40.-

H) \overline{BC} tang. $\odot (o, R)$ $BC = 10$ uT) $R = ?$

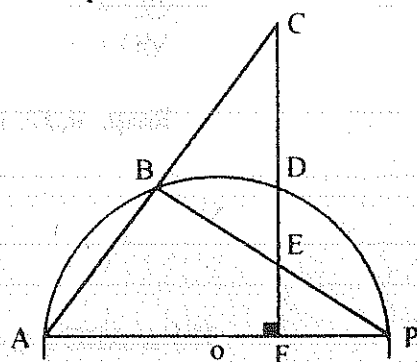
Resp.

41.-

H) $CA = AB = 4$ u $DE \cong EF$ T) $FO = ?$

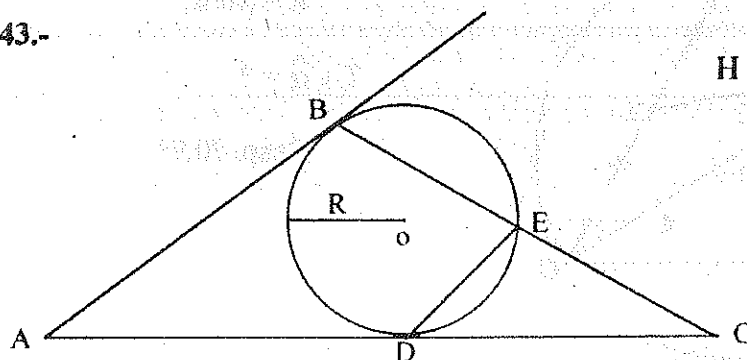
Resp. 2 u

42.-

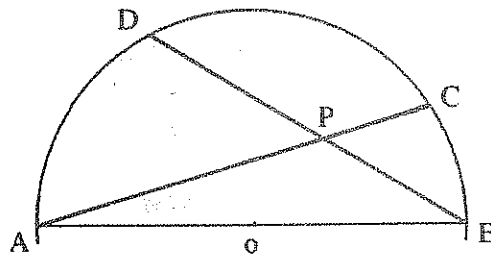
H) $EC = 9$ u $EF = 3$ uT) $DF = ?$

Resp. 6

43.-

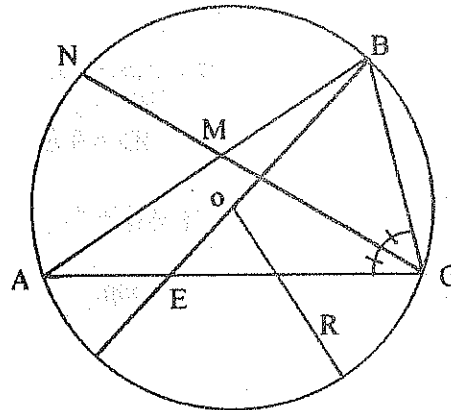
H) \overline{AB} y \overline{AC} tangs. $\odot (o, R)$ $R = 10$ u $m \widehat{BE} = 120^\circ$ $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ T) $DE = ?$ Resp. $10\sqrt{2}u$

49.-



$$T) AC \times AP + BD \times BP = AB^2$$

50.-



$$H) R = 5 u$$

$$BC = 6 u$$

$$AB = 9 u$$

$$T) AE = ?$$

$$MB = ?$$

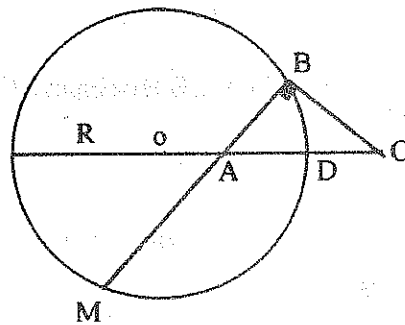
$$EB = ?$$

$$MF = ?$$

$$MN = ?$$

Resp. 4,4; 3,41; 6,1; 2,8; 1,5; 3,02 u

51.-



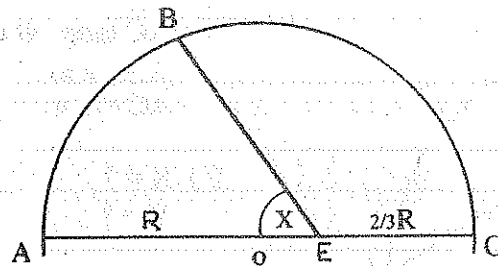
$$H) R = 10 u$$

$$AD = DC = 4 u$$

$$T) AM = ?$$

Resp. 12,64 u

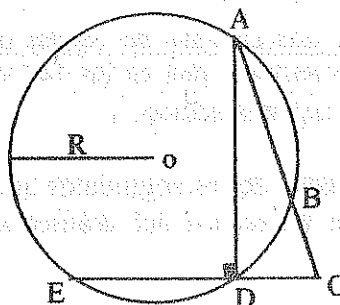
52.-



$$T) \hat{X} = ?$$

Resp.

53.-



$$H) R = 6 u$$

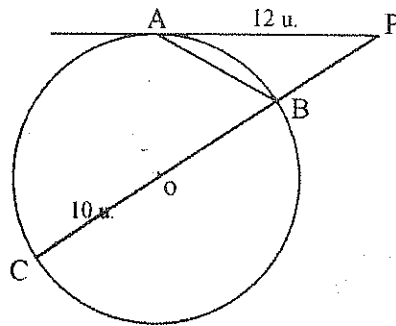
$$AB = 8 u$$

$$BC = 4 u$$

$$T) BD = ?$$

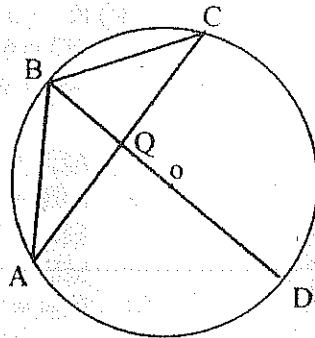
Resp. 4,9 u

54.-

H) \overline{AP} tang. $\odot (O, R)$ T) $AB = ?$

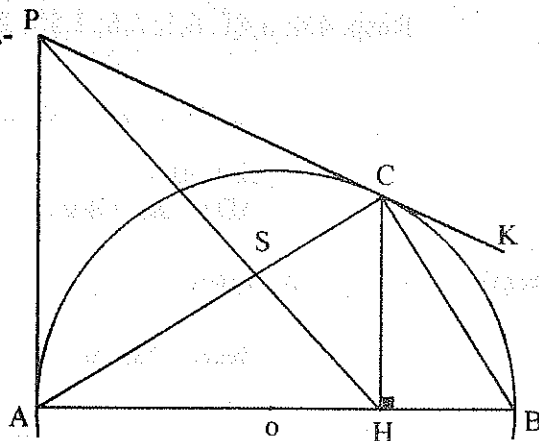
Resp.

55.-

H) $AB = BC$ $BQ = 3 \text{ u.}$ $QD = 9 \text{ u.}$ T) $AB = ?$

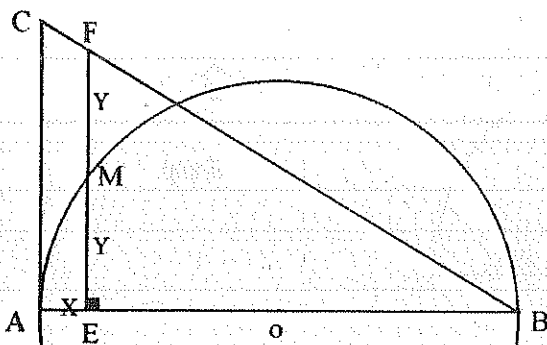
Resp.

56.-

H) \overline{AP} y \overline{PC} tangs. $\odot (O, R)$ $OH = HB$ $R = 5 \text{ u}$ T₁) \overline{CB} Bisectriz \widehat{KCH} T₂) $PS = ?$

Resp. 7,65 u

57.-

H) \overline{AC} tang. $\odot (O, R)$ $R = 10 \text{ u}$ $AC = 5 \text{ u}$ T) $X = ?$ $Y = ?$

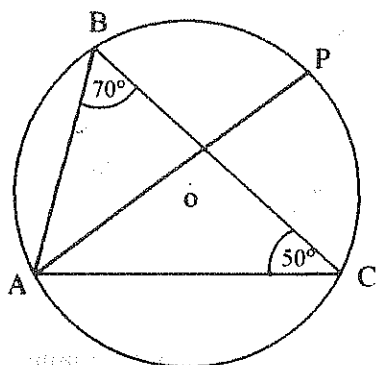
Resp.

58.- En un círculo de 25 cm de radio, dos cuerdas se cortan de tal manera que el producto de los segmentos de corte en cada una es de 145 cm^2 . Calcular a qué distancia del centro se halla el punto de intersección.

Resp. 12 u

59.- Demostrar que la suma de los cuadrados de los segmentos que une un punto de un semicírculo, con los dos puntos de trisección del diámetro, es igual a $5/9$ del cuadrado del diámetro.

60.-

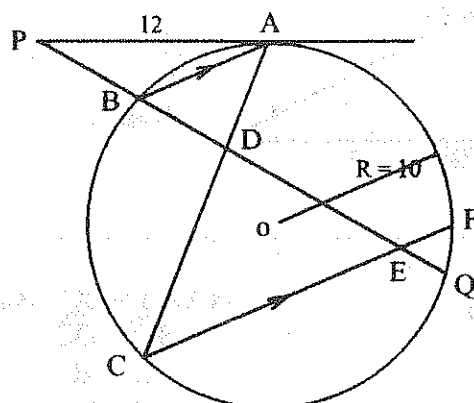


H) $BC = 10 \text{ u}$

T) $AP = ?$

Resp. 11,37

61.-



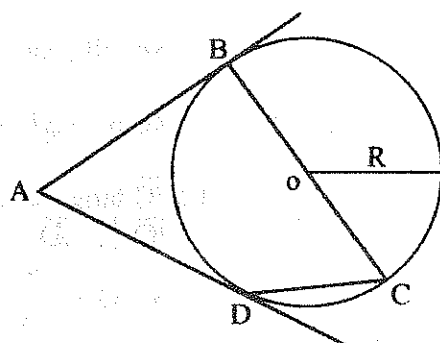
H) $\widehat{AB} = 45^\circ$
 $\widehat{BC} = 90^\circ$
 $\overline{AP} \text{ tang. } \odot (O, R)$

T) $BD = ?$

$EF = ?$

Resp

62.-

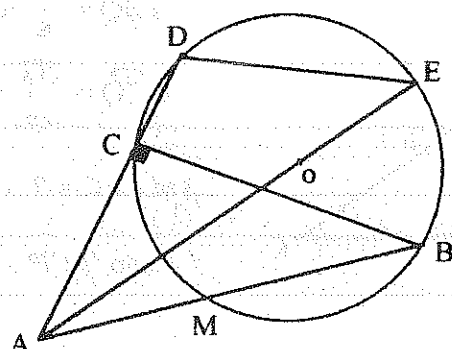


H) \overline{AB} y \overline{AD} tang. $\odot (O, R)$
 $AB = 16 \text{ u}$
 $R = 10 \text{ u}$

T) $DC = ?$

Resp. 10,6 u

63.-

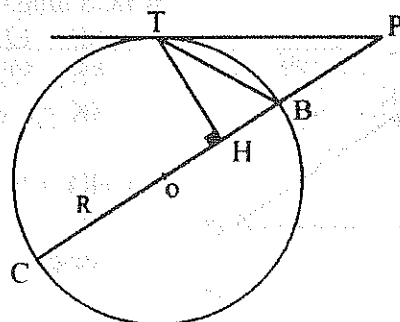


H) $AB = 6 \text{ u}$
 $m\widehat{CAB} = 70^\circ$
 $\overline{AM} \cong \overline{MB}$

T) $DE = ?$

Resp. 4,83 u

64.-



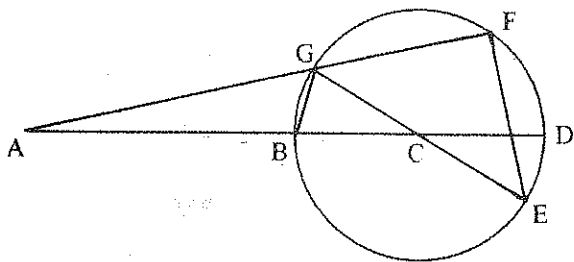
H) \overline{PT} tang. $\odot (O, R)$
 $TP = 15 \text{ u}$
 $R = 10 \text{ u}$

T) $TB = ?$

$TH = ?$

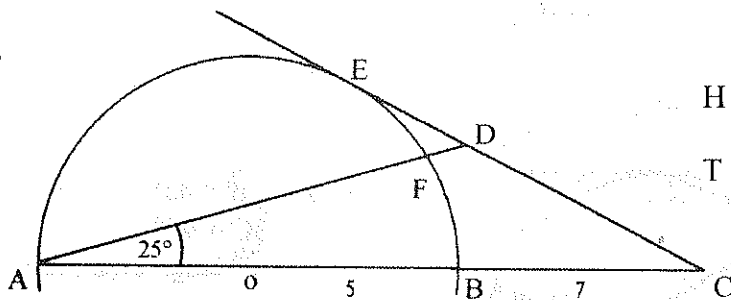
Resp. 9,43 ; 8,32 u

65.-



$$T) \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

66.-

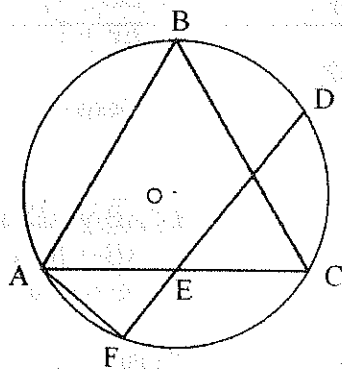


$$H) \overline{CE} \text{ tang. } \odot (o, R)$$

T) $DF = ?$

Resp. 2

67.-



H) $\underline{AB} = \underline{BC} = \underline{AC}$

$$\widehat{BD} = \widehat{DC}$$

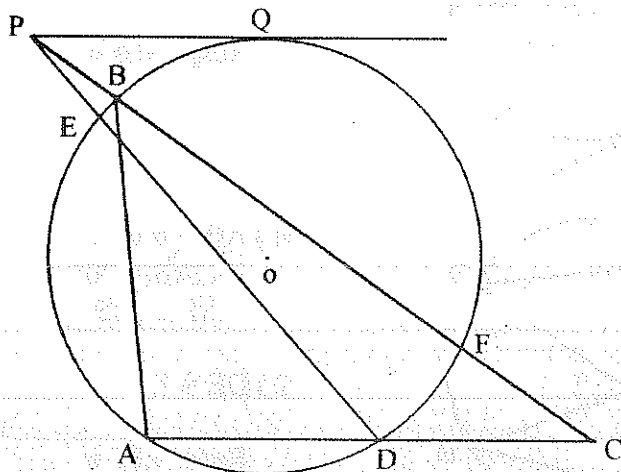
$$AE = EC$$

$$R = 5 \text{ u}$$

T) AF, DF, EF, =.?

Resp. 3,27; 9,45; 2,84 u.

68.-



$$H) \overline{PQ} \text{ tang. } \odot (O, R)$$

$$\overline{PQ} \perp \overline{AD}$$

$$m \widehat{AQ} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad.}$$

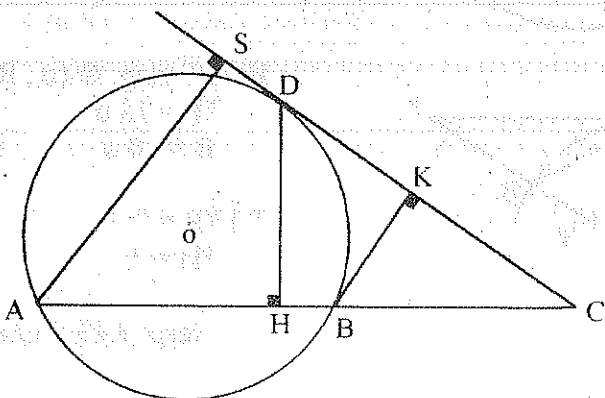
$$m \widehat{BQ} = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

$$m \widehat{EQ} = \frac{5\pi}{18} \text{ rad.}$$

T) $m_{ABC} = ?$

Resp. 76,7°

69.-



$$H) \text{ CS tang. } \odot (o, R)$$

$$AB = 12,5 \text{ u}$$

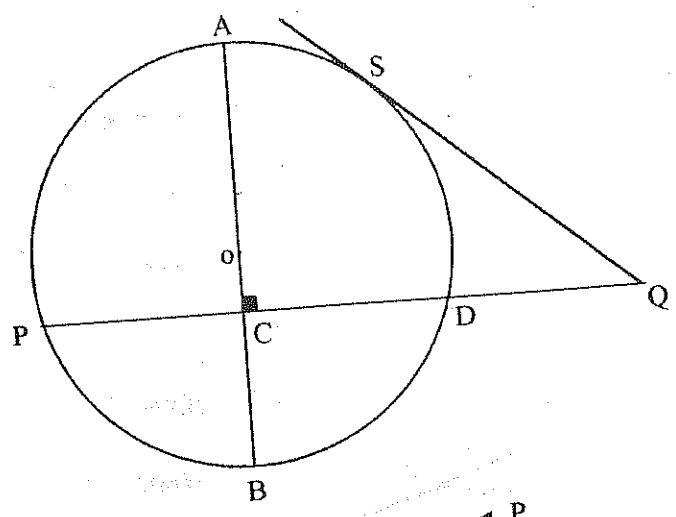
$$AS = 13,5 \text{ u}$$

BK = 6 u

T) HD = ?

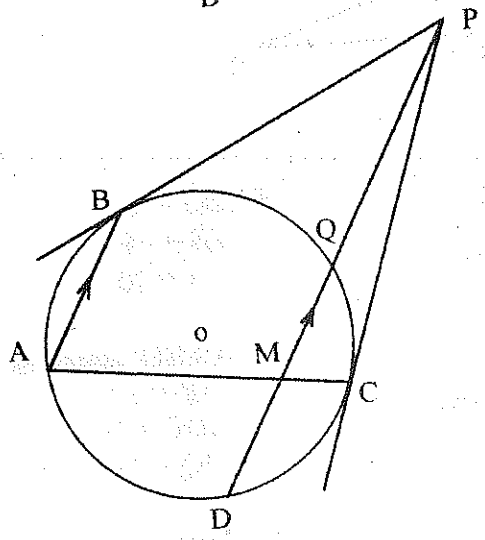
Resp.

76.-



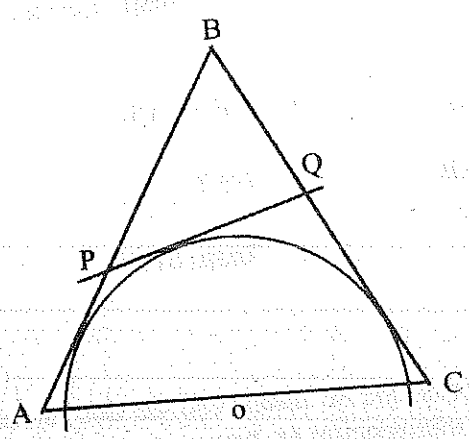
- H) $AP = QC$
- T) $QS = AC$

77.-



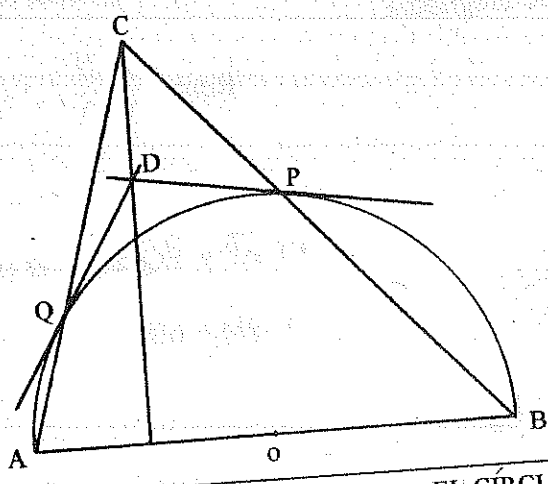
- H) \overline{PB} y \overline{PC} tangentes $\odot (O, R)$
 $\overline{AB} \perp \overline{DP}$
- T) $DM = MQ$

78.-



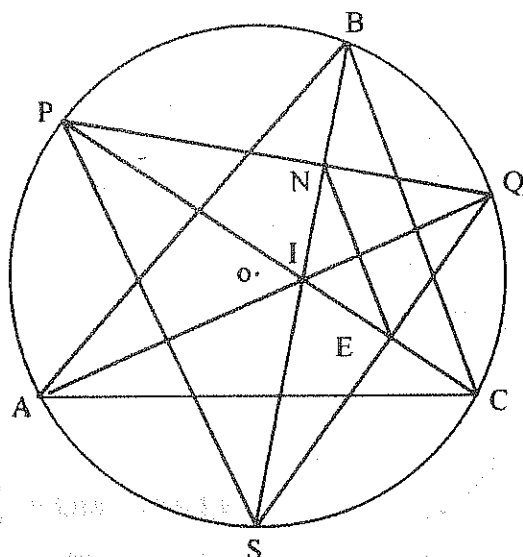
- H) \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{PQ} tangs. $\odot (O, R)$
 $AB = BC$
- T) $AO^2 = AP \times QC$

79.-



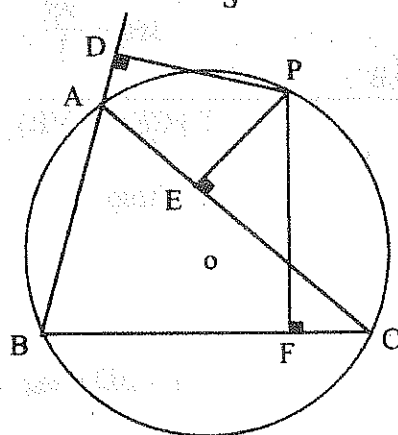
- H) \overline{DP} y \overline{DQ} tang. $\odot (O, R)$
- T) $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

80.-

H) $\cdot I$ Incentro $\triangle ABC$

T) $EN = \frac{BC}{2}$

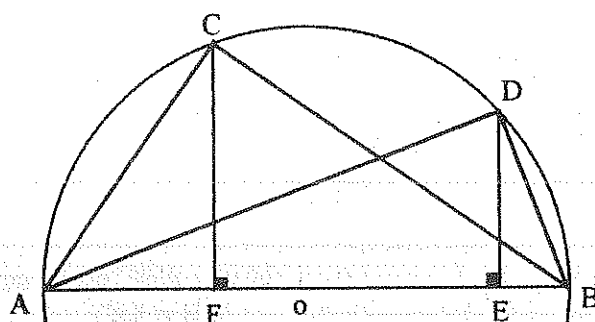
81.-



H) $\overline{PF} \perp \overline{BC}$
 $\overline{PD} \perp \overline{AB}$
 $\overline{PE} \perp \overline{AC}$

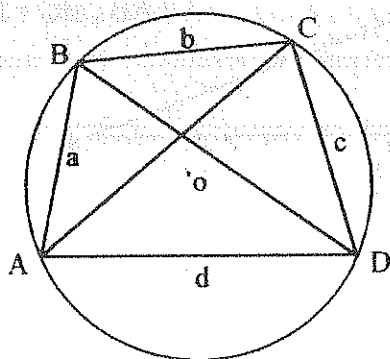
T) D-E-F colineales

82.-



T) $\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{AF}{AE}$

83.-

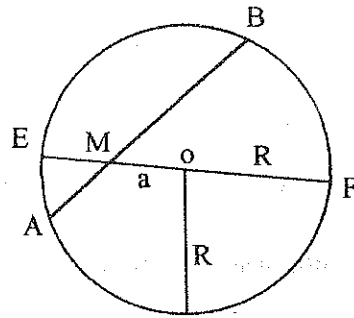


T) $AC = \frac{ac+bd}{a}$

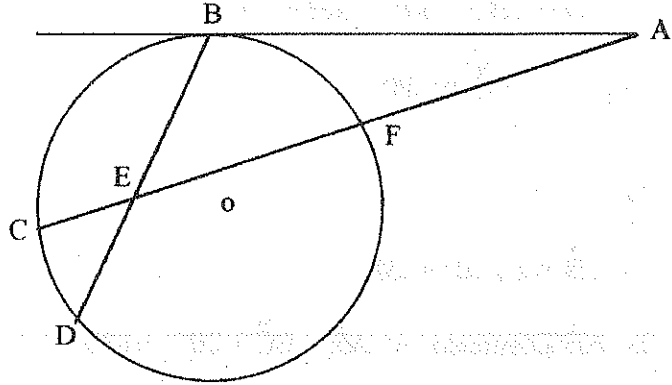
17.-

1.- $OE = OF = R$ Construcción2.- $AM \times MB = EM \times MF = (R - a) \times (R + a)$

$$\therefore AM \times MB = R^2 - a^2$$



22.-

1.- $3 \times EF = 4 \times 6 \quad \therefore EF = 8$ 2.- $AF = 17 - EF = 9$ 3.- $AB^2 = AC \times AF \quad \therefore AB = 13,41$ 

30.-

1.- $(12 + 10) \times 10 = (AB + 8,5) \times 8,5$

$$\therefore AB = 17,38$$

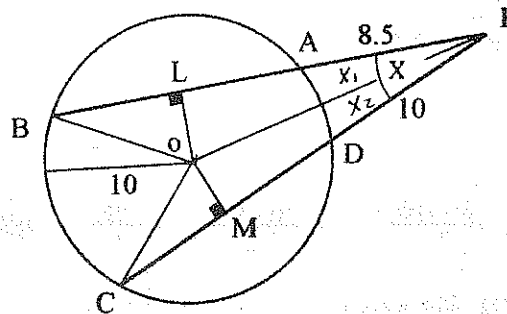
2.- $OM = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

$$OL = \sqrt{10^2 - 8,69^2} = 4,95$$

3.- $\tan \hat{X}_1 = \frac{OL}{LP} \Rightarrow \hat{X}_1 = 16^\circ$

$$\tan \hat{X}_2 = \frac{OM}{MP} \Rightarrow \hat{X}_2 = 26,5^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{X} = 42,6^\circ$$



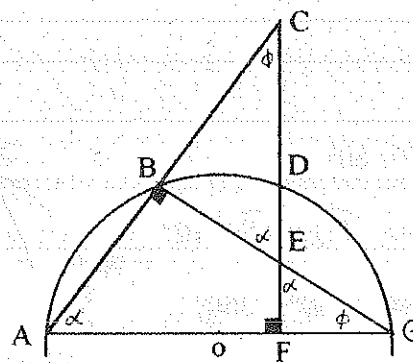
42.-

1.- $\hat{B} = 90^\circ \quad \therefore \hat{\alpha} + \hat{\phi} = 90^\circ$ 2.- $\triangle ACF \sim \triangle EGF \quad (A, A,)$

$$\frac{12}{FG} = \frac{AF}{3}$$

3.- $DF^2 = AF \times FG = 12 \times 3$

$$\therefore DF = 6$$



48.-

$$1.- \frac{AC}{\text{Sen } 60^\circ} = 2R$$

$$\therefore AB = BC = CA = 17,32 \text{ u.}$$

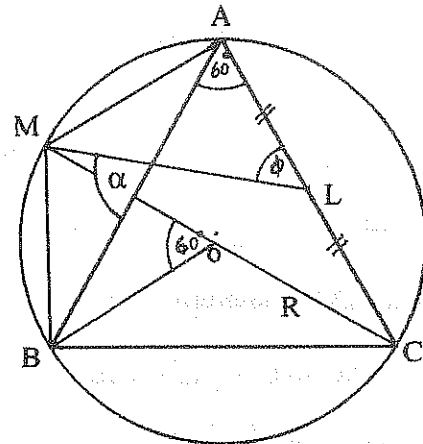
$$2.- \widehat{AM} = \widehat{MB} = 60^\circ$$

$$\therefore AM = MB = R = 10 \text{ u.}$$

$$3.- \widehat{MBL} = \frac{\widehat{MA} + \widehat{AC}}{2} = 90^\circ$$

$$\therefore \tan \hat{\phi} = \frac{MB}{BL} \Rightarrow \hat{\phi} = 49,1^\circ$$

$$4.- \hat{\alpha} = 180^\circ - 60^\circ - \hat{\phi} = 70,9^\circ$$



52.-

$$1.- \widehat{AOB} = \widehat{AB} = 80^\circ$$

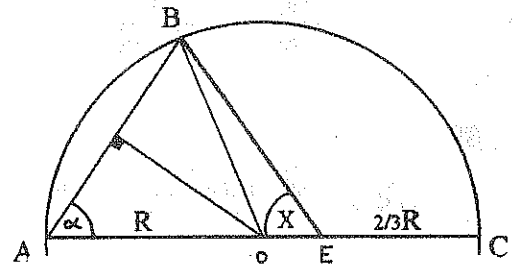
$$2.- \text{Sen } 40^\circ = \frac{\frac{AB}{2}}{R} \Rightarrow AB = 1,28 R$$

$$3.- \hat{\alpha} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$4.- BE^2 = AB^2 + (R + \frac{1}{3}R)^2 - 2 \times AB \times (R + \frac{1}{3}R) \times \cos 50^\circ$$

$$\Rightarrow CE = 1,1 R$$

$$5.- \frac{AB}{\text{Sen } \hat{x}} = \frac{1,1 R}{\text{Sen } 50^\circ} \Rightarrow \hat{x} = 63^\circ$$

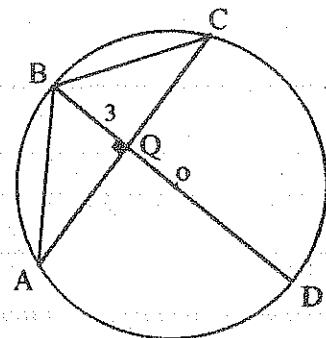


55.-

$$1.- \overline{BO} \text{ es Mediatriz de } \overline{AC} \therefore AQ = QC$$

$$2.- BQ \times QD = AQ \times QC \therefore AQ = QC = 5,196 \text{ u.}$$

$$3.- AB = \sqrt{AQ^2 + BQ^2} = 6 \text{ u.}$$



56.-

$$T_1.) 1.- \triangle ACH; \triangle CHB \text{ y } \triangle ACB \text{ Rectángulos} \therefore \hat{\alpha} + \hat{\phi} = 90^\circ$$

$$2.- \text{Las Tangentes } PA = PC \therefore \triangle APC \text{ Isósceles}$$

$$3.- 2\hat{\alpha} + \hat{\phi} + \widehat{KCB} = 180^\circ \quad \therefore \widehat{KCB} = \hat{\phi}$$

$\Rightarrow \overline{CB}$ Bisectriz de \widehat{KCH}

$$T_2.) 1.- CH^2 = 7.5 \times 2.5 \quad \therefore CH = 4.33$$

$$AC = 8.66$$

$$2.- \text{Sen } \hat{\alpha} = \frac{7.5}{8.66} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

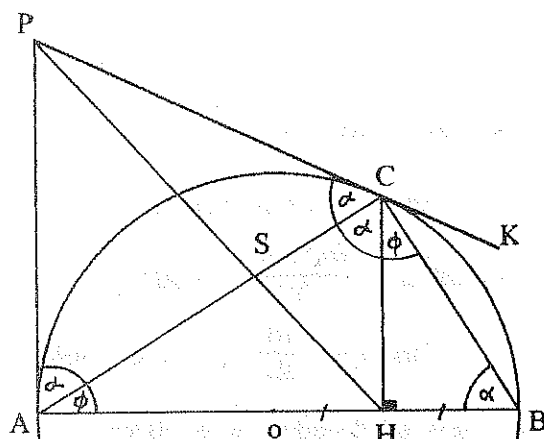
3.- ΔAPC Equilátero

$$\therefore PA = PC = AC = 8.66$$

$$4.- PH = \sqrt{PA^2 + 7.5^2} = 11.4$$

5.- $\Delta APS \sim \Delta CHS$ (A,A,)

$$\frac{PA}{CH} = \frac{PS}{PH - PS} \Rightarrow PS = 7.65$$



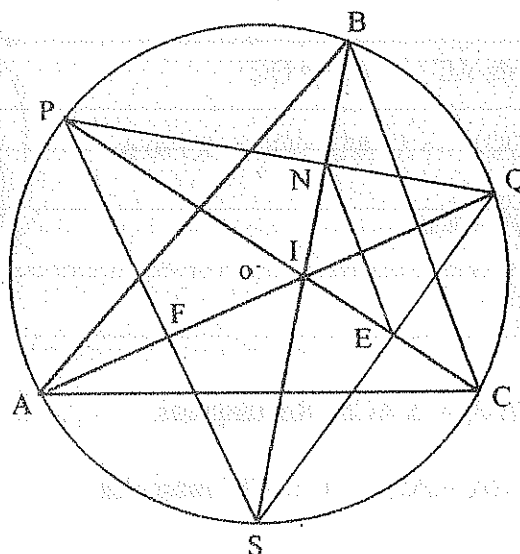
80.-

$$1.- \widehat{AFS} = \frac{\widehat{AS} + \widehat{PB} + \widehat{BQ}}{2} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ$$

2.- Idem: $\widehat{AFS} = \widehat{BNQ} = \widehat{CES} = 90^\circ \quad \therefore I$ es Ortocentro del ΔPQS

3.- Según problema # 28 de 5.4.1. EJERCICIOS RESUELTOS: $AF = FI$
 $BN = NI$
 $CE = EI$

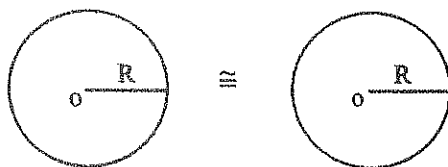
4.- En ΔBIC : E y N son puntos medios $\therefore EN = \frac{BC}{2}$



5.8. POSICION RELATIVA DE DOS CIRCULOS

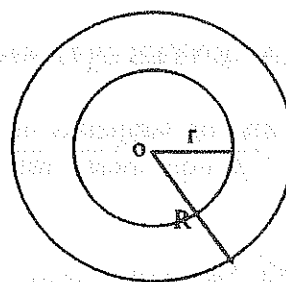
5.8.1. CONGRUENTES

Si tienen tres puntos comunes o, si sus radios son congruentes.



5.8.2. CONCENTRICOS

Si tienen el mismo centro pero diferente radio.



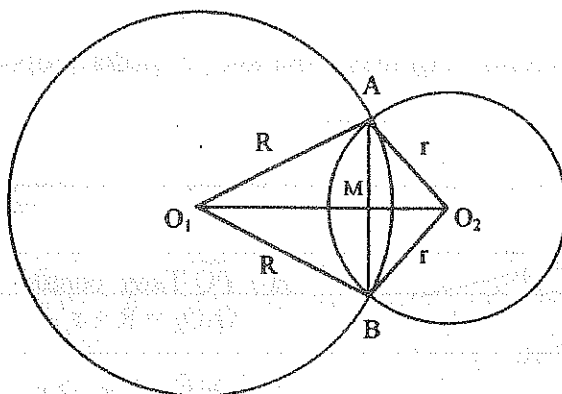
5.8.3. SECANTES

Si tienen dos puntos comunes (puntos de intersección).

El segmento que une los puntos de intersección se llama "cuerda común".

El segmento que une los centros se llama "línea de centros".

La línea de centros de dos círculos secantes es la mediatriz de la cuerda común, y es menor que la suma de sus radios y mayor que la diferencia.



H) (O_1, R) y (O_2, r)
son círculos secantes.
AB cuerda común.

T₁) $\overline{O_1O_2} \perp \overline{AB}$

T₂) $\overline{AM} \cong \overline{MB}$

D) $AO_1 = BO_1 = R$
 $\therefore O_1$ equidista de A y B

$AO_2 = BO_2 = r$
 $\therefore O_2$ equidista de A y B

$\Rightarrow \overline{O_1O_2} \perp \overline{AB}$ y $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ ///.

Círculos Ortogonales son dos círculos secantes tales que, las tangentes trazadas en dichos puntos son perpendiculares entre si.

El cuadrado de la distancia entre los centros de dos círculos ortogonales es igual a la suma de los cuadrados de sus radios.

5.8.4. TANGENTES

Si tienen un punto común.

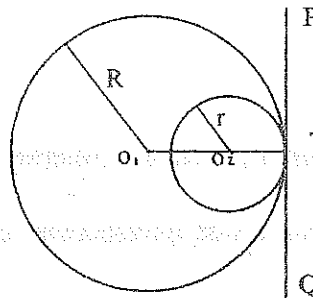
La recta que es tangente a dos círculos se llama "tangente común".

5.8.5. TANGENTES INTERNOS

Dos círculos son tangentes interiormente, si : los centros y el punto de tangencia son colineales ; y la distancia entre los centros es igual a la diferencia de los radios.

\overline{PQ} Tangente común

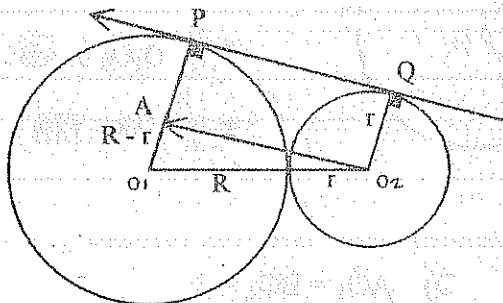
$$O_1O_2 = R - r$$



5.8.6. TANGENTES EXTERNOS

Dos círculos son tangentes externos, si : los centros y el punto de tangencia son colineales y la distancia entre los centros es igual a la suma de los radios.

La tangente externa común de los círculos tangentes externos, es media proporcional entre sus diámetros.



H) \overline{PQ} Tang. común

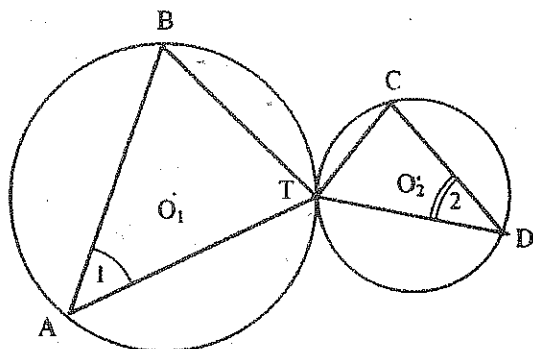
$$O_1O_2 = R + r$$

$$T) PQ^2 = 2 R \times 2 r$$

$$\begin{aligned} D) \quad AO_2^2 &= (R + r)^2 - (R - r)^2 \\ AO_2^2 &= R^2 + 2Rr + r^2 - R^2 + 2Rr - r^2 \\ AO_2^2 &= 4Rr = PQ^2 \\ \Rightarrow PQ^2 &= 2R \times 2r \quad /// \end{aligned}$$

5.8.7. EJERCICIOS

1.-



$$H) m\hat{2} - m\hat{1} = \frac{\pi}{9}$$

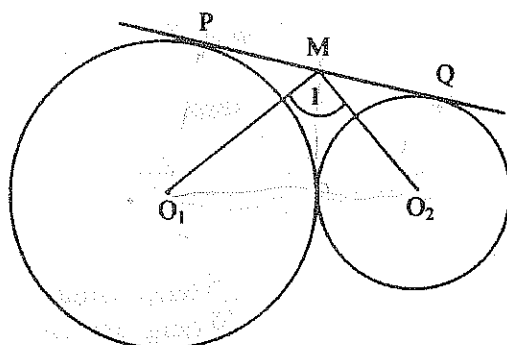
$$m\hat{BTC} = \frac{5\pi}{9}$$

$$T) m\hat{1} = ?$$

$$m\hat{2} = ?$$

Resp. $40^\circ, 60^\circ$

2.-



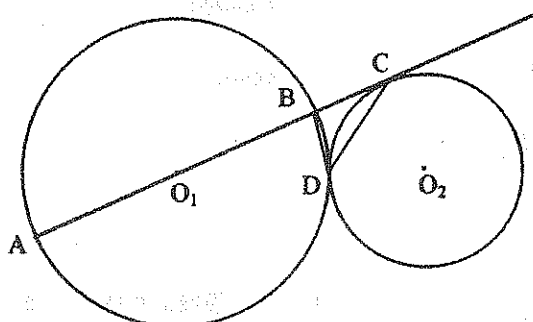
$$H) \overline{PQ} \text{ tang. común}$$

$$PM = MQ$$

$$T) m\hat{1} = ?$$

Resp. 90°

3.-

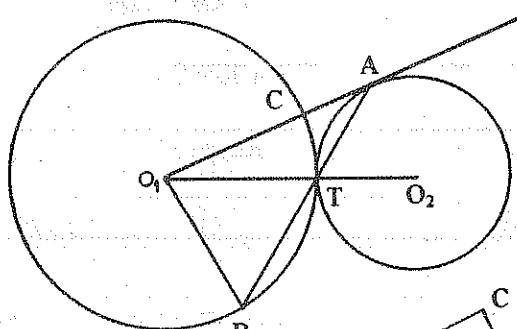


$$H) \odot (O_1, R_1) \text{ tang. } \odot (O_2, R_2)$$

$$\overline{AC} \text{ tang. } \odot (O_2, R_2)$$

$$T) m\hat{BDC} = \frac{\pi}{4}$$

4.-



$$H) \odot (O_1, R_1) \text{ tang. } \odot (O_2, R_2)$$

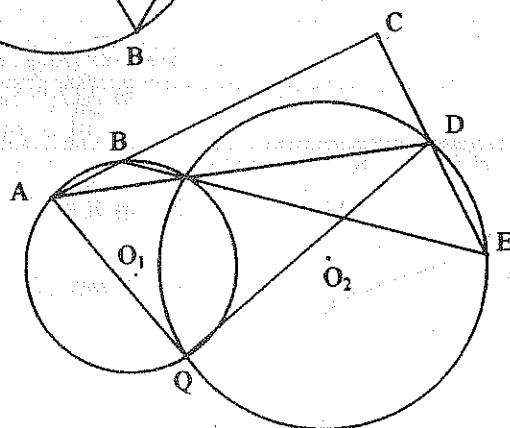
$$\overline{O_1A} \text{ tang. } \odot (O_2, R_2)$$

$$m\hat{AO_1T} = 25^\circ$$

$$T) m\hat{O_1BT} = ?$$

Resp. $57,5^\circ$

5.-

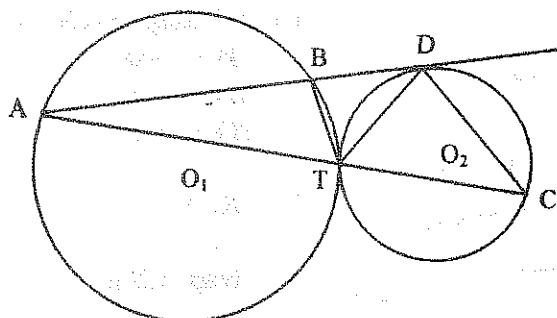


$$H) m\hat{ACE} = \frac{5\pi}{9}$$

$$T) m\hat{AQD} = ?$$

Resp. 80°

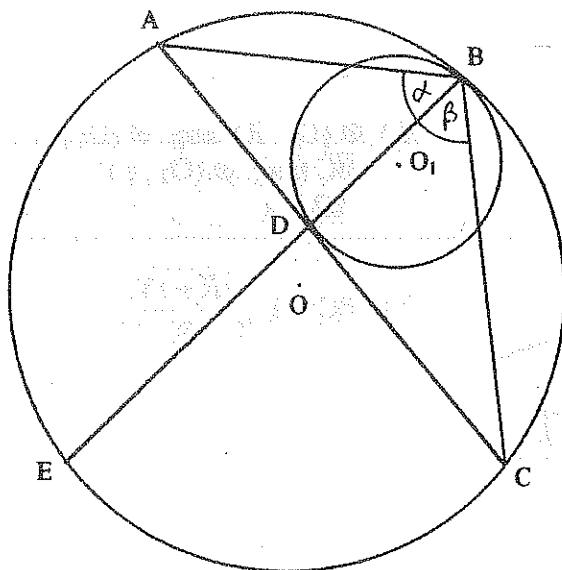
11.-



H) \overline{AD} tang. $\odot (O_2, R_2)$
 T punto de contacto

T) $\triangle BTD \sim \triangle TDC$

12.-



a.- H) $\odot (O_1, R_1)$ tang. $\odot (O, R)$
 \overline{AC} tang. $\odot (O_1, R_1)$

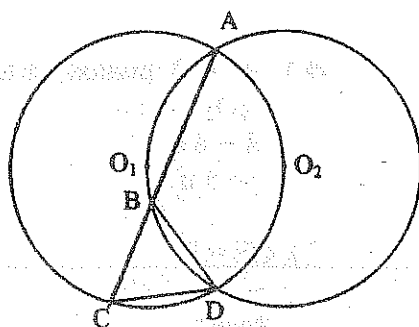
T) $\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$

b.- H) $m\widehat{AB} = \frac{\pi}{3}$
 $m\widehat{AE} = \frac{5\pi}{9}$

T) $m\widehat{ADB} = ?$

Resp. 80°

13.-



T) $\triangle CDB$ equilátero.

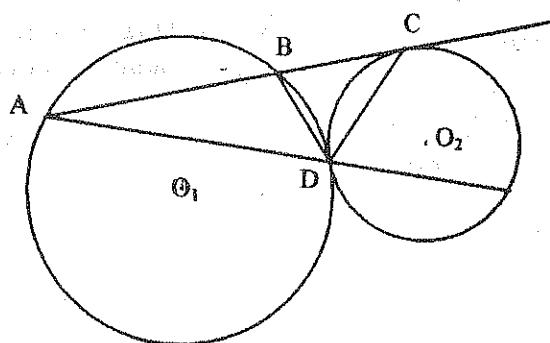
14.- En un círculo de radio R . En un diámetro se toma un punto A tal que $OA = a$. Hallar el radio de un segundo círculo tangente al diámetro en A y al círculo dado.

Resp. $\frac{R^2 - a^2}{2R}$

15.- Los lados de un triángulo miden 6, 7 y 9 cm.; tomando como centro sus vértices se trazan tres círculos mutuamente tangentes. El círculo cuyo centro es el vértice del ángulo menor del triángulo es tangente interiormente a los otros dos, mientras que estos son entre sí tangentes exteriormente. Hallar los radios de los círculos.

Resp.

16.-

H) \overline{AC} tang. $\odot (O_2, R_2)$

$$AB = 8 \text{ u}$$

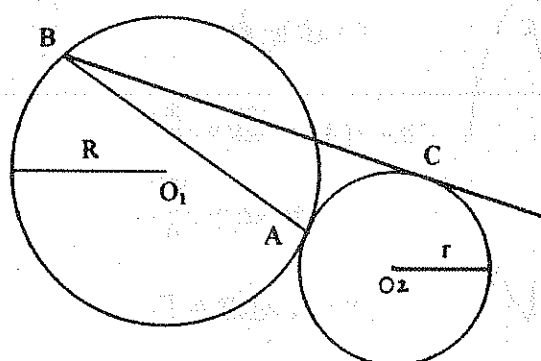
$$AD = 10 \text{ u}$$

$$BD = 4 \text{ u}$$

T) $DC = ?$

Resp. 5,5 u

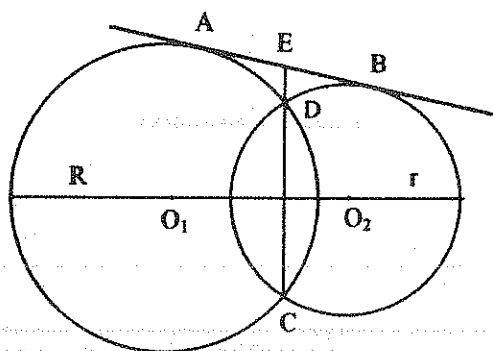
17.-

H) $\odot (O_1, R)$ tang. $\odot (O_2, r)$ \overline{BC} tang. $\odot (O_2, r)$

$$AB = a$$

T) $BC = a \sqrt{\frac{R+r}{R}}$

18.-



H) A y B puntos de tangencia

$$O_1O_2 = 10 \text{ u}$$

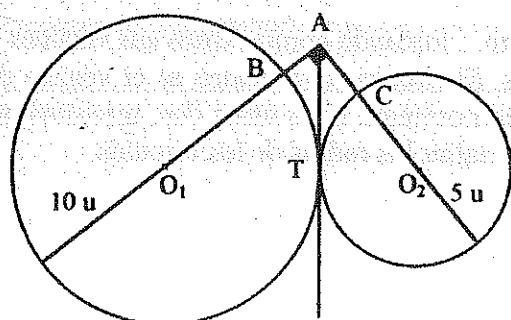
$$R = 8 \text{ u}$$

$$r = 5 \text{ u}$$

T) $CE = ?$

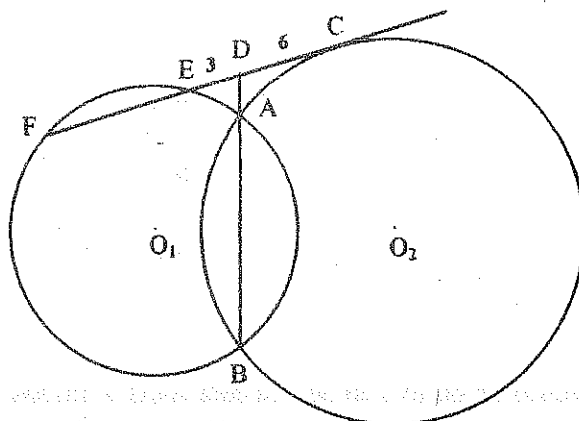
Resp.

19.-

H) $\odot (O_1, R)$ tang. $\odot (O_2, r)$ \overline{AT} tang. comúnT) $AB = ?$

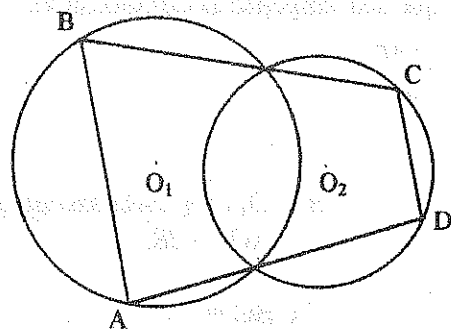
Resp. 2,24 u

20.-

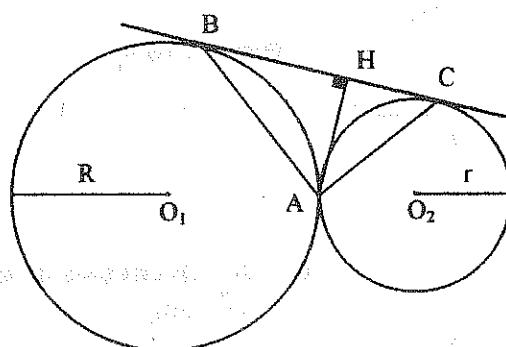
H) \overline{FC} tang. $\odot (O, R)$ T) $EF = ?$

Resp. 9 u

21.-

T) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

22.-

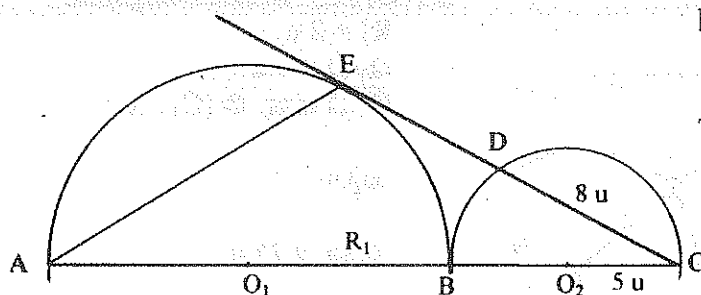
H) \overline{BC} tang. comúnT) $m \widehat{BAC} = ?$
 $AH = f(R, r) = ?$

Resp.

- 23.- Se trazan las tangentes a dos círculos tangentes externamente de radios R y r . Determinar la longitud del segmento de la tangente interna comprendida entre las tangentes externas. Resp.

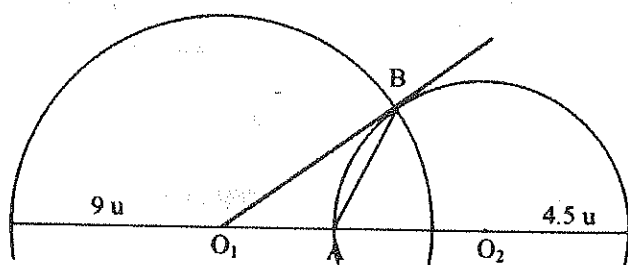
- 24.- Por el punto de contacto de dos círculos tangentes externamente se traza una secante común. Demostrar que las cuerdas son directamente proporcionales a sus radios.

25.-

H) O_1, O_2 círculos tangentes
 \overline{CE} tang. $\odot (O_1, R_1)$ T) $AE = ?$

Resp. 26,8 u

26.-



H) $O_1O_2 = 10$

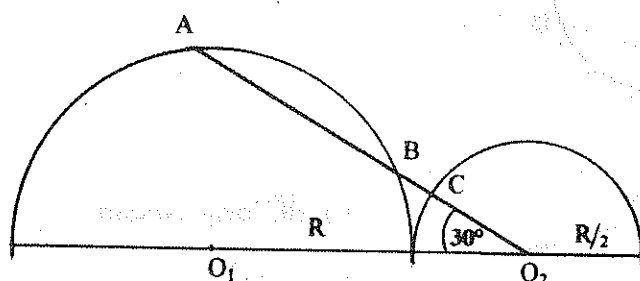
T) $AB = ?$

Resp. 4,78

27.- Una recta es tangente a un círculo de radio r en M . En esta recta a ambos lados del punto M se toman los puntos A y B tal que $AM = MB = a$. Hallar el radio del círculo que pasa por A y B , además que sea tangente al círculo dado.

Resp. $\frac{a^2 + 4r^2}{4r}$

28.-



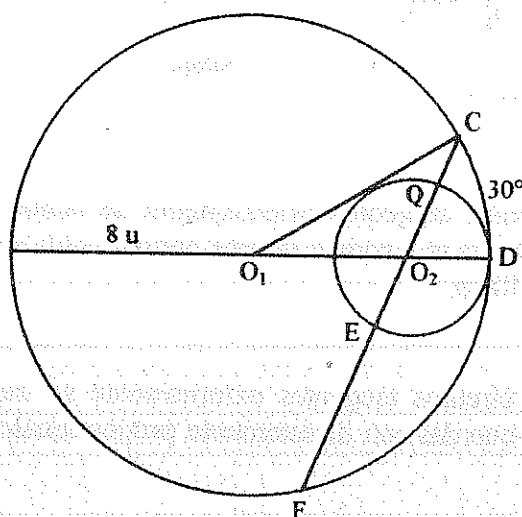
H) O_1 y O_2 círculos tangentes

$AO_2 = 2R$

T) $BC = ?$

Resp. $0,18 R$

29.-



H) O_1 y O_2 círculos tangentes

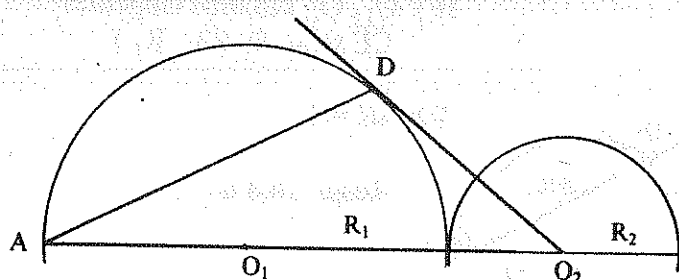
$\overline{O_1C}$ tang. $\odot (O_1, R_1)$

T) $CQ = ?$

$EF = ?$

Resp.

30.-



H) O_1 y O_2 círculos tangentes

$R_2 = 2u$

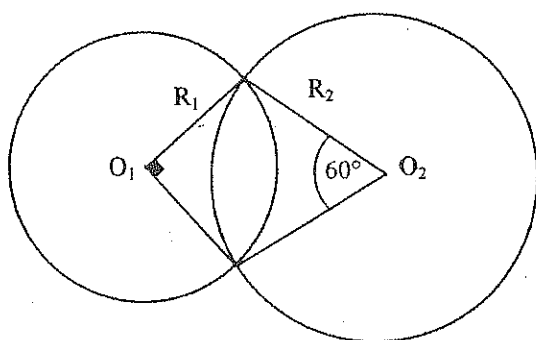
$O_2D = 5u$

$\overline{O_2D}$ tang. $\odot (O_1, R_1)$

T) $AD = ?$

Resp. $9,75 u$

31.-



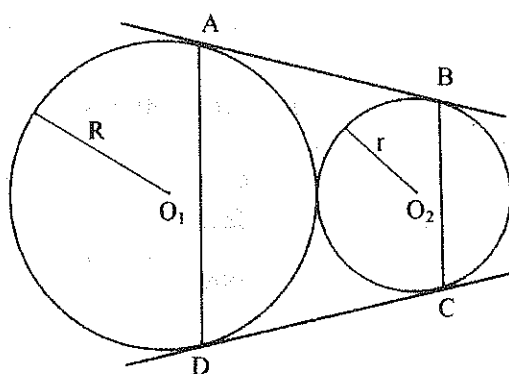
$$H) O_1O_2 = a$$

$$T) R_1 = ?$$

$$R_2 = ?$$

Resp.

32.-



H) A, B, C y D puntos de tangencia

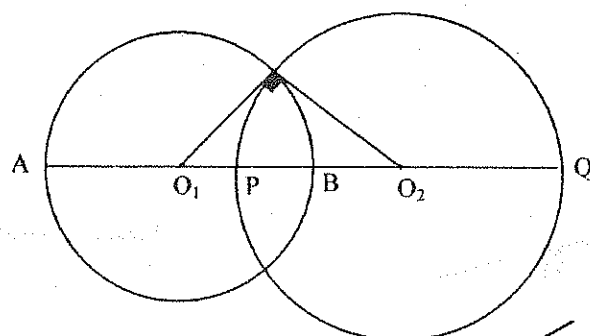
$$R = 10 \text{ u}$$

$$r = 6 \text{ u}$$

$$T) \frac{AD + BC}{2} = ?$$

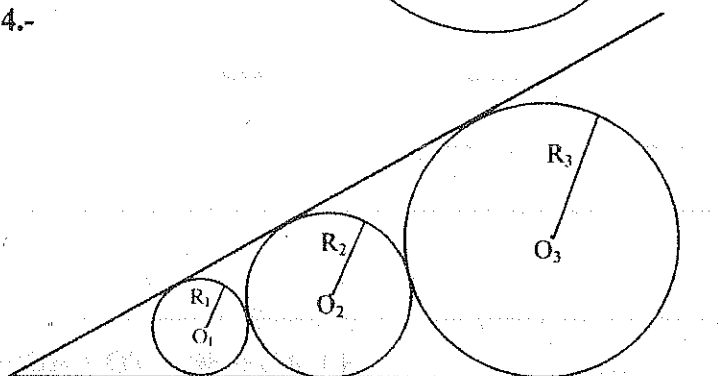
Resp.

33.-



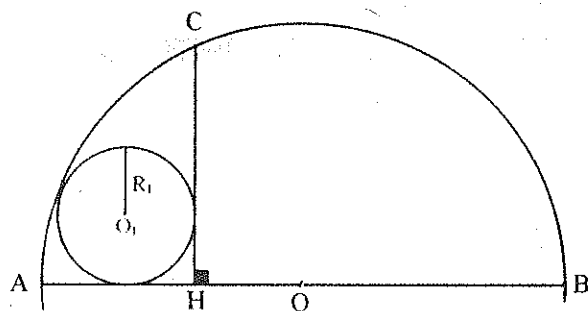
$$T) PB = AP \times \frac{BQ}{AQ}$$

34.-



$$T) R_2^2 = R_1 \times R_3$$

35.-



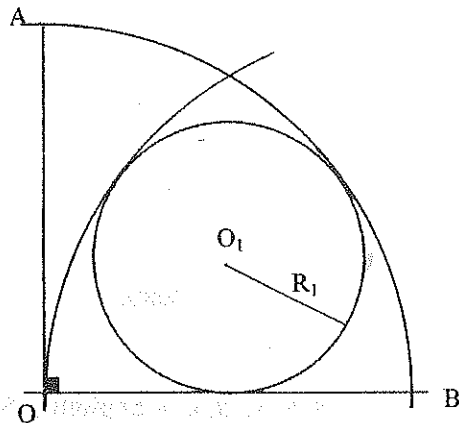
$$H) AO = OB = a$$

$$AH = 2 HO$$

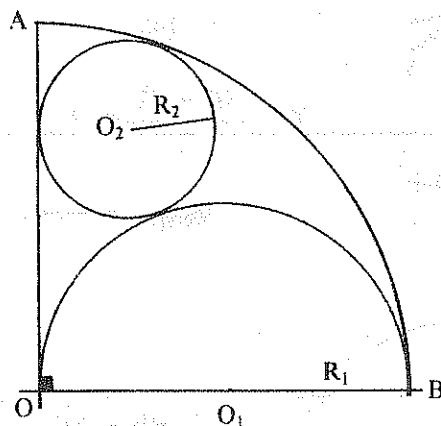
$$T) R_1 = ?$$

Resp. $0,3 a$

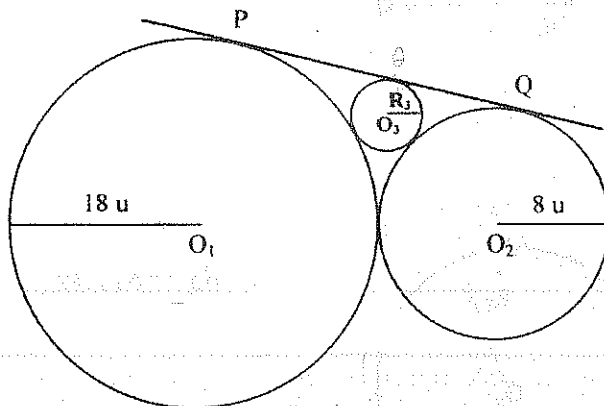
36.-

H) $OA = OB = a$ T) $R_1 = ?$ Resp. $\frac{3a}{8}$

37.-

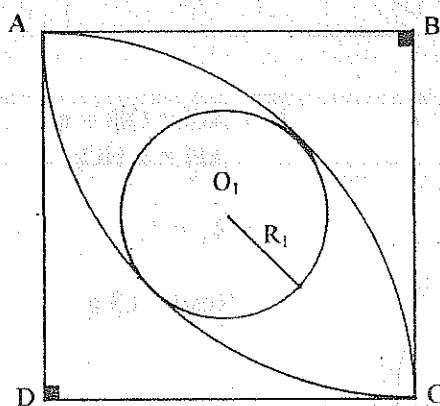
H) $OA = OB = a$ T) $R_1 = ?$ $R_2 = ?$ Resp. $\frac{a}{2}, \frac{a}{4}$

38.-

H) \overline{PQ} tang. comúnT) $R_3 = ?$

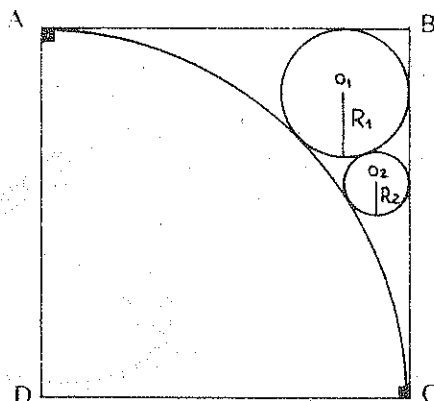
Resp.

39.-

H) $AB = BC = CD = AD = a$ T) $R_1 = ?$

Resp.

40.-



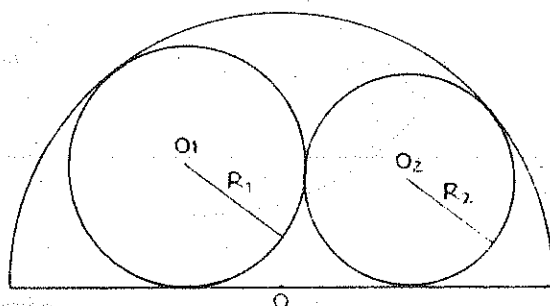
$$H) AB = BC = CD = AD = a$$

$$T) R_1 = ?$$

$$R_2 = ?$$

Resp.

41.-



$$H) R = a$$

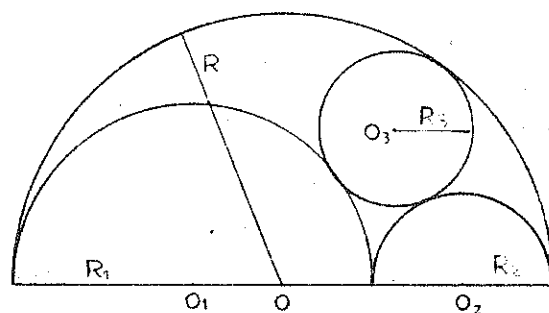
$$R_2 = \frac{2}{3} R_1$$

$$T) R_1 = ?$$

$$R_2 = ?$$

Resp.

42.-



$$H) R_1 = 2 R_2$$

$$R = 10 \text{ u}$$

$$T) R_3 = ?$$

Resp. 2,86 u

5.8.8. EJERCICIOS RESUELTOS

10.-

$$1.- \widehat{APD} = \frac{\widehat{AD}}{2} = 60^\circ$$

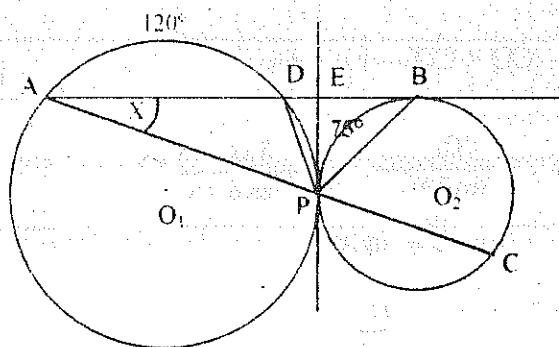
$$2.- \widehat{DPE} = \widehat{X} = \frac{\widehat{DP}}{2}$$

$$3.- \widehat{EPB} = \widehat{EBP} = \frac{\widehat{PB}}{2} = 37.5^\circ$$

$$4.- \widehat{BPC} = \widehat{X} + \widehat{EBP}$$

$$\Rightarrow \widehat{APD} + \widehat{DPE} + \widehat{EPB} + \widehat{BPC} = 180^\circ$$

$$60^\circ + \widehat{X} + 37.5^\circ + \widehat{X} + 37.5^\circ = 180^\circ \quad \therefore \widehat{X} = 22.5^\circ$$



12.-

$$T_1) 1.- \widehat{ABS} = \widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$2.- \widehat{PBS} = \widehat{PBQ} = \frac{\widehat{PB}}{2}$$

$$\therefore \widehat{ACB} = \widehat{PBQ} = \widehat{\omega}$$

$$3.- \text{Idem: } \widehat{BAC} = \widehat{BPQ} = \widehat{\epsilon}$$

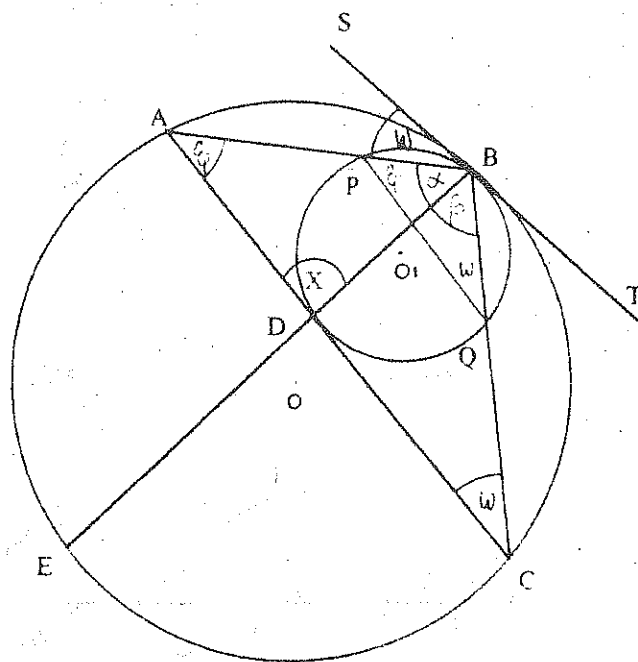
$$\therefore \overline{PQ} \parallel \overline{AC}$$

$$\Rightarrow \widehat{PD} = \widehat{DQ} = \widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$$

$$T_2) 1.- \widehat{\omega} = \frac{\widehat{AB}}{2} = 30^\circ$$

$$2.- \widehat{\alpha} = \widehat{\beta} = \frac{\widehat{AE}}{2} = 50^\circ$$

$$\therefore \widehat{X} = \widehat{\omega} + \widehat{\beta} = 80^\circ$$

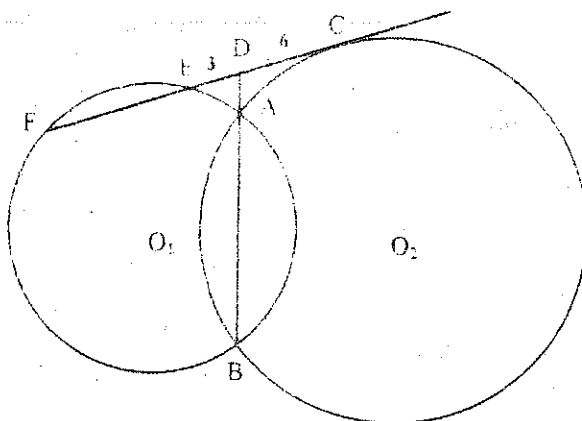


20.-

$$1.- DF + DE = DB + DA = (3 + EF) + 3$$

$$2.- DC^2 = DB + DA = 6^2$$

$$\therefore (3 + EF) + 3 = 6^2 \Rightarrow EF = 9$$



29.-

$$1.- \text{Sen } 30^\circ = \frac{r}{8-r} \Rightarrow r = 2,6$$

$$2.- CO_1^2 = 8^2 + (8-r)^2 - 2 \cdot 8 \cdot (8-r) \cdot \text{Cos } 30^\circ$$

$$\Rightarrow CO_1 = 4,3$$

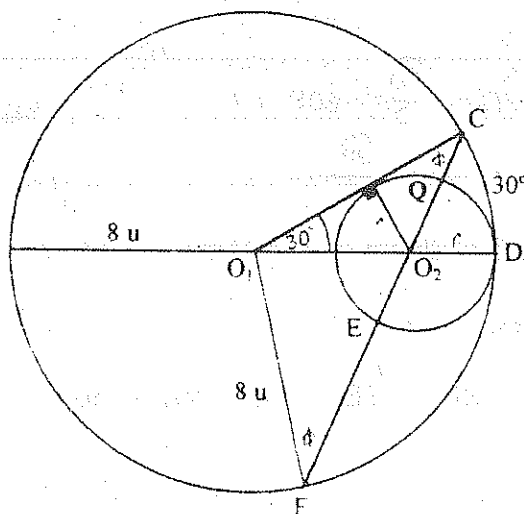
$$3.- CQ = CO_1 - r = 1,64$$

$$4.- \frac{CO_1}{\text{Sen } 30^\circ} = \frac{8-r}{\text{Sen } \phi}$$

$$\Rightarrow \widehat{\phi} = 38,3^\circ$$

$$5.- \text{Cos } \widehat{\phi} = \frac{\frac{CF}{2}}{8} \Rightarrow CF = 12,5$$

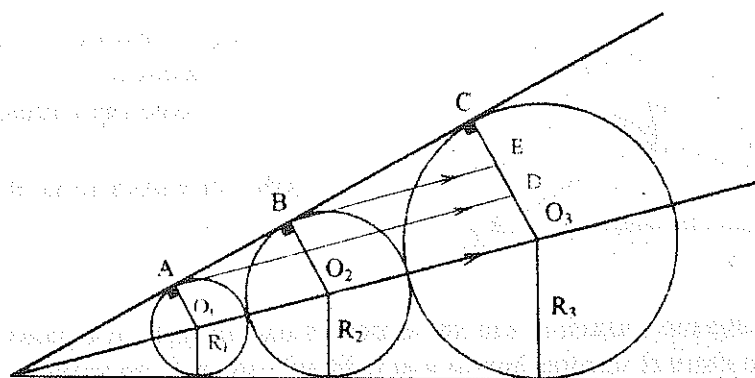
$$6.- EF = CF - CO_1 - r = 5,6$$



34.-

1.- $\triangle ACD \sim \triangle BCE$ (A.A.)

$$\frac{R_1 + 2R_2 + R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_3 - R_1}{R_3 - R_2} \Rightarrow R_2^2 = R_1 \times R_3$$

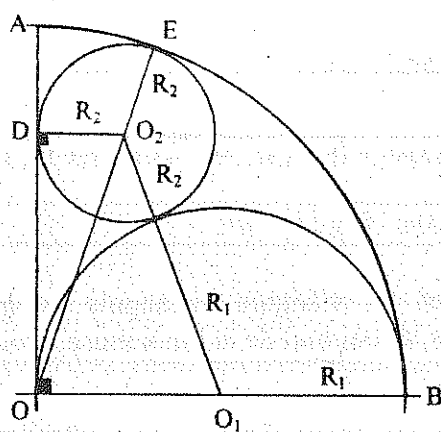


37.-

$$1.- OD^2 = 2R_1 \times 2R_2$$

$$2.- (a - R_2)^2 = R_2^2 + OD^2 = R_2^2 + 4 \times \frac{a}{2} \times R_2$$

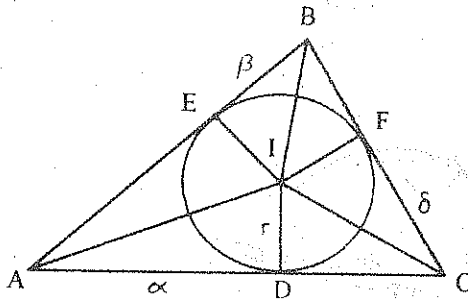
$$\therefore (a - R_2)^2 = R_2^2 + 2 \times a \times R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{a}{4}$$



5.9. CIRCULO Y TRIANGULO

5.9.1. CIRCULO INSCRITO EN UN TRIANGULO

Es el círculo tangente a los tres lados del triángulo.



$\odot (I, r)$ inscrito al ΔABC

I incentro

r radio del círculo

ΔABC circunscrito al $\odot (I, r)$

La longitud de la tangente trazada desde un vértice de un triángulo al círculo inscrito, es igual a la diferencia entre el semiperímetro y el lado opuesto a dicho vértice.

$$T) \quad \alpha = p - a$$

$$\beta = p - b$$

$$\delta = p - c$$

$$D) \quad AD = AE = \alpha$$

$$BE = BF = \beta$$

$$CF = CD = \delta$$

$$\Rightarrow 2p = 2(\alpha + \beta + \delta)$$

$$y \quad \alpha = p - (\beta + \delta)$$

$$\therefore \alpha = p - a$$

$$\therefore \beta = p - b$$

$$\therefore \delta = p - c \quad ///$$

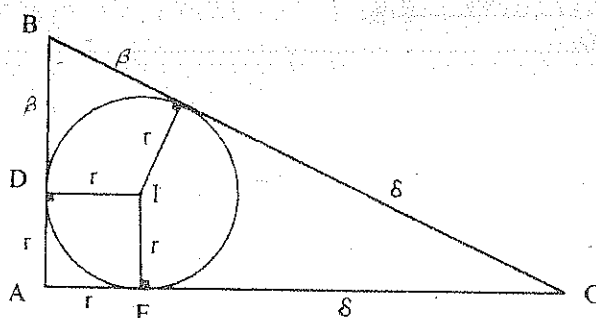
La superficie de un triángulo es igual al producto del semiperímetro por el radio del círculo inscrito.

$$T) \quad S_{\Delta ABC} = p \times r$$

$$D) \quad S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AIB} + S_{\Delta BIC} + S_{\Delta CIA} = \frac{1}{2} (a \times r + b \times r + c \times r)$$

$$\therefore S_{\Delta ABC} = p \times r \quad ///$$

El radio del círculo inscrito en un triángulo rectángulo es igual a la suma de las longitudes de los catetos, menos la longitud de la hipotenusa, todo dividido para dos.



$$T) \quad r = \frac{b + c - a}{2}$$

$$D) \quad r = b - \delta$$

$$r = c - \beta$$

$$r = \frac{b + c - a}{2} \quad ///$$

5.9.2. CIRCULO CIRCUNSCRITO A UN TRIANGULO

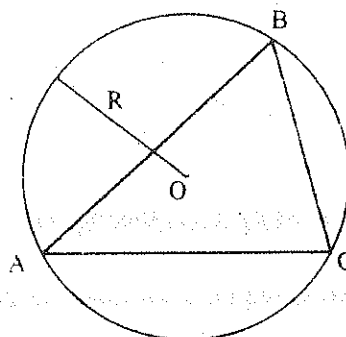
Es el círculo que tiene por cuerdas los tres lados del triángulo. Por tres puntos no colineales pasa un círculo y solo uno

$\odot (O, R)$ circunscrito al ΔABC

O circuncentro del ΔABC

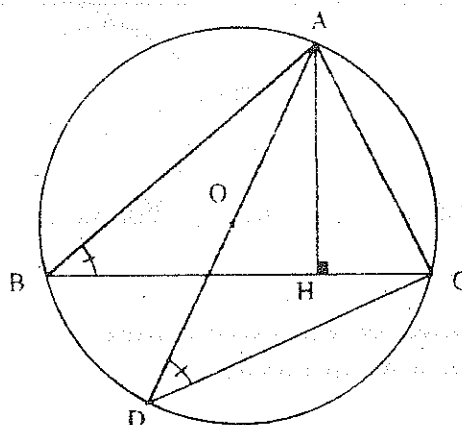
R radio del círculo

ΔABC inscrito al $\odot (O, R)$



El producto de dos lados cualesquiera de un triángulo, es igual al producto del diámetro del círculo circunscrito a éste, por la altura relativa al tercer lado.

$$T) AB \cdot AC = 2R \cdot AH$$



D) ΔABH y ΔACD (rectángulos)

$$m \widehat{ABH} = m \widehat{ADC} = \frac{m \widehat{AC}}{2}$$

$$\therefore \Delta ABH \sim \Delta ACD$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{DC}$$

$$AB \cdot AC = AD \cdot AH$$

$$AB \cdot AC = 2R \cdot AH \quad ///$$

En un triángulo, la razón entre una lado y el seno del ángulo opuesto es igual al diámetro del círculo circunscrito del triángulo.

$$\text{Sen } \widehat{C} = \frac{AH}{AC}$$

$$\therefore AB \cdot AC = 2R \cdot (AC \text{ Sen } \widehat{C}) \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{\text{Sen } \widehat{C}} = 2R \quad ///$$

La superficie de un triángulo es igual al producto de los tres lados dividido para cuatro veces el radio del círculo circunscrito al triángulo.

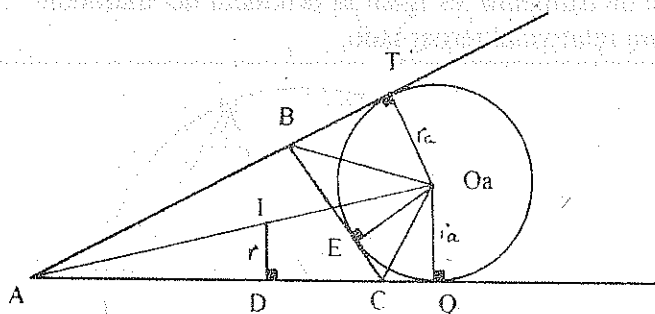
$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2}$$

$$AB \cdot AC = 2R \cdot AH \quad \therefore AH = \frac{AB \cdot AC}{2R}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \quad ///$$

5.9.3. CIRCULO EX-INSCRITO A UN TRIANGULO

Es el círculo tangente a un lado de un triángulo y a las prolongaciones de los otros dos lados.



$\odot (O_a, R_a)$ ex-inscrito al $\triangle ABC$
 O_a ex-centro del $\triangle ABC$
 r_a radio del círculo tangente al lado a .

La longitud de la tangente trazada desde un vértice de un triángulo al círculo ex-inscrito, es igual al semiperímetro.

$$T) \quad AQ = p$$

$$D) \quad 2p = AB + BE + EC + AC$$

$$2p = AB + BT + CQ + AC$$

$$2p = AT + AQ = 2AQ$$

$$p = AQ \quad ///$$

El radio del círculo ex-inscrito es al radio del círculo inscrito de un mismo triángulo, como el semiperímetro es al semiperímetro menos la longitud del lado al que el círculo ex-inscrito es tangente.

$$T) \quad \frac{r_a}{r} = \frac{p}{p-a}$$

$$D) \quad \triangle AO_aQ \sim \triangle AID$$

$$\frac{r_a}{r} = \frac{p}{p-a} \quad ///$$

La superficie de un triángulo es igual al radio del círculo ex-inscrito por el semiperímetro menos el lado del triángulo al que es tangente el círculo.

$$T) S_{\triangle ABC} = r_a (p - a)$$

$$D) S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACO_a} + S_{\triangle ABO_a} - S_{\triangle BCO_a}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} (b \times r_a + c \times r_a - a \times r_a)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} r_a (b + c - a)$$

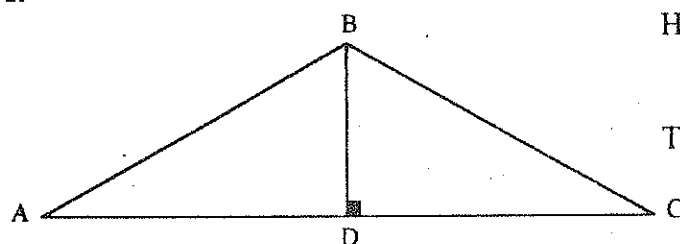
$$S_{\triangle ABC} = r_a (p - a) \quad ///$$

$$S_{\triangle ABC} = r_b (p - b) \quad ///$$

$$S_{\triangle ABC} = r_c (p - c) \quad ///$$

5.9.4. EJERCICIOS

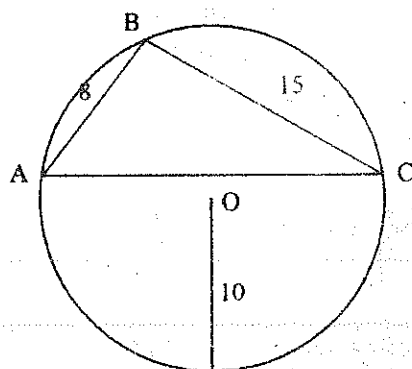
1.-



H) $AB = BC = 2 BD$
R radio del $\triangle ABC$

T) $AB + BC = 2R$

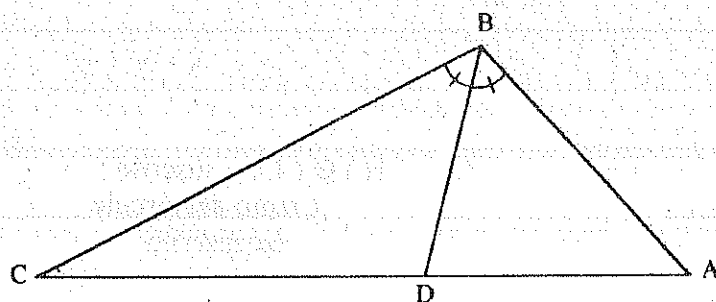
2.-



T) $AC = ?$

Resp. 19

3.-



H) $AB = 8 \text{ u.}$
 $BC = 12 \text{ u.}$
 $DC = 9 \text{ u.}$

T) $R; r = ?$

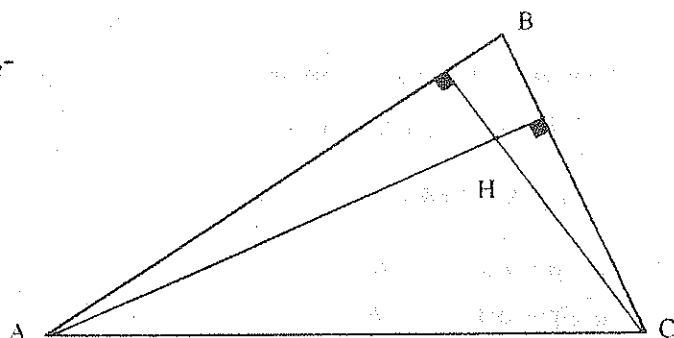
Resp. 7,53 u.; 2,74 u.

4.- En un triángulo rectángulo la relación entre los valores de los radios de los círculos inscrito y circunscrito es $\frac{2}{5}$. Determinar los valores de los ángulos del triángulo.

5.- Los lados de un triángulo son iguales a 25, 24 y 27 cm.. Determinar R , r y r_1 .

Resp. 14.68 ; 7.25 ; 25.06 cm.

6.-



H) R_1 radio del $\triangle ABC$

R_2 radio del $\triangle AHC$

T) $R_1 = R_2$

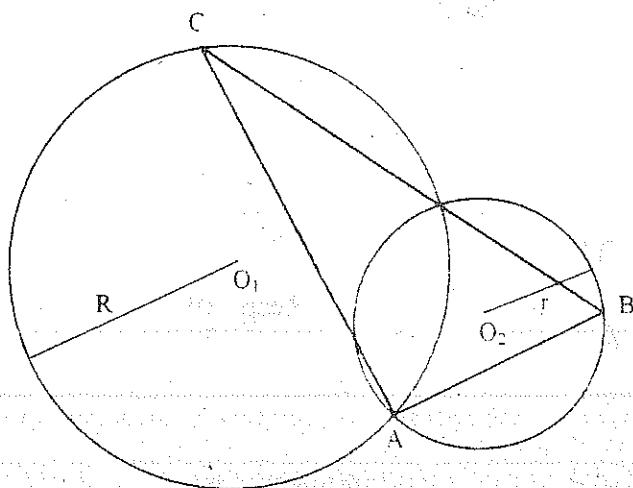
7.- Resolver un triángulo ABC, dados : $m\hat{A} = 90^\circ$ y

a) $p = 136,69$ u , $R = 58,9$ u

b) $r = 200$ u , $R = 515,34$ u

c) $r = 38,45$ u , $m\hat{B} = 42^\circ$

8.-

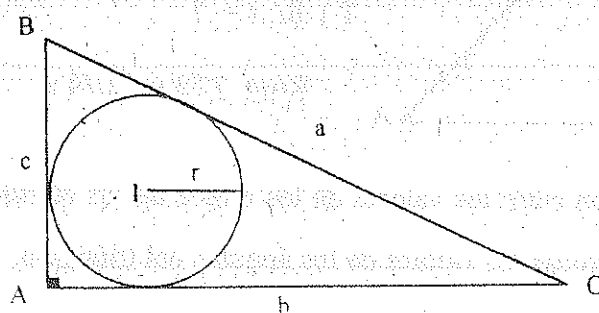


H) $AB = c$

$AC = b$

T) $R = \frac{br}{c}$

9.-



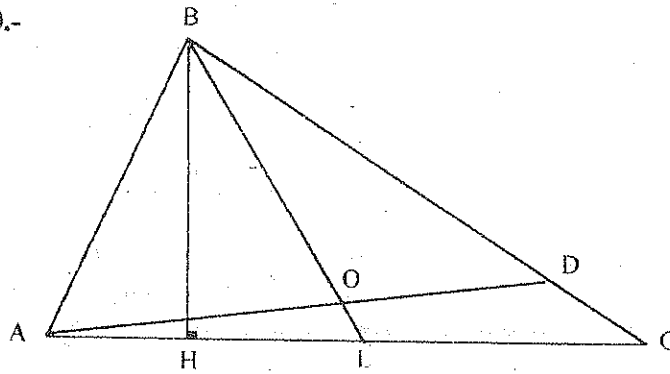
H) $\odot (I, r)$ inscrito

R radio del círculo circunscrito

T1) $r = \frac{b+c-a}{2}$

T2) $b+c = 2(r+R)$

10.-

H) O circuncentro del ΔABC

$AB = 6 \text{ u.}$

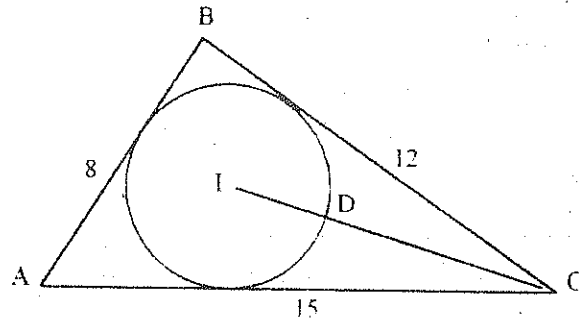
$BH = 5.5 \text{ u.}$

$BO = 5 \text{ u.}$

T) $OD = ?$ $LO = ?$

Resp. 2.48 ; 1.41 u.

11.-

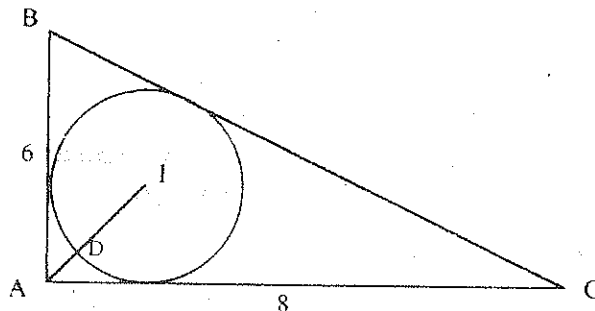
H) I incentro del ΔABC T) $CD = ?$

Resp.

12.- Calcular la distancia entre los centros de los círculos inscrito y circunscrito en función de los radios.

Resp.

13.-

T) $AD = ?$

Resp. 0,83

14.- Los lados de un ΔABC son : $a = 21 \text{ u.}$; $b = 30 \text{ u.}$; $c = 33 \text{ u.}$ Hallar R , r y \overline{OI} .
(O circuncentro - I incentro del ΔABC).

Resp. 16.84 ; 7.34 ; 4 u.

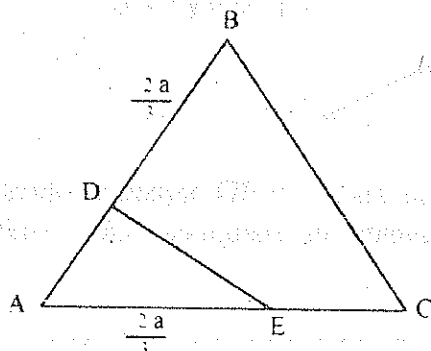
15.- En un ΔABC : $a = b = 10 \text{ u.}$; $\hat{C} = 104^\circ$. Hallar la distancia del ortocentro al circuncentro.

Resp. 12 u.

16.- En un triángulo rectángulo ABC ; $\hat{A} = 90^\circ$; $\hat{C} = 30^\circ$; tiene trazada la bisectriz \overline{BD} . Hallar la distancia entre los centros de los círculos inscritos en los ΔABC y ΔCBD si el cateto menor es 1 unidad.

Resp. 0,52 u.

17.-

H) ΔABC EquiláteroT) $DE = R_{\Delta ABC}$

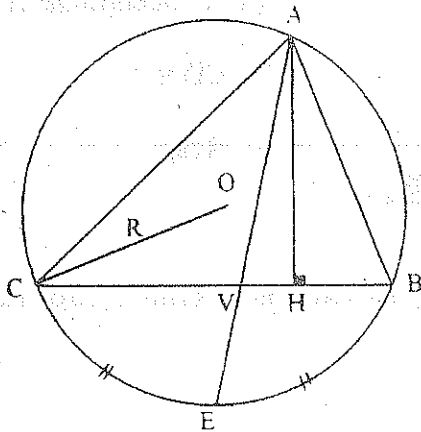
- 18.- En un triángulo equilátero ABC, de lado a , se traza la altura \overline{BK} . En los $\triangle BAK$ y $\triangle BCK$. Se inscriben círculos y se traza la tangente externa común diferente al lado \overline{AC} . Hallar el área del triángulo formado por esta tangente y el vértice B

Resp. $\frac{a^2 \sqrt{3}}{12}$

- 19.- Sobre la base \overline{AC} del triángulo isósceles ABC se toma un punto Q de manera que $AQ = m$; $QC = n$; ($m > n$). En los triángulos ABQ y CBQ, están inscritos círculos. Hallar la distancia entre los puntos de tangencia de estos círculos en el lado \overline{BQ} .

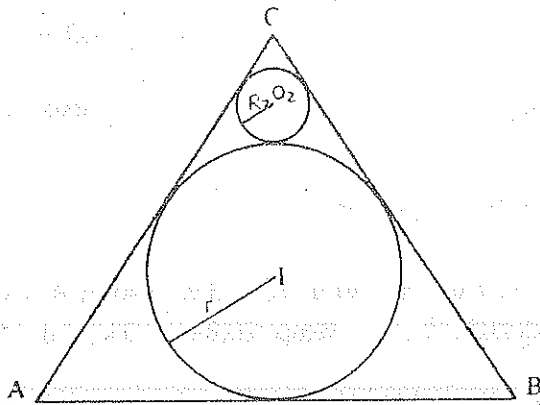
Resp. $\frac{m-n}{2}$

20.-



T) $AE, AV = AH, 2R$

21.-

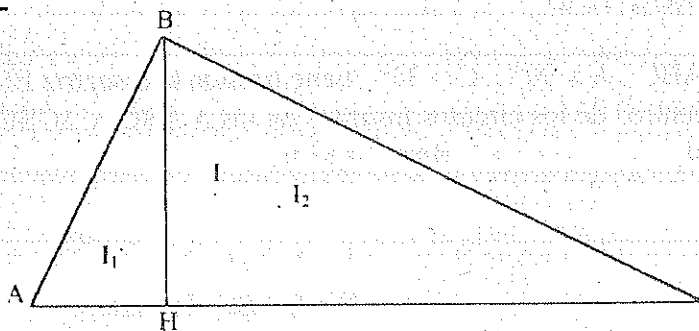


H) $\triangle ABC$ Equilátero
 $AB = 80 u$

T) $R_2 = ?$

Resp

22.-



H) I incentro $\triangle ABC$

I_1 incentro $\triangle BAH$

I_2 incentro $\triangle BCH$

T) $r^2 = r_1^2 + r_2^2$

- 23.- En a un círculo de centro O se trazan dos cuerdas \overline{AC} y \overline{BD} perpendiculares entre si, demostrar que $\triangle AOB$ y $\triangle COD$ como también los triángulos BOC y AOD son equivalentes.

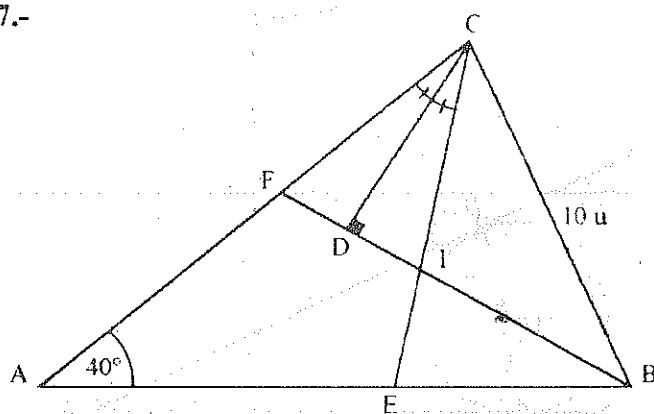
24.- Hallar el área de un triángulo isósceles siendo el radio del círculo inscrito 12 m. y el del círculo tangente a los lados iguales y al inscrito 5 m. Resp. $764,84 \text{ m}^2$.

25.- Calcular el área de un triángulo, si uno de sus lados mide 75 m, el producto de los otros de los dos lados es 1300 y el radio del círculo circunscrito es 40,625 m.

Resp. 600 m^2 .

26.- Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 40 m y el radio del círculo inscrito 4 m. Calcule el área del triángulo. Resp. 180 m^2 .

27.-

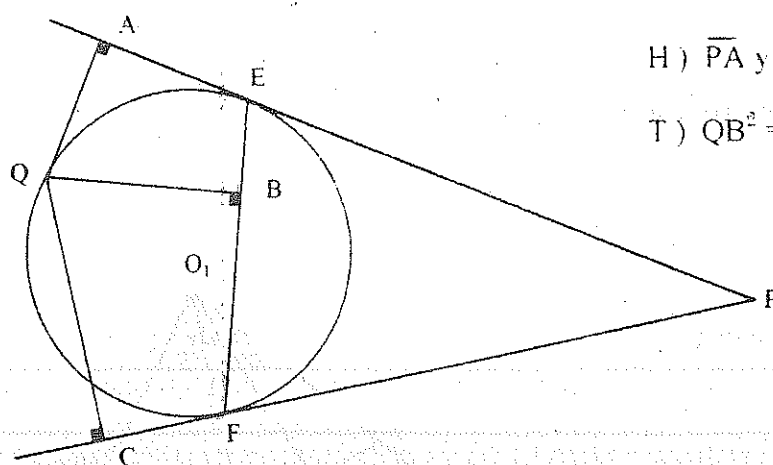


H) I incentro ΔABC

T) $S_{\Delta BIC} = ?$

Resp. $17,1 \text{ u}^2$

28.-



H) \overline{PA} y \overline{PC} tang. $\odot (O.R)$

T) $QB^2 = QA \times QC$

29.- Calcular los lados de un ΔABC , sabiendo que: $2a = b + c$, $R = 65 \text{ u}$, $h_a = 96 \text{ u}$

30.- Dados los tres lados del ΔABC : $a = 10 \text{ u}$, $b = 12 \text{ u}$, $c = 14 \text{ u}$. Calcular R y r .

31.- Los puntos medios de los lados \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} del ΔABC son: L , M y N respectivamente. Probar que la tangente en A del círculo circunscrito al ΔABC , es paralela a la tangentes en M al círculo circunscrito al ΔLMN .

32.- Si $m\hat{A} = 2m\hat{C}$, $m\hat{B} = 2m\hat{A}$ del ΔABC ; si O es el centro del círculo inscrito en el ΔABC , O_b es el centro del círculo ex-inscrito tangente al lado \overline{AC} y O_a es el centro del círculo ex-inscrito tangente al lado \overline{BC} .

Demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta OO_bO_a$.

5.9.5. EJERCICIOS RESUELTOS

2.-

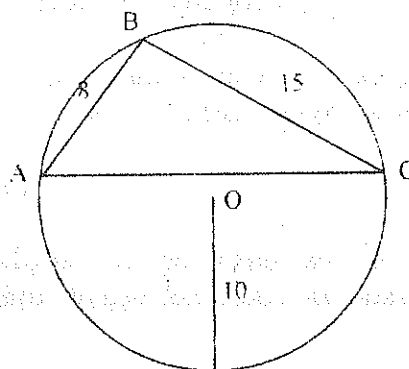
$$1.- \frac{15}{\text{Sen } \hat{A}} = \frac{8}{\text{Sen } \hat{C}} = \frac{AC}{\text{Sen } \hat{B}} = 2(10)$$

$$\therefore \hat{A} = 48.6^\circ$$

$$\hat{C} = 23.6^\circ$$

$$\hat{B} = 107.8^\circ$$

$$AC = 19$$



9.-

$$1.- AE = AF = r$$

$$2.- CE = CD \text{ y } BF = BD$$

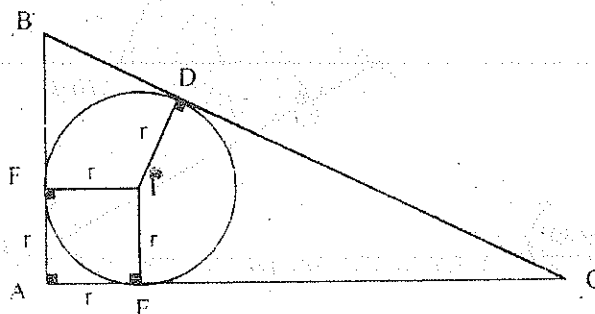
$$3.- b = r + CE = r + CD$$

$$4.- c = r + BF = r + BD$$

$$\therefore b + c = 2r + a$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{2}(b + c - a)$$

$$5.- a = 2R \Rightarrow b + c = 2r + 2R = 2(r + R)$$



27.-

$$1.- \hat{\phi} = 90^\circ + \frac{1}{2} \hat{A} = \frac{1}{4} \hat{C} + 90^\circ$$

$$\therefore \hat{\phi} = 110^\circ$$

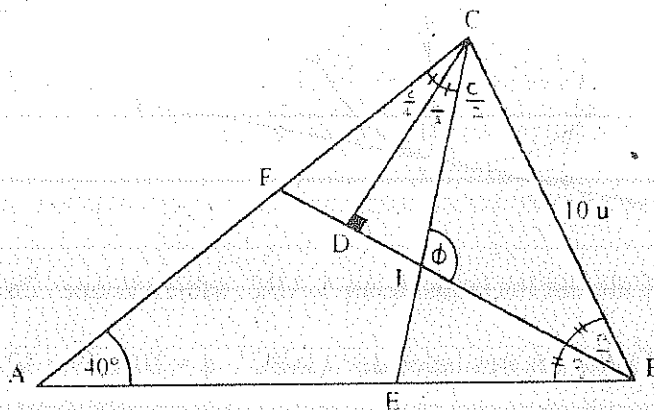
$$\hat{C} = 80^\circ$$

$$\hat{B} = 60^\circ$$

$$2.- \frac{10}{\text{Sen } \hat{\phi}} = \frac{CI}{\text{Sen } \frac{1}{2} \hat{B}}$$

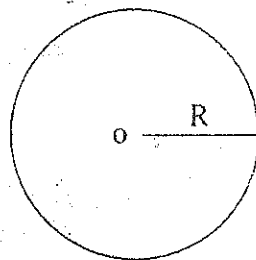
$$\Rightarrow CI = 5.32$$

$$3.- S_{\triangle BIC} = \frac{1}{2} (CI \cdot CB \cdot \text{Sen } \frac{1}{2} \hat{C}) = 17.1 \text{ u}^2$$



5.10. AREAS CIRCULARES

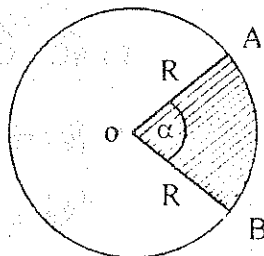
5.10.1. AREA DE UN CIRCULO



$$S_{\odot(O, R)} = \pi R^2$$

5.10.2. SECTOR CIRCULAR

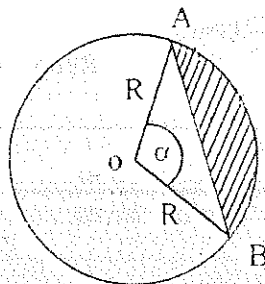
Es el área comprendida entre un arco y los radios correspondientes a los extremos de dicho arco.



$$S_{\odot \hat{A} B} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \quad ///.$$

5.10.3. SEGMENTO CIRCULAR

Es el área comprendida entre un arco y la cuerda correspondiente a los extremos de dicho arco.



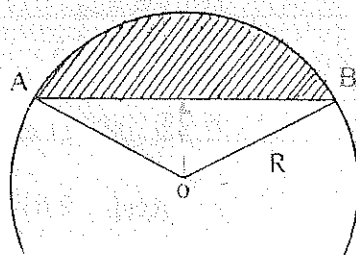
$$S_{\text{segmento}} = S_{\odot \hat{A} B} - S_{\triangle OAB}$$

$$S_{\text{segmento}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{R^2 \sin \alpha}{2}$$

$$S_{\text{segmento}} = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi \alpha}{180} - \sin \alpha \right) \quad ///.$$

5.10.4. EJERCICIOS

1.-

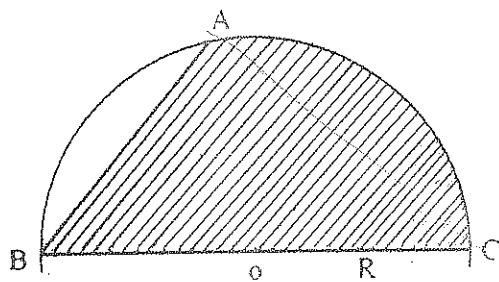


$$H \perp AB = 1.7 R$$

$$T \} S = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.56 R^2$$

2.-

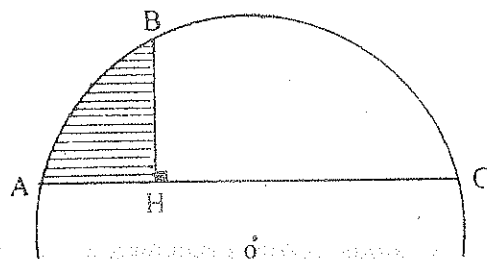


$$H) AB = 1.2 R$$

$$T) S_{\text{sh}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 1.4 R^2$$

3.-



$$H) AH = 10 \text{ m.}$$

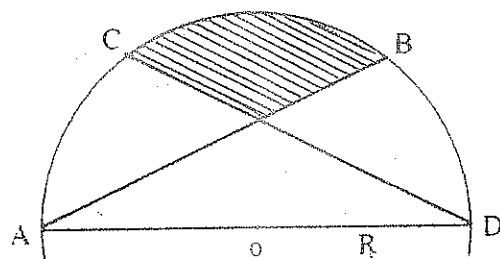
$$HC = 30 \text{ m.}$$

$$HB = 13 \text{ m.}$$

$$T) S_{\text{sh}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 83.75 \text{ m}^2$$

4.-

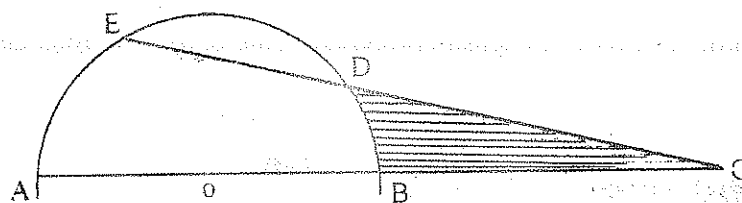


$$H) \widehat{AC} = \widehat{CB} = \widehat{DB}$$

$$T) S_{\text{sh}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.235 R^2$$

5.-



$$H) AO = OB = R = 2.5 \text{ m.}$$

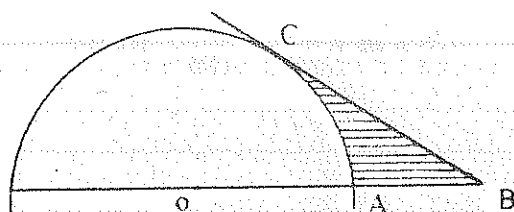
$$BC = 5 \text{ m.}$$

$$CD = 6 \text{ m.}$$

$$T) S_{\text{sh}} = ?$$

$$\text{Resp. } 4.18 \text{ m}^2$$

6.-



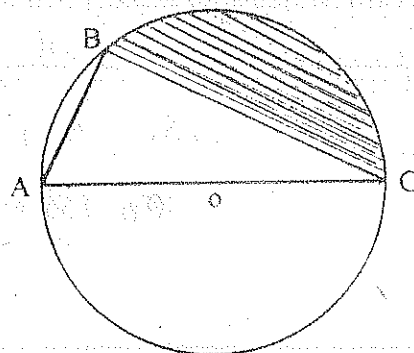
$$H) BC = 20 \text{ m.}$$

$$BA = 10 \text{ m.}$$

$$T) S_{\text{sh}} = ?$$

$$\text{Resp. } 45.68 \text{ m}^2$$

7.-



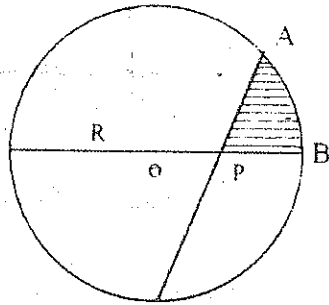
$$H) AB = a$$

$$AC = 2a$$

$$T) S_{\text{sh}} = ? f(a)$$

$$\text{Resp. } 0.614 a^2$$

8.-



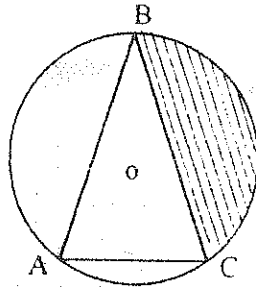
$$H) m\widehat{AB} = 60^\circ$$

$$BP = \frac{1}{3}R$$

$$T) S_{III} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.379 R^2$$

9.-



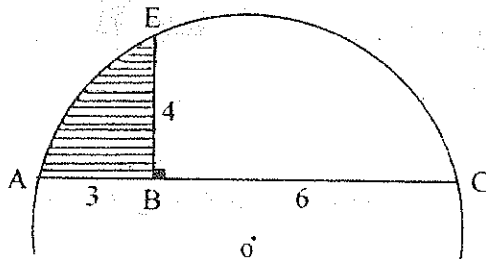
$$H) AB = BC = 2a$$

$$AC = a$$

$$T) S_{III} = ? f(a)$$

$$\text{Resp. } 1076 a^2$$

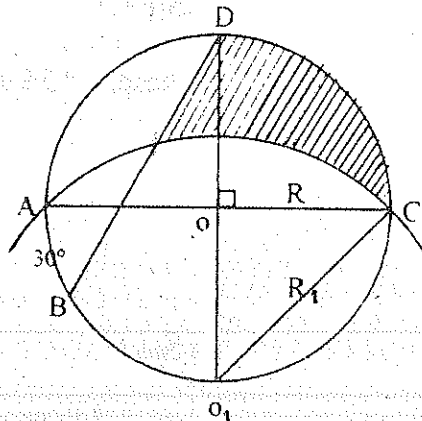
10.-



$$T) S_{III} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 8 u^2$$

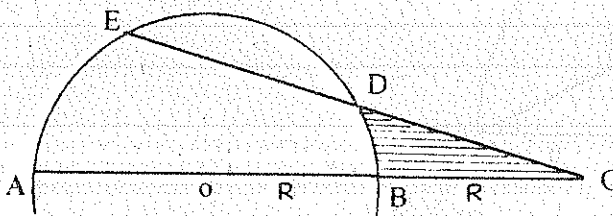
11.-



$$T) S_{III} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.945 R^2$$

12.-

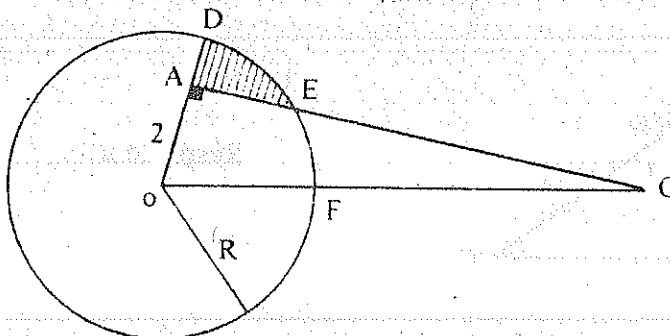


$$H) DE = 1.4 R$$

$$T) S_{III} = ?$$

$$\text{Resp. } 0.2 R^2$$

13.-



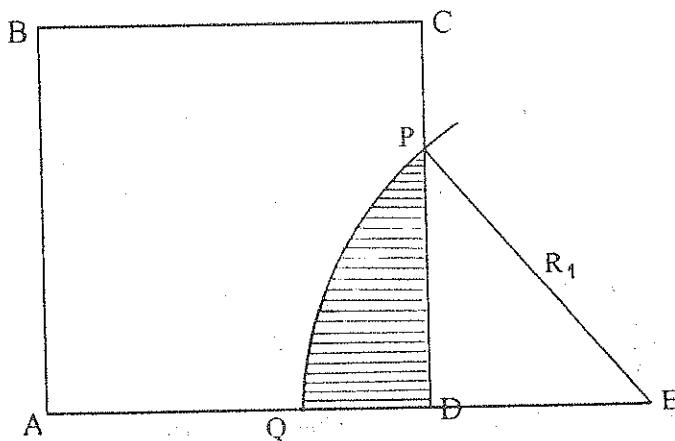
$$H) OC = 10$$

$$\frac{S_{III}}{S_{\triangle AOC}} = \frac{3}{7}$$

$$T) R = ?$$

$$\text{Resp.}$$

14.-



H) ABCD Cuadrado

$$AB = 10$$

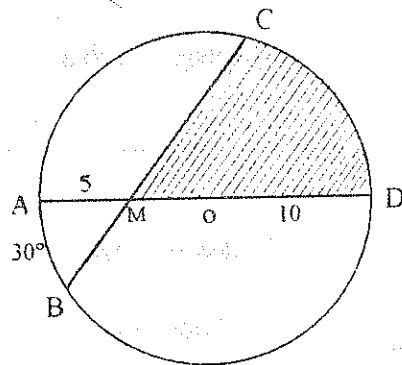
$$DE = 5$$

$$S_{\text{shaded}} = \frac{S_{ABCD}}{7}$$

T) $R_1 = ?$

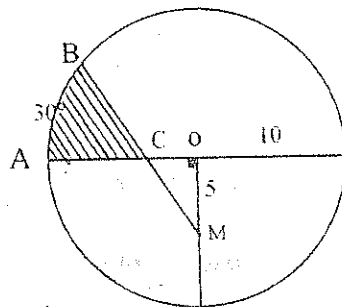
Resp.

15.-

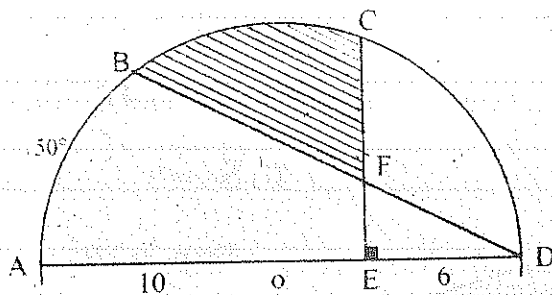
T) $S_{\text{shaded}} = ?$

Resp. 92

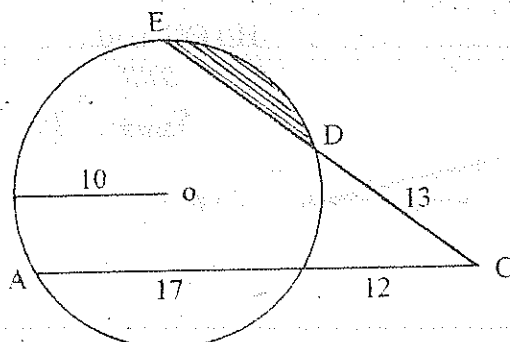
16.-

T) $S_{\text{shaded}} = ?$ Resp. $15.34 u^2$

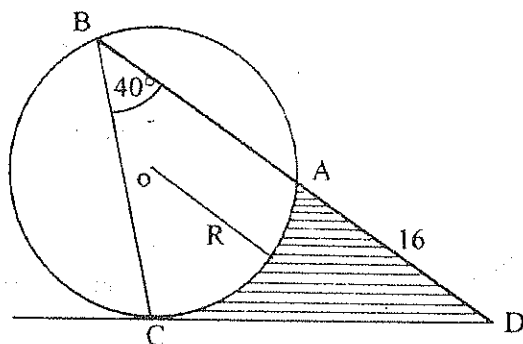
17.-

T) $S_{\text{shaded}} = ?$ Resp. $43.86 u^2$

18.-

T) $S_{\text{shaded}} = ?$ Resp. $26 u^2$

19.-

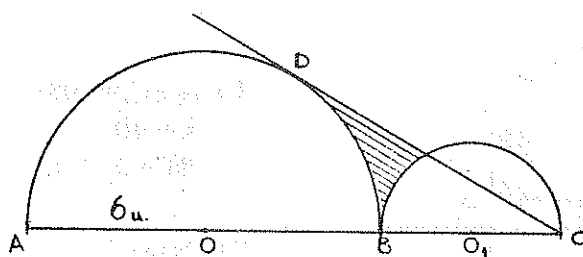


$$H) \overline{DC} \text{ tang. } \odot (O, R) \\ R = 11 \text{ u}$$

$$T) S_{\text{III}} = ?$$

$$\text{Resp. } 84.16 \text{ u}^2$$

20.-

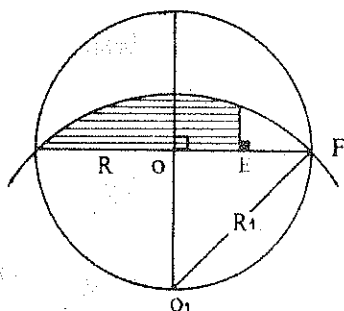


$$H) \overline{DC} \text{ tang. } \odot (O, R) \\ DC = 14.84 \text{ u}$$

$$T) S_{\text{III}} = ?$$

$$\text{Resp. } 4.89 \text{ u}^2$$

21.-

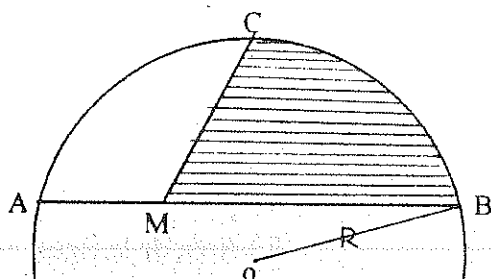


$$H) OE = EF$$

$$T) S_{\text{III}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.47 R^2$$

22.-



$$H) AH = 0.5 R$$

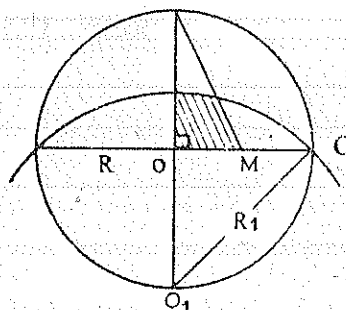
$$MB = 0.9 R$$

$$AC = CB$$

$$T) S_{\text{III}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.16 R^2$$

23.-

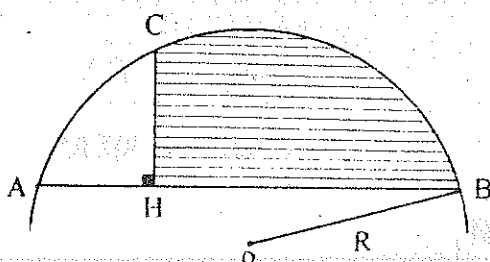


$$H) OM = MC$$

$$T) S_{\text{III}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.161 R^2$$

24.-



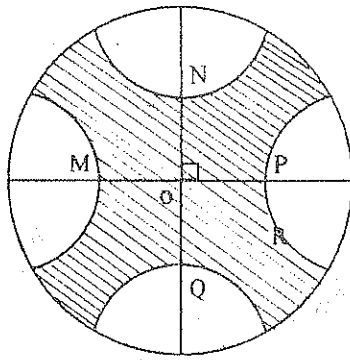
$$H) AH = 0.7 R$$

$$HB = 1.1 R$$

$$T) S_{\text{III}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.467 R^2$$

25.-

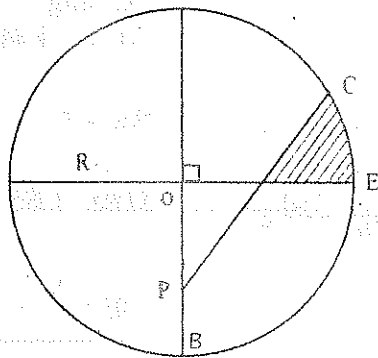


H) M, N, P y Q puntos
medios de los radios

T) $S_{III} = ? f(R)$

Resp. $1.738 R^2$

26.-

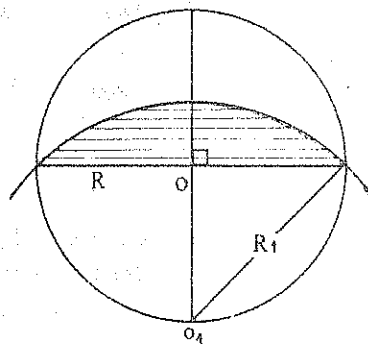


H) $m \widehat{EC} = 30^\circ$
 $R = 10$
 $PB = 3$

T) $S_{III} = ?$

Resp.

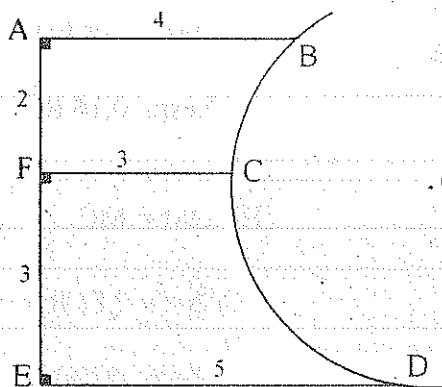
27.-



T) $S_{III} = ? f(R)$

Resp. $0.57 R^2$

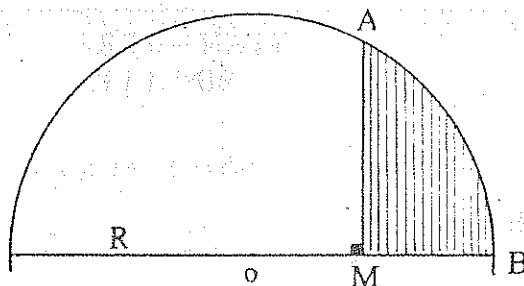
28.-



T) Area de la figura ABDE

Resp. 17,15

29.-

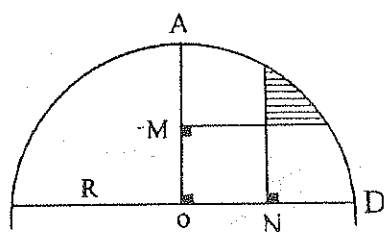


H) $OM = MB$

T) $S_{III} = ? f(R)$

Resp. $0.307 R^2$

30.-

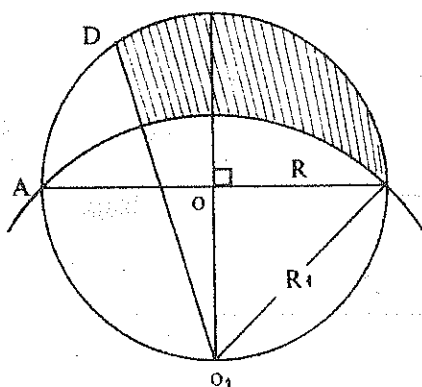


$$H) \begin{aligned} AM &= MO \\ ON &= ND \end{aligned}$$

$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.078 R^2$$

31.-

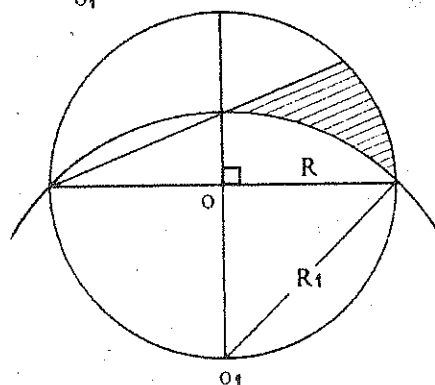


$$H) \widehat{AD} = 60^\circ$$

$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.25 R^2$$

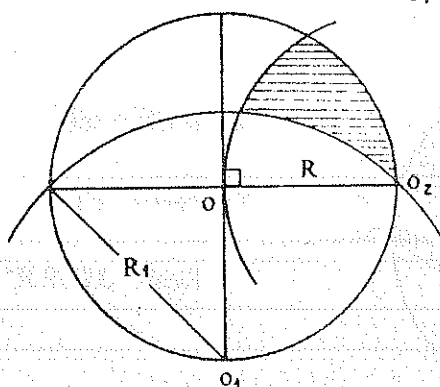
32.-



$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.248 R^2$$

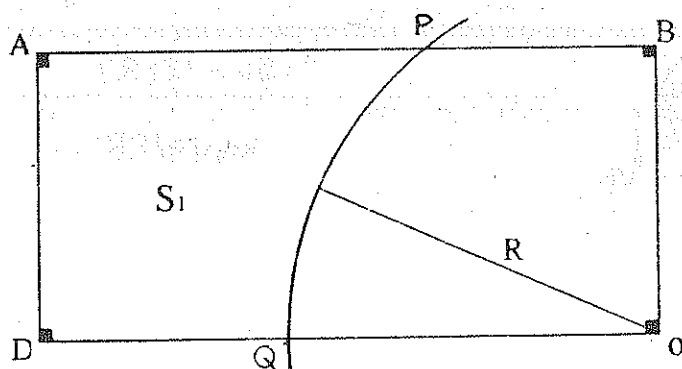
33.-



$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.34 R^2$$

34.-



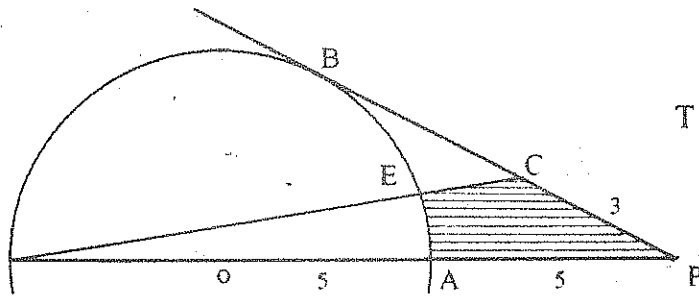
$$H) \begin{aligned} AB &= 30 \\ AD &= 10 \end{aligned}$$

$$\frac{S_1}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}$$

$$T) R = ?$$

$$\text{Resp.}$$

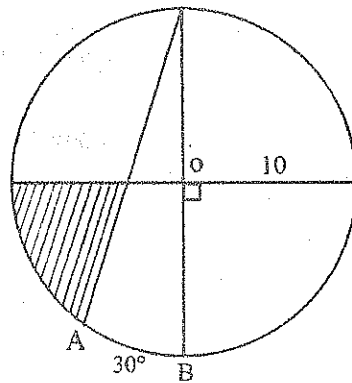
35.-



$$T) S_{\text{III}} = ?$$

$$\text{Resp. } 6.13 \text{ u}^2$$

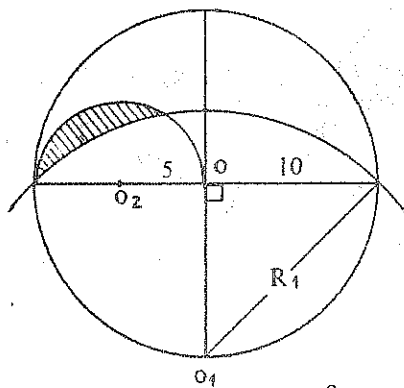
36.-



$$T) S_{\text{III}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp.}$$

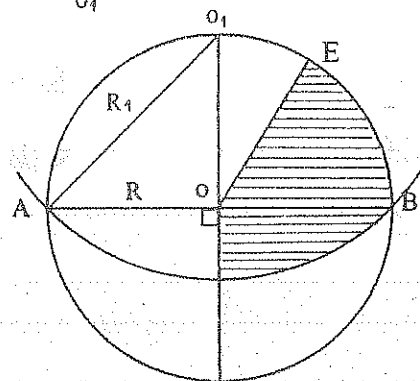
37.-



$$T) S_{\text{III}} = ?$$

$$\text{Resp.}$$

38.-

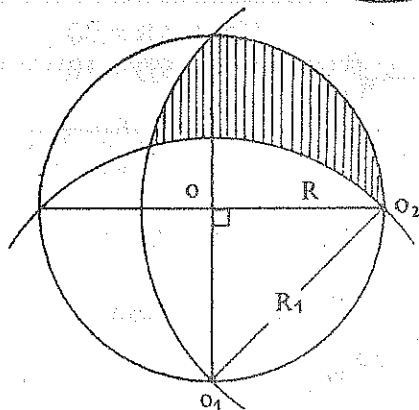


$$H) m \widehat{BE} = 60^\circ$$

$$T) S_{\text{III}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.809 R^2$$

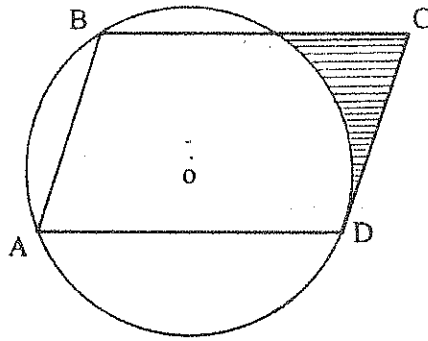
39.-



$$T) S_{\text{III}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.627 R^2$$

40.-



H) ABCD Paralelogramo

$$AB = 5$$

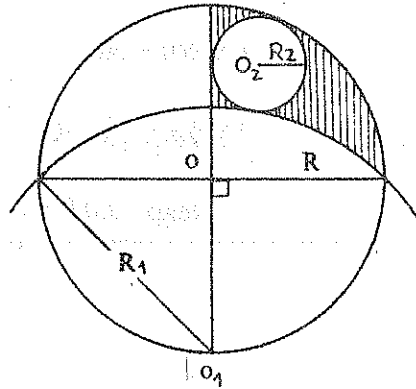
$$AD = 8$$

$$m \widehat{BAD} = 60^\circ$$

T) $S_{\text{shaded}} = ? f(R)$

Resp.

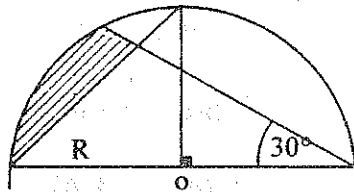
41.-



T) $S_{\text{shaded}} = ? f(R)$

$$\text{Resp. } 0.26 R^2$$

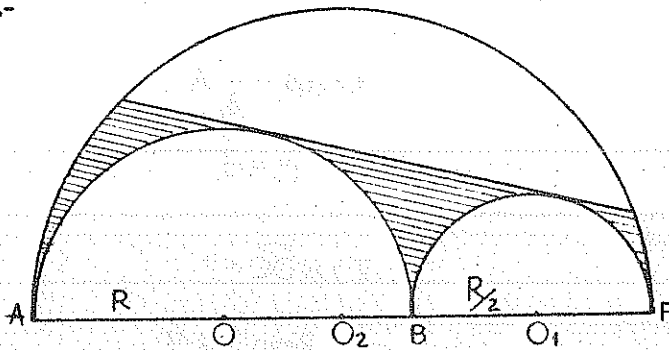
42.-



T) $S_{\text{shaded}} = ? f(R)$

$$\text{Resp. } 0.224 R^2$$

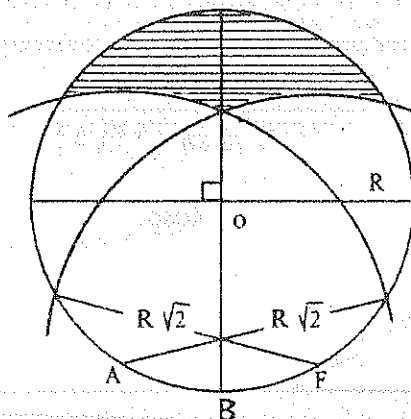
43.-



T) $S_{\text{shaded}} = ? f(R)$

$$\text{Resp. } 0.4 R^2$$

44.-

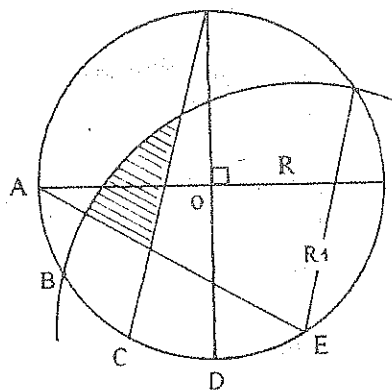


H) $m \widehat{AB} = m \widehat{BF} = 30^\circ$

T) $S_{\text{shaded}} = ? f(R)$

$$\text{Resp. } 0.372 R^2$$

45.-

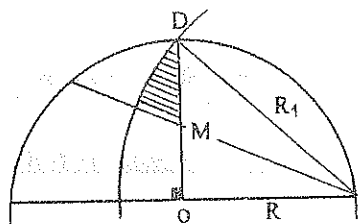


$$H) \widehat{mAB} = \widehat{mBC} = \widehat{mCD} \Rightarrow \widehat{DE} = 30^\circ$$

$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.136 R^2$$

46.-

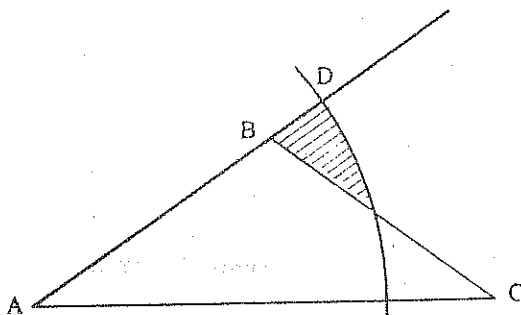


$$H) DM = MO$$

$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.072 R^2$$

47.-

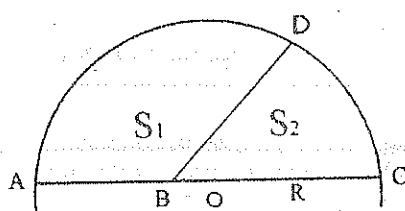


$$H) \begin{aligned} AB &= 7 \text{ m.} \\ BC &= 6 \text{ m.} \\ AC &= 10 \text{ m.} \\ BD &= 2 \text{ m.} \end{aligned}$$

$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 5.5 \text{ m}^2$$

48.-



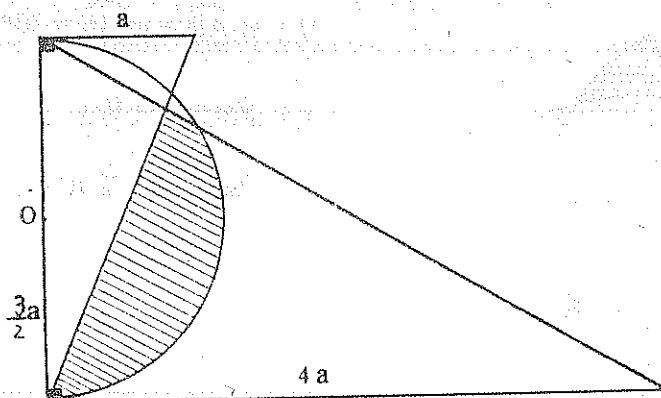
$$H) AB = \frac{5}{8} R$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$$

$$T) \widehat{mDC} = ?$$

$$\text{Resp. } 54.5^\circ$$

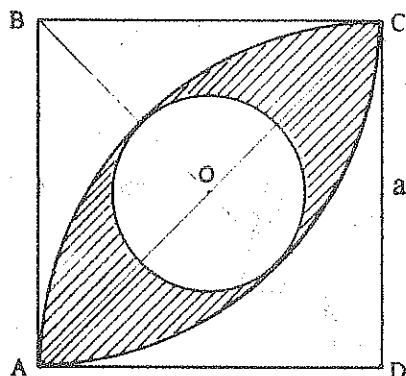
49.-



$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(a)$$

$$\text{Resp.}$$

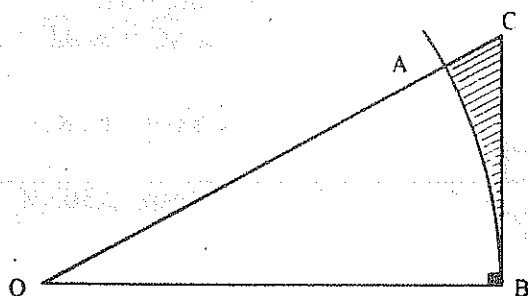
50.-



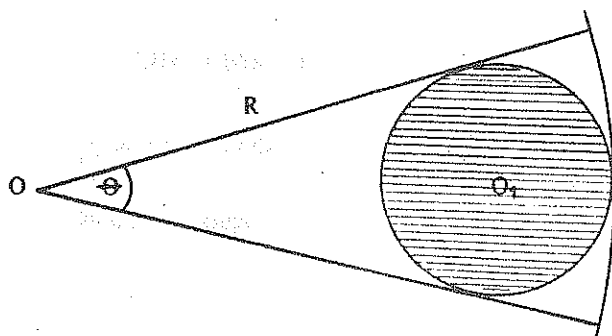
H) ABCD Cuadrado

T) $S_{\text{shaded}} = ? f(a)$ Resp. $0.301 a^2$

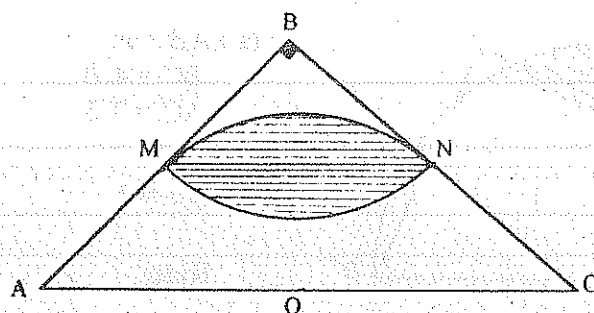
51.-

H) $OA = OB = R$
 $BC = 0.7 R$ T) $S_{\text{shaded}} = ? f(R)$ Resp. $0.045 R^2$

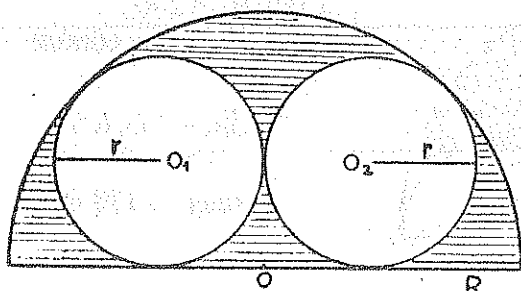
52.-

T) $S_{\text{shaded}} = ? f(R, \theta)$ Resp. $\Pi \left(\frac{R \sin \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta}{2}} \right)^2$

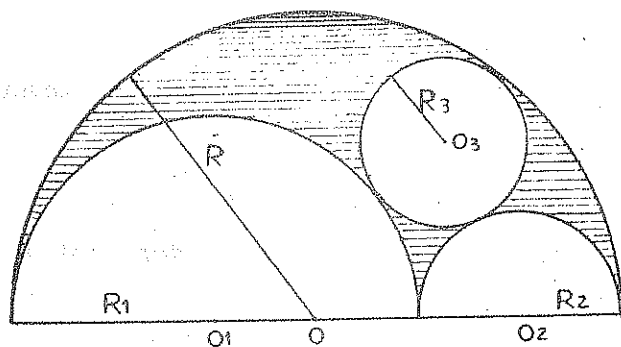
53.-

H) $AB = BC = a$
M y N puntos mediosT) $S_{\text{shaded}} = ? f(a)$ Resp. $0.143 a^2$

54.-

T) $S_{\text{shaded}} = ? f(R)$ Resp. $0.492 R^2$

55.-

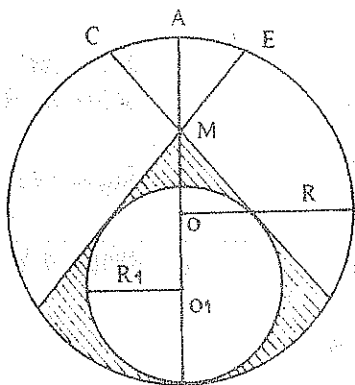


$$H) R_1 = 2 R_2$$

$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.442 R^2$$

56.-



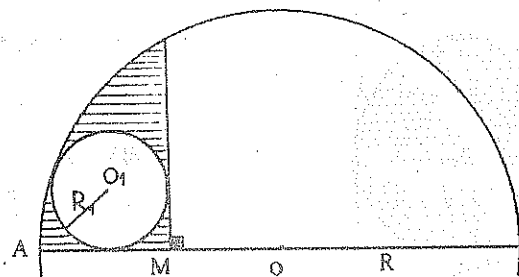
$$H) AM = MO$$

$$m \widehat{AC} = m \widehat{AE} = 20^\circ$$

$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.363 R^2$$

57.-

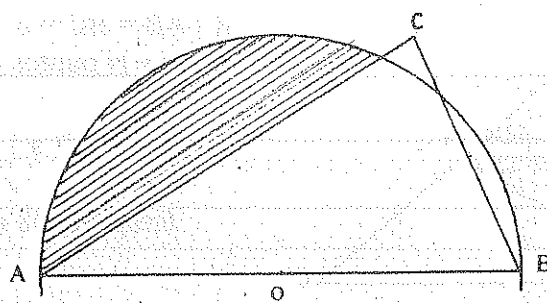


$$H) AM = MO$$

$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.253 R^2$$

58.-



$$H) AB = 8.$$

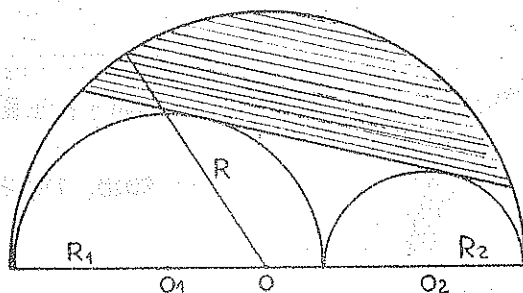
$$BC = 4.3$$

$$AC = 7.3$$

$$T) S_{\text{shaded}} = ?$$

$$\text{Resp.}$$

59.-



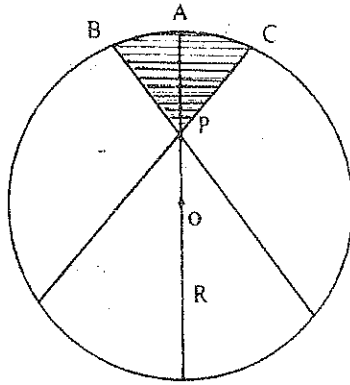
$$H) R_1 = 2 R_2$$

$$PQ \text{ Tang. común}$$

$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.178 R^2$$

60.-



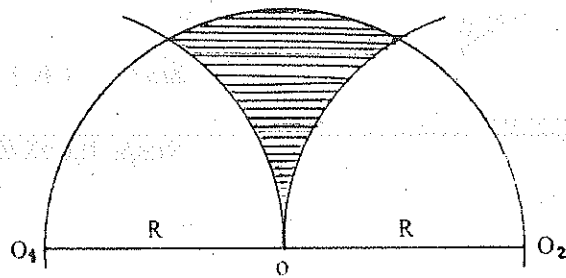
$$H) m\widehat{AB} = m\widehat{AC} = 20^\circ$$

$$AP = \frac{2}{3}R$$

$$T) S_{III} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.985 R^2$$

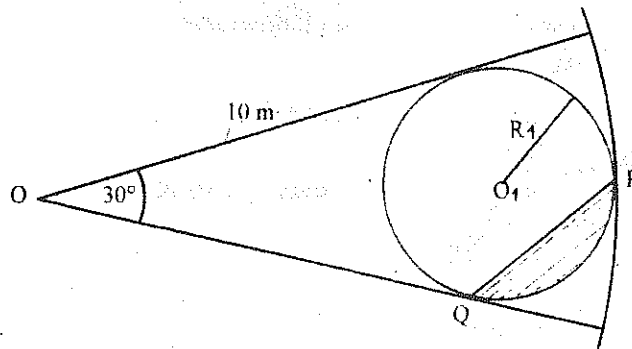
61.-



$$T) S_{III} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.152 R^2$$

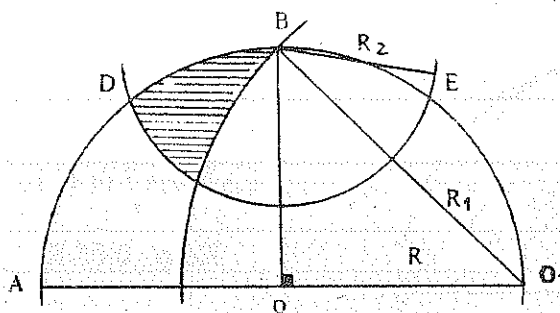
62.-



$$T) S_{III} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 1.829 \text{ m}^2$$

63.-

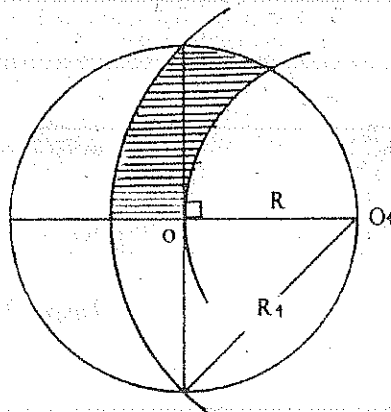


$$H) m\widehat{BD} = 40^\circ$$

$$T) S_{III} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.167 R^2$$

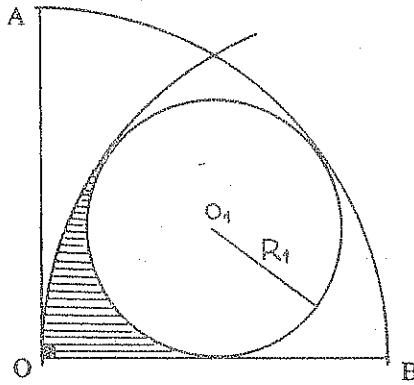
64.-



$$T) S_{III} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.210 R^2$$

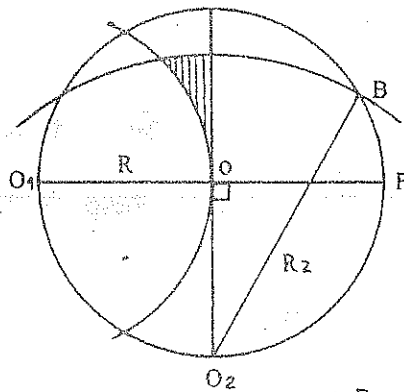
65.-



$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.072 R^2$$

66.-

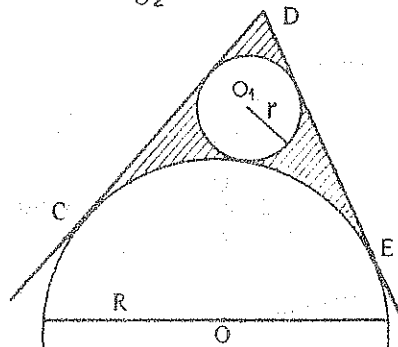


$$H) m \widehat{BF} = 30^\circ$$

$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.068 R^2$$

67.-



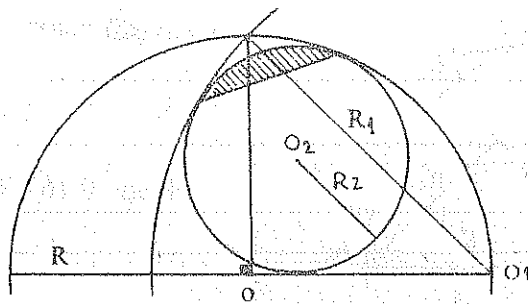
$$H) \overline{DC} \text{ y } \overline{DE} \text{ tang. } \odot(O, R)$$

$$m \widehat{CDE} = 60^\circ$$

$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.349 R^2$$

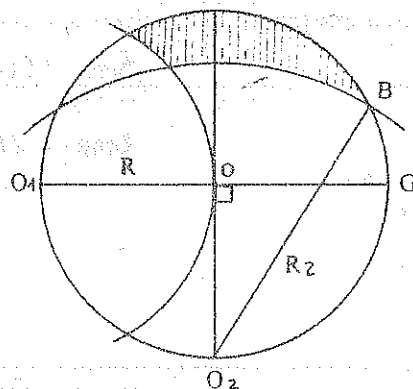
68.-



$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.05 R^2$$

69.-

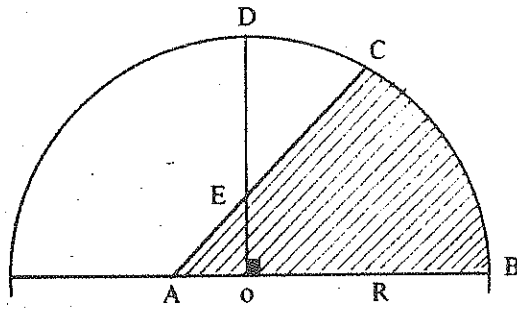


$$H) m \widehat{BG} = 30^\circ$$

$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.288 R^2$$

70.-



$$H) m \widehat{CD} = 30^\circ$$

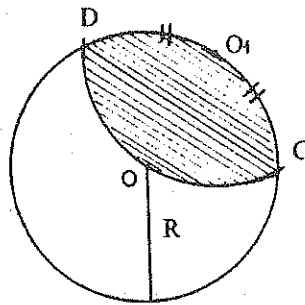
$$R = 10 \text{ m.}$$

$$\frac{S_{\text{shaded}}}{S_{AB}} = \frac{4}{7}$$

$$T) ED = ?$$

$$\text{Resp. } 16.155 \text{ m.}$$

71.-

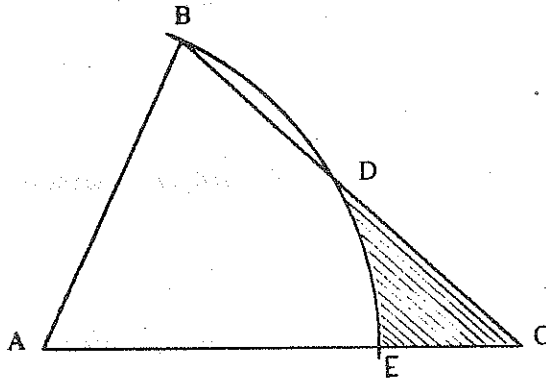


$$H) m \widehat{DO_1C} = 60^\circ$$

$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.614 R^2$$

72.-



$$H) AB = 5 \text{ m.}$$

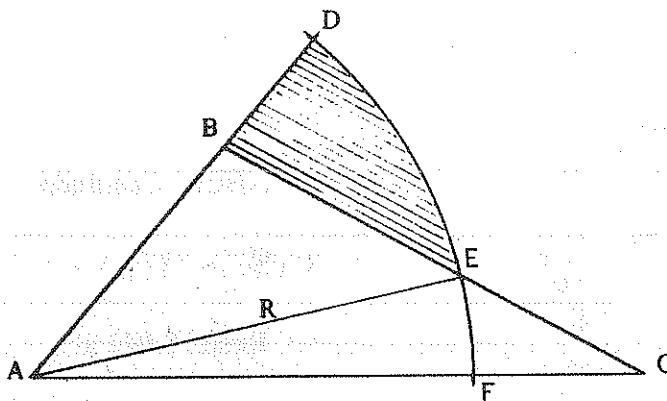
$$BC = 8 \text{ m.}$$

$$AC = 7 \text{ m.}$$

$$T) S_{\text{shaded}} = ?$$

$$\text{Resp. } 0.759 \text{ m}^2$$

73.-



$$H) AB = 35 \text{ m.}$$

$$BC = 66 \text{ m.}$$

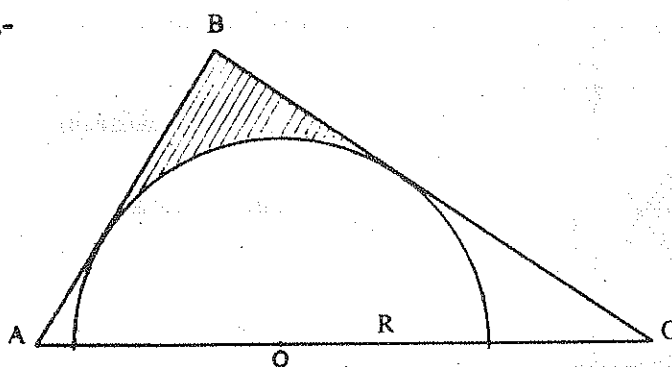
$$AC = 77 \text{ m.}$$

$$\frac{S_{\text{shaded}}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{7}$$

$$T) R = ?$$

$$\text{Resp. } 51.604 \text{ m}^2$$

74.-



$$H) AC = 10 \text{ m.}$$

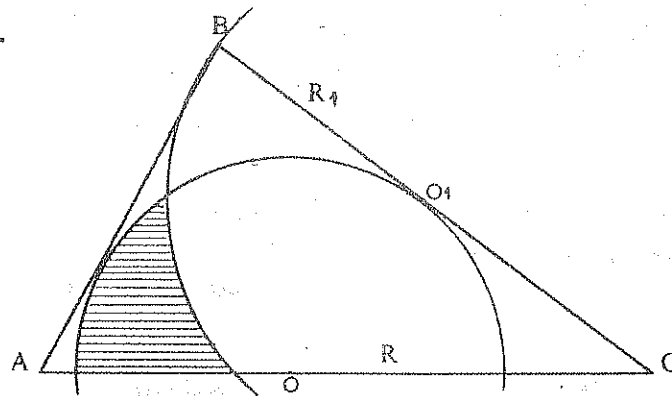
$$BC = 7 \text{ m.}$$

$$AB = 5.5 \text{ m.}$$

$$T) S_{\text{shaded}} = ?$$

$$\text{Resp. } 0.964 \text{ m}^2$$

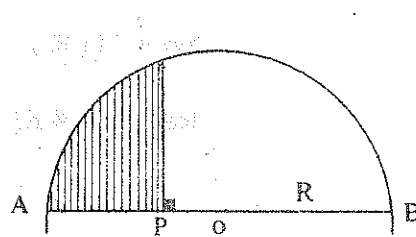
75.-



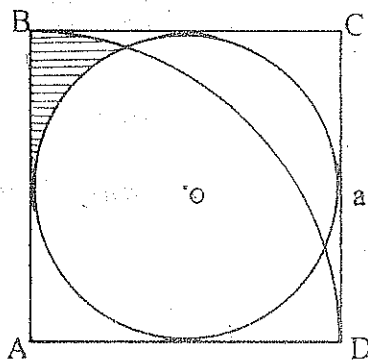
H) $AC = 10 \text{ m.}$
 $BC = 9 \text{ m.}$
 $AB = 7 \text{ m.}$

T) $S_{\text{III}} = ?$ Resp. $4,013 \text{ m}^2$

76.-

H) $\frac{AB}{AP} = \frac{5}{2}$ T) $S_{\text{III}} = ? f(R)$ Resp. 0.37 m^2

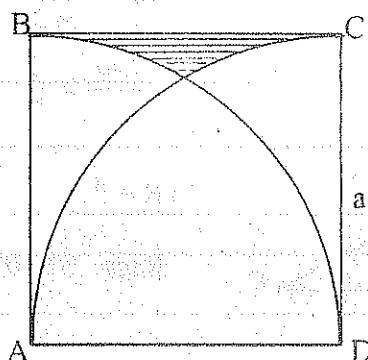
77.-



H) ABCD Cuadrado

T) $S_{\text{III}} = ? f(a)$ Resp. $0.046 a^2$

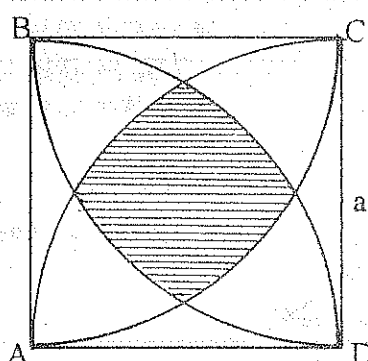
78.-



H) ABCD Cuadrado

T) $S_{\text{III}} = ? f(a)$ Resp. $0.042 a^2$

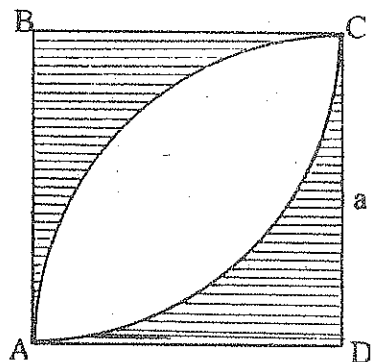
79.-



H) ABCD Cuadrado

T) $S_{\text{III}} = ? f(a)$ Resp. $0.315 a^2$

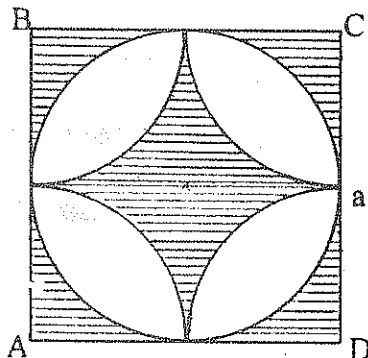
80.-



H) ABCD Cuadrado

T) $S_{\text{shaded}} = ? f(a)$ Resp. $0.429 a^2$

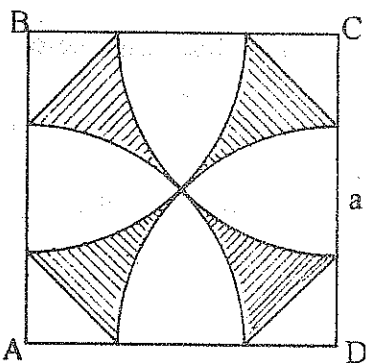
81.-



H) ABCD Cuadrado

T) $S_{\text{shaded}} = ? f(a)$ Resp. $0.57 a^2$ 0,43 a²

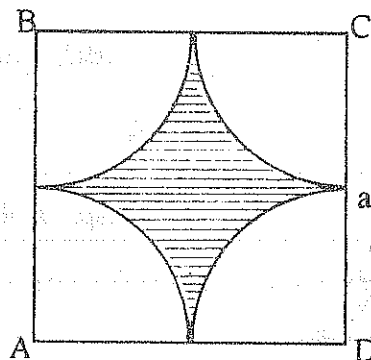
82.-



H) ABCD Cuadrado

T) $S_{\text{shaded}} = ? f(a)$ Resp. $0.257 a^2$

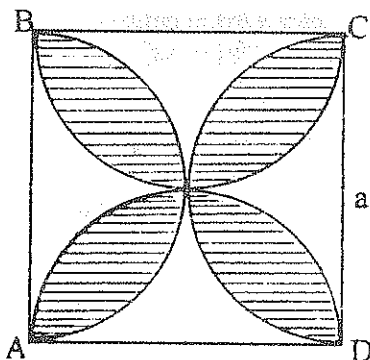
83.-



H) ABCD Cuadrado

T) $S_{\text{shaded}} = ? f(a)$ Resp. $0.215 a^2$

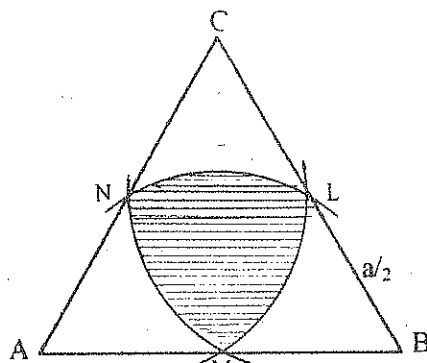
84.-



H) ABCD Cuadrado

T) $S_{\text{shaded}} = ? f(a)$ Resp. $0.571 a^2$

85.-

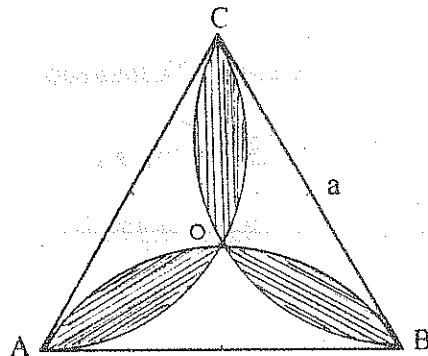


H) ΔABC Equilátero
L, M y N puntos medios

T) $S_{\text{shaded}} = ? f(a)$

Resp. $0.176 a^2$

86.-

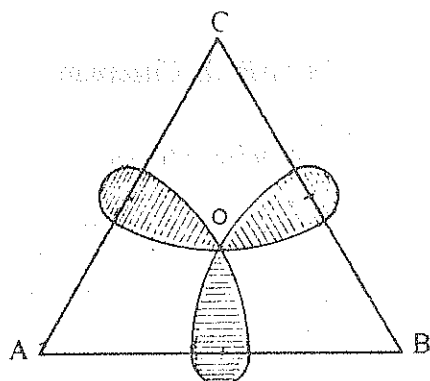


H) ΔABC Equilátero

T) $S_{\text{shaded}} = ? f(a)$

Resp. $0.181 a^2$

87.-

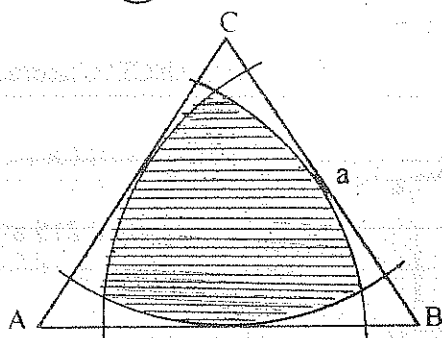


H) ΔABC Equilátero

T) $S_{\text{shaded}} = ? f(a)$

Resp. $0.119 a^2$

88.-

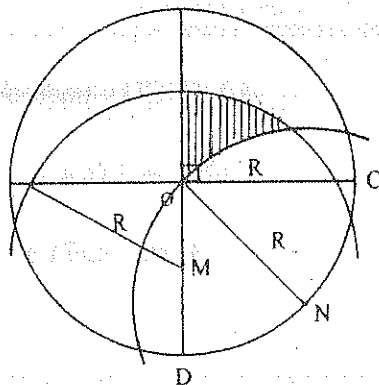


H) ΔABC Equilátero

T) $S_{\text{shaded}} = ? f(a)$

Resp. $0.344 a^2$

89.-

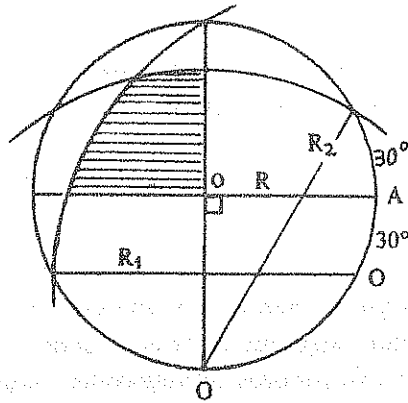


H) $OM = MD$
 $\widehat{DN} = \widehat{NC}$

T) $S_{\text{shaded}} = ? f(R)$

Resp. $0.147 a^2$

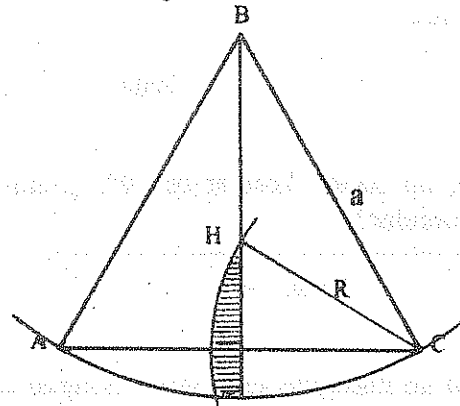
90.-



$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.44 R^2$$

91.-

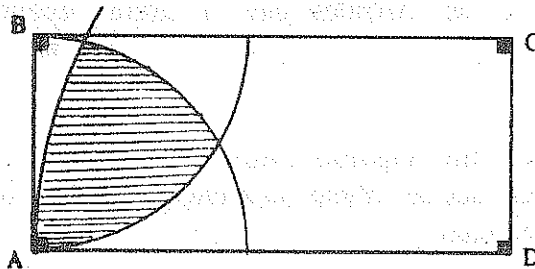
H) ΔABC Equilátero

H ortocentro

$$T) S_{\text{shaded}} = ? f(a)$$

$$\text{Resp. } 0.024 a^2$$

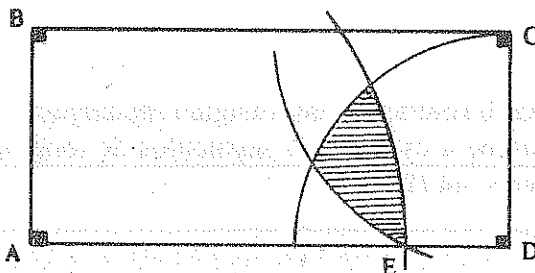
92.-

H) $AB = 5 \text{ m.}$ $AD = 10 \text{ m.}$

$$T) S_{\text{shaded}} = ?$$

$$\text{Resp. } 13.258 \text{ m}^2$$

93.-

H) $AB = 6 \text{ m.}$ $AD = 12 \text{ m.}$ $ED = 3 \text{ m.}$

$$T) S_{\text{shaded}} = ?$$

$$\text{Resp. } 5.912 \text{ m}^2$$

94.- Desde un punto se trazan dos tangentes a un círculo de radio R . El ángulo que forman las tangentes es 2α . Determinar el área limitada por las tangentes y el arco de círculo.

$$\text{Resp. } R^2 \left(\cotg \alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi \alpha}{180} \right)$$

95.- El lado de un triángulo regular es a . Con centro el del triángulo se traza un círculo de radio $\frac{a}{3}$. Determinar el área de la parte del triángulo que queda fuera del círculo.

$$\text{Resp. } \frac{a^2}{18} (3\sqrt{3} - \pi)$$

- 96.- Se inscribe un círculo en un rombo de lado a y ángulo agudo 60° . Determinar el área de un rectángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia del círculo y los lados del rombo.

Resp. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$

- 97.- En el interior de un triángulo equilátero de lado a hay tres círculos iguales tangentes a los lados del triángulo y mutuamente tangentes entre sí. Hallar el área del triángulo curvilíneo formado por los arcos de los círculos mutuamente tangentes (siendo sus vértices los puntos de tangencia).

Resp. $\frac{a^2(2-\sqrt{3})(2\sqrt{3}-\pi)}{16}$

- 98.- Siendo $R = 9$ m. el radio de un sector circular de 30° . ¿Cuánto mide el radio del círculo equivalente al sector circular?

Resp. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

- 99.- El área del círculo inscrito en un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los círculos inscritos en los parciales que la altura determina sobre la hipotenusa.

- 100.- Dos círculos de radios R y r son tangentes exteriormente. Se traza una tangente exterior común a ambos con lo que se obtiene un triángulo curvilíneo. Hallar el área del círculo inscrito en este triángulo.

Resp. $\pi \left[\frac{Rr}{(R+\sqrt{r})^2} \right]^2$

- 101.- Determinar el área de un círculo inscrito en un triángulo rectángulo, sabiendo que la altura sobre la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos de longitudes 25,6 cm y 14,4 cm.

Resp. $64\pi \text{ cm}^2$

- 102.- En un círculo de radio R se trazan tres cuerdas paralelas, a los lados del exágono regular, cuadrilátero regular y triángulo regular inscritos en el círculo. Determinar la relación entre el área de la porción de círculo comprendida entre las cuerdas segunda y tercera y la contenida entre las cuerdas primera y segunda.

Resp. $\frac{\pi + 3(2-\sqrt{3})}{\pi - 3(2-\sqrt{3})}$

- 103.- Se inscribe un círculo en un sector circular de radio R y ángulo central α . Determinar el área del círculo.

Resp. $\left[\frac{\pi R^2 \operatorname{Sen} \frac{\alpha}{2}}{(1 + \operatorname{Sen} \frac{\alpha}{2})^2} \right]$

5.10.5. EJERCICIOS RESUELTOS

15.-

$$1.- S_{\text{III}} = S_{\text{O} \text{ sector } D} + S_{\Delta MOC} = \Pi (10)^2 \times \frac{\hat{\phi}}{360^\circ} + \frac{1}{2} (5 \times 10 \times \text{Sen} (180^\circ - \hat{\phi}))$$

$$2.- BM^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \times 5 \times 10 \times \text{Cos } 30^\circ$$

$$\therefore BM = 6.2$$

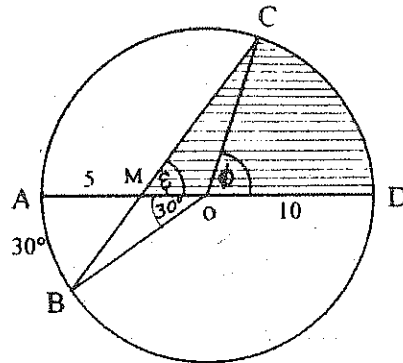
$$3.- \frac{BM}{\text{Sen } 30^\circ} = \frac{10}{\text{Sen } \hat{\epsilon}}$$

$$\therefore \hat{\epsilon} = 53.7^\circ$$

$$4.- 53.7^\circ = \frac{30^\circ + \widehat{CD}}{2}$$

$$5.- \Rightarrow \widehat{CD} = 77.4^\circ = \hat{\phi}$$

$$\therefore S_{\text{III}} = 92$$



21.-

$$1.- S_{\text{III}} = S_{\text{A} \text{ sector } B} + S_{\Delta ABE} = \frac{R_1^2}{2} \left(\frac{\phi \Pi}{180^\circ} - \text{Sen } \hat{\phi} \right) + \frac{AE \times BE}{2}$$

$$2.- R_1 = \sqrt{R^2 + R^2} = R \sqrt{2}$$

$$3.- CE = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{2} R)^2} = \frac{1}{2} R \sqrt{5}$$

$$4.- \text{Tan } \hat{\epsilon} = \frac{R}{\frac{1}{2} R} \Rightarrow \hat{\epsilon} = 63.4^\circ$$

$$5.- \widehat{BEC} = 90^\circ + \hat{\epsilon} = 153.4^\circ$$

$$6.- R_1^2 = BE^2 + CE^2 - 2 \times BE \times CE \times \text{Cos } \widehat{BEC}$$

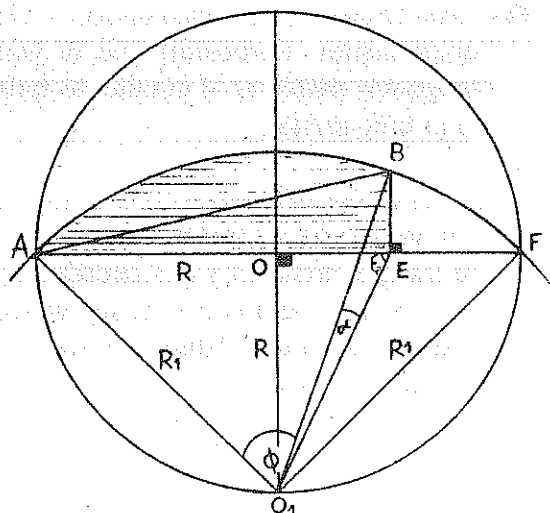
$$\Rightarrow BE = 0.32 R$$

$$\frac{R_1}{\text{Sen } 153.4^\circ} = \frac{BE}{\text{Sen } \hat{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = 5.8^\circ$$

$$7.- \hat{\phi} = 45^\circ + (90^\circ - \hat{\epsilon}) - \hat{\alpha} = 65.8^\circ$$

$$\Rightarrow S_{\text{III}} = 0.47 R^2$$



$$\frac{R}{\frac{1}{2}R} = \frac{OP}{O_1P} = \frac{2R + FP}{\frac{1}{2}R + FP} \Rightarrow FP = R$$

$$5.- \text{Sen } \hat{\alpha} = \frac{R}{OP} \Rightarrow \hat{\alpha} = 19.47^\circ$$

$$6.- \text{En } \Delta O_2EP \quad \frac{1.5R}{\text{Sen } 19.47^\circ} = \frac{2.5R}{\text{Sen } O_2EP}$$

$$7.- \text{En } \Delta O_2BE \text{ Isósceles } \widehat{O_2EB} = \widehat{O_2BE} = 33.75^\circ \text{ y } \hat{\phi} = 112.5^\circ$$

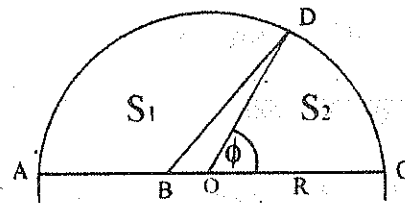
$$\therefore S_{\text{III}} = 0.4 R^2$$

48.-

$$1.- \text{Si } \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$$

$$2.- \frac{S_1 + S_2}{S_2} = \frac{3 + 2}{2}$$

$$\therefore \frac{5}{2} = \frac{\frac{\pi R^2}{2}}{\frac{\phi R^2}{2} + \frac{R \cdot \frac{1}{2} R \cdot \text{Sen } \hat{\phi}}{2}}$$



$$3.- \therefore 40 \hat{\phi} + 15 \text{Sen } \hat{\phi} = 16 \pi \Rightarrow \hat{\phi} = 54.5^\circ = \widehat{DC}$$

67.-

$$1.- S_{\text{III}} = S_{\Delta CDE} - S_{\text{C} \cap \text{E}} - S_{\odot(O_1, r)}$$

$$2.- S_{\text{III}} = \frac{CE^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{R^2}{2} \left(\frac{\phi \pi}{180^\circ} - \text{Sen } \hat{\phi} \right) - \pi r^2$$

$$3.- \Delta CDE \text{ Equilátero: } \tan 30^\circ = \frac{R}{DE} \text{ y } \text{Sen } 30^\circ = \frac{r}{DO_1}$$

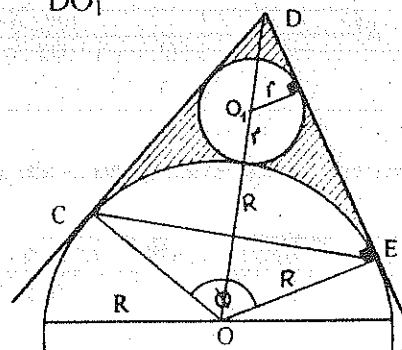
$$\Rightarrow CE = DE = DC = 1.73 R \text{ y } DO_1 = 2r$$

$$4.- \frac{R}{r} = \frac{R + r + DO_1}{DO_1}$$

$$\therefore r = \frac{1}{2} R$$

$$5.- \hat{\phi} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow S_{\text{III}} = 0.33 R^2$$



UNIDAD 6

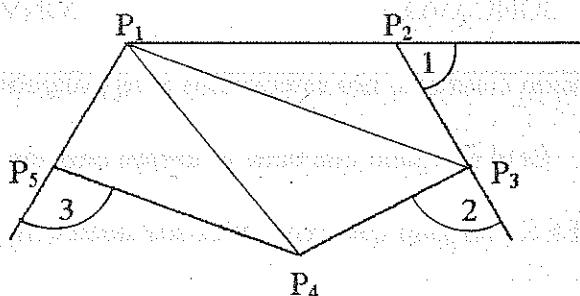
6. POLÍGONOS Y CUADRILÁTEROS

6.1. DEFINICIÓN

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ son n puntos coplanares distintos ($n \geq 3$) y si al formar con estos puntos n segmentos, cumplen las siguientes condiciones:

1. Ningún par de segmentos se intersecan excepto en los puntos extremos
2. Ningún par de segmentos con extremos comunes son colineales

La figura geométrica formada es un polígono.



6.2. DENOMINACIÓN

Por las letras de los n puntos en el sentido de las agujas del reloj:

Polígono $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$

6.3. ELEMENTOS

1. VÉRTICES. Son los n puntos coplanares dados.

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$

2. LADOS. Son los segmentos que unen los puntos coplanares dados.

$P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots$

3. DIAGONALES. Son los segmentos que unen vértices no consecutivos.

P_1P_3, P_1P_4, \dots

4. ÁNGULOS INTERNOS. Son los ángulos formados por dos lados del polígono.

$\angle P_1P_2P_3, \angle P_2P_3P_4, \angle P_3P_4P_5, \dots$

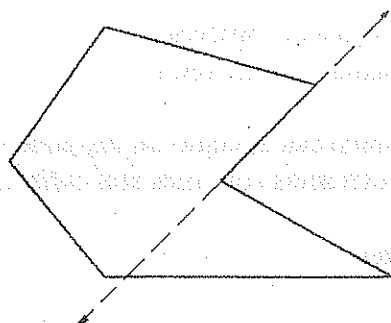
5. ÁNGULOS EXTERNOS. Son los ángulos formados por un lado y por la prolongación de otro consecutivo. $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \dots$

6. PERÍMETRO. (P). Es igual a la suma de las longitudes de los lados del polígono.

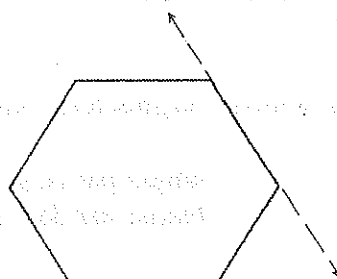
$P = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \dots$

6.4. CLASIFICACIÓN

1. **CÓNCAVOS Y CONVEXOS.** Si todos los puntos de un polígono están a un mismo lado de una recta que contienen a cualquiera de sus lados, el polígono es convexo, de lo contrario es cóncavo.



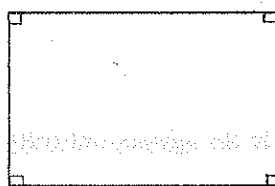
CÓNCAVO



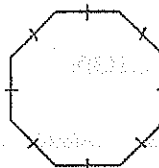
CONVEXO

NOTA. Salvo indicación contraria, nos referiremos a los polígonos convexos.

2. **EQUIANGULAR.** Es el polígono que tiene todos sus ángulos internos congruentes.
3. **EQUILÁTERO.** Es el polígono que tiene todos sus lados congruentes.



EQUIANGULAR



EQUILÁTERO

4. **POLÍGONO REGULAR.** Es aquel que a la vez es equilátero y equiángulo.
5. **POR EL NÚMERO DE LADOS.** Los polígonos pueden ser:

| | |
|--------------|-----------|
| Triángulo | (3 lados) |
| Cuadrilátero | (4 lados) |
| Pentágono | (5 lados) |
| Hexágono | (6 lados) |
| Heptágono | (7 lados) |

.....
.....

Se los puede nombrar refiriéndose al número de lados.

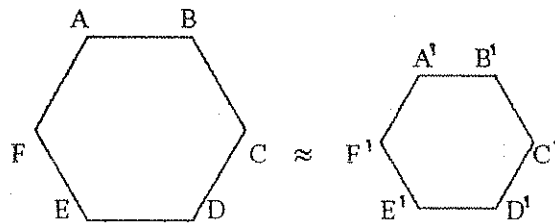
6.5. CONGRUENCIA DE POLÍGONOS

Dos polígonos son congruentes si tienen respectivamente congruentes sus lados y sus ángulos internos.

6.6. SEMEJANZA DE POLÍGONOS

Dos polígonos son semejantes si tienen respectivamente sus lados proporcionales y sus ángulos congruentes.

TEOREMA # 1 Los perímetros de dos polígonos semejantes son entre sí como dos lados homólogos.



$$H) ABCD... \approx A'B'C'D'...$$

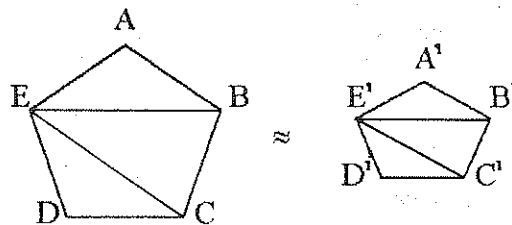
$$T) \frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'} = \dots\dots\dots$$

$$D) \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{AB + BC + CD + DE + \dots\dots\dots}{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + \dots\dots\dots} = \frac{AB}{A'B'}$$

$$\frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'} = \dots\dots\dots III.$$

TEOREMA # 2 Si dos polígonos son semejantes se pueden descomponer en un mismo número de triángulos semejantes, semejantemente dispuestos.



$$H) ABCDE \approx A'B'C'D'E'$$

$$T) \begin{aligned} \triangle ABE &\approx \triangle A'B'E' \\ \triangle BEC &\approx \triangle B'E'C' \\ \triangle CED &\approx \triangle C'E'D' \end{aligned}$$

$$D) \triangle ABE \wedge \triangle A'B'E'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{EA}{E'A'}$$

$$\angle A \cong \angle A'$$

$$\therefore \triangle ABE \approx \triangle A'B'E' \quad III.$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AE}{A'E'} = \frac{BE}{B'E'}$$

$$\therefore \triangle CED \wedge \triangle C'E'D'$$

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'}$$

$$\angle D \cong \angle D'$$

$$\therefore \triangle CED \approx \triangle C'E'D' \quad ///$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{CE}{C'E'}$$

$$\triangle BEC \sim \triangle B'E'C'$$

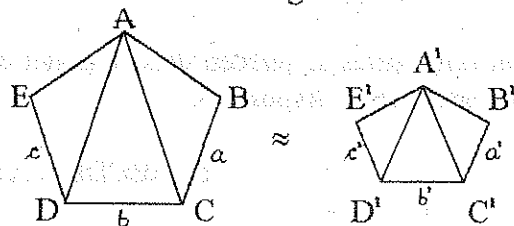
$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{BE}{B'E'} = \frac{CE}{C'E'}$$

$$\therefore \triangle BCE \approx \triangle B'C'E' \quad ///$$

COROLARIO.

Si dos polígonos pueden descomponerse en igual número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos, los polígonos son semejantes.

TEOREMA # 3. Las áreas de los polígonos semejantes están en la misma relación que el cuadrado de los lados homólogos.



$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{a^2}{a_1^2}$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle A'C'D'}} = \frac{b^2}{b_1^2}$$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle A'D'E'}} = \frac{c^2}{c_1^2}$$

$$\frac{a}{b_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \dots$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle A'C'D'}} = \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle A'D'E'}} = \dots$$

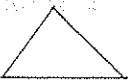

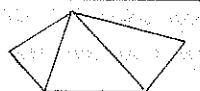

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle A'B'C'} + S_{\triangle A'C'D'} + S_{\triangle A'D'E'}} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}$$

$$\therefore \frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}} = \frac{a^2}{a_1^2} = \dots\dots\dots ///.$$

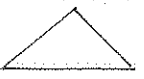
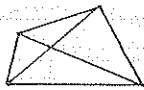

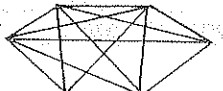
6.7. PROPIEDADES

6.7.1 NÚMERO DE DIAGONALES

TEOREMA # 1. El número de diagonales trazadas desde un vértice de un polígono de n lados es igual a $(n - 3)$.

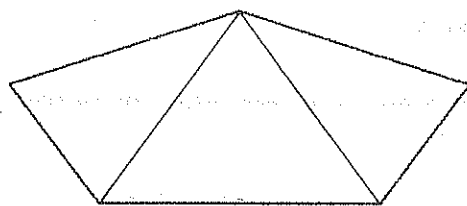
| Número de Lados n | Figura Geométrica | Número de Diagonales | fórmula |
|---------------------|--|----------------------|---------|
| 3 |  | 0 | $n - 3$ |
| 4 |  | 1 | $n - 3$ |
| 5 |  | 2 | $n - 3$ |
| 6 |  | 3 | $n - 3$ |

TEOREMA # 2. El número de diagonales totales de un polígono de n lados es igual a $\frac{n(n-3)}{2}$

| Número de Lados n | Figura Geométrica | Número de Diagonales | Fórmula |
|---------------------|---|----------------------|--------------------|
| 3 |  | 0 | $\frac{n(n-3)}{2}$ |
| 4 |  | 2 | $\frac{n(n-3)}{2}$ |
| 5 |  | 5 | $\frac{n(n-3)}{2}$ |
| 6 |  | 9 | $\frac{n(n-3)}{2}$ |

6.7.2 SUMA DE ÁNGULOS

TEOREMA # 1. La suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es igual al producto de dos ángulos rectos por el número de lados del polígono disminuido en dos.



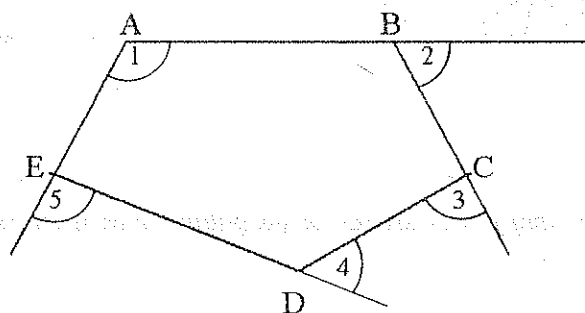
$$T) \sum \angle \text{int.} = \pi (n - 2)$$

D) Construimos todas las diagonales desde un mismo vértice y se forma $(n - 2)$ triángulos.

$$\Rightarrow \sum \angle \text{int. Del polígono} = \sum \angle \text{int. De los triángulos formados.}$$

$$\therefore \sum \angle \text{int. Del polígono} = \pi (n - 2) \quad ///$$

TEOREMA # 2. La suma de los ángulos externos de un polígono formados al prolongar los lados en el mismo orden es igual a cuatro ángulos rectos.



$$T) \sum \angle \text{ext.} = 2 \pi$$

$$D) \angle 1 + \angle A = \pi$$

$$\angle 2 + \angle B = \pi$$

$$\angle 3 + \angle C = \pi$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\angle n + \angle N = \pi$$

$$(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \dots\dots\dots + \angle n) +$$

$$(\angle A + \angle B + \angle C + \dots\dots\dots + \angle N) = n \pi$$

$$(\angle A + \angle B + \angle C + \dots\dots\dots + \angle N) = (n - 2) \pi$$

$$\therefore (\angle 1 + \angle 2 + \dots\dots\dots + \angle n) + (n - 2) \pi = n \pi$$

$$\therefore \sum \angle \text{externos} = n \pi - (n - 2) \pi$$

$$\therefore \sum \angle \text{externos} = 2 \pi \quad ///$$

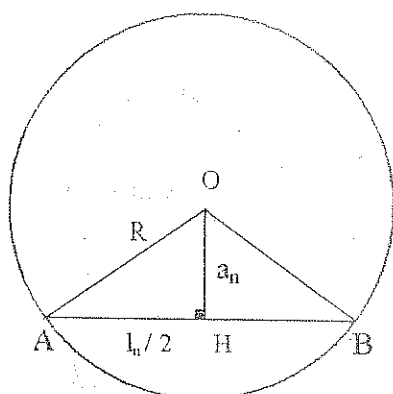
6.8. PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS REGULARES

1. Todo polígono regular tiene un círculo Inscrito y un círculo circunscrito. El radio del círculo circunscrito es el "radio del polígono" y el radio del círculo inscrito es su "apotema".

Los dos círculos son concéntricos y su centro común es el "centro del polígono".

2. Si un círculo se divide en n arcos congruentes ($n \geq 3$) y se unen consecutivamente los puntos de división, el polígono inscrito resultante es regular. Las tangentes trazadas por los mismos puntos forman un polígono regular circunscrito.
3. Todo radio de un polígono regular biseca al ángulo interno.
4. "Ángulo central" de un polígono regular es el ángulo formado por dos radios que unen los extremos de sus lados con el centro del polígono.
5. Los ángulos centrales de un polígono regular de n lados son congruentes y cada uno tiene por medida $\frac{2\pi}{n}$.
6. El ángulo central de un polígono regular es el suplemento de su ángulo interno.
7. Dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes.
8. Cada ángulo interno de un polígono regular de n lados es igual a $\frac{\pi(n-2)}{n}$.

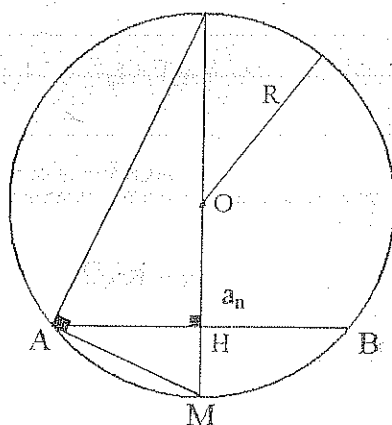
6.8.1 CÁLCULO DE LA APOTEMA DE UN POLÍGONO REGULAR DE "n" LADOS (a_n)



$$AB = l_n$$

$$a_n = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - l_n^2}$$

6.8.2 CÁLCULO DEL LADO DE UN POLÍGONO REGULAR DE DOBLE NÚMERO DE LADOS (l_{2n})



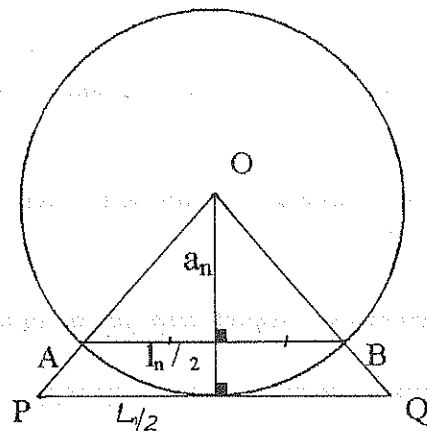
$$AB = l_n$$

$$AM = l_{2n}$$

$$AM^2 = 2R(R - a_n)$$

$$l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$$

6.8.3 CÁLCULO DEL LADO DE UN POLIGONO REGULAR CIRCUNSCRITO DE LADO (L_n)



$$AB = l_n$$

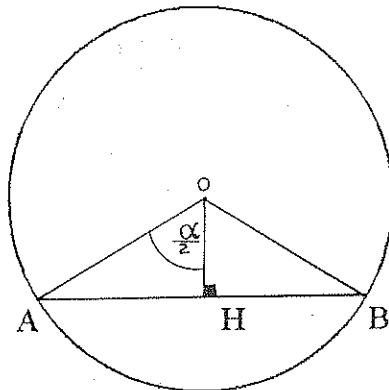
$$PQ = L_n$$

$$\frac{a_n}{R} = \frac{l_n}{L_n}$$

$$L_n = \frac{2Rl_n}{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$$

6.8.4 CÁLCULO DEL LADO DE UN POLÍGONO REGULAR DE "n" LADOS (l_n), CONOCIDO R

1. TRIÁNGULO EQUILÁTERO (l_3)



$$AB = l_3$$

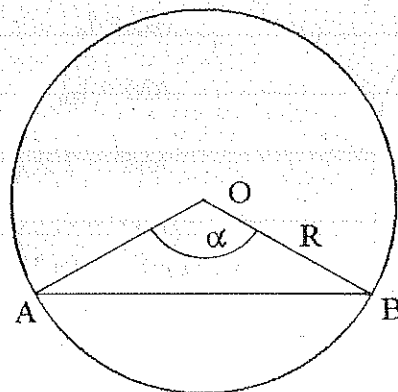
$$\angle AOB = \angle \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$OH = \frac{R}{2}$$

$$AH = R \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$l_3 = 2 AH = R\sqrt{3}$$

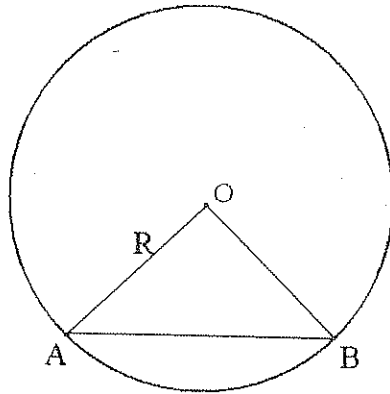
2. CUADRADO (l_4)



$$AB = l_4$$

$$\angle AOB = \angle \alpha = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$l_4 = R\sqrt{2}$$

3. HEXÁGONO REGULAR (l_6)

$$AB = l_6$$

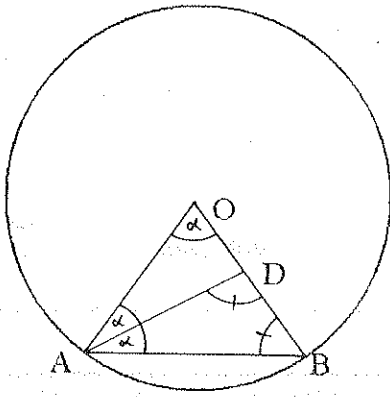
$$\angle AOB = 2 \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$l_6 = R$$

4. OCTÓGONO REGULAR (l_8)

$$l_4 = R \sqrt{2}$$

$$l_8 = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2}} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

5. DECÁGONO REGULAR (l_{10})

$$AB = l_{10}$$

$$\angle AOB = \angle \alpha = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$

$$AB = AD = DO = l_{10}$$

$$\frac{l_{10}}{R} = \frac{R - l_{10}}{l_{10}}$$

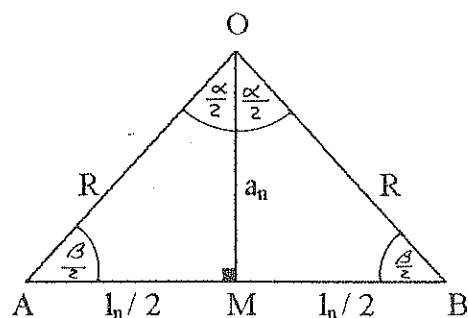
$$l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

6. PENTÁGONO REGULAR (l_5)

$$l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_5^2}}$$

$$l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

El lado de un polígono regular de n lados, se puede calcular tomando en cuenta el triángulo fundamental de un polígono regular $\triangle OAB$.

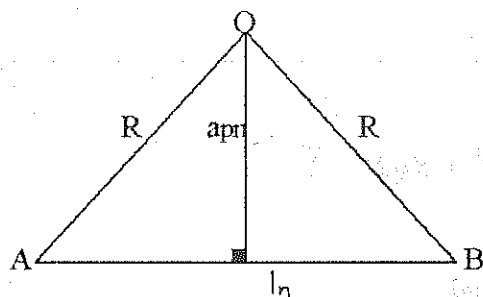


$\Delta OAB.$

$$l_n = \sqrt{2R^2(1 - \cos \alpha)}$$

6.8.5 SUPERFICIE

TEOREMA # 1. El área de un polígono regular es igual al semiperímetro por su apotema.

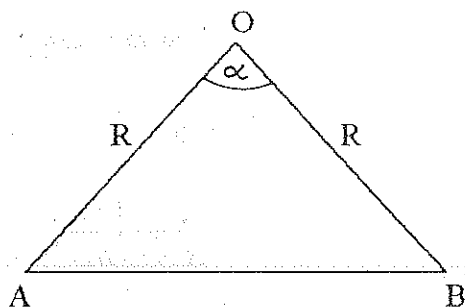


$$S_{\text{polígono}} = n S \Delta OAB$$

$$S_{\text{polígono}} = \frac{n l_n a_n}{2}$$

$$S_{\text{polígono}} = p \cdot a_n \quad ///.$$

TEOREMA # 2. Superficie de un polígono regular es función del radio y de su ángulo central.



$$S_{\text{polígono}} = n S \Delta OAB$$

$$S_{\text{polígono}} = \frac{n R^2 \sen \alpha}{2}$$

6.8.6 CALCULO DEL VALOR π . (PARA $R=1$)

| N | l_n | $n l_n$ | $K = n \frac{l_n}{2R}$ |
|-----|----------|----------|------------------------|
| 6 | 1. | 6. | 3. |
| 12 | 0.517638 | 6.211657 | 3.105828 |
| 24 | 0.261052 | 6.265257 | 3.132628 |
| 48 | 0.130806 | 6.278700 | 3.139650 |
| 96 | 0.065438 | 6.282063 | 3.141031 |
| 192 | 0.032723 | 6.282905 | 3.141452 |
| 384 | 0.016362 | 6.283155 | 3.141557 |
| 768 | 0.008181 | 6.283169 | 3.141586 |

$$k = 3.141586 = \pi$$

6.8.7 CALCULO DE LA CIRCUNFERENCIA

La circunferencia es el límite hacia el cual tiende el perímetro de un polígono regular cuando el número de lados aumenta indefinidamente. Por lo tanto, la circunferencia es igual al perímetro de un círculo.

$$2p = n l_n$$

$$\text{si } n = > \infty$$

$$2p = \frac{C}{2R} = \Pi$$

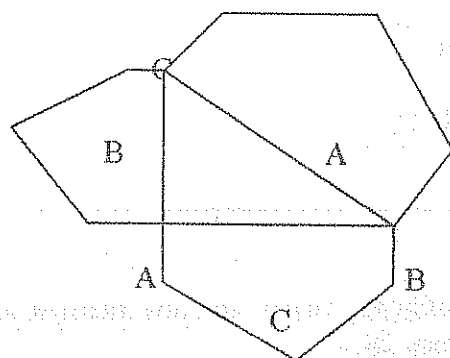
$$C = 2 \Pi R$$

6.9. EJERCICIOS

1. Hallar el número de lados de un polígono, cuyos ángulos internos suman once veces más que sus ángulos externos. Resp. 24
2. La suma de los ángulos internos y externos de un polígono es 5π . Cuántos lados tiene el polígono? Resp. 5
3. De cuántos lados es el polígono que tiene 170 diagonales totales? Resp. 20
4. Si el número de lados de un polígono se aumenta en tres, el número de diagonales totales aumenta en quince. Cuántos lados tiene el polígono?. Resp. 5
5. Hallar el número de diagonales totales de un polígono cuyos ángulos internos suman 5π . Resp. 14
6. Cuántos lados tiene un polígono que tiene el número de diagonales totales igual a su número de lados. Resp. 5
7. Determinar el número de lados de un polígono que tiene cinco diagonales totales más que el polígono que tiene un lado menos. Resp. 7
8. Cuántos lados tiene un polígono, cuyos ángulos internos sumados, es igual a la suma de los ángulos internos y externos de otro polígono de 16 lados. Resp. 18
9. Los lados de un polígono miden 3, 5, 6, 8, y 10 m. respectivamente. El perímetro de un polígono semejante es 40 m. Encontrar la longitud de los lados del segundo polígono. Resp. 3,75; 6,25; 7,5; 10; 12,5 m.
10. Los lados de un pentágono son de 2, 5, 7, 8, y 10 unidades. Hallar los lados de otro polígono semejante cuyo perímetro es de 50 unidades. Resp. 3,13; 7,81; 10,94; 12,50 y 15,63 u.

11. El número de vértices de un polígono más el número de diagonales totales es igual a 45. Cuantos lados tiene el polígono. Resp 10
12. La suma de los ángulos internos de un polígono Q es igual a la suma de los ángulos internos y externos de un polígono P. Calcular el número de lados de Q si P tiene 16 lados Resp 18
13. Un círculo tiene cuatro cuerdas iguales de longitud 5m y cuatro cuerdas iguales de longitud 8m. Hallar el área del octógono formado por las cuerdas. Resp. $201,75 \text{ m}^2$

14.



H) A, B, C, polígonos
Semejantes

$$T) S_A = S_B + S_C$$

15. Si los ángulos centrales de dos polígonos regulares difieren en $\frac{\pi}{20}$ y el número de diagonales trazadas desde un mismo vértice difiere en 9, Calcular el número de los lados del polígono. Resp. 15; 24
16. En dos polígonos regulares, los ángulos internos y los ángulos centrales difieren en 42 Calcular el número de lados de cada polígono. Resp. 12; 5
17. La medida del ángulo central del polígono P es a la medida del ángulo interno del polígono Q como $\frac{3}{8}$. Si la diferencia entre el número total de diagonales del polígono P y del polígono Q es 11; Hallar el número de lados de cada polígono. los polígonos son regulares. Resp. 8; 6
18. El polígono regular P tiene 2 lados más que el polígono regular Q y la diferencia entre sus ángulos centrales es de 6° . Determinar el número de lados de cada polígono. Resp. 10; 12.
19. El ángulo interno y el ángulo central de los polígonos regulares difieren en 126° y sus ángulos internos en 18° . Calcular el número de lados de cada polígono. Resp. 20; 10
20. En un polígono regular, el radio mide 3 cm. Y su apotema $3\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Calcular el lado del polígono regular de doble número de lados. Si su apotema mide 14,93 cm. Resp. 9,7 cm.

21. Si el número de lados de un polígono regular aumenta en diez y cada ángulo del nuevo polígono es $\frac{\pi}{60}$ mayor que cada ángulo del primero. Cuántos lados tiene cada polígono. Resp. 30; 40
22. Si a un polígono regular se le aumenta un lado su ángulo interno aumenta en $\frac{\pi}{15}$. Cuántos lados tiene el polígono. Resp. 5
23. La suma de los ángulos internos de un polígono regular vale 56 rectos. Cuál es el valor del ángulo central de ese polígono. Resp. 12°
24. Si la suma de los ángulos internos de dos polígonos regulares difieren en 4π y sus ángulos centrales difieren en $\frac{\pi}{24}$. Calcular el número de lados de cada polígono. Resp. 12; 16
25. Un ángulo interno de un polígono regular de n lados es $\frac{\pi}{48}$ mayor que el ángulo de un polígono regular de $(n - 3)$ lados. Cuántos lados tiene cada polígono? Resp. 9; 12
26. Se tiene dos polígonos regulares P y Q , el polígono P tiene 8 lados menos que el polígono Q y, cada ángulo interno tiene del polígono Q vale $\frac{\pi}{15}$ más que cada ángulo interno del polígono P . Encontrar el número de los lados de cada polígono. Resp. 12; 20
27. En un polígono regular el perímetro es de 12 cm. El radio 2 cm. Y su apotema $\sqrt{3}$ cm. Calcular el perímetro y el radio de otro polígono regular de igual número de lados si su apotema es 3 cm. Resp. 20; 78; 3,46 cm.
28. Calcular el valor del lado y apotema del polígono regular inscrito, lado del polígono regular circunscrito, de un polígono de n lados, $n = 16$, si el radio del polígono es $R=10$. Resp. 13,36 m.
29. Dados los perímetros P_1 y P_2 de los polígonos regulares de igual número de lados, el uno circunscrito y el otro inscrito al mismo círculo. Encontrar los perímetros de los polígonos regulares inscrito y circunscrito de doble número de lados en el mismo círculo. Resp. $2P_1P_2 / (P_1 + P_2)$
30. Un hexágono está inscrito en un círculo otro hexágono esta circunscrito en el mismo círculo. Hallar el radio del círculo si la diferencia entre los perímetros es a . Resp. $1,08 a$.
31. En un círculo de radio R está inscrito un hexágono regular $ABCDEF$. Hallar el radio del círculo inscrito en el ΔACD . Resp. $0,37 R$
32. Calcular el lado de un cuadrado inscrito en un círculo si la superficie de un octógono regular inscrito en el mismo círculo es $35,44 u^2$. Resp. 5 u.

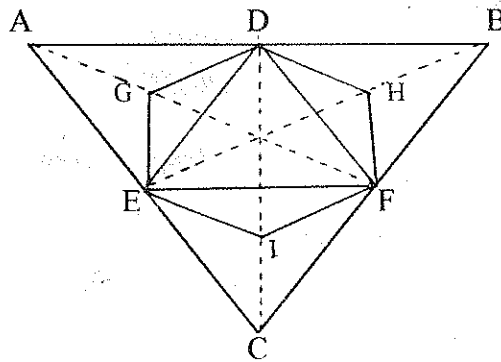
33. La diferencia del ángulo interno y del ángulo central de un polígono regular es de 36° . Hallar el número de lados del polígono. Resp. 5
34. Cuántos lados tiene el polígono regular si su ángulo interno es igual a su ángulo central. Resp. 4
35. Si el número de lados de dos polígonos regulares difieren en 2 y sus ángulos centrales difieren en 15° . Cuántos lados tienen cada polígono. Resp. 6, 8.
36. En un polígono regular, el ángulo interno es cuatro veces mayor que su ángulo externo. Cuántos lados tiene el polígono. Resp. 10
37. El radio de un polígono regular es de 5,54 u. y su apotema 5,183 u. Determinar: El valor de su lado. El valor de su ángulo central. El valor de su ángulo interno. El valor del área. El número total de sus diagonales.
Resp. 4,24 u; 45° ; 135° ; $86,80 \text{ u}^2$; 20
38. Un polígono regular tiene su apotema $5\sqrt{3}$ y su lado 10 u. Hallar el número de diagonales totales del polígono. Resp. 9
39. El lado de un polígono regular de 12 lados mide 5 u.. Cuánto mide el ángulo central, el radio y su apotema. Resp. 30° ; 9,66 u; 9,33 u.
40. El número total de diagonales de un polígono regular es 27 y su área es $86,8 \text{ u}^2$. Calcular su apotema. Resp. 5,14 u.
41. En un polígono regular, la suma de los ángulos internos es 400° y su lado mide 4 u. Calcular su área. Resp. $58,14 \text{ u}^2$.
42. El radio de un polígono regular es 3 u., su apotema 2,772 u. Calcular su área. Resp. $25,46 \text{ u}^2$
43. Calcular la apotema de un pentágono regular inscrito en un círculo, si la superficie de un octógono regular inscrito en el mismo círculo es de $35,44 \text{ m}^2$. Resp. $2,86 \text{ m}^2$.
44. El lado de un pentágono regular es 8 u. Cuanto mide la apotema de otro pentágono semejante si su perímetro es 80 u. Resp. 11 u.
45. Calcular la superficie de un octógono regular inscrito en un círculo, si el lado del cuadrado inscrito en el mismo círculo es 5 u. Resp. $35,44 \text{ u}^2$.
46. El lado de un polígono regular mide 12 u, si el número total de diagonales es igual al número de lados. Calcular la superficie. Resp. $247,57 \text{ u}^2$
47. Cual es la relación entre las áreas de dos pentágonos regulares, si el lado del segundo polígono es la apotema del primero. Resp. 2,11
48. Si los ángulos centrales de dos polígonos regulares difieren en 5° , y el número de lados de un polígono es el doble del número de lados del otro polígono. Calcular la relación de sus áreas si están inscritos en el mismo círculo. Resp. 1

49. Los puntos medios de los lados de un n -ágono regular se unen mediante rectas para formar un nuevo n -ágono inscrito en el lado. Hallar la relación entre sus áreas.

$$\text{Resp.} = \cos^2 \frac{\pi}{n}$$

50. Si se prolongan en un mismo sentido todos los lados de un hexágono regular en una longitud igual a los lados y se unen los extremos de las prolongaciones. Hallar la razón de las áreas entre el hexágono dado y el polígono formado. Resp.
51. Hallar la relación de las áreas entre un hexágono regular inscrito y circunscrito en un mismo círculo. Resp.
52. Un cuadrado y un pentágono regular tienen perímetros iguales. Hallar la relación entre sus áreas. Resp.

53.



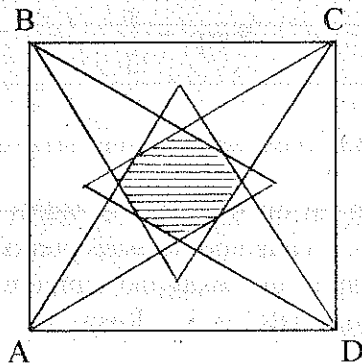
H) ΔABC equilátero

FHDGEI hexágono regular = A_6

$$T) A_6^2 = A_{\Delta DEF} * A_{\Delta ABC}$$

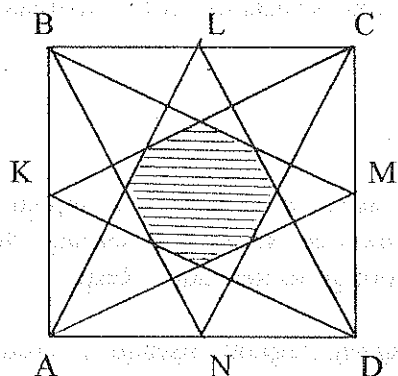
54. Dados un cuadrado ABCD, llamando O al centro del polígono, demostrar que los centros de los círculos inscritos en el triángulos AOB, BOC, COD, AOD, ABC, BCD, ADB y ADC son vértices de un octógono regular. Hallar el área del octógono si el lado del cuadrado es 10 u. Resp. $24 u^2$

55.



En un cuadrado de lado a , sobre cada lado se construye interior mente un triángulo Equilátero. Calcular la superficie del polígono.
Resp. $= 0.12 a^2$

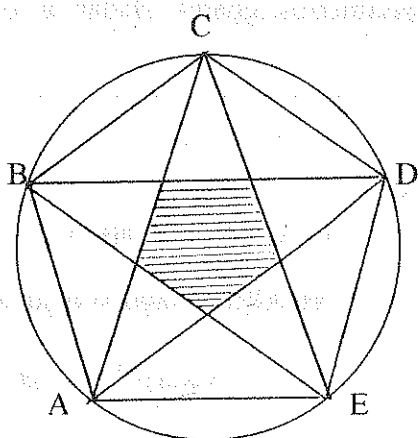
56.



H) ABC cuadrado de lado a
K, L, M, n puntos medios

T) $S_{\text{shaded}} = ?$ Resp. $\frac{1}{6} a^2$

57.

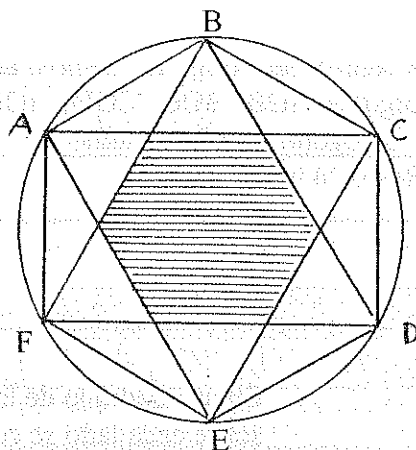


H) ABCDE polígono regular

T) $\frac{S_{\text{shaded}}}{S_{ABCDE}} = ?$

Resp. = 0,146

58.



H) ABCDEF polígono regular

T) $\frac{S_{\text{shaded}}}{S_{ABCDEF}} = ?$

Resp. = $\frac{1}{3}$

59. Se tiene un triángulo acutángulo ABC inscrito en un círculo, los radios trazados desde cada vértice se prolongan hasta el círculo, y cada uno de estos puntos se unen con los otros dos vértices del triángulo, resultando un hexágono también inscrito. Hallar el área del hexágono si el área del triángulo ABC es S. Resp. 2S.

6.9.1. EJERCICIOS RESUELTOS

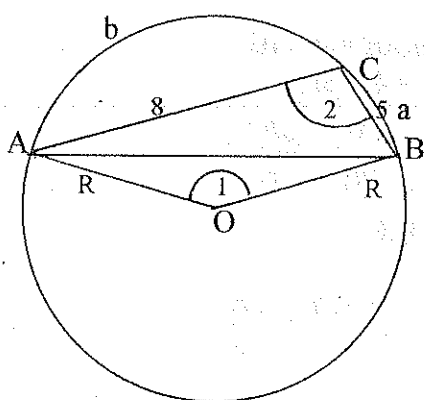
10. $P = 50, P_1 = 2+5+7+8+10 = 32$

$$\frac{P}{P_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1} = \frac{e}{e_1}$$

$$\frac{50}{32} = \frac{a}{2} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = \frac{d}{8} = \frac{e}{10}$$

$$a = 3,13; b = 4,69; c = 10,94; d = 12,50; e = 15,63 \text{ u.}$$

13.



$$4a + 4b = 360$$

$$a + b = 90 = \angle 1$$

$$\angle 2 = AEB / 2 = 270 / 2 = 135$$

ΔABC :

$$AB^2 = 8^2 + 5^2 - 2(8)(5) \cos 135$$

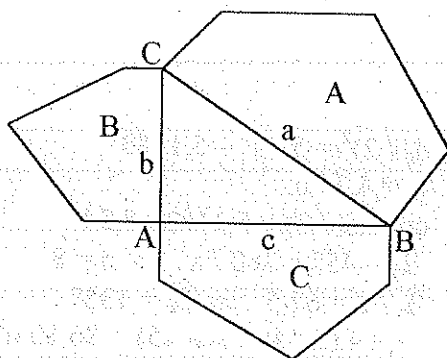
$$AB = 12,07$$

$$S_{\Delta ABC} = (8 \times 5 \times \sin 135) / 2 = (8 \times 5 \times 12,07) / 4R; \quad R = 8,52$$

$$S = 4 S_{\Delta ABC} + 4 S_{\Delta OAB} = 4 (8 \times 5 \times \sin 135) / 2 + 4 (8,52)^2 / 2$$

$$S = 201,75 \text{ m}^2$$

14.



$$S_B / S_A = b^2 / a^2 \quad (1)$$

$$S_C / S_A = c^2 / a^2 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \quad S_A = S_B + S_C$$

18.

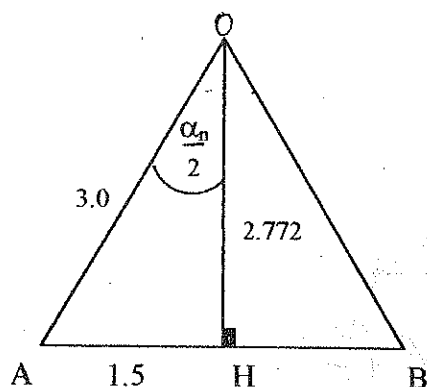
$$Q = n \quad \hat{\alpha}_1 = 360 / n$$

$$P = n + 2 \quad \hat{\alpha}_2 = 360 / (n + 2)$$

$$\{360 / (n + 2)\} + 6 = 360 / n$$

$$n = 10 \Rightarrow Q = 10; P = 12$$

42.

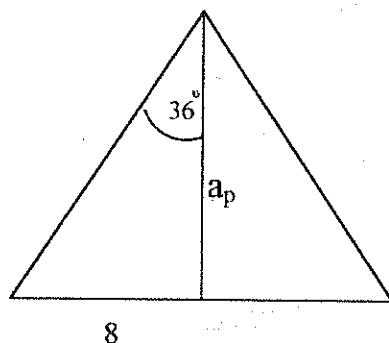


$$\cos(\alpha_n / 2) = 2,772 / 3,0$$

$$\hat{\alpha}_n = 45 = 360 / n \Rightarrow n = 8$$

$$S = \frac{8(3 \times 3 \times \sin 45)}{2} = 25,46 u^2$$

44.



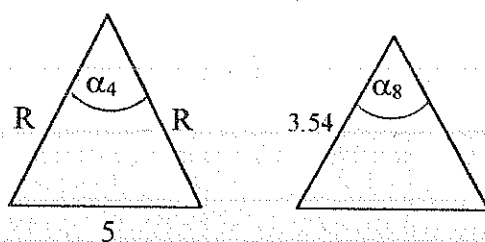
$$\hat{\alpha}_5 = 360 / 5 = 72$$

$$l_5 = 8$$

$$P = 5 l_5 = 80 \Rightarrow l_5 = 16$$

$$\text{Tg } 36^\circ = 8 / a_p \Rightarrow a_p = 11,00 u.$$

45.



$$\hat{\alpha}_4 = 360 / 4 = 90$$

$$25 = 2 R^2 \Rightarrow R = 3,54$$

$$\hat{\alpha}_8 = 360 / 8 = 45$$

$$S = 4 \times 3,54^2 \times \sin 45 = 35,44 u^2$$

48.

$$A = n$$

$$B = 2n$$

$$\hat{\alpha}_A = 360 / n$$

$$\hat{\alpha}_B = 360 / 2n$$

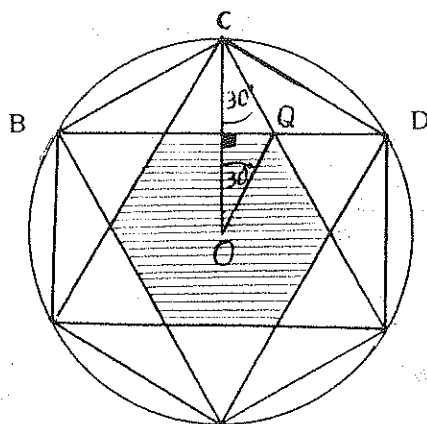
$$360 / 2n + 5 = 360 / n \Rightarrow n = 36$$

$$\hat{A} = 36^\circ; \hat{B} = 72^\circ$$

$$\hat{\alpha}_A = 10; \hat{\alpha}_B = 5$$

$$S_A / S_B = (36 R^2 \sin 10) / (76 R^2 \sin 5) = 1,0$$

57.



$$\frac{S_{\text{shaded}}}{S_{\text{CDEF}}} = \frac{OQ^2}{OC^2}$$

$$\frac{OC}{\sin 120^\circ} = \frac{OQ}{\sin 30^\circ}$$

$$\frac{OQ}{OC} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \frac{S_{\text{shaded}}}{S_{\text{CDEF}}} = \frac{1}{3}$$

6.10 CUADRILÁTEROS

6.10.1 DEFINICIÓN

Es un polígono de cuatro lados.

6.10.2 PROPIEDADES

TEOREMA # 1

La suma de los ángulos internos es igual a 360° .

Suma ángulos polígono = $180(n-2)$

Si: $n = 4$.

\therefore suma ángulos cuadrilátero = 360° ///

TEOREMA # 2

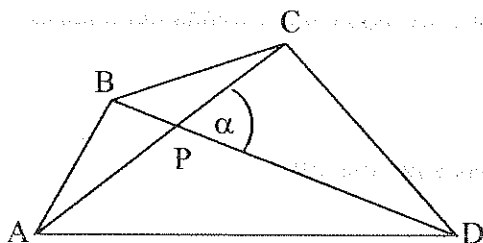
El área de un cuadrilátero es igual a la mitad del producto de dos diagonales por el seno el ángulo comprendido.

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABP} + S_{\triangle BPC} + S_{\triangle CPD} + S_{\triangle DPA}$$

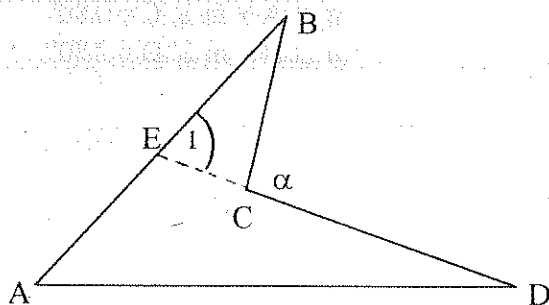
$$S_{ABCD} =$$

$$\frac{AP \times PB \sin \alpha}{2} + \frac{BP \times PC \sin(180 - \alpha)}{2} + \frac{CP \times PD \sin \alpha}{2} + \frac{AP \times PD \sin(180 - \alpha)}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AC \times BD \times \sin \alpha}{2} //$$



TEOREMA # 3. (CUADRILÁTERO CÓNCAVO)



$$T) m\angle \alpha = m\angle A + m\angle B + m\angle D$$

$$D) m\angle \alpha = m\angle 1 + m\angle B \quad (1)$$

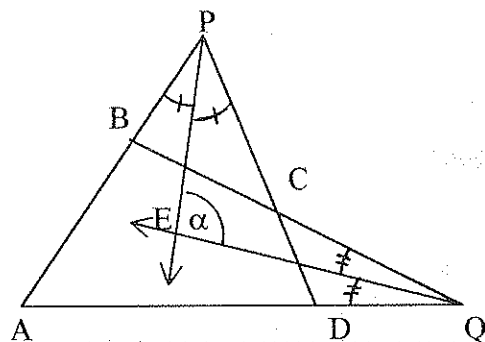
$$m\angle 1 = m\angle A + m\angle D$$

(2) en (1)

$$m\angle \alpha = m\angle A + m\angle B + m\angle D$$

TEOREMA # 4.

El ángulo formado por las bisectrices de los ángulos obtenidos al prolongar los lados de un cuadrilátero es igual a la semisuma de los ángulos opuestos a este ángulo formado.



$$T) m\angle \alpha = \frac{m\angle A + m\angle C}{2}$$

$$D) m\angle \alpha = m\angle 1 + m\angle A + m\angle 2 \quad (1)$$

$$m\angle C = m\angle 1 + m\angle \alpha + m\angle 2 \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow m\angle \alpha - m\angle C = m\angle A - m\angle \alpha$$

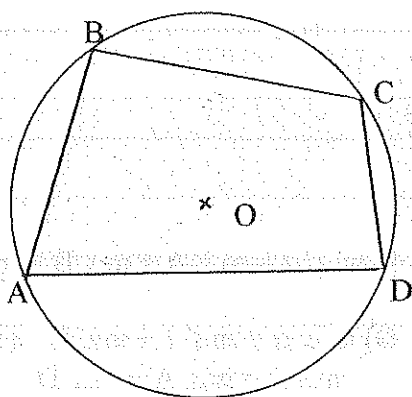
$$\therefore m\angle \alpha = \frac{m\angle A + m\angle C}{2} \quad ///$$

6.10.3 CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE.

Este cuadrilátero se puede inscribir en un círculo, los lados son cuerdas del círculo.

TEOREMA # 1.

La suma de las medidas de los ángulos opuestos es igual a 180°



$$m\angle A = m \frac{\widehat{BCD}}{2}$$

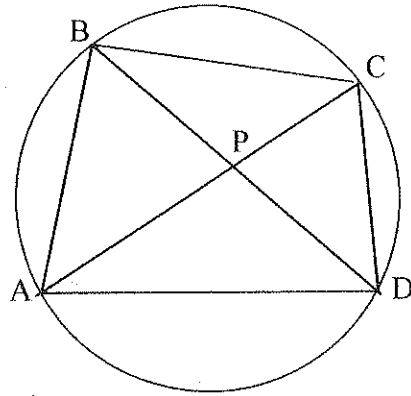
$$m\angle C = m \frac{\widehat{BAD}}{2}$$

$$\therefore m\angle A + m\angle C = 180^\circ$$

$$\therefore m\angle B + m\angle D = 180^\circ$$

TEOREMA # 2.

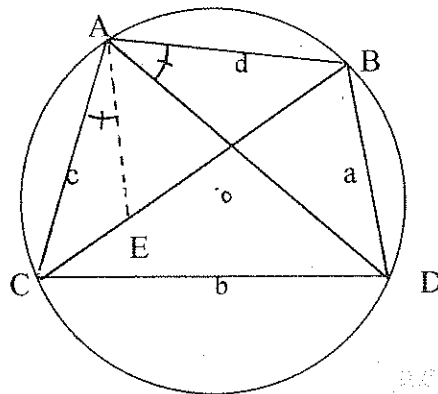
El producto de los segmentos formados en una diagonal es igual al producto de los segmentos formados en la otra.



$$AP \times PC = BP \times PD \quad ///.$$

TEOREMA # 3. (PTOLOMEO)

En todo cuadrilátero inscriptible, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.



$$T) AC \cdot BD = a \cdot c + b \cdot d$$

$$D) \angle DAE = \angle BAC \quad (\text{construcción})$$

$$\Delta ADE \sim \Delta ABC$$

$$\angle DAE = \angle BAC$$

$$m\angle ADE = m \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$m\angle ACB = m \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$m\angle ADE = m\angle ACB$$

$$\Delta ADE \sim \Delta ABC$$

$$\frac{c}{AC} = \frac{DE}{a} = \frac{AE}{d}$$

$$DE = \frac{a \cdot c}{AC}$$

$$\Delta AEB \wedge \Delta ADC$$

$$m\angle BAC = m\angle DAE$$

$$m\angle EAC = m\angle EAC$$

$$m\angle BAC + m\angle EAC = m\angle DAE + m\angle EAC$$

$$m\angle BAE = m\angle DAC$$

$$m\angle ABE = m\angle ACD = \frac{\widehat{AD}}{2}$$

$$\Delta AEB \approx \Delta ADC$$

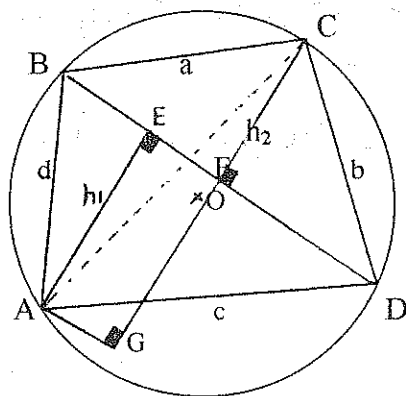
$$\frac{d}{AC} = \frac{EB}{b} = \frac{AE}{c}$$

$$EB = \frac{b.d}{AC}$$

$$DE + EB = \frac{a.c}{AC} + \frac{b.d}{AC}$$

$$AC \cdot BD = a.c + b.d \quad ///$$

TEOREMA # 4. (SUPERFICIE)



$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = \frac{BD \times h_1}{2} + \frac{BD \times h_2}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{BD}{2} (h_1 + h_2) = \frac{BD \times CG}{2} \quad (1)$$

$$\Delta ACG : CG = \sqrt{AC^2 - AG^2} = \sqrt{AC^2 - EF^2} \quad (2)$$

$$\Delta ABC : d^2 = c^2 + BD^2 - 2 BD \times DE \quad (3)$$

$$\Delta BCD : a^2 = b^2 + BD^2 - 2 BD \times DF \quad (4)$$

$$(3) - (4) : EF = \frac{c^2 - b^2 - d^2 + a^2}{2BD} \quad (5)$$

$$(4) \text{ y } (2) \text{ en } (1) : S_{ABCD} = \frac{BD}{2} \sqrt{AC^2 - \left(\frac{c^2 - b^2 - d^2 + a^2}{2BD} \right)^2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4} \sqrt{4AC^2 \times BD^2 - (c^2 - b^2 - d^2 + a^2)^2} \quad (6)$$

$$BD \times AC = ac + bd \quad (7)$$

$$(7) \text{ En (6): } S_{ABCD} = \frac{1}{4} \sqrt{(2ac + 2bd)^2 - (c^2 - b^2 - d^2 + a^2)^2}$$

$$\therefore S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad ///.$$

6.10.4 PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES INSCRIPTIBLE.

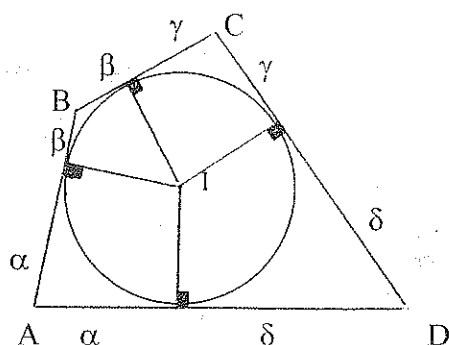
1. Si la suma de las medidas de los ángulos opuestos es 180° .
2. Si el producto de los segmentos formados en una diagonal es igual al producto de los segmentos formados en la otra.

6.10.5 CUADRILÁTERO CIRCUNSCRIPTIBLE

El cuadrilátero se puede circunscribir a un círculo, los lados son tangentes a este círculo.

TEOREMA # 1.

La suma de las longitudes de los lados opuestos es igual a la suma de las longitudes de los otros dos e igual al semiperímetro.



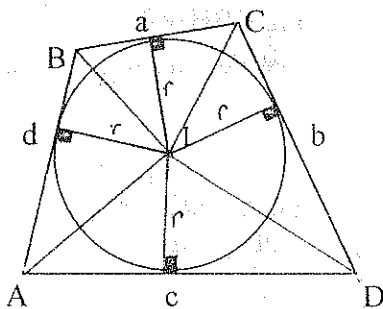
$$P = 2p = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta$$

$$p = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$p = a+c = b+d \quad ///.$$

TEOREMA # 2.

El área de un cuadrilátero circunscriptible es igual al semiperímetro por el radio del círculo inscrito.



$$S_{ABCD} = S_{\triangle BIC} + S_{\triangle CID} + S_{\triangle AID} + S_{\triangle AIB}$$

$$S_{ABCD} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} + \frac{d \cdot r}{2}$$

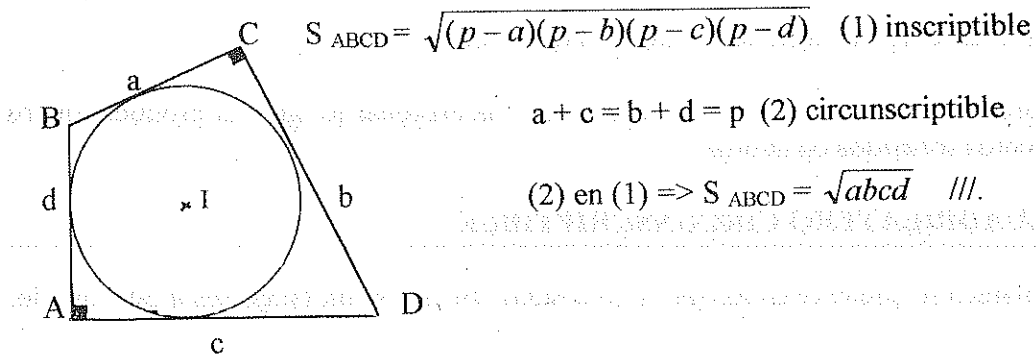
$$S_{ABCD} = p \cdot r \quad ///.$$

6.10.6 PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES CIRCUSCRIPTIBLE.

Si la suma de las longitudes de dos lados opuestos es igual al semiperímetro.

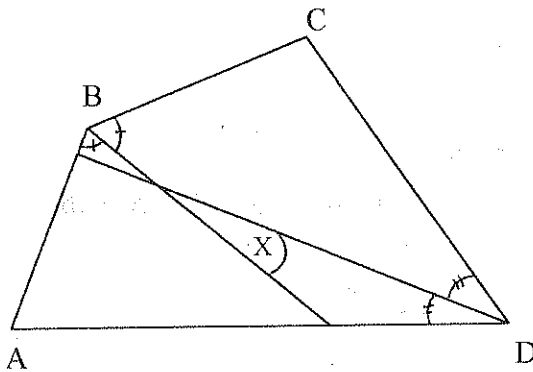
6.10.7 CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE Y CIRCUNSCRIPTIBLE A LA VEZ.

TEOREMA # 1 (SUPERFICIE)



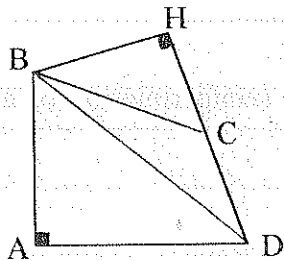
6.10.8 EJERCICIOS.

1.



$$T) m\angle X = \frac{m\angle C - m\angle A}{2}$$

2.



$$H) \angle ABC = 60^\circ$$

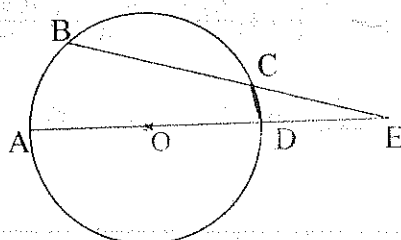
$$\angle BCD = 135^\circ$$

$$AB = AD$$

$$T) \angle DBH = ?$$

Resp.

3.



$$H) OA = OD = 5u$$

$$DE = 4u$$

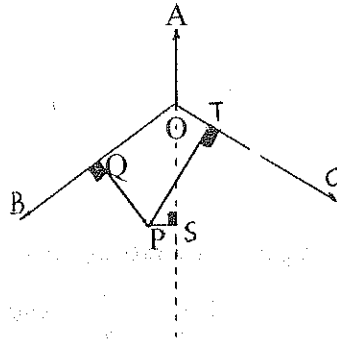
$$CE = 5u$$

$$T) S_{ABCD} = ?$$

Resp.

4. Dados $m\angle A = 70^\circ$, $m\angle B = 32^\circ$, $R = 62.43$ m y $AB = 85.91$ m. Hallar los otros tres lados del cuadrilátero inscriptible. Resp.

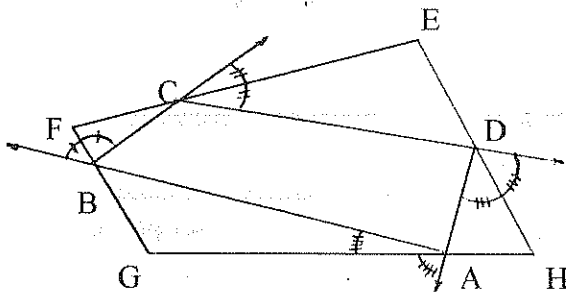
5.



$$H) \angle AOB = \angle BOC = \angle AOC$$

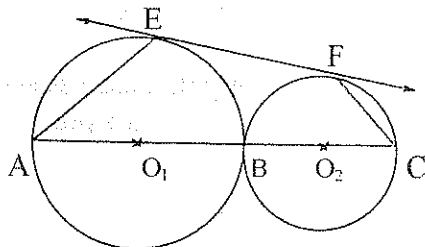
$$T) PQ = PT - PS$$

6.



T) FEHG cuadrilátero inscriptible.

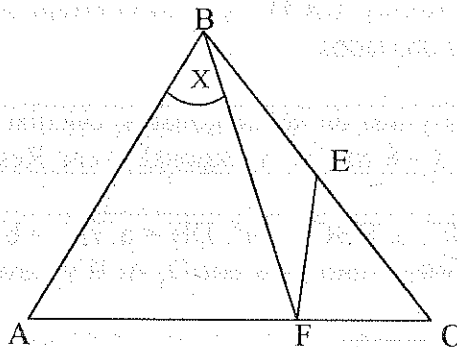
7.



H) \overleftrightarrow{EF} tang. común

T) AEFC inscriptible

8.

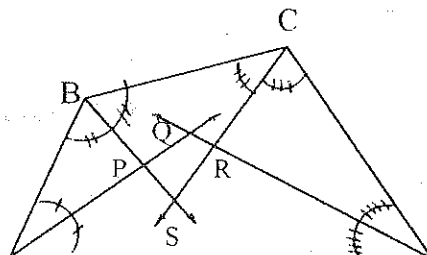


$$H) m\angle ABC = m\angle CFE = 7 \frac{\pi}{18}$$

$$m\angle FAE = 8 \frac{\pi}{45}$$

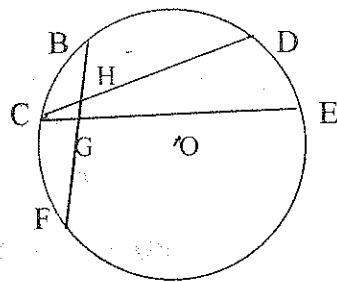
T) $m\angle X = ?$
Resp.

9.



T) PQRS cuadrilátero inscriptible

10. A D

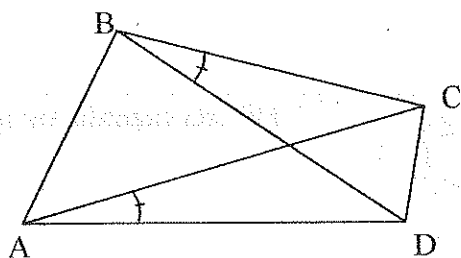


H) $\widehat{AC} \cong \widehat{CB}$

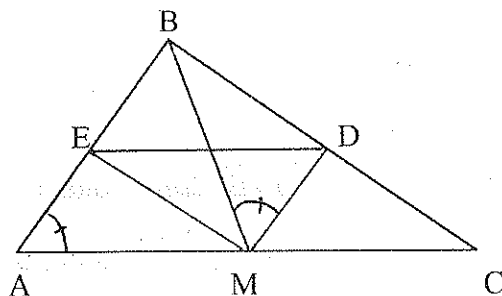
T) GFDE inscriptible

11. Encontrar el valor de los ángulos internos del triángulo formado al unir los pies de las tres alturas del triángulo ABC; $m \angle A = 7\frac{\pi}{18}$; $m \angle B = 17\frac{\pi}{36}$. Resp.

12.

H) ΔABC escalenoT) ABCD cuadrilátero
Inscriptible

13.

H) ΔABC escaleno
 $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ T) BDME cuadrilátero
inscriptible

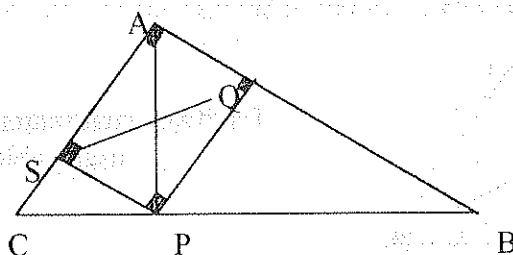
14. Demostrar que el producto de las distancias de un punto cualquiera M de un círculo a dos lados opuestos de un cuadrilátero inscrito ABCD, es igual al producto de las distancias de este mismo punto a los otros dos lados.

15. Dados los cuatro lados de un cuadrilátero y una de las diagonales, calcular la otra diagonal $a = 5$ cm., $b = 7$ cm., $c = 6$ cm., $d = 8$ cm., y, la diagonal 8 cm. Resp. 7,34

16. En un cuadrilátero ABCD, $\angle DAB = 90^\circ$, $\angle DBC = 90^\circ$, $DB = a$, $DC = b$. Hallar la distancia entre los centros de los círculos, si uno pasa por D, A, B y otro por B, C, y D.

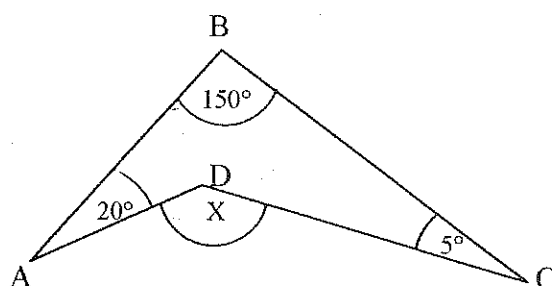
Resp. $\frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}$

17.

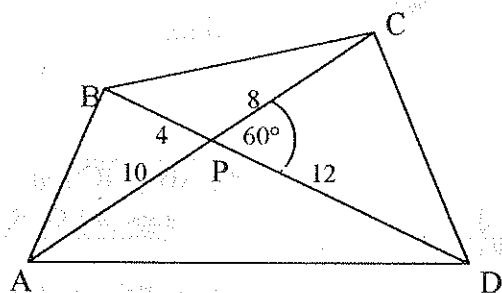


T) CSQB inscriptible

18.

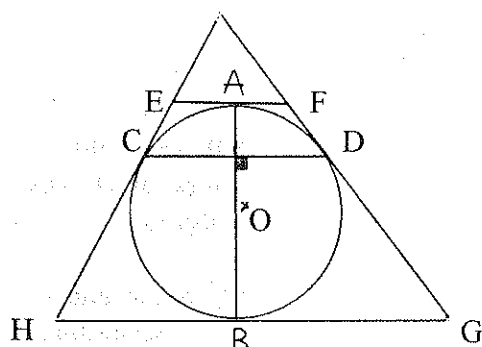
T) $\angle X = ?$ Resp. 175°

19.

T) $S_{ABCD} = ?$

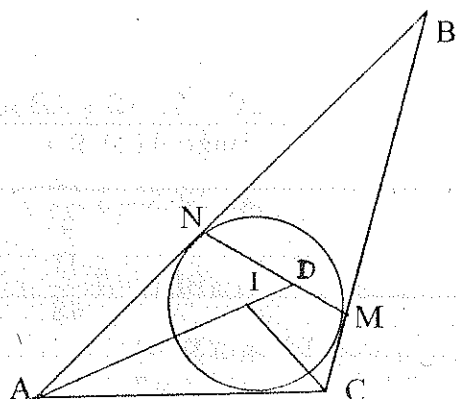
Resp. 124,7

20.

H) \overline{EF} tang. $\theta(O, R)$ en A \overline{FG} tang. $\theta(O, R)$ en D \overline{GH} tang. $\theta(O, R)$ en B \overline{EH} tang. $\theta(O, R)$ en C

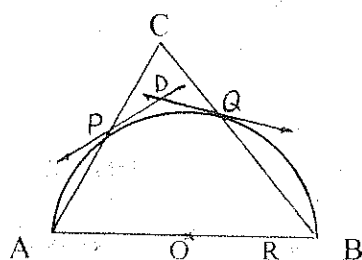
T) EFGH cuadrilátero inscriptible.

21.

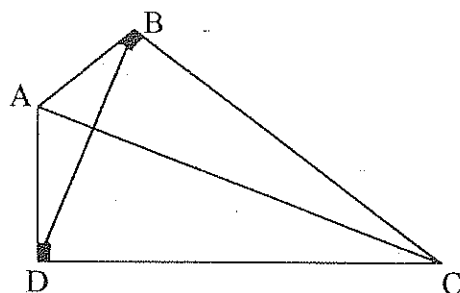
H) I incentro ΔABC

T) IDMC inscriptible

22.

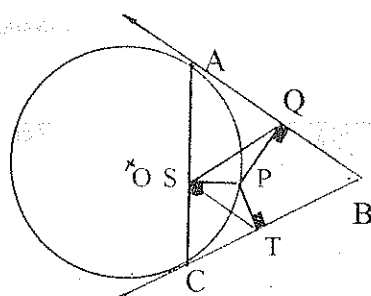
H) $\overrightarrow{PD} \wedge \overrightarrow{QD}$ tangs. $\theta(O, R)$ T) $m \angle PDQ = 2 m \angle C$

23.

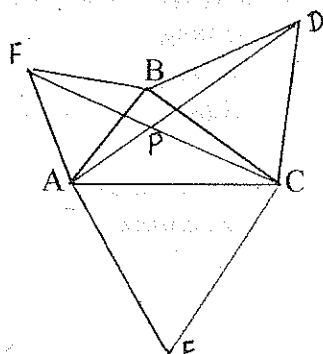
H) $3 AB = DC$ $BD = 7 u$ $AC = 8 u$ T) $AD = ?$ $AB = ?$

Resp.

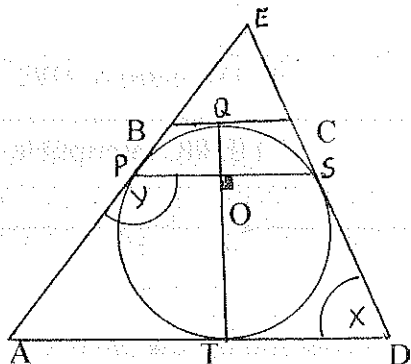
24.

H) \overline{AB} y \overline{BC} son
tangs. θ (O, R)T) $\triangle QPS \approx \triangle PTS$

25.

H) $\triangle ABC$ escaleno
 $\triangle s$ AFB, BCD, AEC
equiláterosT) APCE cuadrilátero
Inscriptible.

26.

H) \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{AD} y \overline{AB} son
Tangs. θ (O, R)

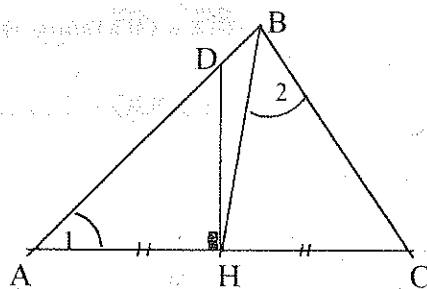
$$m \angle BCS = 5 \frac{\pi}{9}$$

$$m \angle BEC = 7 \frac{\pi}{18}$$

T) $m \angle X = ?$ $m \angle Y = ?$

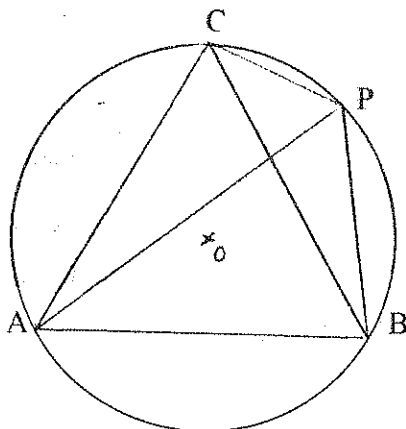
Resp.

27.

H) $m \angle 1 + m \angle 2 = 90^\circ$

T) DHCB inscriptible

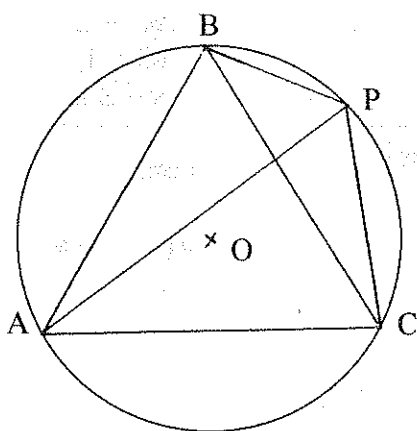
28.



H) $\triangle ABC$ equilátero
 $\widehat{BP} \neq \widehat{PC}$

T) $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2 AB^2$

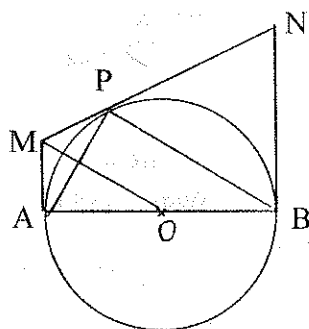
29.



H) $\triangle ABC$ equilátero

T) $AP = BP + CP$

30.



H) $MA = \frac{R}{2}$
 \overline{MA} , \overline{NB} , y \overline{MN}
 tangs. $\theta(O, R)$

T) $MO = ?$

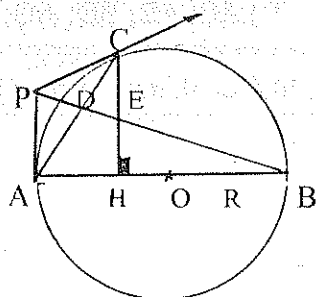
$AP = ?$

$ON = ?$

$PB = ?$

Resp. 1,118R; 0,89R; 2,236R; 1,78 R

31.



H) \overline{AP} y \overline{CP} tangs. $\theta(O, R)$

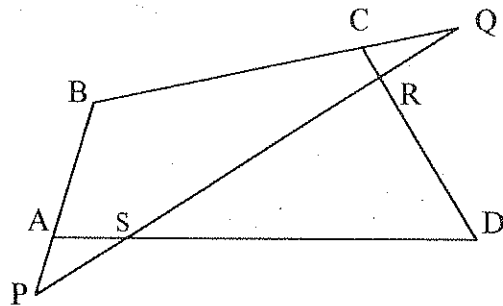
$AP = \frac{R}{2}$

T) $AD = ? f(R)$

$DE = ? f(R)$

Resp. 0,5R; 0,18 R

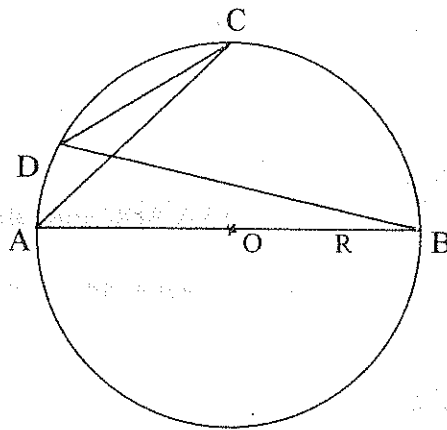
32.



H) \overline{ABCD} cuadrilátero
 \overline{PQ} secante

$$T) \frac{AP \cdot BQ \cdot CR \cdot DS}{PB \cdot QC \cdot RD \cdot SA} = 1$$

33.

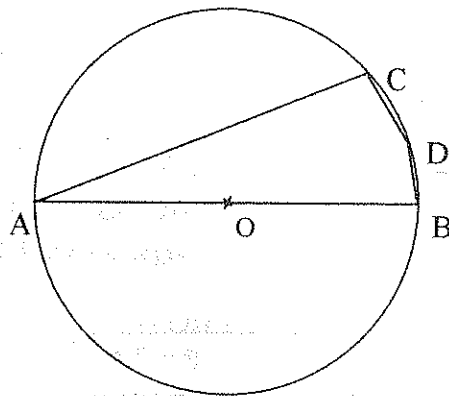


H) $AC = l_4$
 $BD = l_3$
 $R = 2 \text{ u}$

T) $DC = ?$

Resp. 1,04 u

34.

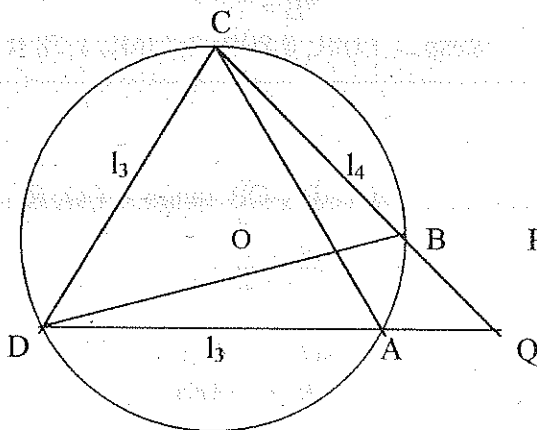


H) $AC = l_3$
 $CD = l_8$
 $R = 12 \text{ u}$

T) $DB = ?$

Resp. 3,13 u

35.

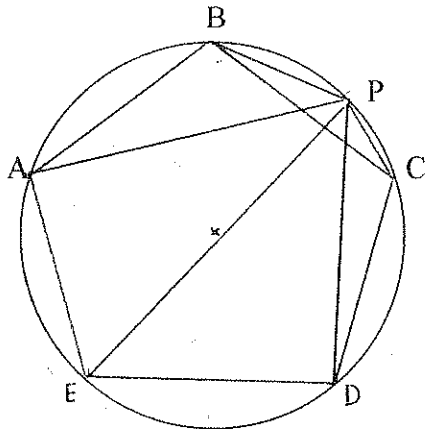


H) $R = 20 \text{ u}$

T) $AC; AB; BD; AQ; QB = ?$

Resp. 34,6u; 10,36u; 38,6u; 12,68u; 14,15 u

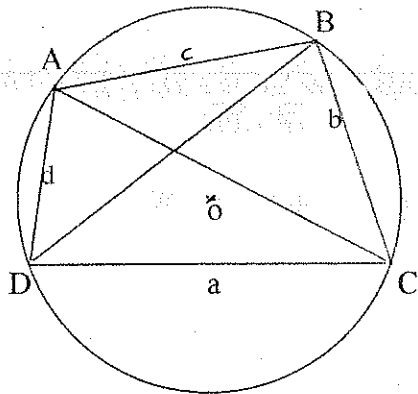
36.



H) \widehat{ABCDE} regular
 $\widehat{BP} \neq \widehat{PC}$

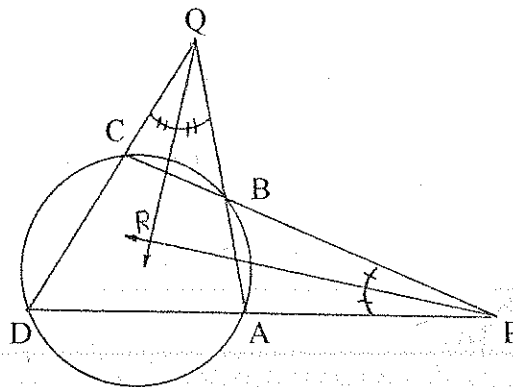
T) $PB + PE + PC = PA + PD$

37.



$$T) \frac{BD}{AC} = \frac{ad + bc}{dc + ab}$$

38.



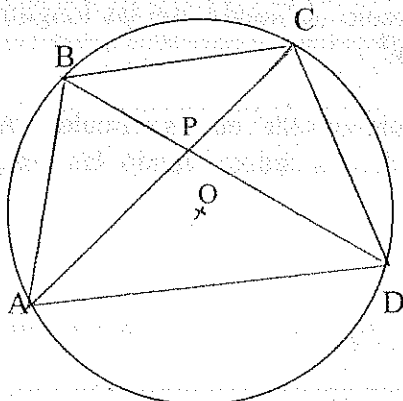
$$H) m\angle P = \frac{\pi}{5}$$

$$m\angle Q = 7\frac{\pi}{30}$$

T) $m\angle A, m\angle B, m\angle C, m\angle D, m\angle R$

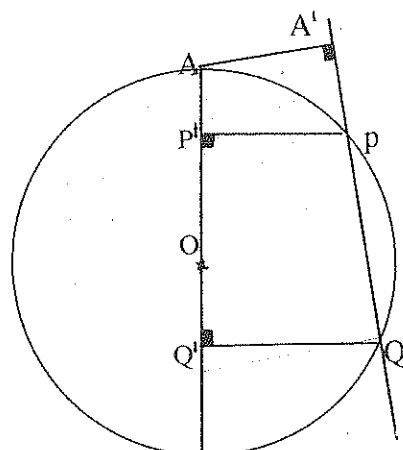
Resp. $87^\circ; 129^\circ; 93^\circ; 51^\circ; 90^\circ$

39.



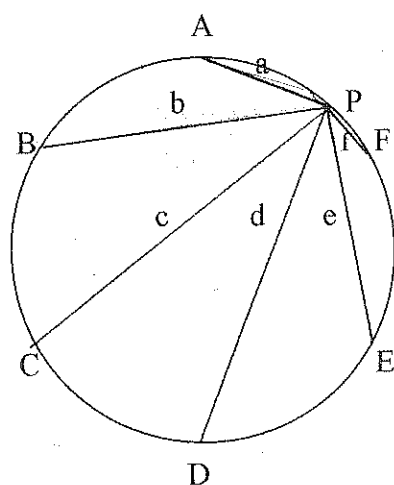
T) $AB \cdot BC \cdot PD = AD \cdot CD \cdot BP$

40.



$$T) AA'^2 = AP \cdot AQ$$

41.

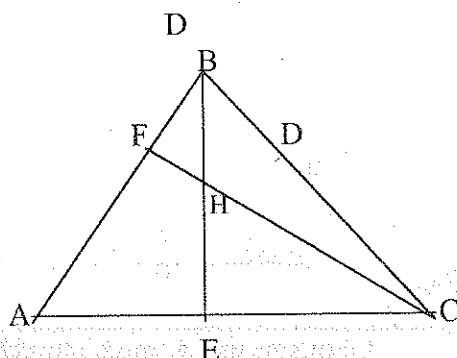


$$H) \widehat{AB} \cong \widehat{BC} \cong \widehat{CD} \cong \widehat{DE} \cong \widehat{EF} \cong \widehat{FA}$$

$$\widehat{AP} \neq \widehat{PF}$$

$$T) a + b + e + f = c + d$$

42.



H) ortocentro

$$T) 2(AD \cdot AH + BE \cdot BH + CF \cdot CH) = AB^2 + BC^2 + AC^2$$

43. Desde un punto exterior a un círculo se trazan dos secantes cuyas proporciones externas miden 2m. Determinar el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de intersección de las secantes y el círculo, sabiendo que las longitudes de sus lados son 6m y 2.4 m. Resp. 10,08 m²

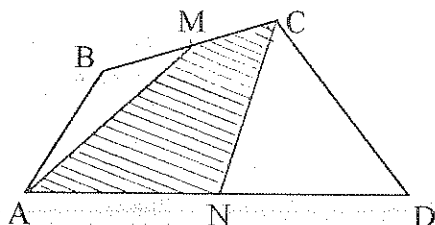
44. Calcular los lados de un cuadrilátero circunscriptible en un círculo, dados el perímetro 2p y la suma de los cuadrados de los lados, siendo las diagonales rectangulares.

$$\text{Resp. } \frac{p \pm \sqrt{m^2 - p^2}}{2}$$

45. Calcular la superficie de un cuadrilátero inscriptible de lados : a= 54,2 m., b= 63m., c= 26 m., d= 18,2 m. Resp. 1266,32 m²

46. Dados los lados $a = 12$ u ; $b = 16$ u ; $c = 25$ u se construyen h_a y h_b . Calcular la superficie del cuadrilátero formado al unir A y B los pies de h_a y h_b . Resp. 99,34
47. En un círculo de radio R, está inscrito un triángulo equilátero ABC, en el arco \widehat{BC} se toma un punto P tal que : $BP = \frac{2}{3} R$. Hallar el área del cuadrilátero ABPC.
Resp. $1,67 R^2$
48. Dos de los ángulos opuestos de un cuadrilátero circunscriptible e un círculo de radio 12 m. son 90° y otro de los ángulos de 120° . Calcular el área del cuadrilátero.
Resp. $629,2 \text{ m}^2$
49. Calcular las longitudes de los lados de un cuadrilátero de 20 m^2 de superficie circunscripto a un círculo de 2m de radio siendo rectos dos de sus ángulos opuestos.
Resp. 7,23 m ; 7,23 m ; 2,76 m ; 2,76 m.
50. En un triángulo de lados $a = 91$ m., $b = 125$ m., y $c = 204$ m., se prolonga c en sentido AB y en una longitud de 40 m y se toma sobre b un punto distante 50 m. de C. Se traza la recta que determina este punto y el extremo de la citada prolongación, y se desea saber cual es el área del cuadrilátero convexo que se forma.
Resp. $2423,85 \text{ m}^2$
51. Si por los vértices de un cuadrilátero se trazan paralelas a sus diagonales, resulta un cuadrilátero doble del lado.

52.



H) $AN = ND$

$BM = MC$

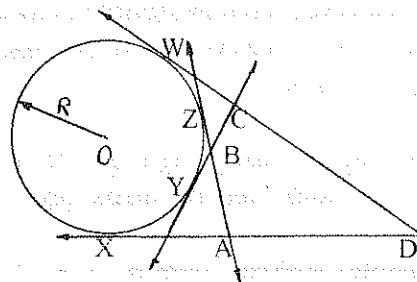
T) $S_{MN} = \frac{S_{ABC}}{2}$

53. En un triángulo isósceles de base 4 cm y la altura 6 cm se ha construido un semicírculo con uno de los lados como diámetro. Los puntos que el semicírculo corta a la base y al otro lado se une mediante una recta. Determine el área del cuadrilátero así obtenido que está inscrito en el semicírculo. Resp. $10,08 \text{ cm}^2$
54. De un cuadrilátero ABCD inscrito en un círculo, se conoce $AB = 7$ m., $BC = 15$ m., $AD = 4,5$ m. La tangente trazada al círculo desde el punto de encuentro de los lados BC y AD prolongados miden 10 m. Calcular el área. Resp. $90,93 \text{ m}^2$
55. Desde un punto exterior a un círculo se trazan dos secantes cuyas proporciones externas miden 2 m. Determinar el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de intersección de las secantes y el círculo, sabiendo que las longitudes de sus lados opuestos son 6 m. y 2,4 m. Resp. $10,08 \text{ m}^2$

56. Calcular los lados de un cuadrilátero circunscriptible en un círculo, dados el perímetro $2p$ y la suma de los cuadrados de los lados, siendo las diagonales rectangulares.

Resp. $\frac{p \pm \sqrt{m^2 - p^2}}{2}$

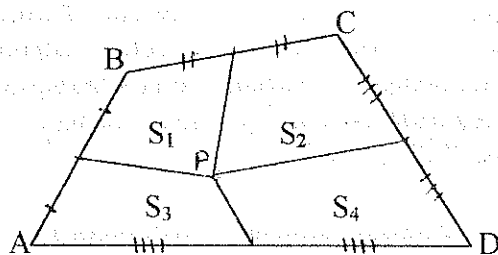
57.



H) \overrightarrow{DX} , \overrightarrow{CY} , \overrightarrow{AZ} y \overrightarrow{DW} son tangs. θ (O,R)

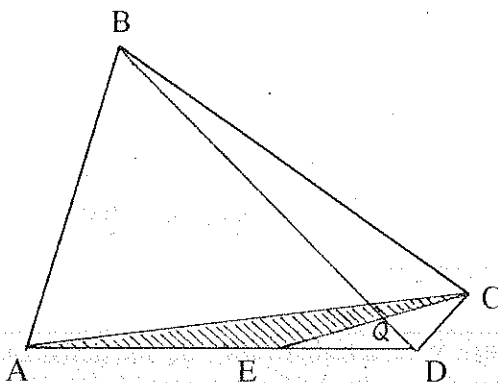
T) $AD - BC = CD - AB$

58.



T) $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$

59.

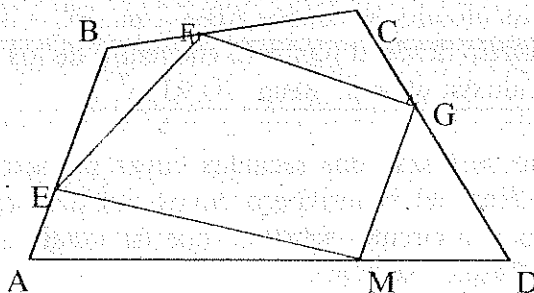


H) $AB = 3 CD$
 $EQ = QC$

T) $\frac{S_{III}}{S_{ABCD}} = ?$

Resp.

60.



H) $AE = \frac{1}{3} AB$

$BF = \frac{1}{3} BC$

$CG = \frac{1}{3} CD$

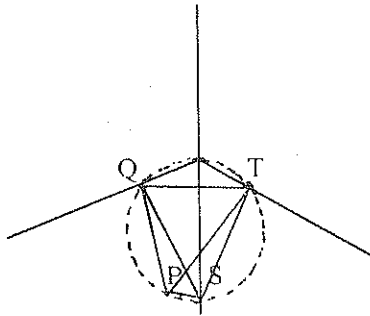
$DM = \frac{1}{3} AD$

T) $\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}} = ?$

Resp

6.10.9 EJERCICIOS RESUELTOS

5.

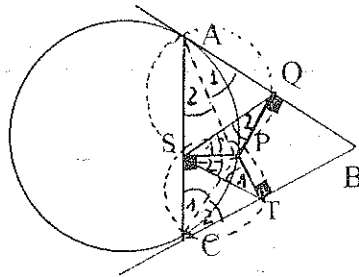
 ΔQTS EQUILATERO

$$PT \times QS = QP \times TS + QT \times PS$$

$$PT = QP + PS$$

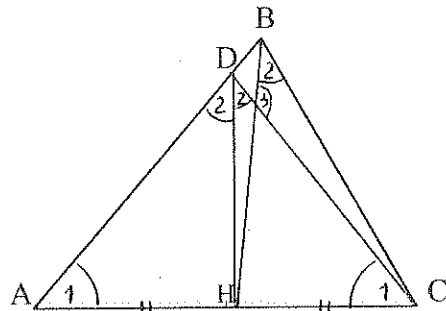
$$\Rightarrow QP = PT - PS$$

24.



$$\Delta PSQ \approx \Delta SPT \{ \angle 1; \angle 2 \}$$

27.

 ΔADC ISOSCELES

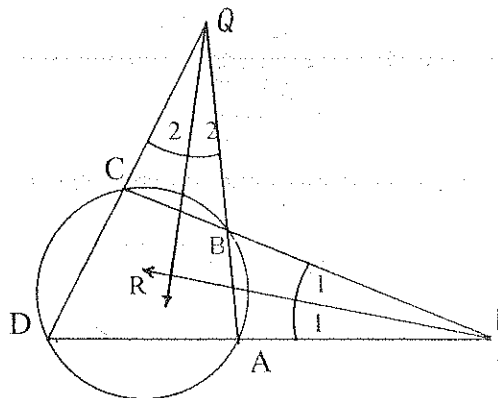
$$\Delta HDQ \approx \Delta QBC \{ \angle 2; \angle 3 \}$$

$$\frac{DQ}{QB} = \frac{QH}{QC} = \frac{DH}{BC}$$

$$DQ \times QC = QB \times QH$$

$$\Rightarrow DHCB \text{ INSCRIPTIBLE}$$

38.



$$\angle R = (\angle D + \angle B) / 2$$

$$\angle R = 180 / 2 = 90^\circ$$

En DQPR

$$90 = 21 + \angle D + 18$$

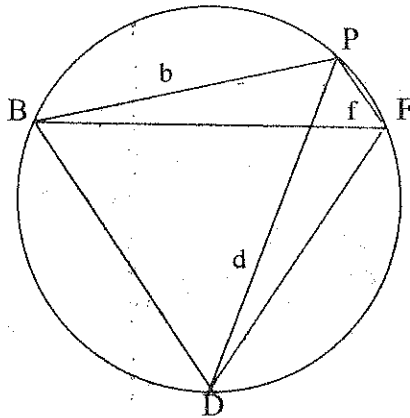
$$\Rightarrow \angle D = 51^\circ$$

$$\angle D + \angle B = 180 \Rightarrow \angle B = 129^\circ$$

$$\Delta DCP \Rightarrow \angle C = 180 - 36 - 51 = 93^\circ$$

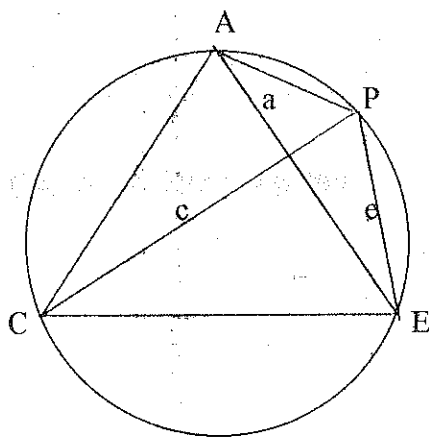
$$\angle A + \angle C = 180 \Rightarrow \angle A = 87^\circ$$

41.

 ΔBFD EQUILATERO

$$BF \times d = b \times FD + BD \times f$$

$$d = b + f \quad (1)$$

 ΔAEC EQUILATERO

$$AE \times c = AC \times e + CE \times a$$

$$c = e + a \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow d + c = b + f + e + a$$

6.11. PARALELOGRAMO

Es un cuadrilátero que tiene los lados opuestos iguales y paralelos.

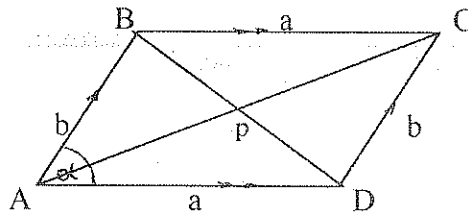
6.11.1 PROPIEDADES

1. Las diagonales forman triángulos congruentes:

$$\triangle ABP \cong \triangle PCD; \triangle BPC \cong \triangle APD; \triangle ABD \cong \triangle BCD; \triangle ABC \cong \triangle ACD.$$

2. Las diagonales se bisecan mutuamente. $AP = PC$; $BP = PD$.

3. El área de un paralelogramo es igual al producto de dos lados no paralelos por el seno del ángulo comprendido.

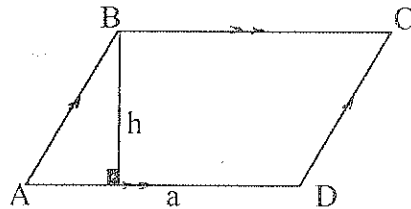


$$S_{ABCD} = 2 S_{\triangle ABD}$$

$$S_{ABCD} = 2 \left(\frac{a \cdot b \cdot \sin \alpha}{2} \right)$$

$$S_{ABCD} = a \cdot b \cdot \sin \alpha \quad ///.$$

4. El área de un paralelogramo es igual al producto de un lado por la altura correspondiente.



$$S_{ABCD} = 2 S_{\triangle ABD}$$

$$S_{ABCD} = 2 \left(\frac{a \cdot h}{2} \right)$$

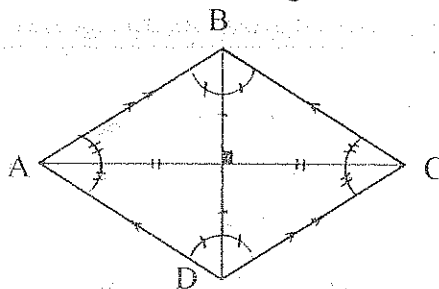
$$S_{ABCD} = a \cdot h \quad ///.$$

6.11.2 PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN PARALELOGRAMO

1. Si dos lados opuestos son iguales y paralelos.
2. Si las diagonales se bisecan mutuamente.

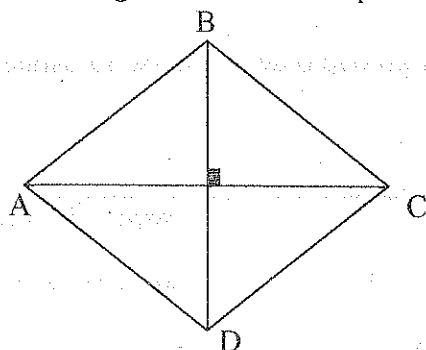
6.12. ROMBO

Es un paralelogramo que tiene los cuatro lados iguales.



6.12.1 PROPIEDADES

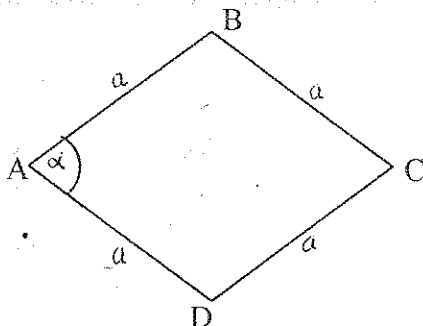
1. Las diagonales son perpendiculares entre si $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.
2. Las diagonales son bisectrices de los ángulos internos.
3. El rombo es un cuadrilátero circunscriptible, el centro del círculo inscrito es el punto de intersección de las diagonales.
4. El área de un rombo es igual a la mitad del producto de las diagonales.



$$S_{ABCD} = \frac{AC \times BD \times \sin 90^\circ}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AC \times BD}{2}$$

5. El área de un rombo es igual a la longitud de un lado al cuadrado por el seno de un ángulo interno.



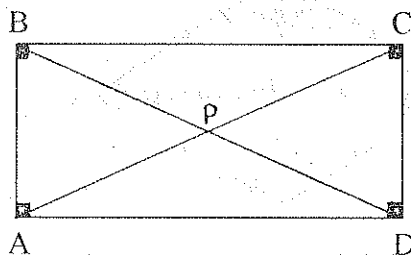
$$S_{ABCD} = a^2 \cdot \sin \alpha$$

6.12.2 PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN ROMBO

1. Si tiene los cuatro lados iguales.
2. Si las diagonales son perpendiculares y se bisecan mutuamente.

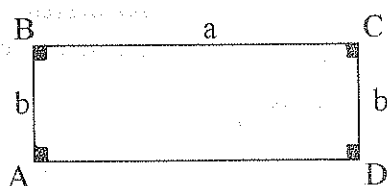
6.13 RECTÁNGULO

Es un paralelogramo que tiene los cuatro ángulos internos iguales (90°).



6.13.1 PROPIEDADES

1. Las diagonales son iguales; $\overline{AC} \cong \overline{BD}$
2. Los cuatro segmentos formados en las diagonales son iguales: $AP = PC = BP = PD$
3. El rectángulo es un cuadrilátero inscriptible, el centro del círculo circunscrito es el punto de intersección de las diagonales.
3. La superficie de un rectángulo es igual al producto de los lados no paralelos.

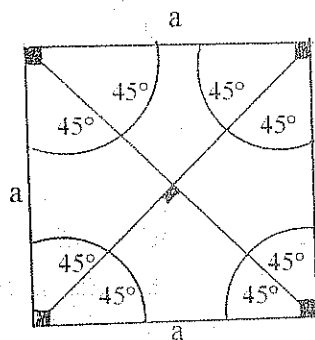


$$S_{ABCD} = a \cdot b$$

6.13.2 PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN RECTÁNGULO

1. Si los cuatro ángulos internos son iguales (90°)
1. Si los cuatro segmentos formados en las diagonales son iguales.

6.14 CUADRADO

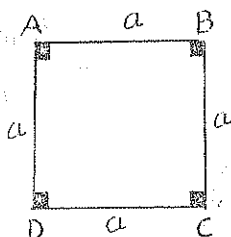


Es un polígono regular de

cuatro lados.

6.14.1 PROPIEDADES.

1. Tiene todas las propiedades de los polígonos regulares.
2. La superficie de un cuadrado es igual a la longitud de un lado elevado al cuadrado.



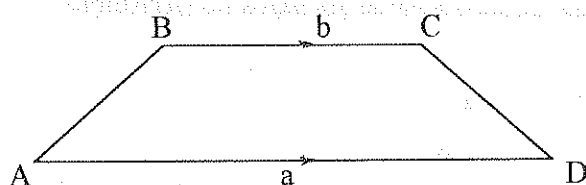
$$S_{ABCD} = a^2$$

6.14.2 PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN CUADRADO

1. Si tiene todos los lados y todos sus ángulos respectivamente iguales.

6.15 TRAPECIO.

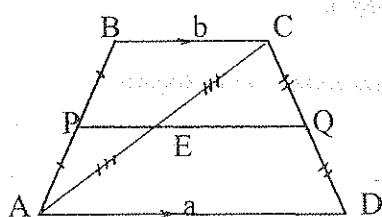
Es un cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos.



Base mayor \overline{AD}
Base menor \overline{BC}

6.15.1 PROPIEDADES.

1. El segmento que une los lados medios de los lados no paralelos, es paralelo a las bases e igual a la semisuma de las mismas. (BASE MEDIA)



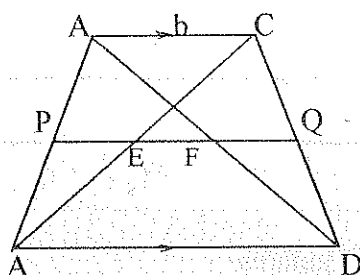
$$\overline{BC} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{AD}$$

$$PQ = PE + EQ$$

$$PQ = \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$$

$$PQ = \frac{a+b}{2} \quad ///.$$

2. El segmento que une los puntos medios de las diagonales, es paralelo a las bases e igual a la semidiferencia de las mismas.



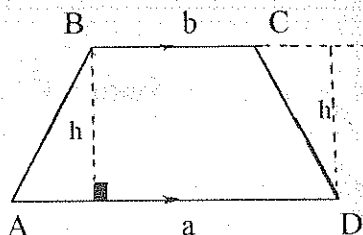
$$\overline{BC} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{AD}$$

$$EF = EQ - FQ$$

$$EF = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$$

$$EF = \frac{a-b}{2} \quad ///.$$

3. El área de un trapecio es igual a la semisuma de las bases por la altura.

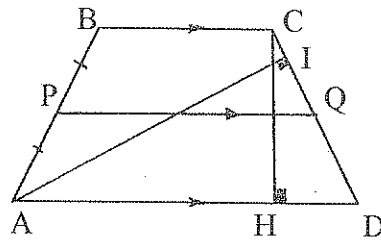


$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2}$$

$$S_{ABCD} = \left(\frac{a+b}{2} \right) h \quad ///.$$

4. El área de un trapecio es igual al producto de uno de sus lados no paralelos por la longitud de la perpendicular bajada desde el punto medio del lado opuesto al primero.



$$S_{ABCD} = PQ \times CH$$

$$\Delta PIQ \approx \Delta CHD$$

$$\frac{CH}{PI} = \frac{CD}{PQ}$$

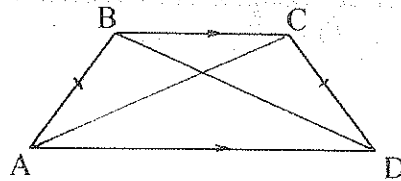
$$S_{ABCD} = CD \times PI \quad ///$$

6.15.2 PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN TRAPECIO.

1. Si tiene lados opuestos no paralelos iguales

6.16 TRAPECIO ISÓSCELES

Es un trapecio que tiene los lados no paralelos iguales.



6.16.1 PROPIEDADES.

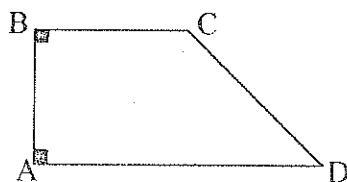
1. Los ángulos en las bases son respectivamente iguales $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle C$
2. Las diagonales son iguales $\overline{AC} \cong \overline{BD}$
3. El trapecio isósceles es un cuadrilátero inscriptible.

6.16.2 PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN TRAPECIO ISÓSCELES.

Si tiene dos lados opuestos paralelos y los otros dos son iguales.

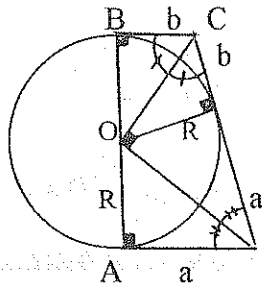
6.17 TRAPECIO RECTÁNGULO.

Es un trapecio que tiene el lado no paralelo perpendicular a las bases.



6.17.1 PROPIEDADES

Si se puede inscribir un semicírculo.



$$1. CD = a + b$$

$$2. R^2 = a \cdot b$$

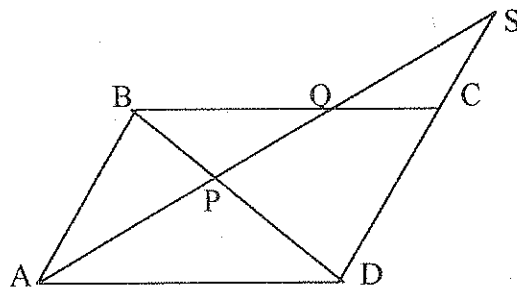
6.18 EJERCICIOS.

1. En un paralelogramo ABCD se da un lado $AB = 4m$, $m\angle B = 30^\circ$ y el ángulo que forman las diagonales es de 143° . Hallar los demás elementos.

Resp. 3,73 ; 7,46 ; 2,04

2. H y O son el ortocentro y el circuncentro de un triángulo ABC escaleno. P y L son los puntos medios de \overline{AH} y \overline{BC} . Demostrar que \overline{PO} y \overline{AL} se bisecan.

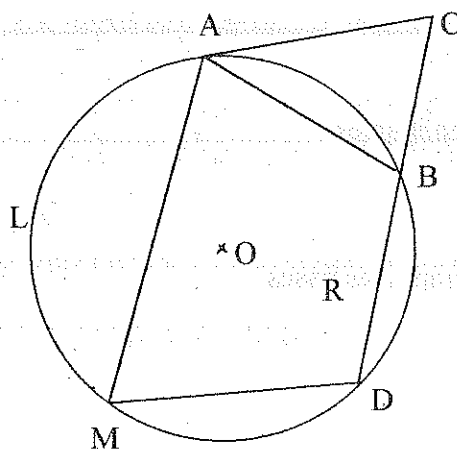
3.



H) ABCD paralelogramo

$$T) AP^2 = PQ \cdot PS$$

4.



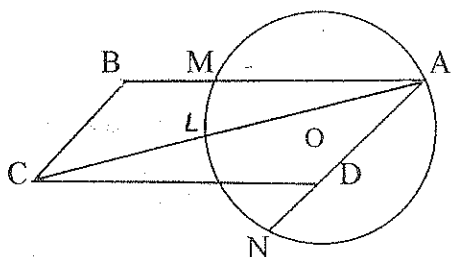
H) \overline{AC} tang. $\theta (O, R)$

$$\overline{AC} \cong \overline{AB}$$

$$\widehat{ALM} \cong \widehat{MDB}$$

T) ACDM paralelogramo

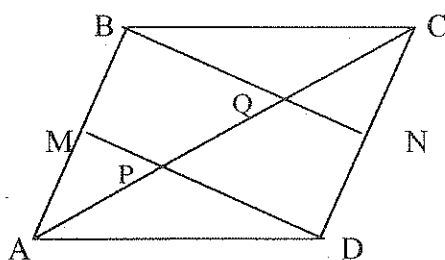
5.



H) ABCD paralelogramo

T) $AC \cdot AL = AB \cdot AM + AD \cdot AN$

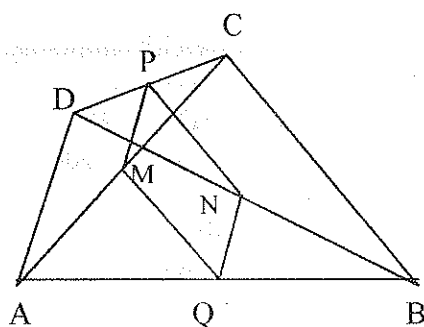
6.



H) ABCD paralelogramo

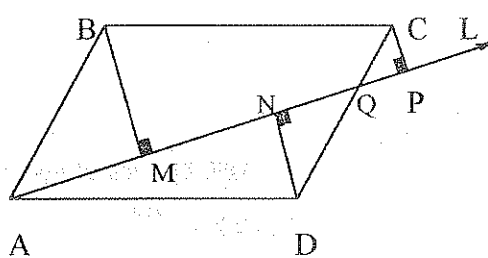
 $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ $\overline{CN} \cong \overline{ND}$ T) $\overline{AP} \cong \overline{PQ} \cong \overline{QC}$

7.

H) $DP = PC$ $DN = NB$ $AM = MC$ $AQ = QB$

T) PMQN paralelogramo

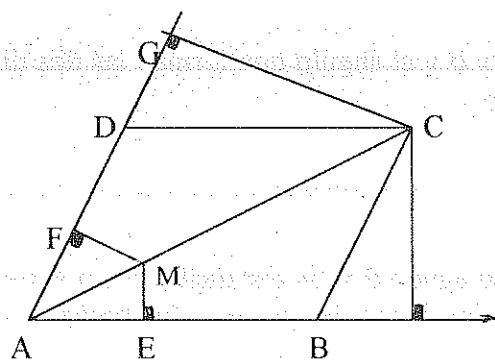
8.



H) ABCD paralelogramo

T) $ND = BM - CP$

9.

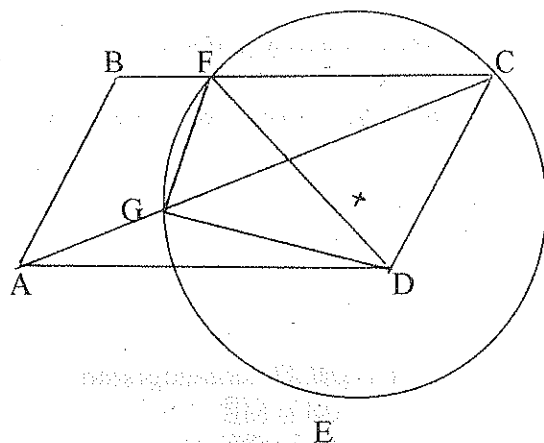


H) ABCD paralelogramo

 $ME = 3 \text{ m.}$ $MF = 6 \text{ m.}$ $AD = 10 \text{ m.}$ T) $AB = ?$

Resp. 20 m.

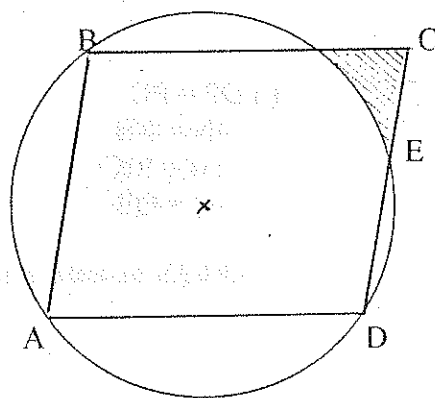
10.



H) ABCD paralelogramo

T) $AC \cdot GE = EF \cdot AD$

11.

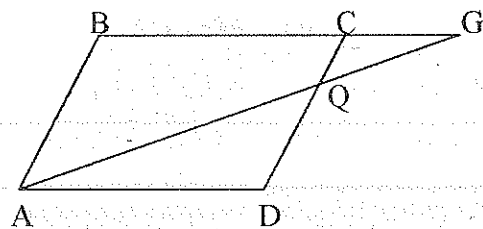


H) ABCD paralelogramo

 $AB = 3,5$ $AD = 4,0$ $\angle BAD = 80^\circ$ T) $S_{ABCD} = ?$

Resp.

12.



H) ABCD paralelogramo

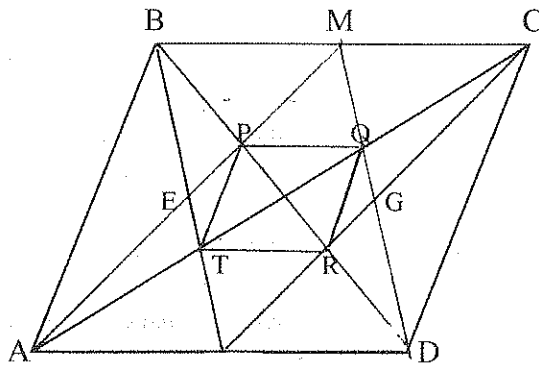
T) $CG = \frac{AD}{2}$

13. Los lados de un paralelogramo son a y b y el ángulo que forman las dos diagonales $\hat{\alpha}$. Determinar el área de paralelogramo.

Resp. $\left(\frac{a^2 - b^2}{2} \right) \tan \alpha$

14. En un paralelogramo se dan : el ángulo agudo $\hat{\alpha}$ y las distancias m y n entre el punto de intersección de las diagonales y los lados desiguales. Determinar el área del paralelogramo. Resp.

15.



H) ABCD paralelogramo

$$AN = ND$$

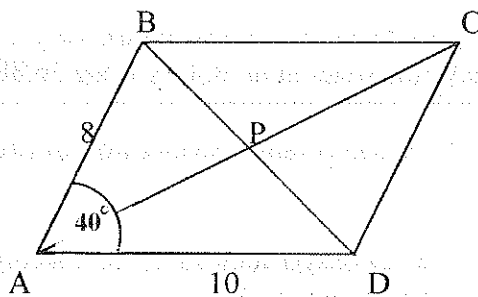
$$BM = MC$$

$$S_{ABCD} = a^2$$

$$T) S_{EMGN} = \frac{a^2}{2}$$

$$T) S_{PQRT} = \frac{a^2}{9}$$

16.

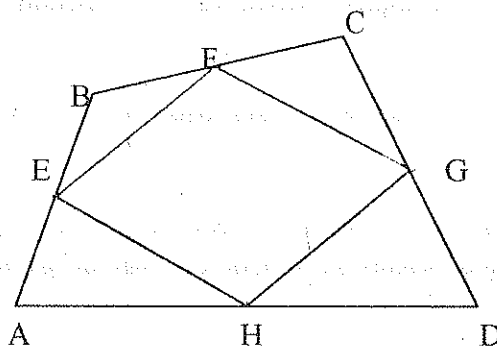


H) ABCD paralelogramo

$$T) S_{\triangle BPC} = ?$$

$$\text{Resp. } 12,85 u^2$$

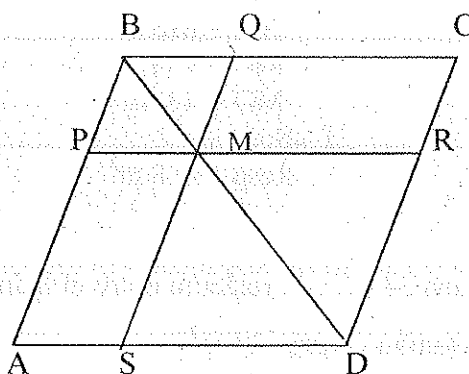
17.

H) E, F, G, H puntos
medios de los lados

$$T) \frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = ?$$

$$\text{Resp. } 2$$

18.



H) ABCD paralelogramo

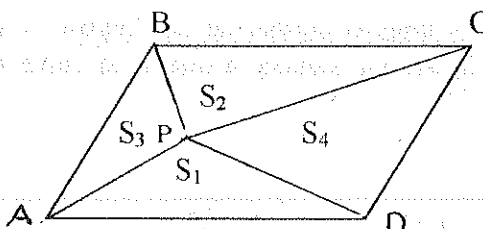
$$M \in BD$$

$$\overline{PR} \parallel \overline{AD}$$

$$\overline{QS} \parallel \overline{AB}$$

$$T) S_{APMS} = S_{CRMQ}$$

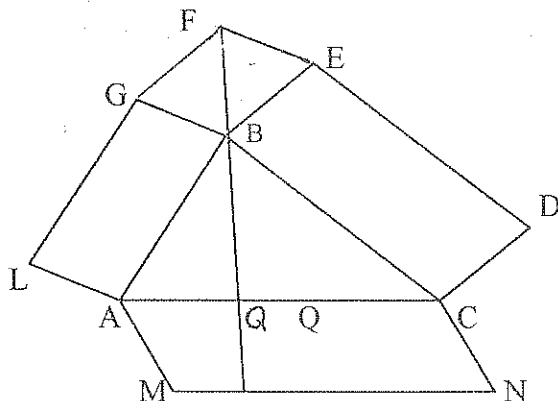
19.



H) ABCD paralelogramo

$$T) S_1 + S_2 = S_3 + S_4$$

20.



H) paralelogramos

BEDC

CNMA

BGLA

FB = QP

T) $S_{ACNM} = S_{BEDC} + S_{BGLA}$

21. El área de un paralelogramo es de 168 m^2 y los lados contiguos miden 10 y 17 m. Hallar el área del paralelogramo semejante cuya diagonal mide 8,4 m. Resp. $26,88 \text{ m}^2$

22. Dado un rombo de lado 15 u. y ángulo de 75° . Hallar el radio del círculo inscrito. Resp.

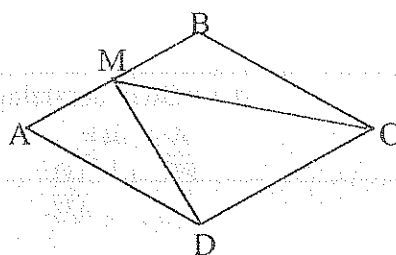
23. El lado de un rombo mide 15 u. y la suma de sus diagonales es 20 u. Calcular el lado del triángulo equilátero equivalente al rombo. Resp. 22,3 u

24. La superficie de un rombo es 100 cm^2 y su ángulo interno es 50° . Calcular el radio del círculo inscrito. Resp. 4,37 cm.

25. Si la superficie de un rombo es 100 u^2 , el radio del círculo inscrito 5 u. Calcular un ángulo interno. Resp. 90°

26. Calcular el área común de dos rombos, en el primero de los cuales las diagonales son de 2 m. y de 3 m, mientras que el segundo se obtiene al girar el primero 90° alrededor de su centro. Resp. $2,4 \text{ m}^2$

27.



H) ABCD rombo

AM = MB

MC = 9 m.

MD = 13 m.

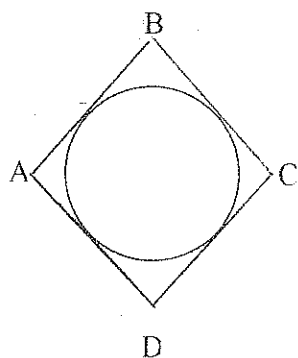
T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. $89,8 \text{ m}^2$

28. El perímetro y las diagonales de un rombo suma 34 m. y la relación entre el lado y una diagonal es igual a $\frac{5}{6}$. Hallar el área del rombo. Resp. 24 m^2

29. Se trazan perpendiculares desde el vértice del ángulo obtuso de un rombo a sus lados. La longitud de cada perpendicular es igual a a siendo la distancia entre sus pies b . Hallar el área del rombo.

Resp. $\frac{2a^4}{b\sqrt{4a^2 - b^2}}$

30.



H) Área del rombo = Q
Área del círculo = S

T) Hallar los ángulos del rombo.

Resp $\arcsen \frac{4S}{\pi Q}$

31. El perímetro de un rombo es igual al $2p$ y la suma de sus diagonales es m . Hallar el área del rombo.

Resp $\frac{m^2 - p^2}{4}$

32. Hallar el área de un rombo sabiendo que las proyecciones de las diagonales sobre uno de sus lados miden 1,5 y 6,4.

Resp. $3,16 \sqrt{15}$

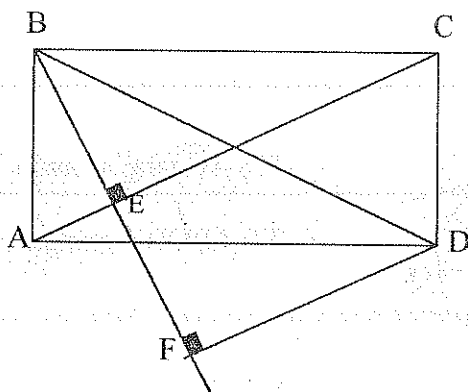
33. Las proyecciones de las diagonales de un rombo sobre una recta que forma un ángulo de 30° con la diagonal mayor, miden 40 m., y 12 m.. Calcular el área del rombo.

Resp. $554,26 \text{ m}^2$

34. La superficie de un rombo es de 96 m^2 y su lado de 10 m. Calcular el área de otro rombo semejante al anterior, cuya diagonal menor es de 15 m. Resp. 150 m^2

35. En un paralelogramo ABCD; $AB = 10 \text{ u}$; $BC = 4 \text{ u}$; $\angle A = 60^\circ$, se trazan las bisectrices de los cuatro ángulos internos formando el cuadrilátero PQST. Encontrar la superficie del cuadrilátero PQST. Resp.

36.



H) ABCD rectángulo

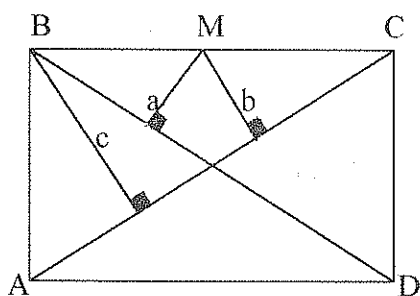
$AB = 4 \text{ u}$

$BC = 6 \text{ u}$

T) $FD = ?$

Resp.

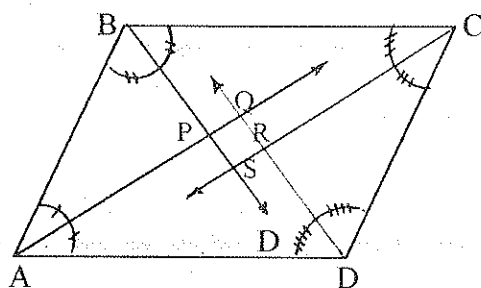
37.



H) ABCD rectángulo

T) $c = a + b$

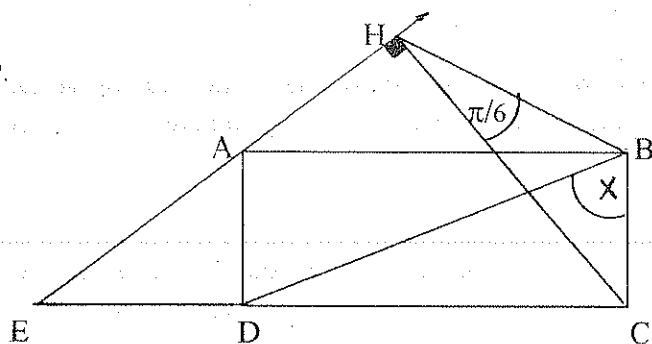
38.



H) ABCD paralelogramo

T) PQRS rectángulo

39.



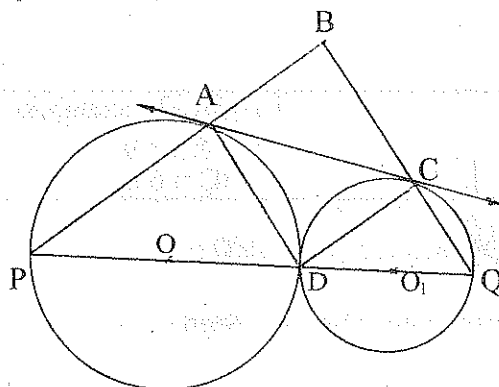
H) ABCD rectángulo

T) $m \hat{X} = ?$
Resp.

40. El perímetro de un triángulo rectángulo es 132 m. y la suma de los cuadrados de los lados 6050 m^2 . Hallar los lados.

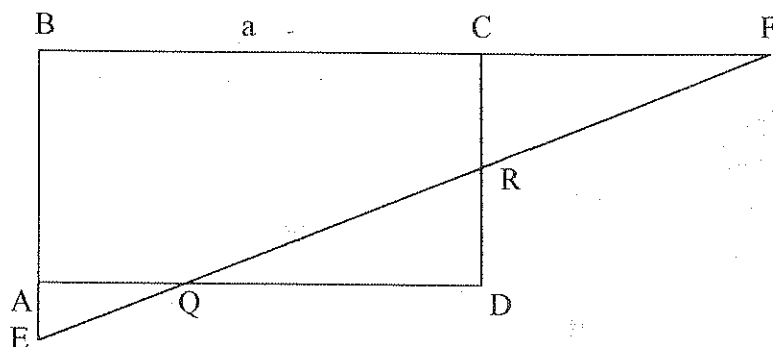
Resp. 55 ; 33 ; 44 m.

41.

H) \overleftrightarrow{AC} tang. Común

T) ABCD rectángulo

42.



H) ABCD rectángulo

$$AQ = \frac{a}{3}$$

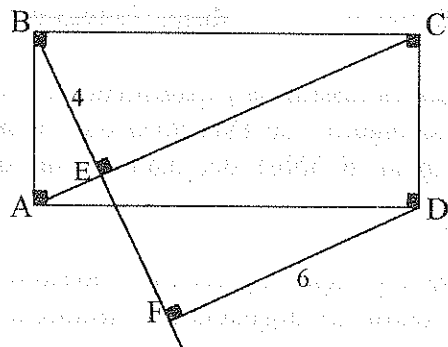
$$CR = \frac{2b}{3}$$

$$a = 3u$$

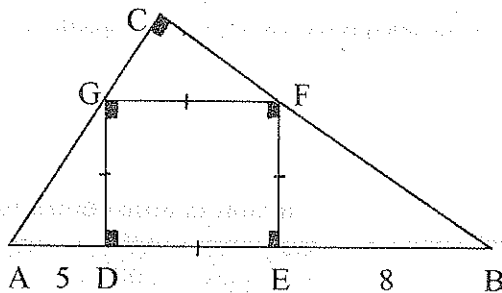
T) CR = ?

Resp. 2 u

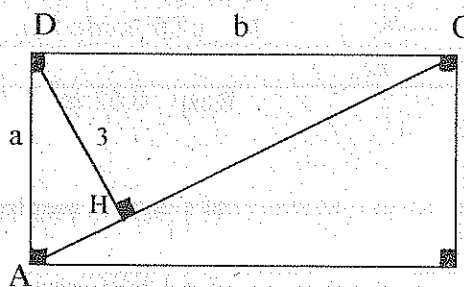
43.

T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. $40u^2$

44.

T) $S_{DGFE} = ?$ Resp. $40u^2$

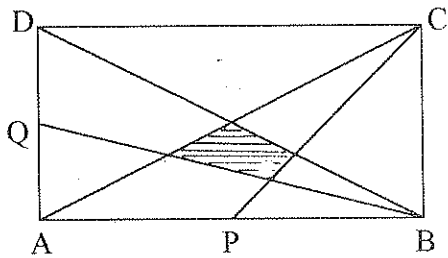
45.

H) $a + b = 50u$ T) S_{ABCD} Resp. $141,27u^2$

46. En un rectángulo ABCD, por el centro O del círculo inscrito al triángulo ABC se trazan las perpendiculares OM al lado AD y ON al lado DC. Calcular el área del cuadrilátero OMDN, sabiendo que el área del rectángulo dado es de 100 m^2 .

Resp. 50 m^2

47.



H) ABCD rectángulo

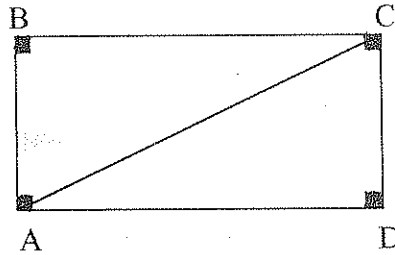
$$AP = PB = 8 \text{ m.}$$

$$AQ = QD = 6 \text{ m.}$$

T) $S_{\text{shaded}} = ?$

$$\text{Resp. } 9,6 \text{ m}^2$$

48.

H) $AC - AD = 2 \text{ m.}$

$$AB + BC = 84 \text{ m.}$$

T) $S_{ABCD} = ?$

$$\text{Resp. } 1116,3 \text{ m}^2$$

49. Si en un paralelogramo se trazan las bisectrices interiores y exteriores, se verifica:

1) Las bisectrices interiores forman un rectángulo y las exteriores otro rectángulo.

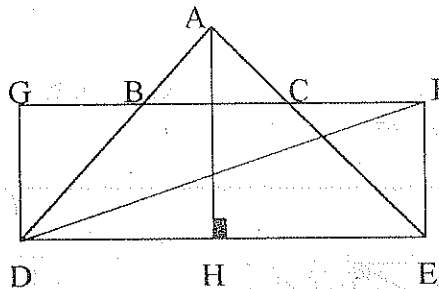
2) El área del rectángulo exterior es igual al doble del paralelogramo más el rectángulo interior.

50. Se inscribe un círculo en un rombo de lado a y ángulo agudo 60° , determinar el área de un rectángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia del círculo y los lados del rombo. Resp.

51. Calcular la superficie de un rectángulo si su perímetro es 46 y su diagonal 17.

$$\text{Resp. } 120$$

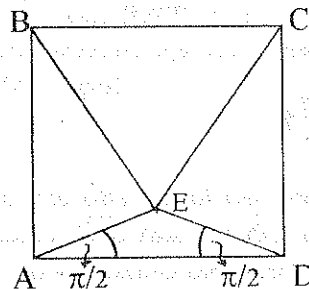
52.



Calcular el área del triángulo Isósceles ABC, siendo el triángulo ADE equivalente al rectángulo DEFG, si HA mide 1m. y DF mide 5m.

$$\text{Resp. } 0,62 \text{ m}^2$$

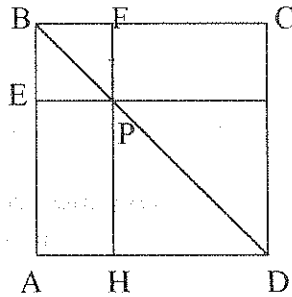
53.



H) ABCD cuadrado

T) $\triangle EBC$ equilátero

54.



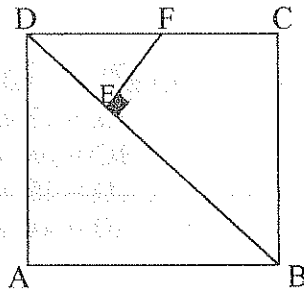
H) ABCD cuadrado

$$\overline{EG} \parallel \overline{AD}$$

$$\overline{FH} \parallel \overline{AB}$$

T) EFGH de un círculo

55.



H) ABCD cuadrado

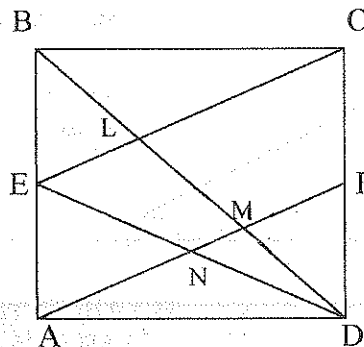
$$\overline{BE} = \overline{BC}$$

T) $DE = EF = FC$

56. En un cuadrado de lado a se inscribe otro cuyos vértices están sobre los lados del primero. Determinar los segmentos en que los vértices del segundo cuadrado dividen a los lados del primero, sabiendo que el área del segundo vale $25/49$ del área del primero.

Resp $3a/7$; $4a/7$

57.

H) ABCD cuadrado
E y F puntos medios

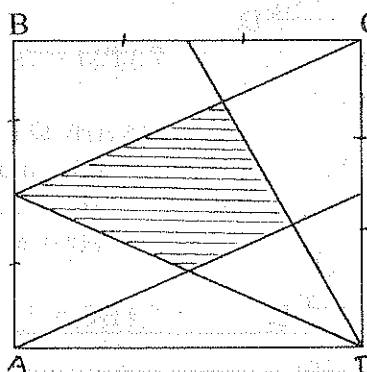
$$T) \frac{S_{ELMN}}{S_{ABCD}} = ?$$

Resp. $\frac{1}{8}$

58. El lado de un triángulo equilátero es a . Hallar el área del triángulo equilátero que está inscrito en el cuadrado inscrito en el triángulo original.

Resp. $3(2\sqrt{3} - 3)a^2$

59.

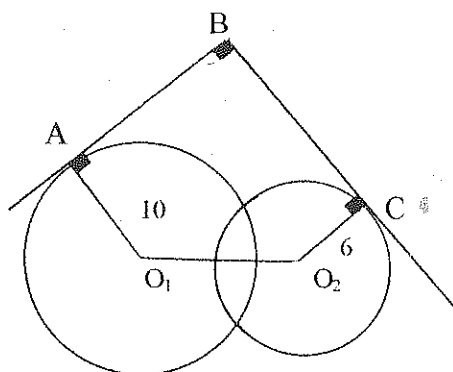


H) ABCD cuadrado

$$T) \frac{S_{////}}{S_T} = ?$$

Resp. $\frac{9}{40}$

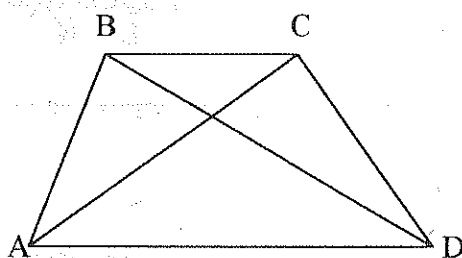
60.



$$H) O_1 O_2 = 12 \text{ u}$$

T) Perímetro del $O_1 A B C O_2$

61.



$$H) \overline{BC} \parallel \overline{AD}$$

$$AB = 17 \text{ m.}$$

$$BC = 16 \text{ m.}$$

$$CD = 25 \text{ m.}$$

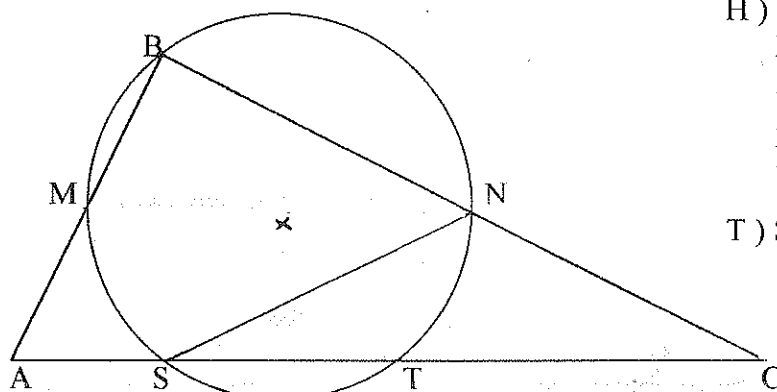
$$AD = 44 \text{ m.}$$

$$T) AC = ?$$

$$BD = ?$$

$$\text{Resp. } 28,3 ; 39 \text{ m.}$$

62.



$$H) AM = MB$$

$$BN = NC$$

$$AT = TC$$

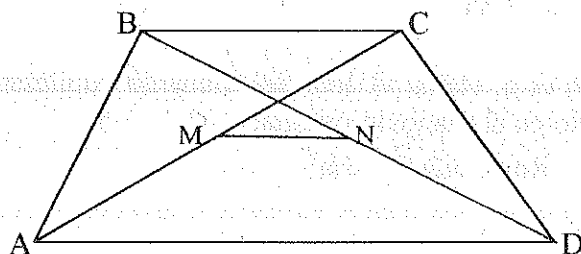
$$AB = 6 \text{ m.}$$

$$BC = 8 \text{ m.}$$

$$T) SN = ?$$

$$\text{Resp.}$$

63.



$$H) ABCD \text{ trapecio}$$

$$AB = 25 \text{ u}$$

$$BC = 15 \text{ u}$$

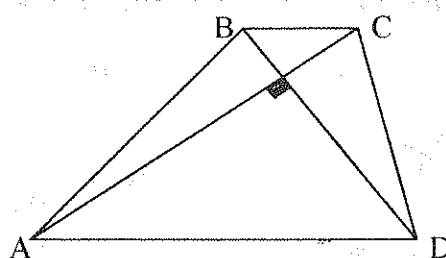
$$CD = 22 \text{ u}$$

$$AD = 45 \text{ u}$$

M y N puntos medios
de las diagonales

$$T) PM = ?$$

64.



$$H) ABCD \text{ trapecio}$$

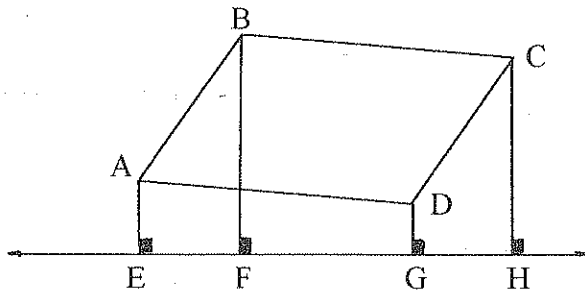
$$AD = 6 \text{ u}$$

$$AC = 5 \text{ u}$$

$$BD = 6 \text{ u}$$

$$T) BC = ?$$

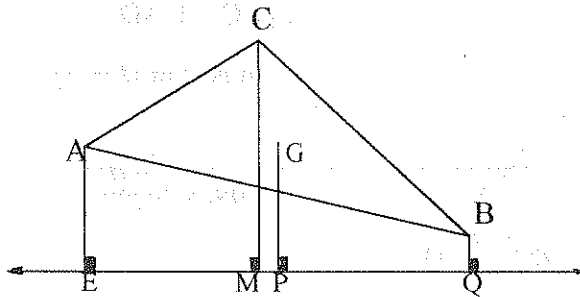
65.



H) ABCD paralelogramo

T) $BF + DG = AE + CH$

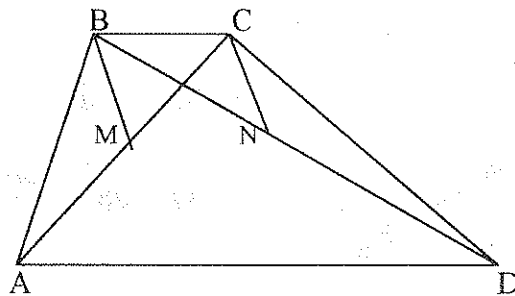
66.



H) G baricentro

T) $GP = \frac{AN + BQ + CM}{3}$

67.



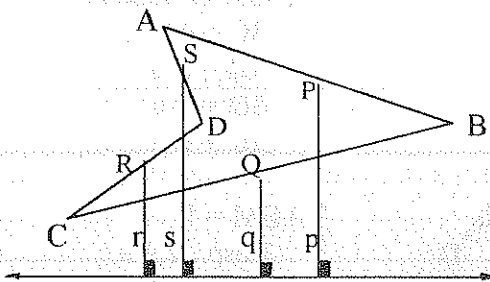
H) $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

$AD = 3 BC$

M y N puntos medios de las diagonales

T) $\triangle BMP \cong \triangle CNP$

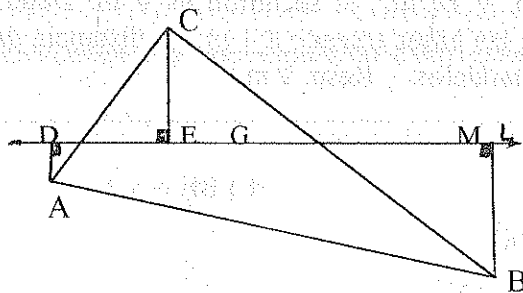
68.



H) P, Q, R, S puntos medios

T) $c + p = q + s$

69.

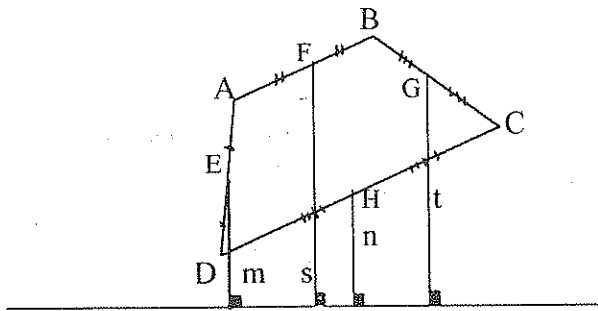


H) G baricentro

$G \in \overline{LM}$

T) $AD + BM = CE$

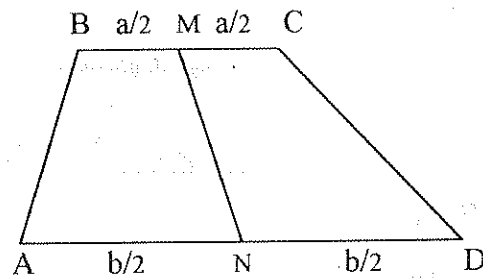
70.



H) ABCD trapecio

$$T) n + s = m + t$$

71.

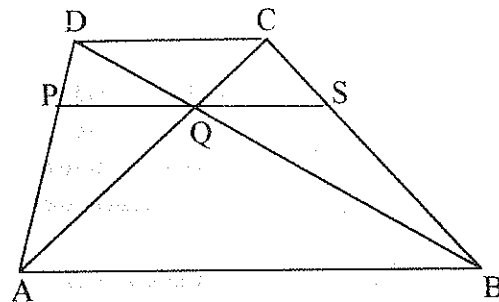


$$H) \overline{BC} \parallel \overline{AD}$$

$$m\hat{A} + m\hat{D} = \frac{\Pi}{2}$$

$$T) MN = \frac{b-a}{2}$$

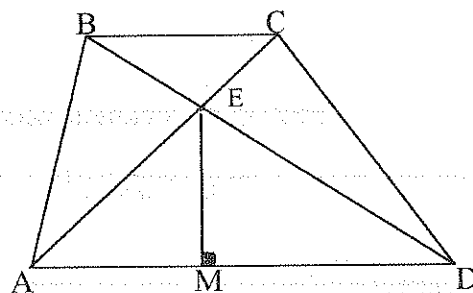
72.



$$H) \overline{DC} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{PS}$$

$$T) PQ = QS = \frac{ab}{a+b}$$

73.



H) ABCD trapecio

$$BC = 4 \text{ u}$$

$$AD = 8 \text{ u}$$

$$BD = 9 \text{ u}$$

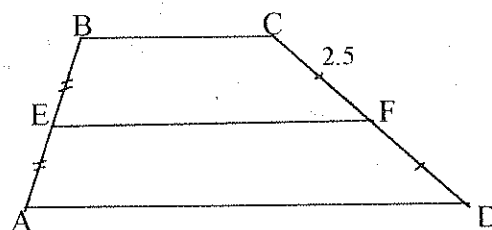
$$AC = 6 \text{ u}$$

$$T) EM = ?$$

$$\text{Resp. } 2,9 \text{ u}$$

74. Las bases de un trapezio son 6 m. y 10 m. si su altura es 4 m. Determinar la longitud del segmento p paralelo a las bases trazado a 1 m. de distancia de la base mayor y limitado por los lados no paralelos. Resp. 9 m.

75.



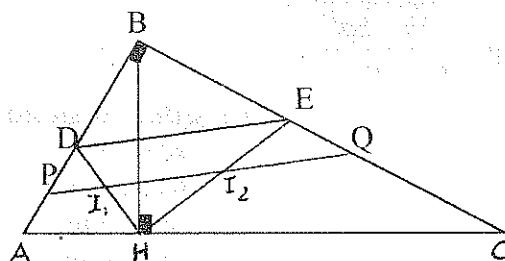
$$H) BE = \sqrt{3}$$

$$T) \frac{S_1}{S_2} = ?$$

Resp.

76. En un trapecio las bases miden 7 m y 21 m y su altura es 10 m. Hallar el área de cada una de las partes formadas, al trazar la base media del trapecio. Resp. $52,5 \text{ u}^2$; $87,5 \text{ u}^2$.
77. Una recta perpendicular a dos lados de un paralelogramo divide a este en dos trapecios en cada uno de los cuales se puede inscribir un círculo. Hallar el ángulo agudo del paralelogramo si sus lados son de 10 u y de 8 u. Resp. $14,50$
78. Se inscribe un triángulo ABC en un círculo; por el vértice A se traza una tangente que corta a la prolongación del lado BC en el punto D. Por los vértices B y C se trazan perpendiculares a la tangente, midiendo 6 cm la menor de estas perpendiculares. Determinar el área del trapecio formado por las perpendiculares, el lado BC y el segmento de la tangente, sabiendo que $BC = 5 \text{ cm}$, $AD = 5\sqrt{6} \text{ cm}$. Resp. 30 cm^2

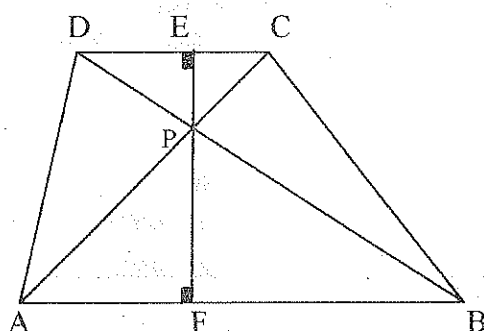
79.



- H) I_1 INCENTRO $\triangle ABH$
 I_2 INCENTRO $\triangle BHC$

- T) a) $\overline{DE} \parallel \overline{PQ}$
 b) $PB = BQ = BH$

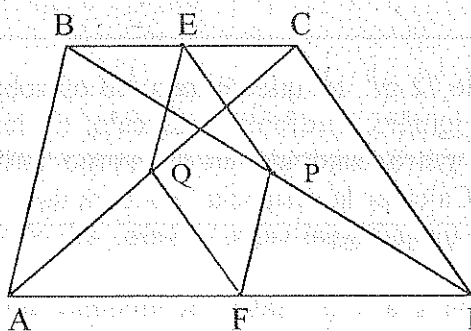
80.



- H) $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$
 $AB = 327 \text{ m}$.
 $DC = 153 \text{ m}$.
 $AC = 305 \text{ m}$.
 $BD = 226 \text{ m}$.

- T) $S_{ADEF} = ?$
 Resp. 14326 m^2

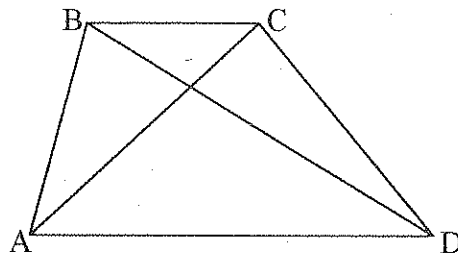
81.



- H) $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$
 $AB = 17 \text{ m}$.
 $BC = 16 \text{ m}$.
 $CD = 25 \text{ m}$.
 $AD = 44 \text{ m}$.
 $AQ = QC$
 $BP = PD$

- T) $S_{QEPF} = ?$
 Resp. 105 m^2

82.



H) $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$
 $BC = 153 \text{ m.}$
 $AD = 327 \text{ m.}$
 $BD = 305 \text{ m.}$
 $AC = 226 \text{ m.}$

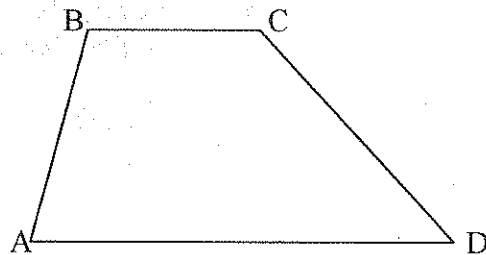
T) $S_{ABCD} = ?$
 Resp. 26880 m^2

83. Calcular las bases y la altura de un trapezio de 75 m^2 de área, sabiendo que la base menor es la mitad de la mayor y la altura la sexta parte de la suma de las dos bases.
 Resp. $20 \text{ m.}, 10 \text{ m.}, 5 \text{ m.}$

84. Dado un trapezio de bases a y b . Hallar la longitud del segmento paralelo a las bases tal que divida al trapezio en dos partes proporcionales a 3 y 5.

Resp. $\sqrt{\frac{3b + 5a^2}{8}}$

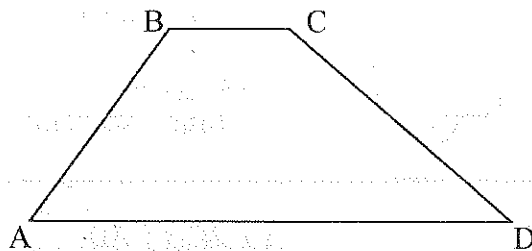
85.



H) ABCD trapezio
 $AB = 17 \text{ m.}$
 $BC = 16 \text{ m.}$
 $CD = 25 \text{ m.}$
 $AD = 44 \text{ m.}$

T) $S_{ABCD} = ?$
 Resp. 450 m^2

86.



H) ABCD trapezio
 $AD = a$
 $BC = b$
 $A = 45^\circ$
 $D = 30^\circ$

T) $S_{ABCD} = ?$
 Resp. $\frac{a^2 - b^2}{4}(\sqrt{3} - 1)$

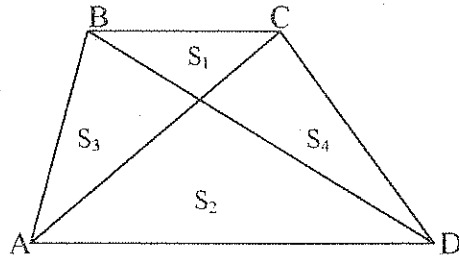
87. Se da un terreno rectangular ABCD de 72 m^2 tal que un lado AB es doble del AD, se divide por EF en dos partes iguales quedando reducido a dos terrenos rectangulares, siendo el precio del metro cuadrado en el terreno AEFD de S/. 300,00 y en el EFCB de S/. 250,00. Calcular la distancia EG para que la recta GF divida el terreno en dos trapezios que tengan igual valor. Resp. $GF = 1 \text{ m.}$

88. Las bases de un trapezio son iguales a a y b . Hallar la longitud del segmento paralelo a las bases que divide el área del trapezio en dos partes equivalentes.

Resp. $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

89. Un predio en forma de trapecio isósceles tiene por bases 152 m. y 78 m. y ha sido comprado en S/. 79 350,00 por tres labradores que reparten la finca según la figura. Qué cantidades deben entregarse mutuamente si al hacer la compra han pagado por igual ? Resp = S/. 8666; S/.8206; S/.460

90.

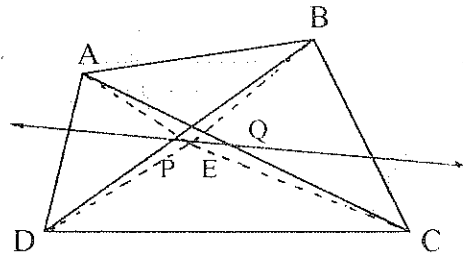


H) ABCD trapecio

$$T) S_{ABCD} = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$$

$$S_{ABCD} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$$

91



H) BP = PD
AQ = QC
E ∈ PQ

$$T) S_{AED} + S_{BEC} = S_{AEB} + S_{DEC}$$

92. Dado un cuadrilátero cualquiera, demostrar que si por los puntos medios de cada diagonal se trazan paralelas a la otra diagonal y si se une el punto de intersección de las dos paralelas con los puntos medios de cada lado, el cuadrilátero queda dividido en cuatro partes equivalentes.

93. Una recta paralela a la base de un triángulo de área S, separa en él un triángulo de área Q. Determinar el área del cuadrilátero cuyos vértices coinciden en los del triángulo menor y el cuarto este en la base del triángulo mayor.

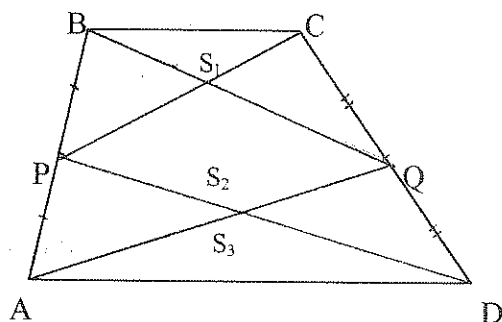
$$\text{Resp. } \sqrt{SxQ}$$

94. Un propietario tenía una finca de forma rectangular, y de 20 000 m², cuya anchura era los $\frac{3}{4}$ de largo. Se construyó una carretera que ocupó en el terreno una franja de

10 m de ancho, siendo el eje de la carretera una de las diagonales del rectángulo. Se ofreció al propietario la compra de todo el terreno a razón de S/. 500,00 el m², pero no quiso que se le expropiara más que el terreno ocupado por la carretera, por el que se le pagó a razón de S/300,00 el metro cuadrado. Una vez construido el carretero, el propietario vendió el terreno sobrante a razón de S/250,00 m², con el convencimiento de que había hecho un magnifico negocio. Cuánto ganó ? Resp. Perdió S/. 37 614,79

95. Cuál es el área del trapecio cuyos lados son el $\frac{1}{3}$ de los lados de otro trapecio semejante de 180 m² de área. Resp.

96.



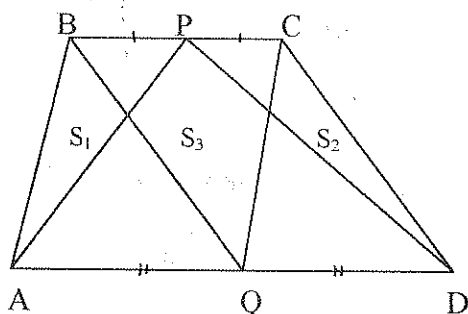
H) ABCD trapecio

T) $S_2 = S_1 + S_3$

T) $S_{\triangle ABQ} + S_{\triangle CPD} = S_T$

T) $\frac{S_2}{S_T} = \frac{(a+b)^2}{(3a+b)(3b+a)}$

97.



H) ABCD trapecio

T) $S_1 = S_2$

T) $S_3^2 = S_2 S_1$

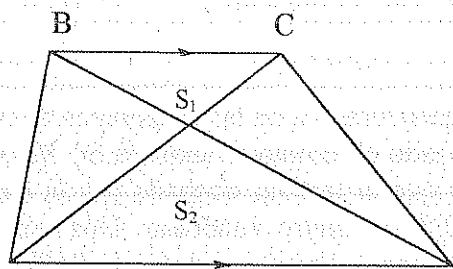
T) $\frac{S_3}{S_T} = \frac{ab}{(a+b)^2}$

98. Si un terreno en forma de trapecio isósceles cuyas bases miden 100 m y 140 m y la altura 90 m, es atravesado por una carretera cuyo ancho es de 7 m., teniendo por eje una de las diagonales del trapecio. Hallar el área de la carretera. Resp.

99. En un triángulo los catetos miden 108 m y 144 m. A qué distancia de la hipotenusa debe trazarse una paralela para obtener un trapecio de 972 m^2 . Resp. $5,59 \text{ m}^2$

100. Dado un trapecio ABCD, en el cual la base menor $AB = 12 \text{ m}$ y la base mayor $\overline{DC} = 18 \text{ m}$ y la altura $AH = 10 \text{ m}$. Calcular la longitud del segmento \overline{MN} paralelo a las bases de modo que lo divida en dos partes equivalentes. Resp. $15,29 \text{ m}$

101.



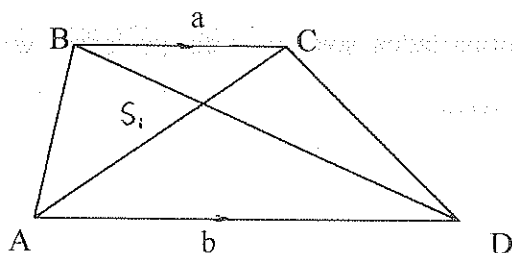
H) $S_1 = 9 u^2$

$S_2 = 25 u^2$

T) $S_T = ?$

Resp. $64 u^2$

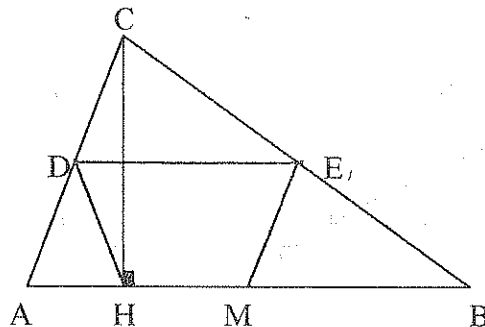
102.



T) $\frac{S_1}{S_T} = \frac{ab}{(a+b)^2}$

la tumba hacia la derecha. Para encontrar el tesoro hay que medir la distancia desde el templo hasta la tumba, luego girar el ángulo recto hacia la derecha, medir igual distancia y clavar una estaca (A). Luego medir la distancia del templo a la pirámide, girar en ángulo recto a la izquierda, medir la misma distancia y clavar otra estaca (B). El tesoro está enterrado precisamente en el centro de las dos estacas. Cierta persona, tenía estos datos, más cuando llegó al lugar no encontró ni rastro del templo al Sol y no pudo dar con el tesoro. Sin embargo, un estudioso de este libro, bien pudo encontrarlo. Como hacerlo ?

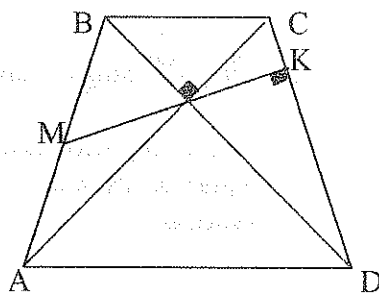
109.



- H) $AD = DC$
 $CE = EB$
 $AM = MB$

T) DEMH trapecio
 isósceles

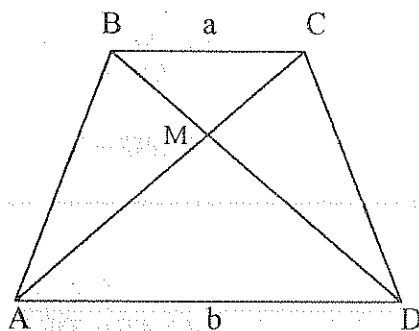
110.



- H) ABCD trapezio
 isósceles
 $AD = 40 \text{ cm.}$
 $BC = 30 \text{ cm.}$

T) $MK = ?$
 Resp. $34,65 \text{ cm.}$

111.

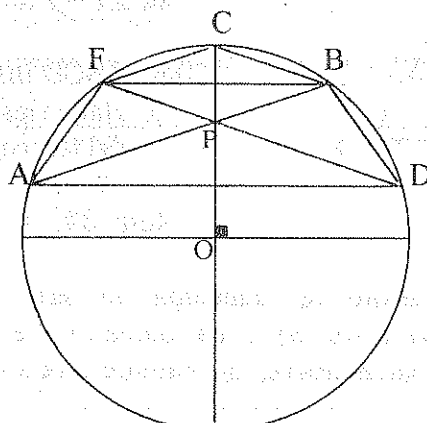


- H) ABCD trapezio
 isósceles
 circunscriptible
 $a = 4 \text{ u.}$
 $b = 8 \text{ u.}$

T) $MC = ?$

Resp. $2,748 \text{ u.}$

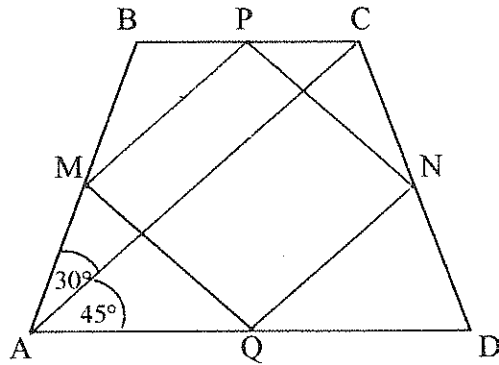
112.



- H) $m \widehat{AD} = 100^\circ$
 $m \widehat{BAD} = 20^\circ$

T) AFBF trapezio isósceles
 FCBP rombo

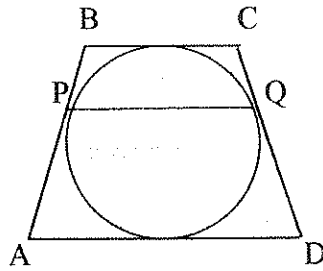
113.



H) ABCD trapecio isósceles

T) MPNQ cuadrado

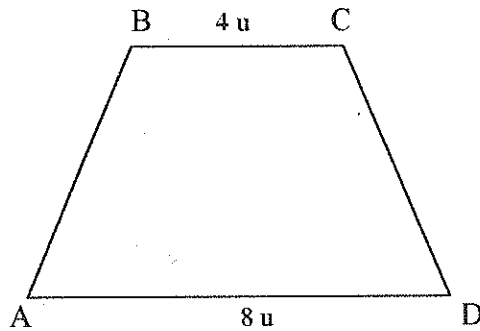
114.



H) ABCD trapecio isósceles

$$T) PQ = \frac{2ab}{a+b}$$

115.



H) ABCD trapecio isósceles circunscriptible

$$T) R = ?$$

$$r = ?$$

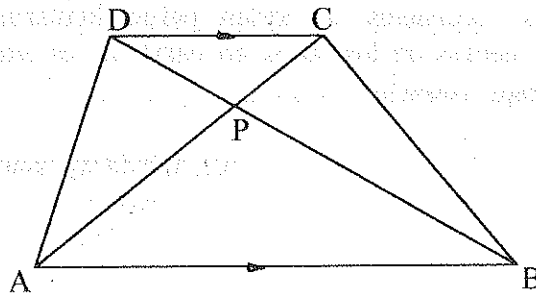
Resp. 4,37 ; 2,82 u

116. Demostrar que en un trapecio isósceles el producto de las bases es igual a la diferencia de los cuadrados de una de las diagonales y el lado no paralelo.

117. En un trapecio ABCD, la base mayor $AB = 22$ u, la base menor $CD = 10$ u. las diagonales son bisectrices de los ángulos \widehat{DAB} y \widehat{ABC} . Hallar el área del trapecio.

Resp

118.



H) $AC = 30$ u

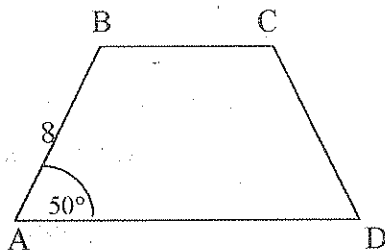
BD = 40 u

AB = 35 u

T) $S_{\triangle DPC} = ?$

Resp. $54 u^2$

119.



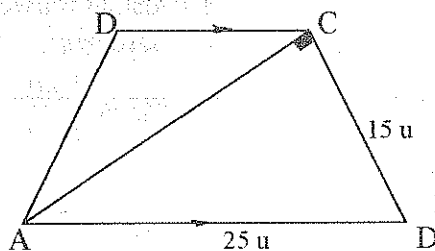
H) ABCD trapecio
isósceles
circunscriptible

T) $S_{ABCD} = ?$

Resp.

120. El área de un trapecio isósceles circunscriptible es de $32,5 u^2$ y los ángulos en la base miden 50° . Determinar las longitudes de sus lados. Resp.

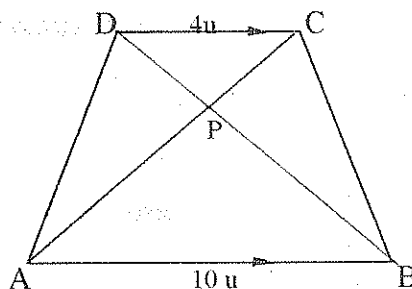
121.



T) $S_{ABCD} = ?$

Resp. $192 u^2$

122.



H) ABCD inscriptible y
circunscriptible

T) $S_{\triangle DPC} = ?$

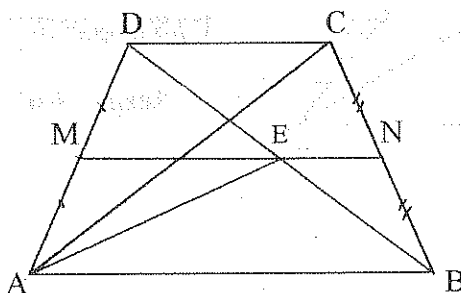
Resp. $3,6 u^2$

123. En un trapecio los lados no paralelos y la base menor tiene la misma longitud, si la base menor mide $20 u$ y el ángulo obtuso 130° . Calcular su área. Resp.

124. En un trapecio isósceles ABCD está circunscrito a un círculo de $r = 3 u$. Si uno de sus ángulos internos en la base mayor es de 60° . Calcular el perímetro de dicho trapecio. Resp. $27,71 u$.

125. En un trapecio isósceles sus diagonales se cortan perpendicularmente y el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos es igual a $10 u$. Hallar el área del trapecio. Resp. $100 u^2$.

126.



H) ABCD trapecio
isósceles
 $AC = BD = 7 u$
 $AB = 12 u$
 $CD = 5 u$

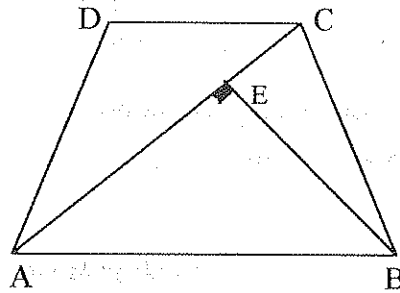
T) $S_{\triangle ADE} = ?$

Resp. $10,6 u^2$

127. Hallar el área de un trapecio isósceles, si su altura es igual a h y su lado lateral se ve desde el centro del círculo circunscrito bajo el ángulo α .

Resp. $H^2 \cotg \frac{\alpha}{2}$

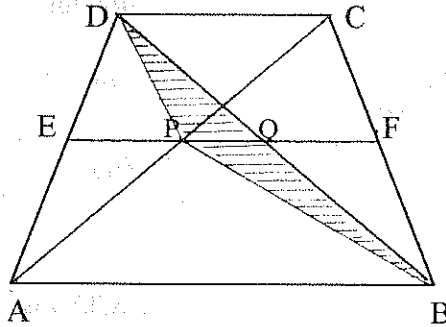
128.



H) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
 $AD = BC = 25 \text{ m.}$
 $AC = 40 \text{ m.}$
 $BE = 20 \text{ m.}$

T) $S_{ABCD} = ?$
 Resp. 760 m^2

129.



H) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
 $AB = 30 \text{ m.}$
 $BC = AD = 10 \text{ m.}$
 $CD = 12 \text{ m.}$
 $AE = ED$
 $BF = FC$

T) $S_{\text{shaded}} = ?$
 Resp. $19,6 \text{ m}^2$

130. En un trapecio isósceles, las bases se diferencian en 2 m. el lado es 2 m. mayor que la base menor y la altura del trapecio es el doble de la base menor. Calcular el área del trapecio. Resp. $10,63 \text{ m}^2$

131. El área de un trapecio isósceles circunscrito a un círculo es igual a S . Determinar la longitud del lado del trapecio, sabiendo que el ángulo de la base es igual a $\frac{\pi}{6}$.

Resp. $\sqrt{2S}$

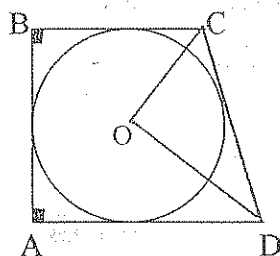
132. Se circunscribe un trapecio a un círculo y sus lados no paralelos forman ángulos agudos α y β con el mayor de los lados paralelos. Determinar el radio del círculo sabiendo que el área del trapecio es igual a Q .

Resp. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{Q \sin \alpha \sin \beta}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}}$

133. A un círculo de radio r se circunscribe un trapecio rectángulo cuyo lado menor es $\frac{3r}{2}$. Hallar el área del trapecio.

Resp. $\frac{9r^2}{2}$

134.

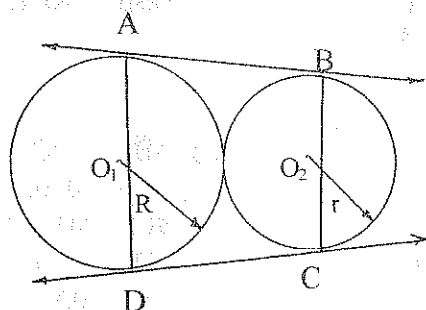


H) ABCD trapecio
rectángulo
 $OC = 2 \text{ m.}$
 $OD = 4 \text{ m.}$

T) $S_{ABCD} = ?$
Resp. $14,4 \text{ cm}^2$.

135. Calcular las longitudes de un trapecio isósceles circunscriptible a un círculo siendo la diagonal $d = 2\sqrt{17}$ y el área $S = 24\sqrt{2}$. Resp. 6 ; 6 ; 4 ; 8

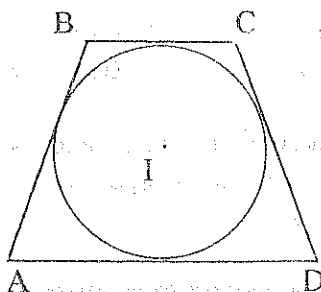
136.



H) O_1 y O_2 círculos
tangentes
 \overleftrightarrow{AB} y \overleftrightarrow{CD} tangentes
comunes

T) $S_{ABCD} = ? f(R, r)$
Resp. $\frac{8(R, r)^{\frac{3}{2}}}{R + r}$

137.



H) ABCD trapecio isósceles
Área del trapecio 0 20 m^2
Radio del círculo 0 2 m.

T) Lados del trapecio = ?

Resp. $8 \text{ m} ; 2 \text{ m} ; 5 \text{ m}$

138. Un trapecio isósceles con los ángulos de la base iguales a 60° tienen tal forma que se puede inscribirle dos círculos tangentes uno a otro, cada uno de los cuales es tangente a su vez a las bases del trapecio y a uno de sus lados laterales. El lado lateral de trapecio es igual a 2 m . Hallar el área del trapecio.

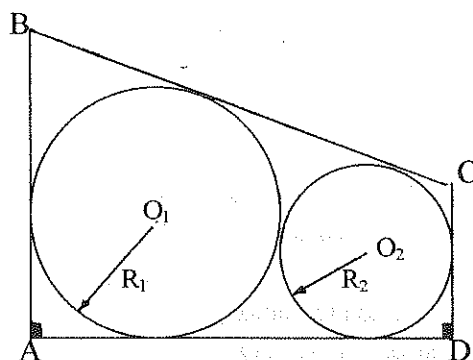
Resp. $(3 + 2\sqrt{3})\text{m}^2$

139. En un círculo están inscritos un triángulo isósceles y un trapecio. Los lados laterales del triángulo son paralelos a los lados laterales del trapecio. Una de las bases del trapecio es el diámetro del círculo. Calcular la altura del trapecio siendo su base media igual a 1 y el área del triángulo igual a S .

Resp. $\frac{S}{1}$

140. Encontrar la superficie del trapecio ABCD inscriptible y circunscriptible de base menor 8 u y de base mayor 12 u . Resp.

141.

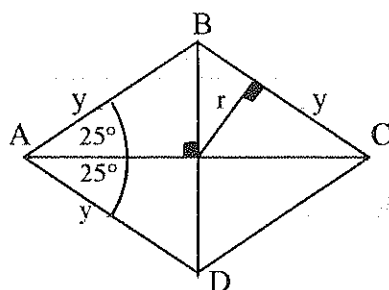


H) $R_1 - R_2 = 6$ m
longitud de los dos
círculos 62,8 m.

T) $S_{ABCD} = ?$
Resp. 596,3 m.

6.18.1 EJERCICIOS RESUELTOS

24.



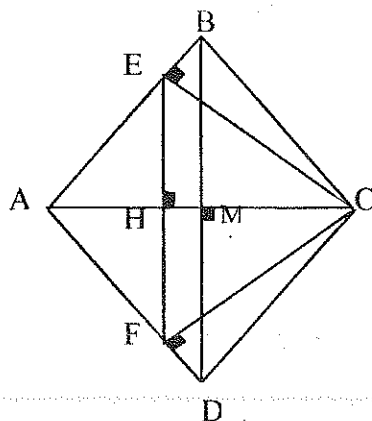
$$S = 100 = y^2 \sin 50$$

$$Y = 11,43$$

$$S = 100 = 2 \times 11,43 \times r$$

$$r = 4,37 \text{ cm.}$$

29.



$$HC = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$$

$$a^2 = AC \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$$

$$AC = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$$

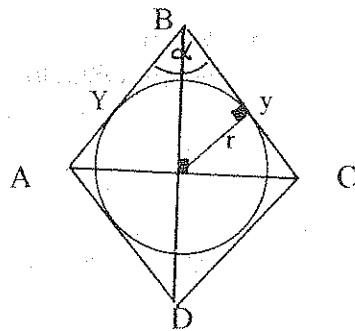
$$AH = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}} - \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2} = \frac{b^2}{2\sqrt{4a^2 - b^2}}$$

$$\frac{BM}{EH} = \frac{AM}{AH} \quad \frac{BM}{b/2} = \frac{2a^2\sqrt{4a^2 - b^2}}{b^2\sqrt{4a^2 - b^2}}$$

$$BM = a^2 / b; \quad BD = 2 a^2 / b$$

$$S = \frac{BD \times AC}{2} = \frac{2a^4}{b\sqrt{4a^2 - b^2}}$$

30.



$$Q = 2 y r = y^2 \operatorname{sen} \alpha$$

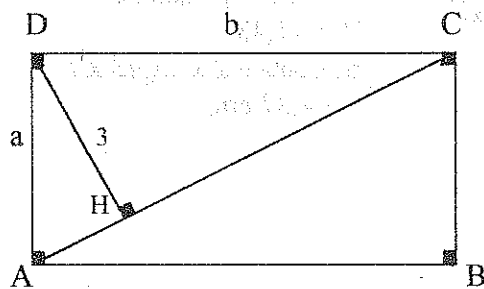
$$Y = 2 r / \operatorname{sen} \alpha$$

$$S = \pi r^2$$

$$Q = 2 (2 r) / \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{Sen} \alpha = 4 S / \pi Q$$

45.



$$AC \times 3 = a \times b = S$$

$$a + b = 50$$

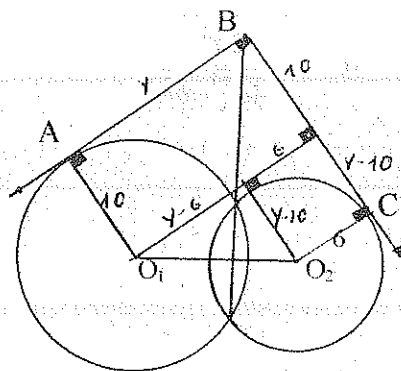
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2500$$

$$AC^2 + 2S = 2500$$

$$S^2 / 9 + 2S = 2500$$

$$S = 141,27 u^2$$

60.



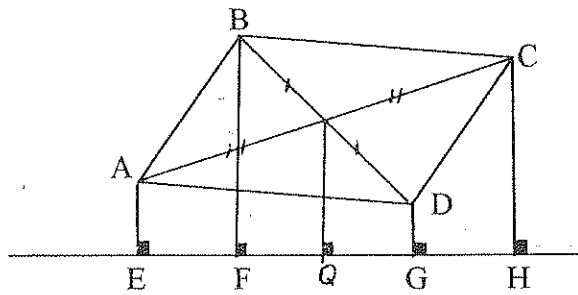
$$144 = (y - 6)^2 + (y - 10)^2$$

$$y = 16,25$$

$$P = 16,25 + 16,25 + 6 + 12 + 10$$

$$P = 60,5 u.$$

65.



TRAPECIO AEHC

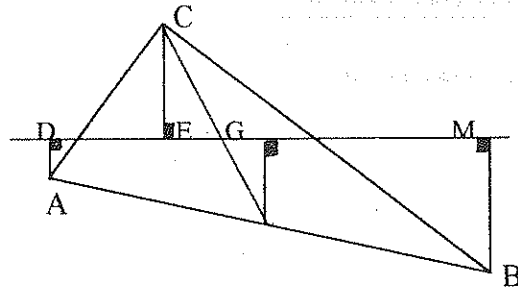
$$Z = (AE + CH) / 2 \quad (1)$$

TRAPECIO BFGD

$$Z = (BF + DG) / 2 \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow AE + CH = BF + DG$$

69.



H) G baricentro

$$G \in \vec{L}$$

$$T) AD + BM = CE$$

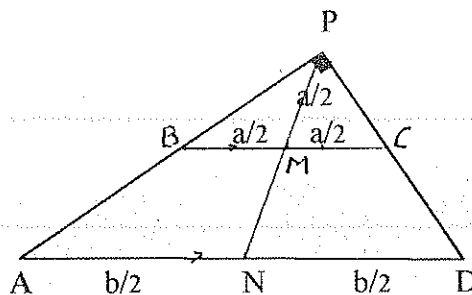
TRAPECIO ADMB

$$FQ = (AD + BM) / 2 \quad (1)$$

$$FQ = CE / 2 \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow CE = AD + BM$$

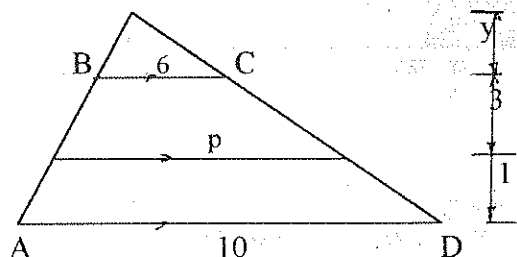
71.



$$MN = PN - PM$$

$$MN = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2}$$

74.



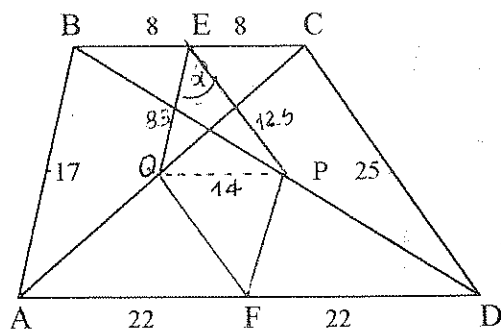
$$10 / 6 = (4 + Y) / Y$$

$$Y = 6$$

$$p / 6 = 9 / 6$$

$$p = 9$$

81.



$$EQ = PE = AB / 2 = 8,5$$

$$PE = QF = CD / 2 = 12,5$$

$$QP = (AD - BC) / 2 = (22 - 16) / 2 = 3$$

$$\Delta EQP$$

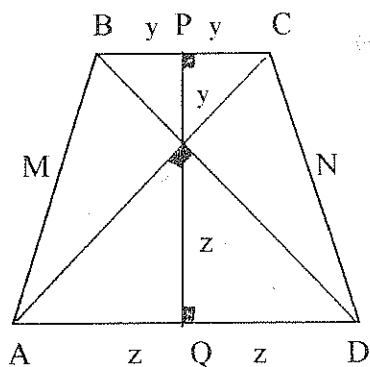
$$14^2 = 8,5^2 + 12,5^2 - 2(8,5)(12,5) \cos \alpha$$

$$\alpha = 81,20$$

$$S = 2 S_{\Delta QEP} = (8,5)(12,5) \sin 81,20$$

$$S = 105 \text{ m}^2$$

125.

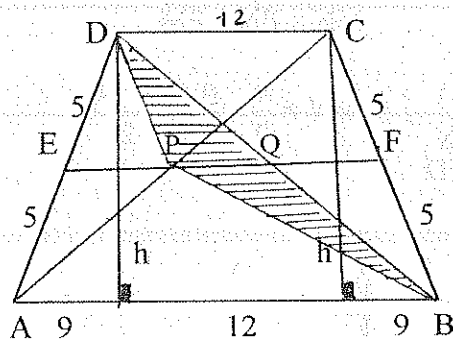


$$S = MN \times PQ$$

$$MN = 10 = (2y + 2z) / 2 = y + z = PQ$$

$$\Rightarrow S = 100 \text{ u}^2$$

129.



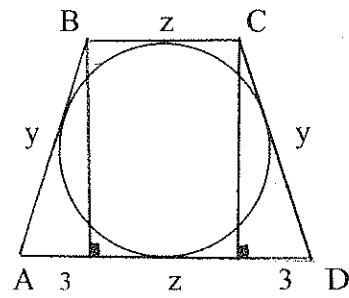
$$h = 4,36$$

$$h = \sqrt{10^2 - 9^2}$$

$$PQ = (30 - 12) / 2 = 9$$

$$S = PQ \times h / 2 = 9 \times 4,36 / 2 = 19,62 \text{ m}^2$$

140.



$$S = 20 = p \times r = 2y \times 2$$

$$\Rightarrow y = 5$$

$$2y = 2z + 6$$

$$\Rightarrow z = 2$$

$$\Rightarrow AB = 5; BC = 2; CD = 5; AD = 8 \text{ m}^2$$

GEOMETRIA DEL ESPACIO

FROM THE AIRTEL

UNIDAD 1

PLANOS

| | |
|---|----|
| 1.1. Espacio | 1 |
| 1.2. Cuerpo Geométrico..... | 1 |
| 1.3. Superficie..... | 1 |
| 1.4. Plano | 1 |
| 1.5. Posición relativa Punto - Plano..... | 2 |
| 1.6. Posición relativa Plano - Plano..... | 2 |
| 1.7. Posición relativa Recta – Plano | 3 |
| 1.8. Rectas y Planos paralelos | 4 |
| 1.9. Rectas y Planos perpendiculares | 5 |
| 1.10. Posición relativa Recta – Recta | 6 |
| 1.11. Proyecciones | 7 |
| 1.12. Ángulo Recta - Plano..... | 9 |
| 1.13. Ángulo Recta - Recta..... | 9 |
| 1.14. Distancia mínima entre dos rectas | 10 |
| 1.15. Ángulo Diedro | 11 |
| 1.16. Ángulos Poliedros..... | 13 |
| 1.17. Ejercicios | 17 |

UNIDAD 2

POLIEDROS

| | |
|---|----|
| 2.1. Representación gráfica y elementos | 27 |
| 2.2. Denominación..... | 27 |
| 2.3. Clasificación | 27 |

UNIDAD 3

PRISMAS

| | |
|---|----|
| 3.1. Definición | 32 |
| 3.2. Representación gráfica y elementos | 32 |
| 3.3. Clasificación | 32 |
| 3.4. Paralelepípedos | 34 |
| 3.5. Área Lateral | 35 |
| 3.6. Volumen | 35 |
| 3.7. Ejercicios | 38 |

UNIDAD 4

CILINDROS

| | |
|--|----|
| 4.1. Superficie cilíndrica | 54 |
| 4.2. Cilindro circular | 54 |
| 4.3. Elementos | 54 |
| 4.4. Clasificación | 55 |
| 4.5. Propiedades | 55 |
| 4.6. Tronco de cilindro circular recto | 56 |
| 4.7. Relación Prisma - Cilindro circular | 57 |
| 4.8. Ejercicios | 57 |

UNIDAD 5

PIRAMIDES

| | |
|---|----|
| 5.1. Definición | 61 |
| 5.2. Representación Gráfica y elementos | 61 |
| 5.3. Denominación | 61 |
| 5.4. Clasificación | 61 |

| | |
|---------------------------------------|----|
| 5.5. Propiedades | 63 |
| 5.6. Volumen | 66 |
| 5.7. Tronco de Pirámide | 69 |
| 5.8. Tronco de Pirámide Regular | 71 |
| 5.9. Ejercicios | 74 |

UNIDAD 6

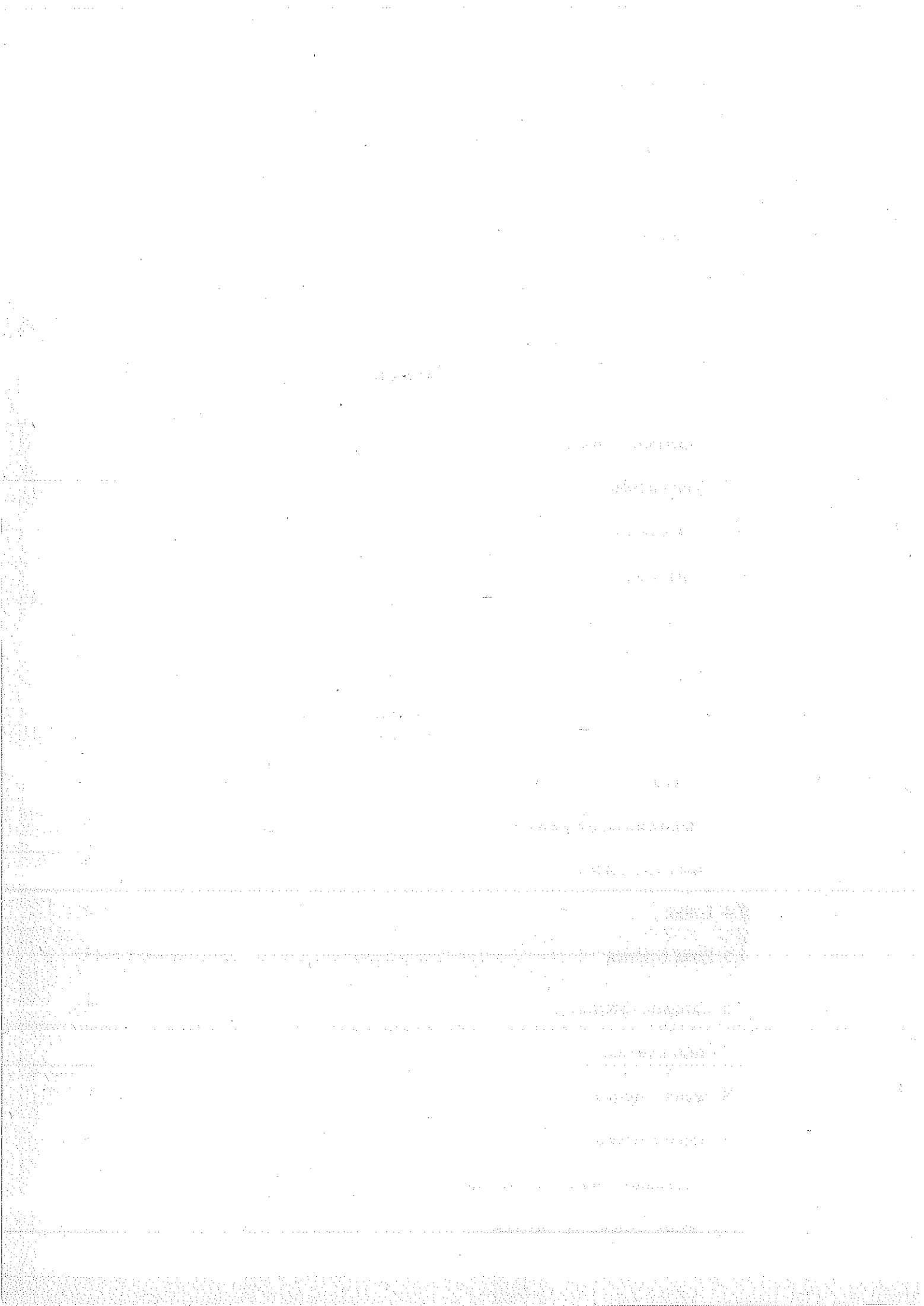
CONOS

| | |
|-----------------------------|----|
| 6.1. Superficie Cónica..... | 92 |
| 6.2. Cono circular | 92 |
| 6.3. Elementos | 92 |
| 6.4. Clasificación | 93 |
| 6.5. Tronco de Cono | 94 |

UNIDAD 7

ESFERAS

| | |
|---|-----|
| 7.1. Superficies de Revolución..... | 106 |
| 7.2. Volúmenes de Revolución..... | 108 |
| 7.3. Superficie Esférica..... | 112 |
| 7.4. Esfera | 112 |
| 7.5. Zona Esférica | 113 |
| 7.6. Casquete Esférico..... | 114 |
| 7.7. Huso Esférico..... | 115 |
| 7.8. Sector Esférico..... | 116 |
| 7.9. Anillo Esférico | 118 |
| 7.10. Segmento Esférico de dos bases..... | 119 |
| 7.11. Sector Esférico de una base | 121 |



UNIDAD 1

1. - PLANO

1.1. - ESPACIO

Es el ambiente que nos rodea, es continuo y homogéneo, divisible, ilimitado y accesible en su totalidad. Es el conjunto de todos los puntos.

1.2. - CUERPO GEOMETRICO

Es una porción del espacio totalmente limitado

1.3. - SUPERFICIE

Es lo que limita al cuerpo geométrico del resto del espacio.

1.4. - PLANO

Es un término no definido. La superficie de una mesa, la superficie de un espejo, etc. dan la idea de un plano.

Las propiedades que caracterizan a un plano son:

- a) En todo plano existen infinitos puntos y rectas.
- b) Fuera de todo plano existen infinitos puntos y rectas que no pertenecen a él.
- c) Si dos puntos de una recta están en un plano, todos los puntos de esta recta pertenecen al plano.

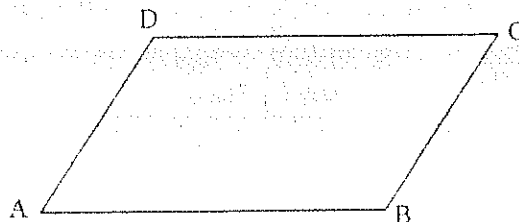
1.4.1. - DETERMINACIÓN

Es la propiedad fundamental que sirve para conocer cuando hay un plano y solo uno, que satisface ciertas condiciones.

- a) Tres puntos no colineales.
- b) Una recta y un punto externo a ella.
- c) Dos rectas secantes.
- d) Dos rectas paralelas

1.4.2. - REPRESENTACION GRAFICA

Puede representarse por un triángulo, un círculo, o cualquier figura geométrica cerrada, pero generalmente se representa por un paralelogramo.



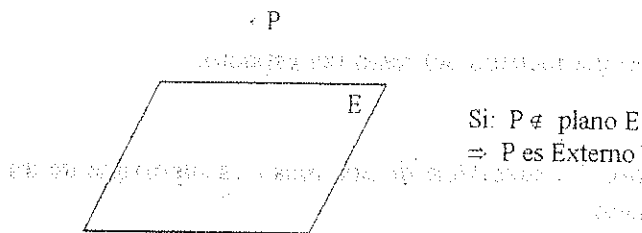
1.4.3. - DENOMINACION

- Con una letra mayúscula localizada en el interior de su representación. **Plano E.**
- Por las letras de los vértices de su representación. **Plano ABCD.**
- Por las letras de dos vértices opuestos. **Plano A - C; Plano B - D.**

1.5. - POSICION RELATIVA PUNTO - PLANO

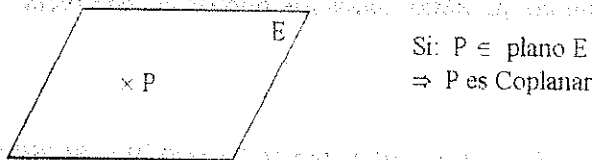
1.5.1. - EXTERNO

Si el punto no es elemento del plano.



1.5.2. - COPLANAR

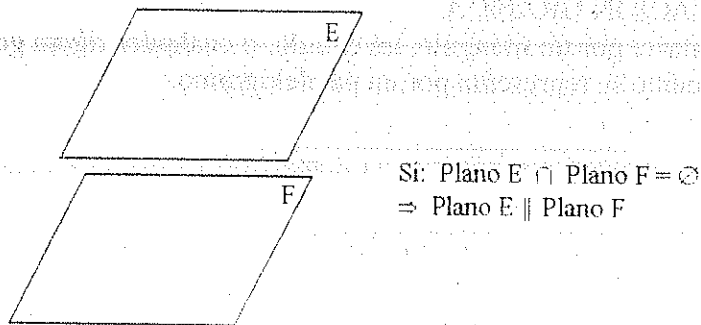
Si el punto es elemento del plano.



1.6. - POSICION RELATIVA PLANO - PLANO

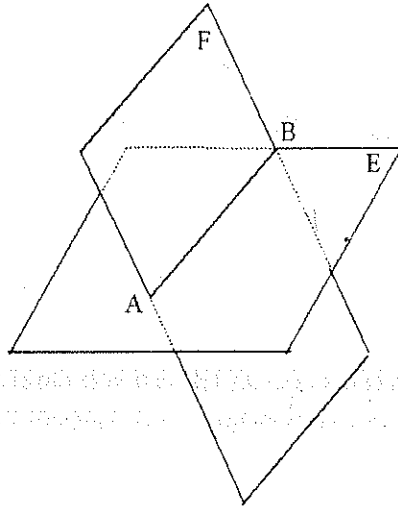
1.6.1. - PARALELOS

Si no tienen ningún punto en común.



1.6.2. - SECANTES

Si tienen en común una recta. La intersección entre dos planos es una recta.



Si: Plano E \cap Plano F = \overleftrightarrow{AB}
 \Rightarrow Plano E \wedge Plano F son Secantes

PROPIEDAD. - Si dos planos distintos tienen común un punto, tienen en común una recta.

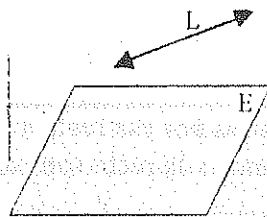
1.6.3. - COINCIDENTES

Si tienen tres puntos no colineales comunes.

1.7. - POSICION RELATIVA RECTA - PLANO

1.7.1. - PARALELOS

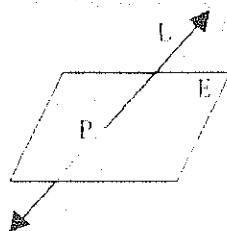
Si no tienen ningún punto común.



Si: $\overleftrightarrow{L} \cap \text{Plano E} = \emptyset$
 $\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \parallel \text{Plano E}$

1.7.2. - SECANTES

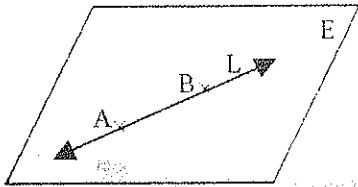
Si tienen un punto común. La intersección entre una recta y un plano es un punto.



Si: $\overleftrightarrow{L} \cap \text{Plano E} = \text{Punto P}$
 $\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \wedge \text{Plano E}$ son Secantes

1.7.3. - COPLANAR

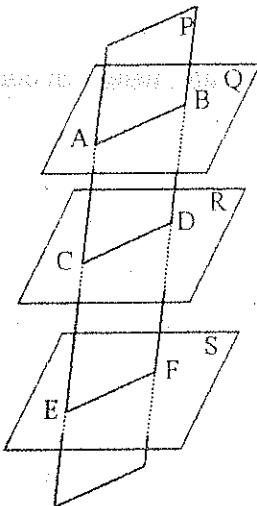
Si tienen dos puntos comunes.



$$\begin{aligned} \text{Si: } A \in \text{Plano E} \wedge B \in \text{Plano E} \\ \Rightarrow \overleftrightarrow{L} \in \text{Plano E} \end{aligned}$$

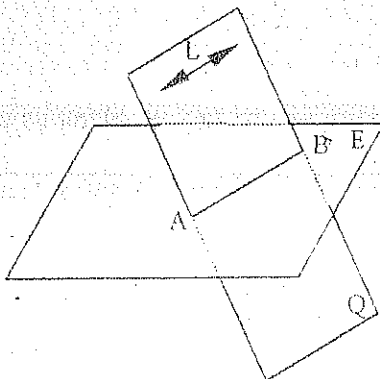
1.8. - RECTAS Y PLANOS PARALELOS

- Las intersecciones de dos o más planos paralelos con un tercero son paralelos.
- Los segmentos de rectas que intersecan a tres o más planos, son proporcionales.



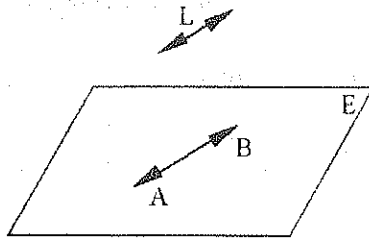
$$\begin{aligned} \text{Si: } \text{Plano Q} \parallel \text{Plano R} \parallel \text{Plano S} \\ \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF} \\ \wedge \frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF} \end{aligned}$$

- Si una recta es paralela a un plano, todo plano que pasa por esa recta y corta al primero, determina que la intersección entre los planos y la recta son paralelas.



$$\begin{aligned} \text{Si: } \overleftrightarrow{L} \parallel \text{Plano E} \\ \wedge \overleftrightarrow{L} \in \text{Plano Q} \\ \Rightarrow \overleftrightarrow{L} \parallel \overline{AB} \end{aligned}$$

- Si una recta es paralela a una recta contenida en un plano, la recta es paralela al plano.



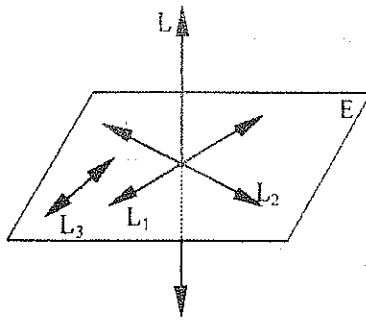
Si: $\overleftrightarrow{AB} \in \text{Plano E}$

$\wedge \overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \parallel \text{Plano E}$

1.9. - RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES

- Si una recta es perpendicular a un plano, es perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano.



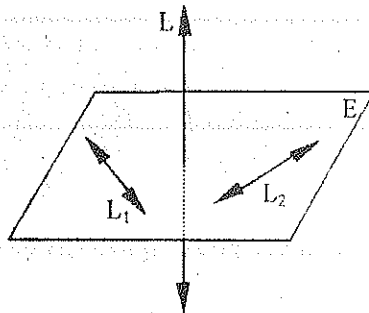
Si: $\overleftrightarrow{L} \perp \text{Plano E}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_1}$

$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_2}$

$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_3}$

- Para que una recta sea perpendicular a un plano, basta que sea perpendicular a dos rectas no paralelas situadas en el plano.



Si: $\overleftrightarrow{L_1} \in \text{Plano E}$

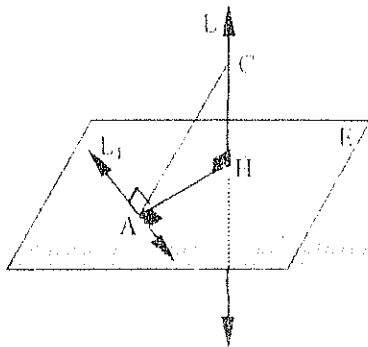
$\overleftrightarrow{L_2} \in \text{Plano E}$

$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_1}$

$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_2}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \perp \text{Plano E}$

- **TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES.** - Si desde el pie de una perpendicular a un plano se traza una perpendicular a una recta contenida en el plano, toda recta que une un punto cualquiera de la primera con el pie de la segunda perpendicular es perpendicular a la recta contenida en el plano.



$$H) \quad \vec{L} \perp \text{Plano E}$$

$$\overline{HA} \perp \vec{L}_1$$

$$T) \quad \overline{AC} \perp \vec{L}_1$$

$$D) \quad \vec{L}_1 \perp \vec{L}$$

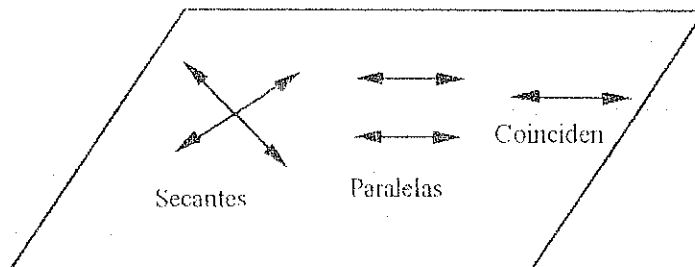
$$\vec{L}_1 \perp \overline{HA}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_1 \perp \text{Plano AHC}$$

$$\therefore \vec{L}_1 \perp \overline{CA}$$

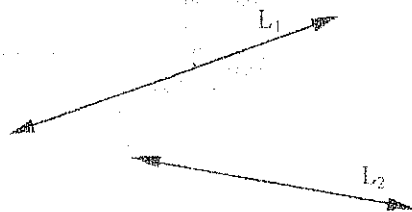
1.10. - POSICION RELATIVA RECTA - RECTA

1.10. - COPLANARES



1.10.2. - NO COPLANARES

Se cruzan. No tienen un punto común.



1.11. - PROYECCIONES

Para representar un objeto por medio de un dibujo en un plano, se construyen rectas imaginarias que proceden de varios puntos del objeto y que llegan al plano. El plano en el cual se va a representar el objeto se denomina Plano de Proyección. Las rectas imaginarias se denominan Proyectantes.

La representación del cuerpo en el plano de proyección se denomina Proyección.

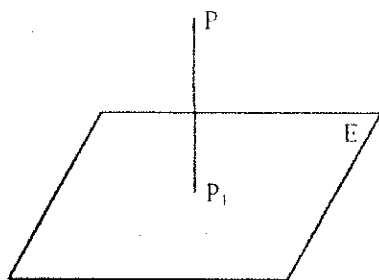
■ PROYECCIONES PARALELAS ORTOGONALES.

Cuando las proyectantes son perpendiculares al plano de proyección.

En el presente estudio se utilizará únicamente las proyecciones paralelas ortogonales.

1.11.1. - PROYECCION DE UN PUNTO EN UN PLANO

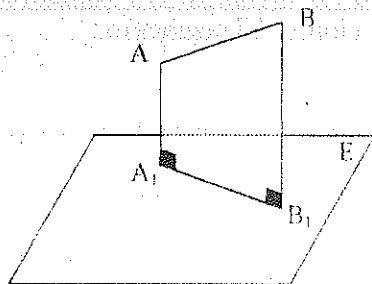
Es el pie de la perpendicular bajada desde el punto al plano.



| | |
|----------------------|------------|
| Objeto: | El punto P |
| Proyectante: | PP_1 |
| Plano de Proyección: | Plano E |
| Proyección: | P_1 |

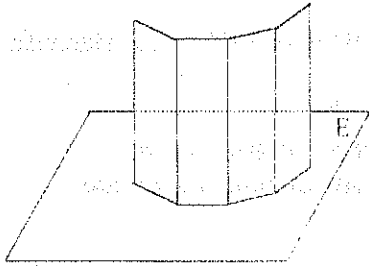
1.11.2. - PROYECCION DE UN SEGMENTO EN UN PLANO

Es otro segmento que resulta de unir las proyecciones de los extremos del segmento dado, excepto en el caso de que el segmento sea perpendicular al plano.



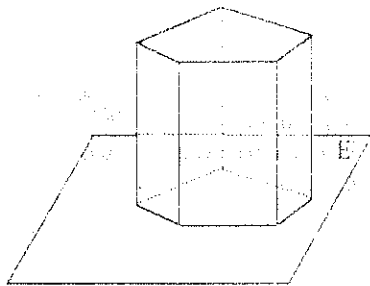
1.11.3. - PROYECCION DE UNA LINEA POLIGONAL EN UN PLANO

Es otra poligonal que resulta de unir las proyecciones de los vértices de la linea poligonal dada.



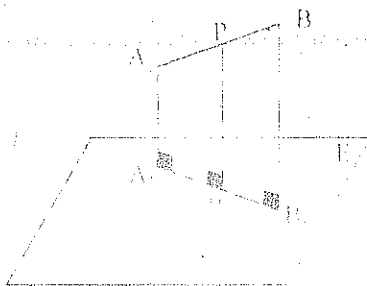
1.11.4. - PROYECCION DE UNA REGION POLIGONAL EN UN PLANO

Es otra región poligonal que se forma al unir las proyecciones de los vértices de la región poligonal dada.



1.11.5. - PROPIEDADES.

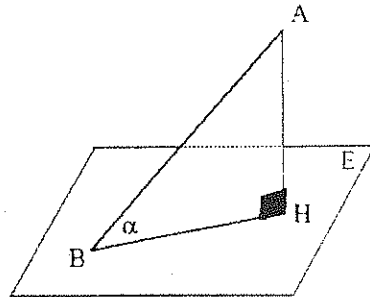
- Las proyecciones de dos rectas paralelas sobre un plano, son paralelas.
- Si dos rectas son perpendiculares entre sí, y una de ellas es paralela a un plano, sus proyecciones en este plano son también perpendiculares entre sí.
- Cada punto y recta en el espacio tienen una sola proyección.
- Regla de Proporcionalidad.
Un punto cualquiera situado en un segmento, le divide en dos segmentos cuya razón es la misma en todas las proyecciones del segmento.



$$\frac{AP}{PB} = \frac{A'P'}{P'B'}$$

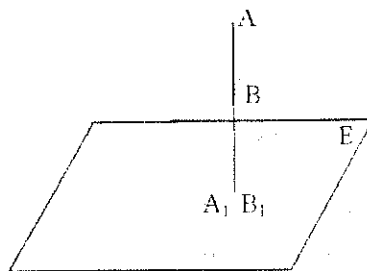
1.12. - ANGULO RECTA - PLANO

Es el ángulo formado entre la recta y su proyección en el plano.



$BH = AB \cos \alpha$
La proyección es menor

- Si la recta es perpendicular al plano, su proyección es un punto.

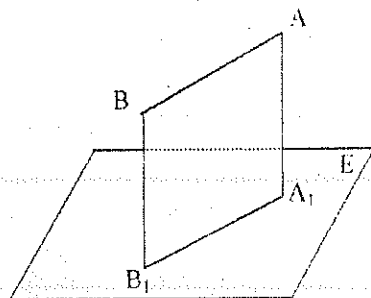


Si: $\alpha = 90^\circ$

$$A_1B_1 = AB \cos 90^\circ$$

$A_1B_1 = 0$ es un punto.

- Si un segmento es paralelo al plano, su proyección tiene la misma longitud que el segmento.



Si: $\alpha = 0^\circ$

$$A_1B_1 = AB \cos 0^\circ$$

$$A_1B_1 = AB$$

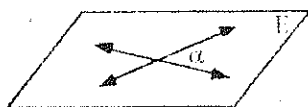
El segmento está proyectado en longitud verdadera

1.13. - ANGULO RECTA - RECTA

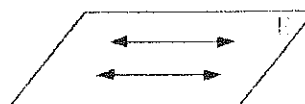
Es el ángulo agudo formado entre las dos rectas, medido cuando las dos rectas están en longitud verdadera.

1.13.1. - COPLANARES

a) Secantes

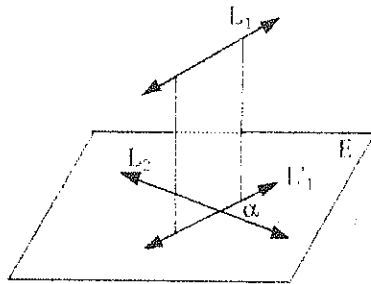


b) Paralelas



$\alpha = 0^\circ$

1.13.2. - NO COPLANARES (Se Cruzan).

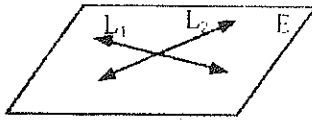


1.14. - DISTANCIA MINIMA ENTRE DOS RECTAS.

Es la longitud de la perpendicular común a las dos rectas.

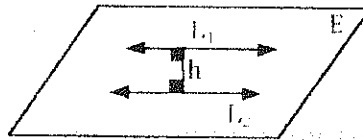
COPLANARES

a) Secantes



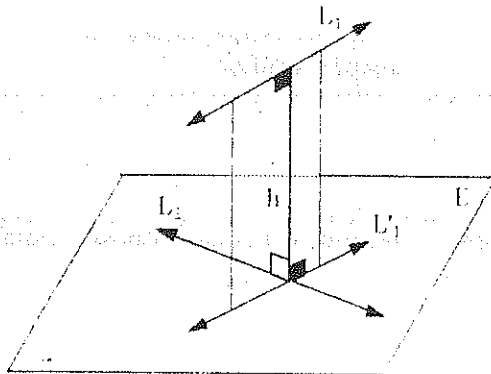
Distancia mínima cero.

b) Paralelas



Distancia mínima h.

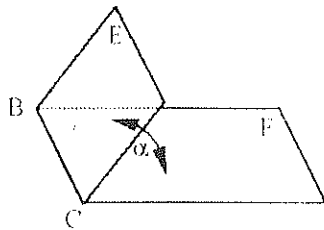
NO COPLANARES (Se Cruzan).



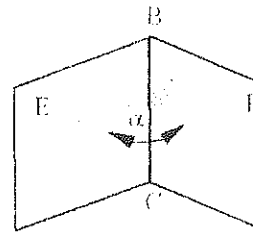
Distancia mínima h.

1.15. - ANGULO DIEDRO

1.15.1. - REPRESENTACION GRAFICA Y ELEMENTOS



La arista es la recta común BC



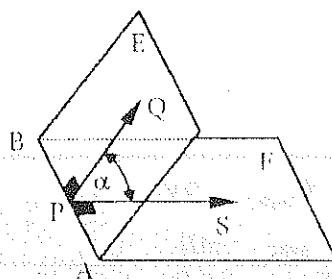
Las caras son los Planos E Y F

1.15.2. - DENOMINACION

- Por las letras de la arista: Diedro B - C
- Por las letras de las caras y la arista: Diedro E - BC - F
- Por un número o letra: Diedro α .

1.15.3. - ANGULO PLANO DE UN ANGULO DIEDRO. MEDIDA.

Es el ángulo formado por dos perpendiculares a la arista en un mismo punto y una en cada cara. La medida de un ángulo diedro es igual a la medida de su ángulo plano.



$$\begin{aligned} \text{Si } \overrightarrow{PQ} &\perp \overline{AB} \\ \overrightarrow{PQ} &\in \text{Plano E} \\ \overrightarrow{PS} &\perp \overline{AB} \\ \overrightarrow{PS} &\in \text{Plano F} \end{aligned}$$

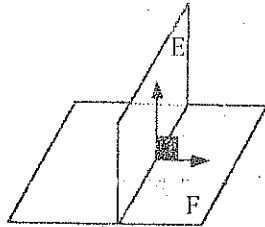
$$\alpha = \angle QPS \text{ Diedro Plano.}$$

1.15.4. - CLASIFICACION

- Por su Medida: Recto, Agudo, Obtuso, Llano, Complementarios, Suplementarios.
- Por su Posición: consecutivos, Adyacentes, Opuestos por la Arista.

1.15.5. - PLANOS PERPENDICULARES.

Si la medida del ángulo diedro es igual a 90° .



1.15.6. - Si dos planos son perpendiculares, toda perpendicular a su intersección trazada en uno de ellos es perpendicular al otro plano.

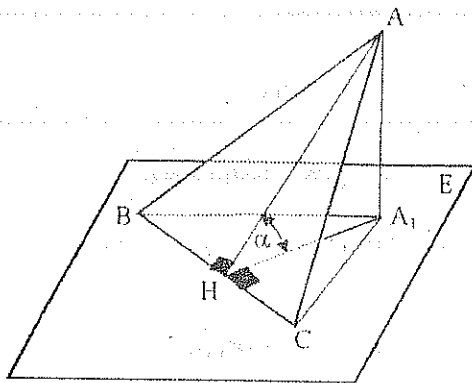
1.15.7. - Si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que pase por dicha recta o paralela a ella, es perpendicular al mismo plano.

1.15.8. - Un plano y una recta perpendiculares a un mismo plano son paralelas.

1.15.9. - PROYECCION DE UN REGION POLIGONAL.

La proyección de una región poligonal sobre un plano tiene por medida el área proyectada multiplicada por el coseno del ángulo entre los dos planos.

a) Un lado es Paralelo al Plano de Proyección.

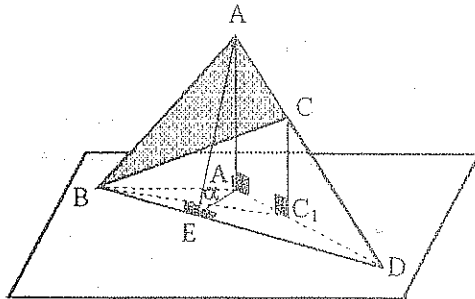


$$T) S_{\triangle ABC} \times \cos \alpha = S_{\triangle A_1 B_1 C_1}$$

$$D) \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1 B_1 C_1}} = \frac{AH}{A_1 H} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$S_{\triangle ABC} \times \cos \alpha = S_{\triangle A_1 B_1 C_1}$$

b) Ninguno de los lados es Paralelo al Plano de Proyección.



$$T) \quad S_{\triangle ABC} \cdot \cos \alpha = S_{\triangle A_1 B_1 C_1}$$

$$D) \quad S_{\triangle ABD} \cdot \cos \alpha = S_{\triangle A_1 B_1 D_1}$$

$$S_{\triangle BCD} \cdot \cos \alpha = S_{\triangle B_1 C_1 D_1}$$

$$\cos \alpha (S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BCD}) = S_{\triangle A_1 B_1 C_1}$$

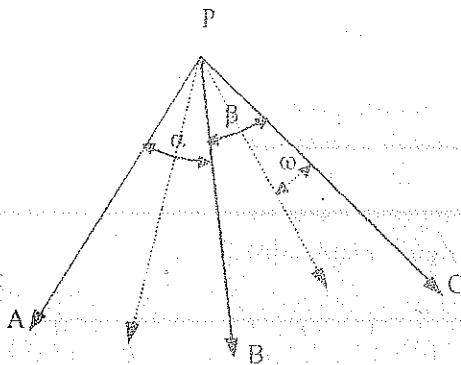
$$S_{\triangle ABC} \cdot \cos \alpha = S_{\triangle A_1 B_1 C_1}$$

Si se tiene un polígono cualquiera, se descompone en triángulos, y como la relación es la misma para los triángulos proyectados y para sus respectivas proyecciones, lo será para el polígono entero y su proyección.

1.16. - ANGULOS POLIEDROS

Es la figura formada por varios planos que pasan por un mismo punto, y limitado por sus intersecciones sucesivas.

1.16.1. - REPRESENTACION GRAFICA Y ELEMENTOS.



Vértice: P

Aristas: PA, PB, PC,.....

Caras: PAB, PBC, PCD,.....

Ángulos caras: α, β, ω,.....

1.16.2. - DENOMINACION

Por la letra del vértice y por las letras de las aristas.

Ángulo Poliedro P - ABCDE.....

1.16.3. - CONGRUENCIA.

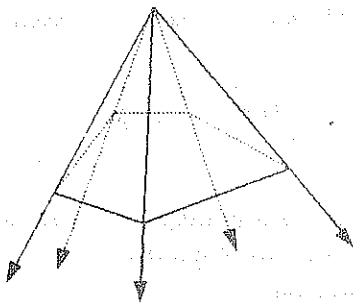
Dos ángulos poliedros son congruentes cuando tienen respectivamente congruentes sus ángulos caras y sus ángulos diedros.

1.16.4. - CLASIFICACION

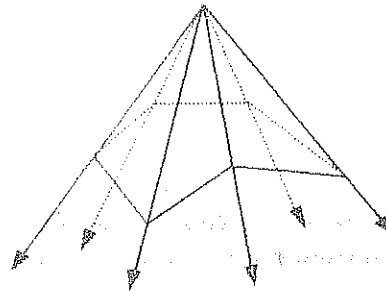
a) Por su Posición en el Espacio:

▪ Cóncavo y convexo.

Si todos los puntos están situados en el mismo semiespacio con relación al plano de cada una de sus caras, el ángulo poliedro es convexo, caso contrario es cóncavo.



CONVEXO



CONCAVO

b) Por el Numero de caras.

Número de Caras

Nombre

3 caras

Angulo Triedro

4 caras

Angulo Tetraedro

5 caras

Angulo Pentaedro

6 caras

Angulo Hexaedro

7 caras

Angulo Heptaedro

c) Angulos Poliedros Regulares

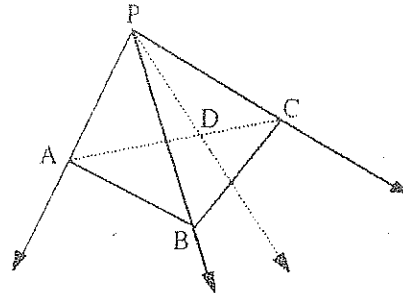
Si todos los ángulos diedros y los ángulos caras son respectivamente congruentes.

d) Triedro Trirectángulo:

Si los ángulos cara y los ángulos diedros miden 90°

1.16.5. - PROPIEDADES

a) En un ángulo triedro, la suma de los ángulos cara es mayor que el tercero.



$$T) \quad m\hat{APB} + m\hat{BPC} > m\hat{APC}$$

$$D) \quad m\hat{APB} = m\hat{APD} \quad (\text{construcción})$$

$$PA = PB = PD \quad (\text{construcción})$$

$$\triangle APB \cong \triangle APD$$

$$AB = AD$$

$$AB + BC > AC$$

$$AB + BC > AD + DC$$

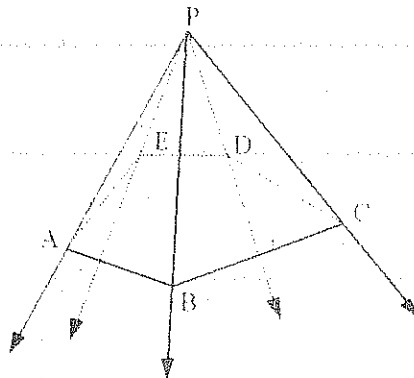
$$BC > DC$$

$$\therefore m\hat{BPC} > m\hat{DPC}$$

$$m\hat{APB} + m\hat{BPC} > m\hat{APD} + m\hat{DPC}$$

$$m\hat{APB} + m\hat{BPC} > m\hat{APC}$$

b) La suma de los ángulos caras de un ángulo poliedro es menor a 360°



$$T) \quad m\hat{APB} + m\hat{BPC} + m\hat{CPD} + m\hat{DPE} + \dots < 360^\circ$$

$$D) \hat{m}EAB < \hat{m}EAP + \hat{m}EAP$$

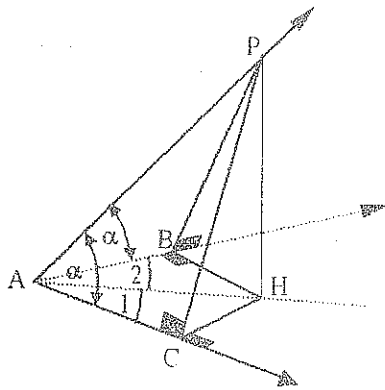
$$\hat{m}ABC < \hat{m}ABP + \hat{m}CBP$$

$$\hat{m}BCD < \hat{m}BCP + \hat{m}DCP$$

$$180^\circ(n-2) < 180^\circ n - (\hat{m}APB + \hat{m}BPC + \hat{m}CPD + \dots)$$

$$\hat{m}APB + \hat{m}BPC + \hat{m}CPD + \hat{m}DPE + \dots < 360^\circ$$

c) Si dos ángulos planos de un ángulo triedro son iguales, la proyección de un punto de la arista que determinan estos dos ángulos es elemento de la bisectriz del tercer ángulo plano.



$$D) \hat{1} = \hat{2}$$

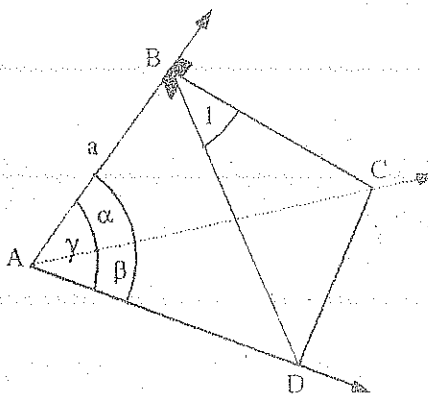
$$D) \triangle APB \cong \triangle APC \text{ (Rectángulos, AP, } \alpha)$$

$$\therefore AB = AC$$

$$\triangle ABH \cong \triangle AHC \text{ (Rectángulos, AB = AC, AH)}$$

$$\therefore \hat{1} = \hat{2}$$

d) Ángulo diedro en función de los ángulos planos de un ángulo Triedro.



$$\triangle ABC$$

$$BC = a \tan \alpha$$

$$AC = \frac{a}{\cos \alpha}$$

$\triangle ABD$

$$BD = a \operatorname{Tag} \hat{\gamma}$$

$$AD = \frac{a}{\operatorname{Cos} \hat{\gamma}}$$

$\triangle ACD$

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2 \times AC \times AD \times \operatorname{Cos} \hat{\beta}$$

$$CD^2 = \frac{a^2}{\operatorname{Cos}^2 \hat{\alpha}} + \frac{a^2}{\operatorname{Cos}^2 \hat{\gamma}} - \frac{2 \times a^2 \times \operatorname{Cos} \hat{\beta}}{\operatorname{Cos} \hat{\alpha} \operatorname{Cos} \hat{\gamma}}$$

$\triangle BCD$

$$CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2 \times BD \times BC \times \operatorname{Cos} \hat{1}$$

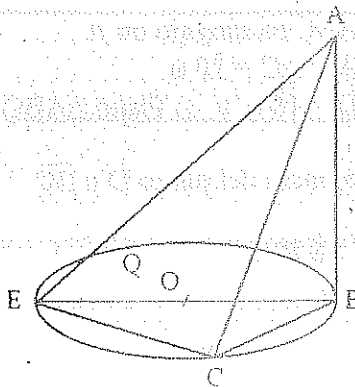
$$CD^2 = a^2 \operatorname{Tag}^2 \hat{\gamma} + a^2 \operatorname{Tag}^2 \hat{\alpha} - 2 \times a \operatorname{Tag} \hat{\gamma} \times a \operatorname{Tag} \hat{\alpha} \times \operatorname{Cos} \hat{1}$$

$$\frac{a^2}{\operatorname{Cos}^2 \hat{\alpha}} + \frac{a^2}{\operatorname{Cos}^2 \hat{\gamma}} - \frac{2 \times a^2 \times \operatorname{Cos} \hat{\beta}}{\operatorname{Cos} \hat{\alpha} \operatorname{Cos} \hat{\gamma}} = a^2 \operatorname{Tag}^2 \hat{\gamma} + a^2 \operatorname{Tag}^2 \hat{\alpha} - 2 \times a \operatorname{Tag} \hat{\gamma} \times a \operatorname{Tag} \hat{\alpha} \times \operatorname{Cos} \hat{1}$$

$$\therefore \operatorname{Cos} \hat{1} = \frac{\operatorname{Cos} \hat{\beta} - \operatorname{Cos} \hat{\alpha} \operatorname{Cos} \hat{\gamma}}{\operatorname{Sen} \hat{\alpha} \operatorname{Sen} \hat{\gamma}}$$

1.17. - EJERCICIOS

1. -



H) $\overline{AB} \perp \text{Plano } Q$

$$\angle EAC = 30^\circ$$

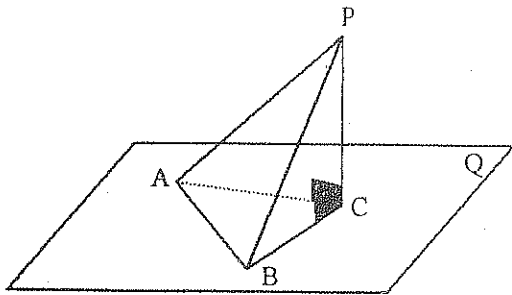
$$EO = OB = 7 \text{ m}$$

$$CB = 10 \text{ m}$$

T) $S_{\triangle EAC} = ?$

Resp. 83.13 m^2

2. -

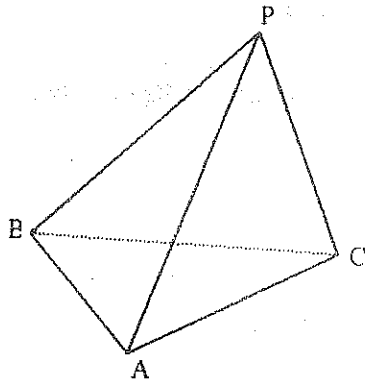


- H) $AB = 8 \text{ cm}$
 $PA = PB = 13 \text{ cm}$
 $PC = 12 \text{ cm}$

T) Distancia de C a AB = ?

Resp: 3 cm

3. -

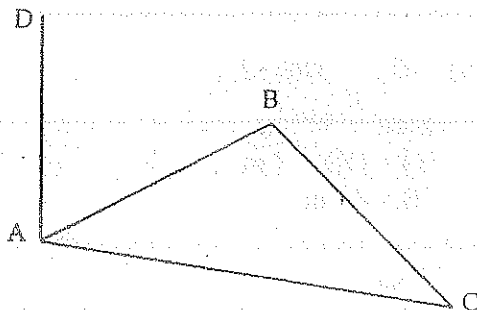


- H) $AB = 6 \text{ u}$
 $BC = 8 \text{ u}$
 $AC = 10 \text{ u}$
 Los ángulos entre PA, PB y PC con el Plano del $\triangle ABC$ es 40°

T) Distancia de P al Plano del $\triangle ABC$

Resp: 4.19 u

4. -

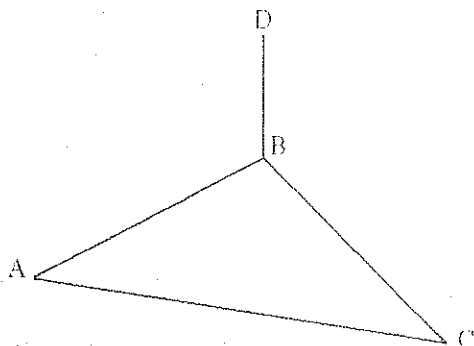


- H) $\triangle ABC$ rectángulo en A
 $BA = AC = 10 \text{ u}$
 $AD = 15 \text{ u}$ y \perp Plano $\triangle ABC$

T) Distancia del punto D a \overline{BC}

Resp: 16.58 u

5. -



H) $\angle A = 90^\circ$

$\overline{BD} \perp \text{Plano } \triangle ABC$

$AC = 8 \text{ u}$

$DC = 10 \text{ u}$

T) Distancia del punto D a \overline{AC} Resp: 6u

6. - En un plano P se tiene un ángulo. $\angle BAC = 60^\circ$. Un punto S en el espacio dista 25m del vértice del ángulo A, 7m del lado AB y 20m del lado AC. Hallar la distancia del punto S al plano P. Resp: 6.04m

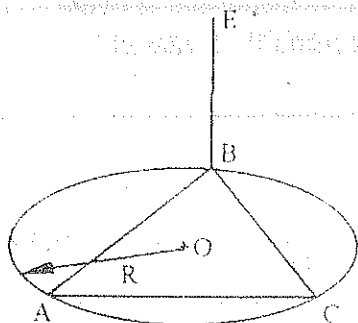
7. - Demostrar que la distancia del centro de gravedad de un triángulo a un plano es media aritmética de las distancias de los tres vértices del mismo triángulo al plano dado.

8. - Un triángulo equilátero ABC es perpendicular a un cuadrado ABDE, siendo AB el lado común. El segmento que une el punto medio del lado AC del triángulo con el punto medio del lado BD del cuadrado mide 1m. ¿Cuánto mide el lado del triángulo?

Resp: 1m

9. - La proyección del triángulo ABC sobre un plano P resulta un triángulo AB'C' equilátero de lado 8m. Las proyectantes CC' = 4m y BB' = 8m. Hallar el valor de la proyectante del Ortocentro. Resp: 4m.

10. -



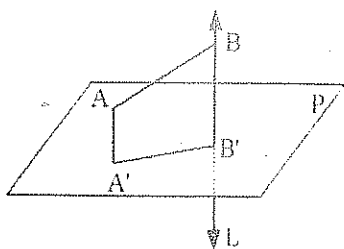
H) $R = \sqrt{3}$

$\overline{BE} \perp \text{Plano } \triangle ABC$

$BE = 1 \text{ u}$

T) $S_{\triangle ABC} = ?$ Resp: $\frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ u}$

11. -



H) Proyección de \overline{AB} sobre el Plano P es $8u$
 Proyección de \overline{AB} sobre la recta L es $6u$
 $L \perp$ Plano P

T) $AB = ?$ Resp: $10u$

12. - Un triángulo rectángulo ABC , tiene; $\hat{A} = 90^\circ$; $\hat{B} = 30^\circ$ se proyecta en un plano P obteniéndose el $\triangle A'B'C'$, si $\hat{B'} = 45^\circ$; $AC = A'C'$ y $AB = 6u$. Hallar el ángulo entre el plano P y el $\triangle ABC$. Resp:

13. - Dos puntos A y B situados a distinto lado de un plano P distan de este plano $6u$ y $2u$ respectivamente. Si la proyección del \overline{AB} en el plano P es $15u$. Encontrar la distancia entre los puntos A y B. Resp: $17u$

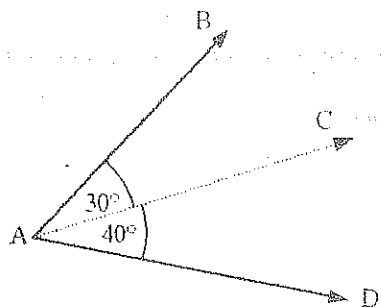
14. - Tres segmentos miden $13u$, $14u$ y $15u$ y están contenidos en tres planos paralelos respectivamente. Si la proyección de los segmentos en un cuarto plano paralelo es un triángulo. Calcular el área de este triángulo. Resp: $84u^2$.

15. - Un plano A forma un ángulo de 60° con un plano B. A qué distancia del plano B se debe trazar otro plano C que interseque al plano A, tal que sus intersecciones disten $42u$. Resp: $21\sqrt{3}$.

16. - Se tiene un triángulo rectángulo ABC : $AB = AC = 4m$. Por el vértice A se levanta la perpendicular $AD = 2\sqrt{6}m$ luego D se une con los vértices B y C. Calcular el ángulo diedro formado por los planos ABC y BDC . Resp: 60° .

17. - Se tiene un $\triangle ABC$; $b = 12u$; $c = 10u$ y un plano P. El lado AC pertenece al Plano P, el lado AB forma 40° con el Plano P, el BC forma 30° con el plano P. Hallar el ángulo diedro entre los planos ABC y P. Resp: 42.91° .

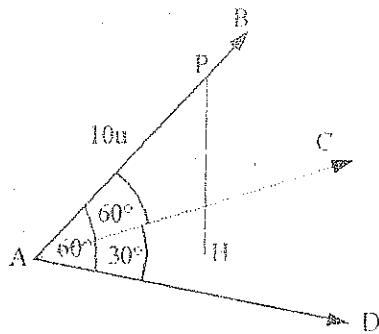
18. -

H) Diedro $A - C = 50^\circ$ T) Diedro $A - D = ?$ Resp: 50.97°

19. - Un $\triangle ABC$ se encuentra en un plano que forma un ángulo de 45° con otro plano P. Si la proyección del triángulo en el plano P es de 20cm^2 . Calcular el área del triángulo.

Resp: $20\sqrt{2}\text{cm}^2$

20. -

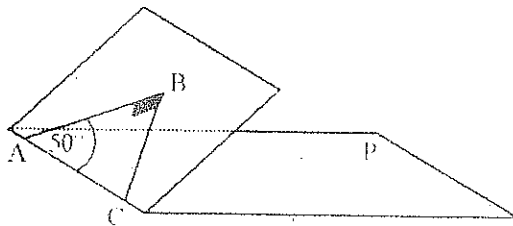


H) $\overline{PH} \perp \text{Plano CAD}$

T) $PH = ?$

Resp: 8.56

21. -

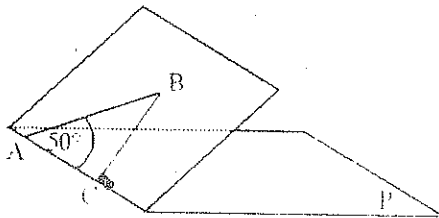


H) Diedro A - C = 51°

T) Ángulo entre BC y Plano P

Resp: 30°

22. -

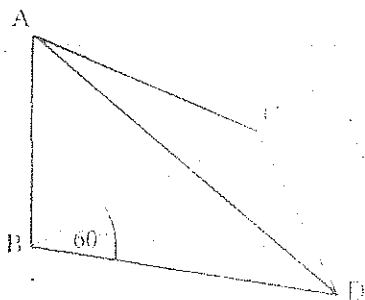


H) Ángulo Diedro A - C = 57°

T) Ángulo entre AB y el Plano P

Resp: 40°

23. -



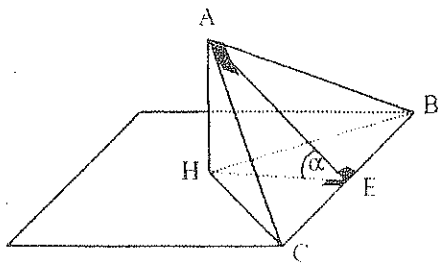
H) $AB \perp \triangle BCD$

$AB \cong BC \cong BD = 20u$

T) Diedro D - C = ?

Resp: 49.1°

24. -

H) $\overline{AH} \perp \text{Plano P}$

$$AC = AB$$

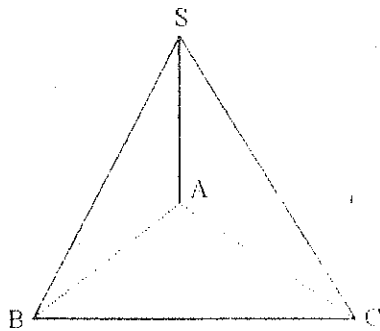
$$BC = 15\text{m}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

T) $HB = ?$ $HC = ?$

Resp: 9.91 : 9.91

25. -

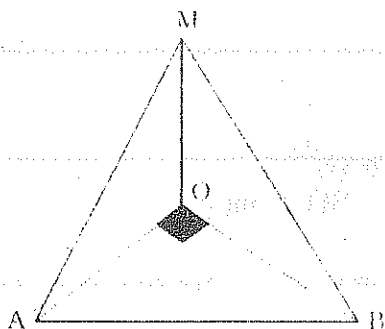
H) $SA = 120\text{m}$

$$\angle ASB = \angle ASC = 45^\circ$$

$$\angle BSC = 60^\circ$$

T) Diedro $S - A = ?$ Resp: 90°

26. -

H) $OA = OB = 6\text{m}$

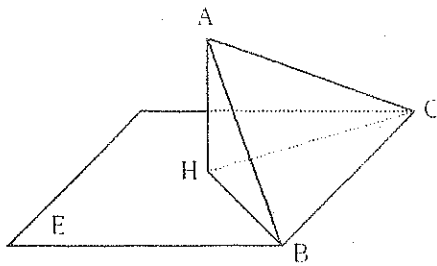
$$OM \perp \Delta AOB$$

$$\text{Diedro } A - B = 60^\circ$$

T) $OM = ?$

Resp: 7.35m

27. -



$$H) AB = BC = CA = 13.84\text{m}$$

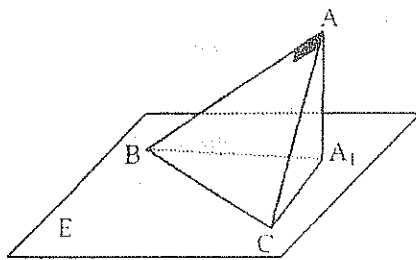
$$\text{Diedro } B - C = 60^\circ$$

$$\overline{AH} \perp \text{Plano } E$$

$$T) S_{\Delta HCB} = ?$$

$$\text{Resp: } 41.52 \text{ m}^2$$

28. -



$$H) \overline{AA_1} \perp \text{Plano } E$$

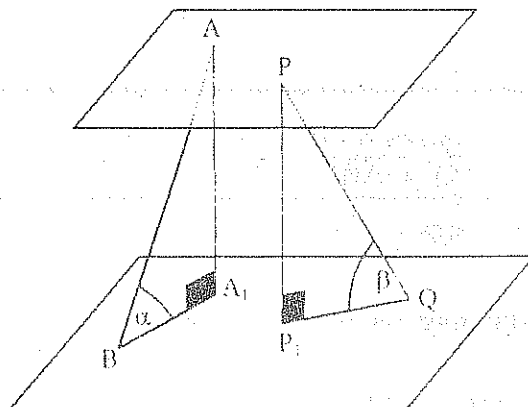
$$\angle ACA_1 = 45^\circ$$

$$\angle ABA_1 = 22.2^\circ$$

$$T) \text{Diedro } B - C = ?$$

$$\text{Resp: } 63.23^\circ$$

29. -



$$H) \frac{AB}{PQ} = \frac{3}{2}$$

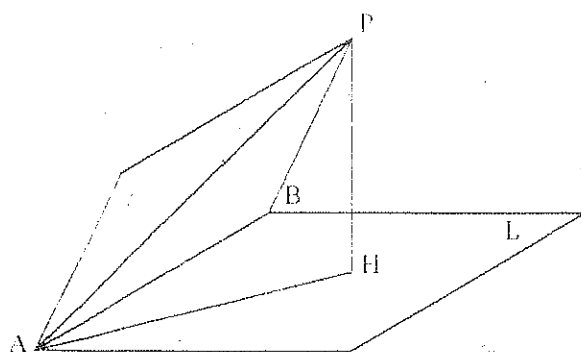
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$$

$$T) \alpha = ?$$

$$\beta = ?$$

$$\text{Resp:}$$

30. -



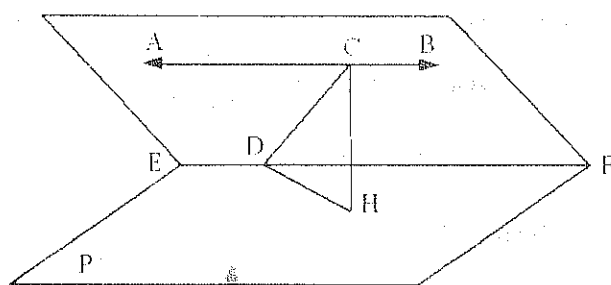
$$\begin{aligned} \text{H) } \angle BAP &= 35^\circ \\ \overline{PB} &\perp \overline{AB} \\ \overline{PH} &\perp \text{Plano L} \end{aligned}$$

$$\angle PAH = 25^\circ$$

T) Diedro A - B = ?

Resp: 47.46°

31. -



$$\text{H) } \overline{AB} \parallel \text{Plano P}$$

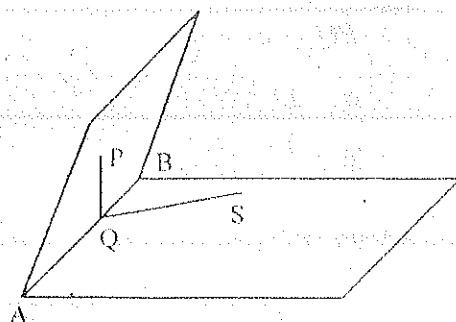
$$\begin{aligned} \angle ACD &= 30^\circ \\ \overline{CH} &\perp \text{Plano P} \end{aligned}$$

$$\angle CDH = 40^\circ$$

T) Diedro E - F = ?

Resp:

32. -



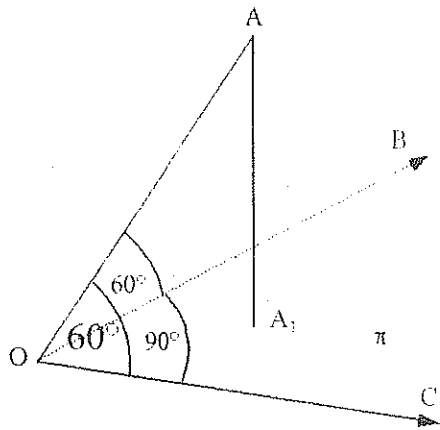
$$\text{H) } \text{Diedro A - B} = 70^\circ$$

$$\overline{PQ} \perp \overline{AB}$$

$$\angle BQS = 50^\circ$$

T) $\angle PQS = ?$ Resp: 74.81°

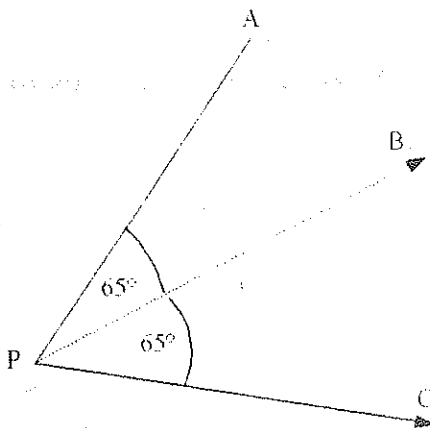
33. -

H) $AA_1 \perp \text{Plano } \pi$

T) Diedro O - C = ?

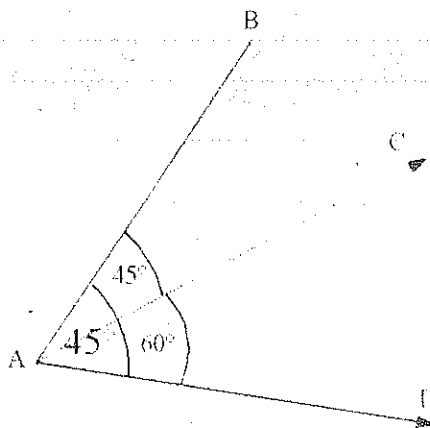
 $\angle OA_1 = ?$ Resp: y 45°

34. -

H) Diedro P - B = 80° T) $\angle APC = ?$

Resp:

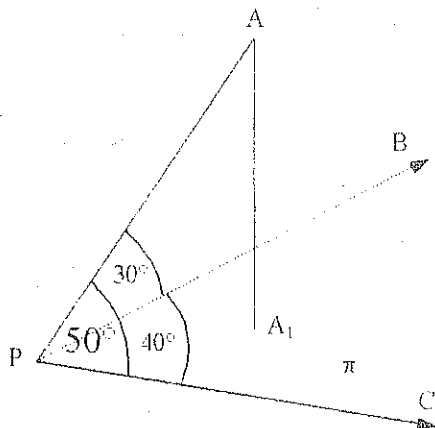
35. -



T) Diedro A - B = ?

Resp: 90°

36. -



H) $PA = 15m$

$AA_1 \perp \text{Plano } \pi$

T) $AA_1 = ?$

Resp:

37. - Por la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo se traza un plano que forma un ángulo de 30° con el plano del triángulo rectángulo. Calcular los ángulos formados entre los catetos y el plano construido. Resp:

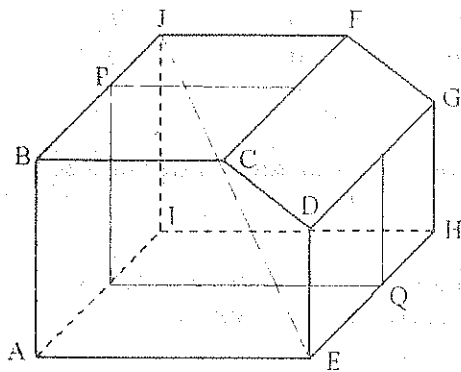
38. - Un triángulo ABC de lados $a = 8u$, $b = 10u$, $c = 6u$. Tiene el vértice A en el plano E, las distancias de los puntos B y C al plano E son $2u$ y $5u$ respectivamente. Calcular el ángulo formado entre el Plano E y el ΔABC . Resp:

UNIDAD 2

2. - POLIEDROS

Es un cuerpo geométrico limitado por polígonos.

2.1. - REPRESENTACION GRAFICA Y ELEMENTOS.



CARAS: Son los polígonos. ABCDE, BJFC, CFGD, etc.

ARISTAS: Son las aristas de los ángulos diedros. AB, BC, CD, FG, EH, etc.

VERTICES: Son los vértices de los ángulos poliedros. A, B, E, G, I etc.

DIAGONAL: Es el segmento cuyos extremos son dos vértices no coplanares. JE

SECCION: Es la intersección entre un plano y el poliedro. P - Q

2.2. - DENOMINACION

Por las letras de una diagonal. Poliedro J - E.

2.3. - CLASIFICACION

2.3.1. - Por el Número de Caras

| | |
|-----------|---------|
| Tetraedro | 4 caras |
| Pentaedro | 5 caras |
| Exaedro | 6 caras |
| Heptaedro | 7 caras |

2.3.2. - Poliedros Regulares

Si sus caras son polígonos regulares congruentes y sus ángulos diedros y poliedros son respectivamente congruentes.

Existen solo cinco poliedros regulares.

| POLIEDRO REGULAR | CARAS | ARISTAS | VERTICES |
|------------------|---------------------------|---------|----------|
| Tetraedro | 4 Triángulos Equiláteros | 6 | 4 |
| Exaedro o Cubo | 6 Cuadrados | 12 | 8 |
| Octaedro | 8 Triángulos Equiláteros | 12 | 6 |
| Dodecaedro | 12 Pentágonos Regulares | 30 | 20 |
| Icosaedro | 20 Triángulos Equiláteros | 30 | 12 |

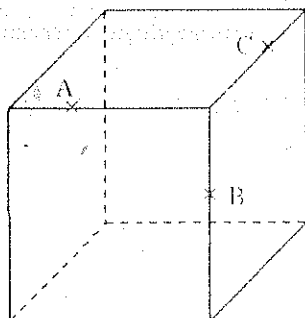
PROPIEDAD 1. - En todo Poliedro el número de caras (c) más el número de vértices (v) es igual al número de aristas (a) más dos: $c + v = a + 2$.

PROPIEDAD 2. - En todo poliedro la suma de los ángulos (S) de todas las caras es igual a 360° multiplicado por el número de vértices menos dos. $S = 360^\circ (v - 2)$.

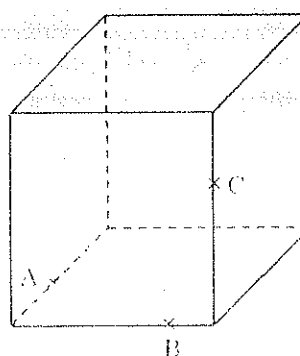
2.3.4. - EJERCICIOS

1. - Calcular la suma de todos los ángulos de un Octaedro. Resp: 1440°
2. - ¿Cuántas caras tiene un polígono de 18 vértices y 24 aristas?. Resp: 8
3. - Calcular la proyección de una cara de un tetraedro regular en otra si su arista es $6u$.
Resp: $3\sqrt{3} u^2$
4. - Calcular la distancia desde un vértice de un cubo al centro de la cara lateral opuesta, si la arista del cubo es $10u$. Resp: $5\sqrt{6} u^2$
5. - Encontrar la distancia desde el vértice de un cubo de arista "a" a la diagonal que no contiene ese vértice. Resp: $\frac{a\sqrt{6}}{3}$
6. - calcular el ángulo formado por dos diagonales cualesquiera de un Octaedro regular.
Resp: 90°
7. - Construir las secciones que pasan por los puntos A, B y C en los siguientes Poliedros.

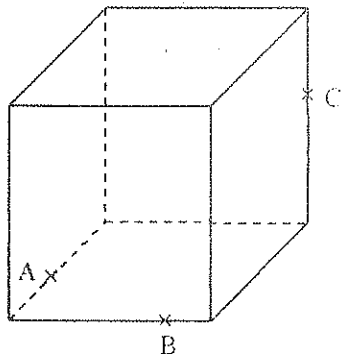
a)



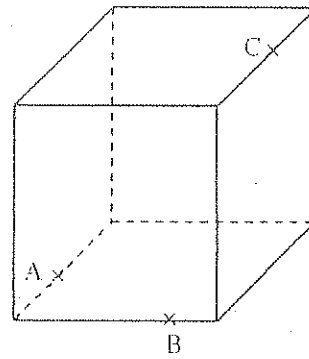
b)



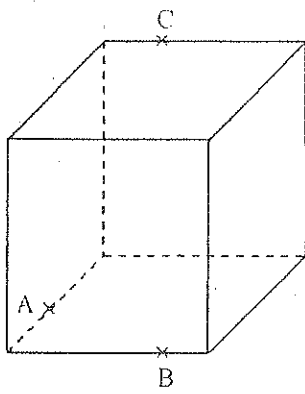
c)



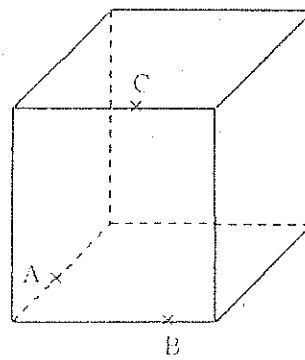
d)



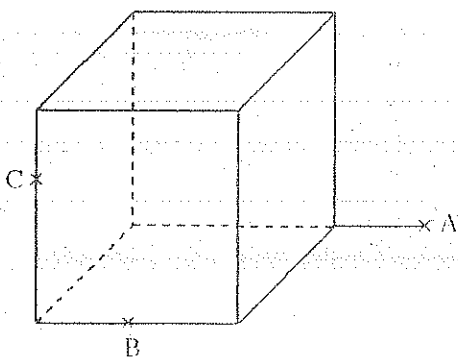
e)



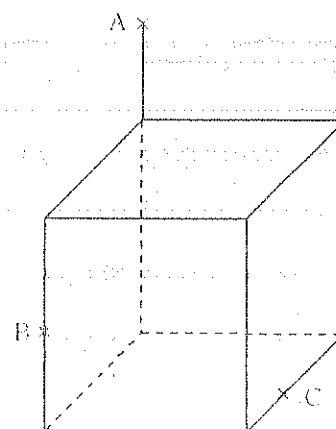
f)



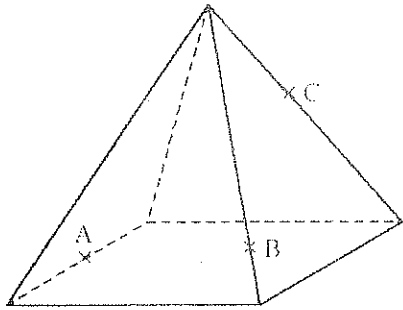
g)



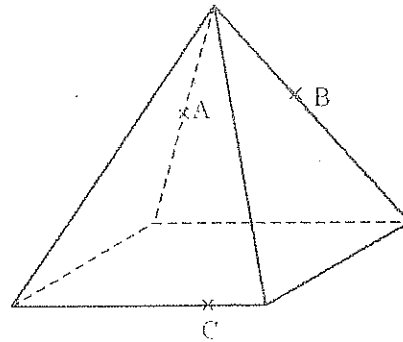
h)



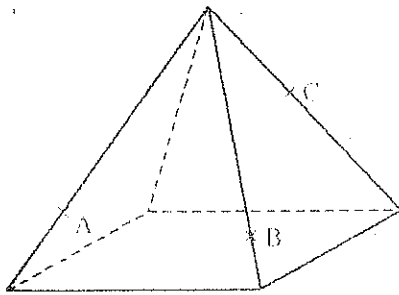
i)



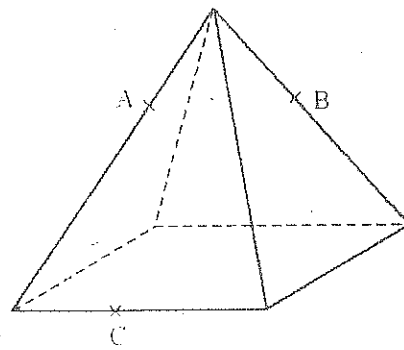
j)



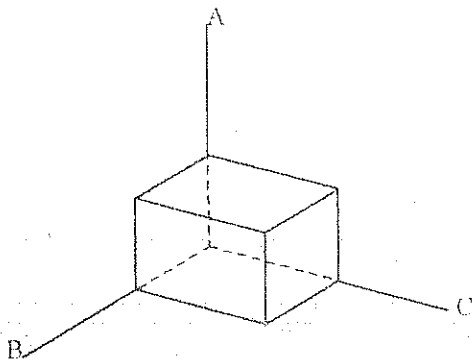
k)



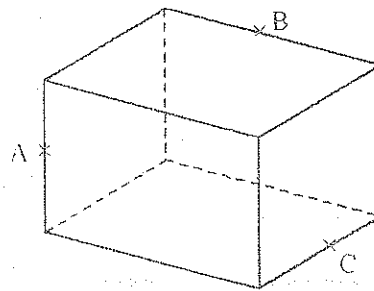
l)



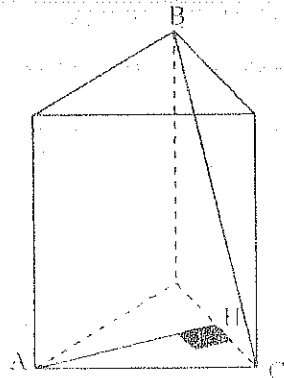
m)



n)

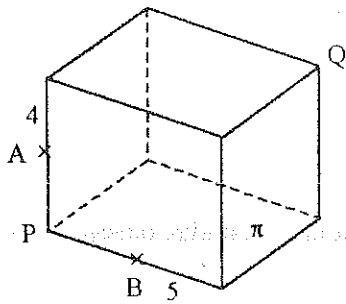


p)



Trazar la sección que pase por \overline{BC} y paralela a \overline{AH}

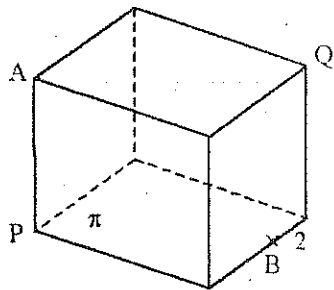
8. -



H) P - Q Cubo de arista 10u.

T) Angulo entre la sección que pasa por los puntos A, B y Q y el Plano π .

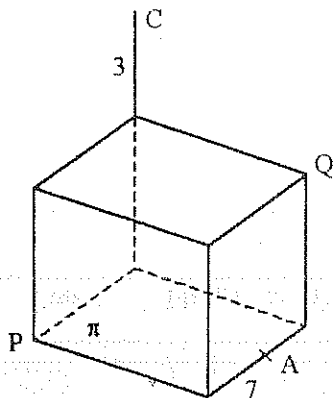
9. -



H) P - Q Cubo de arista 12u

T) Angulo entre la sección que pasa por los puntos A, B y Q y el Plano π

10. -



H) P - Q Cubo de arista 10u.

T) Angulo entre el $\triangle APC$ y el Plano π

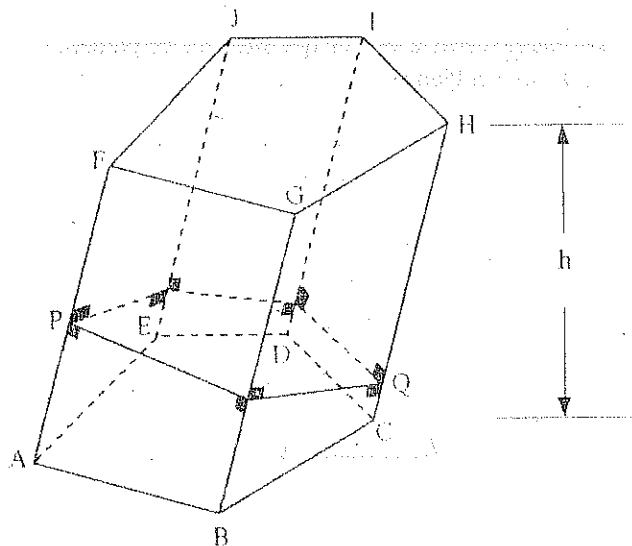
UNIDAD 3

3. - PRISMAS

3.1. - DEFINICION

Es un Poliedro que tiene dos caras congruentes y paralelas, llamadas bases, y las demás caras son paralelogramos.

3.2. - REPRESENTACION GRAFICA Y ELEMENTOS



BASES: $ABCDE \dots \cong FGHJ \dots$

CARAS LATERALES: Son los Paralelogramos, $AFGB$, $BGHC$, $CDIH$, etc.

ARISTAS LATERALES: $AF = BG = CH = DI = \dots = a$

ALTURA: Es la perpendicular común a las dos bases, h

SECCION RECTA: Es la sección que corta perpendicularmente a todas las aristas laterales, $P - Q$.

AREA LATERAL (S_L): Es la suma de las áreas de todas las caras laterales.

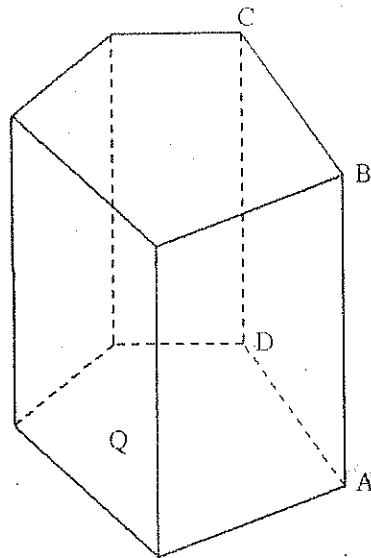
AREA TOTAL (S_T): Es la suma del área lateral y las áreas de las Bases.

3.3. - CLASIFICACION

3.3.1. - Por la Forma de su Base

| | |
|--------------|-------------------------------|
| Triangular | Si la Base es un Triángulo |
| Cuadrangular | Si la base es un Cuadrilátero |
| Pentagonal | Si la Base es un Pentágono |
| Hexagonal | Si la Base es un Hexágono |

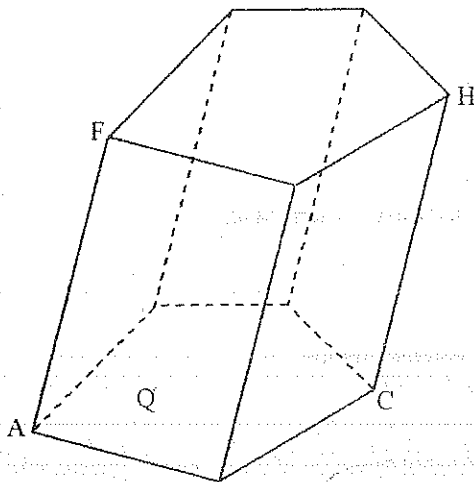
3.3.2. - Recto. - Si las aristas laterales son perpendiculares a las bases.



$$\overline{CD} \perp \text{Plano Q}$$

$$\overline{BA} \perp \text{Plano Q}$$

3.3.3. - Oblicuo. - Si las aristas laterales no son perpendiculares a las bases.

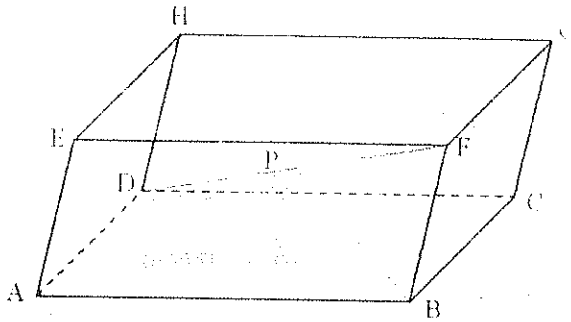


3.3.4. - Regular. - Es el prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.

3.3.5. - Tronco de Prisma. - Es la parte de un prisma formada al construir una sección que corta a las aristas laterales.

3.4. - PARALELEPIPEDOS.

Es un prisma cuyas bases son paralelogramos.



- Las caras opuestas son congruentes y paralelas

$$ABCD \cong EFGH$$

$$AEHD \cong BFGC$$

$$ABFE \cong DCGH$$

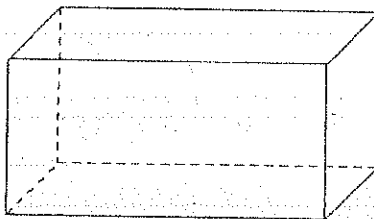
- Las Diagonales son concurrentes y se bisecan mutuamente.

$$DP = PF$$

$$HP = PB$$

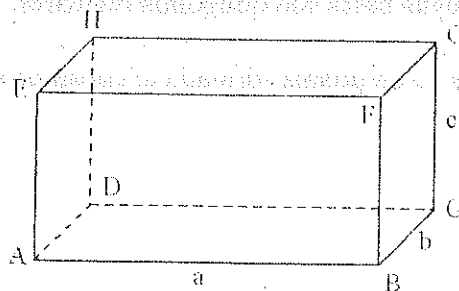
3.4.1. - CLASIFICACION

- 3.4.1.1. - Recto. - Las aristas laterales son perpendiculares a las bases.



Las bases son
paralelogramos

- 3.4.1.2. - Rectángulo. - Es un paralelepípedo recto que tiene por bases rectángulos.



Las bases son
rectángulos

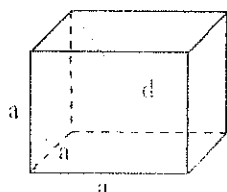
DIMENSIONES. Son las longitudes de tres aristas concurrentes, a , b y c .
Todas las diagonales son congruentes.

$$EC = HB = DF = AG$$

El cuadrado de una diagonal es igual a la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones.

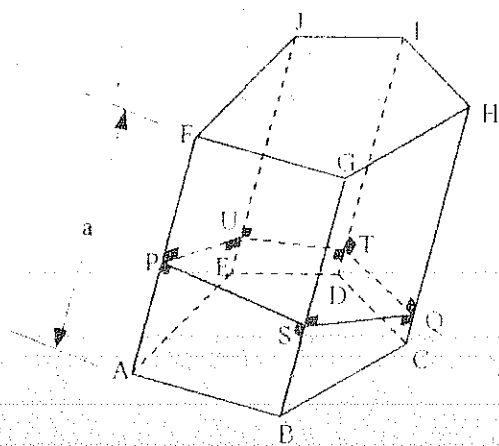
$$HB^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

3.4.1.3. - Cubo. - Es un paralelepípedo cuyas caras son cuadrados.



$$d = a \cdot \sqrt{3}$$

3.5. - AREA LATERAL. - El área lateral de un prisma es igual al producto de la arista lateral por el perímetro de una sección recta.



$$S_L = S_{ABGF} + S_{BCHG} + S_{CHID} + \dots$$

$$S_L = a \cdot PS + a \cdot SQ + a \cdot QT + \dots$$

$$S_L = a \cdot (PS + SQ + QT + \dots)$$

3.6. - VOLUMEN

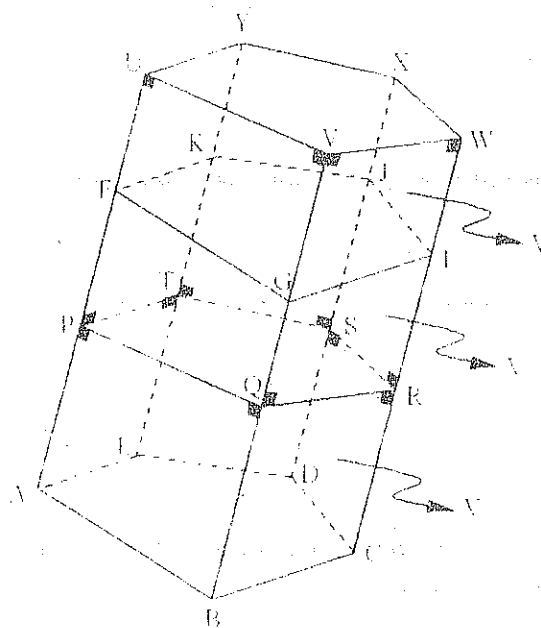
3.6.1. - Unidad de Volumen. - Es un cubo cuyas aristas tienen por medida una unidad de longitud.

3.6.2. - Volumen de un Sólido. - Es un número que indica cuantas veces esta contenida la unidad de volumen en dicho sólido.

3.6.3. - Sólidos Equivalentes. - Dos sólidos son equivalentes si tienen el mismo volumen.

3.6.4. - Volumen de un Paralelepípedo Rectángulo. - Es igual al producto de sus tres dimensiones.

3.6.5. - Equivalencia. - Todo prisma oblicuo es equivalente a un recto que tenga por base la sección recta y por altura la arista lateral.



H) $AF \parallel PU \parallel BG \parallel QV \parallel EW \parallel CI$

T) $V_{A-J} = V_{K-F}$

D) $AF \parallel PU \parallel AP \parallel FU$
 $BG \parallel QV \parallel QB \parallel VG$
 $CI \parallel RW \parallel CR \parallel WI$

$ABCDE \parallel EGIJK$

$PQRSTU \parallel UVWXYZ$

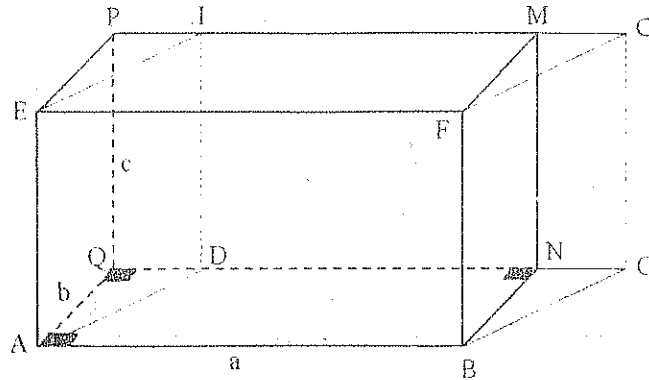
$V_3 = V_2$

$\therefore V_1 + V_2 = V_2 + V_1$

$V_{A-J} = V_{K-F}$

3.6.6. - Dos prismas rectos de igual base e igual altura son iguales.

3.6.7. - El volumen de un Paralelepípedo recto es igual al producto de la base por la altura.



A - G Paralelepípedo Oblicuo

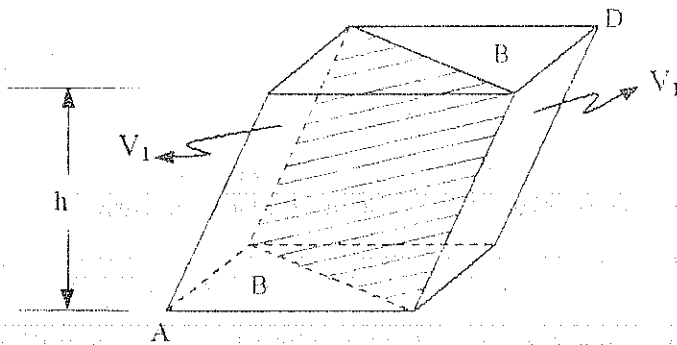
P - B Paralelepípedo Rectángulo

$$V_{A-G} = V_{P-B}$$

$$V_{A-G} = a \cdot b \cdot c = S_{ABCD} \cdot c = B \cdot h$$

3.6.8. - El volumen de un Paralelepípedo cualquiera es igual al producto de su base por su altura.

3.6.9. - El volumen de un prisma triangular es igual al producto de su base por su altura.



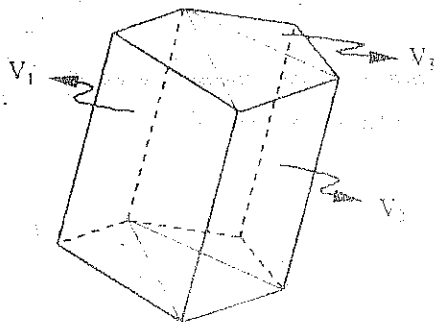
A - D Paralelepípedo

$$V = 2 V_1$$

$$2 B \cdot h = 2 V_1$$

$$V_1 = B \cdot h$$

3.6.10. - El volumen de un prisma es igual a la superficie de la base por su altura.



$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$$

$$V = B_1 \cdot h + B_2 \cdot h + B_3 \cdot h + \dots$$

$$V = B \cdot h$$

3.6.11. - El volumen de un prisma oblicuo es igual al producto de su sección recta por su arista lateral.

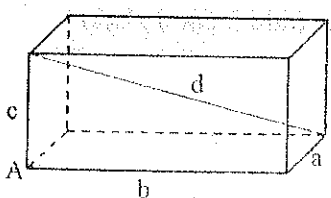
3.7. - EJERCICIOS

1. - Calcular las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo cuya diagonal mide $3\sqrt{14}$, el largo es el doble del ancho y la altura es el triple del ancho.
Resp: 3; 6; 9.
2. - Calcular las aristas que concurren a un vértice de un paralelepípedo rectángulo, sabiendo que sus medidas son tres números enteros consecutivos y su diagonal es de $5\sqrt{2}$.
Resp: 4; 3; 5.
3. - ¿Cuánto mide la altura de un prisma recto? Si la base es un rombo de 10 cm de lado y cuyas diagonales están en la relación de 3 : 4 y sabiendo que su área total es de 800 cm^2 .
Resp: 15.2 cm.
4. - El área total de un Cubo es de 216 m^2 . Calcular el área total de un prisma recto que tiene la misma base del Cubo y cuya altura es igual a la diagonal del Cubo.
Resp: 321.12 m^2 .
5. - El número que mide en metros la diagonal de un Cubo es igual al número que representa el área, en metros cuadrados, de un triángulo que tiene un vértice en el centro de una de las caras del cubo y por lado opuesto la diagonal de la cara opuesta. Hallar el área total del cubo.
Resp: 36 m^2 .
6. - Se tiene un prisma triangular recto cuya base es un triángulo rectángulo de perímetro 36 m, siendo la superficie de esta base 54 m^2 . Hallar el área de la cara del prisma que se levanta sobre la hipotenusa si la altura es de 10m.
Resp: 150 m^2 .
7. - Hallar el volumen de un prisma recto, cuya base es un trapecio isósceles y los lados iguales forman con el mayor ángulos de 45° , la altura del trapecio es igual a la base menor del mismo y el perímetro mide 68.2 cm. La altura del prisma es el cuádruplo de la del trapecio de la base.
Resp: 8000 cm^3 .
8. - Un prisma tiene por base un rombo de 10 cm de lado y cuyas diagonales están en la relación de 3 : 4. Su área total es de 800 cm^2 . Calcular su volumen.
Resp: 1459.2 cm^3 .
9. - El volumen de un prisma hexagonal regular es de 2076 cm^3 y su área lateral 480 cm^2 . Calcular el lado de la base y la altura del prisma.
Resp: 10 cm ; 8 cm.

10. - Calcular las dimensiones de un Paralelepípedo rectángulo cuyo volumen es de 13824 m^3 , la suma de sus tres dimensiones 74 m y una de las dimensiones es media proporcional entre las otras dos.
Resp: 24 m ; 32 m ; 18 m.
11. - Demostrar que si la altura de un prisma triangular es el duplo del diámetro del círculo circunscrito a la base, el prisma es equivalente a un paralelepípedo rectángulo cuyas dimensiones son los tres lados de la base del prisma.
12. - Un paralelepípedo de dimensiones; 2, 1.5 y 1, se encuentra inclinado respecto al suelo 30° , tiene un orificio de salida al borde inferior a 0.58. ¿Qué cantidad de agua existe?
Resp: 0.29
13. - La base de un prisma oblicuo es un triángulo cuyos lados son 15, 16 y 17; la sección recta es un triángulo de lados 13, 14 y 15. Hallar el área lateral, área total y volumen si su arista lateral es de 50.
Resp: 2100 ; 2319.96 ; 4200.
14. - Calcular el área total de un paralelepípedo rectángulo si el área de la base es de 80, las sumas de las aristas laterales 20 y el cuadrado de la diagonal del paralelepípedo 189.
Resp: 340.
15. - Calcular el área total de un paralelepípedo rectángulo cuya área de la base es 60 m^2 , la de una cara lateral 20 m^2 y la de un plano diagonal 50 m^2 .
Resp: 256 m^2 .
16. - El área total de un paralelepípedo rectángulo es de 180 m^2 , la diagonal de la base es de 50 m y la suma de sus tres dimensiones 17 m. Calcular el valor de sus aristas.
Resp: 8m ; 6m ; 3m.
17. - El área total de un prisma recto es de $180\sqrt{3}$, y su altura de $9\sqrt{3}$. ¿Cuánto medirá el apotema de la base que es un triángulo equilátero.
Resp: $\sqrt{3}$.
18. - Un paralelepípedo tiene por dimensiones 1.2, 0.8 y 0.45. Si en el aire pesa 500 Kg. ¿Cuánto pesará sumergido en el agua?
Resp: 68 Kg.
19. - El volumen de un prisma es de 1812 cm^3 y su altura 15 cm. ¿Cuántas caras tiene el prisma sabiendo que la base es un polígono regular que mide 5 cm de lado y 6.04 cm de apotema?
Resp: 8

20. - Un prisma recto de 40 cm de altura tiene por base un cuadrilátero inscrito que se descompone por una de sus diagonales en un triángulo equilátero de 12 cm de lado y otro isósceles. Calcular el volumen del prisma.
Resp: 3321.6 cm^3 .
21. - Un paralelepípedo rectángulo tiene un volumen de 60 m^3 , la suma de todas sus aristas es de 48 m y su área lateral de 70 m^2 . Determinar sus tres dimensiones.
Resp: 3 m ; 4 m ; 5 m.
22. - El área lateral de un prisma regular es de 450 m^2 y el apotema de la base mide 7m. Calcular su volumen.
Resp: 1575 m^3 .
23. - El área lateral de un prisma recto excede en 119 cm^2 al área lateral de otro prisma semejante. Si un par de aristas homólogas de la base están en la razón 3:4. Hallar el área lateral del primer prisma.
Resp: 272 cm^2 .
24. - Calcular el volumen de un prisma recto, cuya base es un rombo de 10 cm de lado y cuyas diagonales están en la razón 3 : 4 y la altura del prisma es igual a la semisuma de estas diagonales.
Resp: 1344 cm^3 .
25. - Se tiene un estanque de forma prismática hexagonal regular lleno de agua. Este se comunica con otro estanque de mayor capacidad, más bajo que aquel y de forma prismática cuadrangular regular. El conducto que los une da un caudal de 2.5 lt/s. Hallar el tiempo que tardará en vaciarse el primer estanque. La altura que alcanzará el agua en el segundo estanque, suponiéndolo vacío al principio. Lado del hexágono 7.5m, la altura del prisma 2.1 m, lado del cuadrado 26 m.
Resp: 34.1 s ; 0.454 m.
26. - Un cubo de madera de 12 cm de arista flota en el agua por una de sus caras ($\delta=0.25$). Calcular la superficie mojada, la superficie seca y la cantidad de agua que desaloja.
Resp: 288 cm^2 ; 576 cm^2 ; 432 cm^3 .
27. - Hallar en decímetros cuadrados, el área lateral de un prisma hexagonal de 70 cm de altura, cuyas aristas laterales forman ángulos de 60° con la base y siendo la sección recta un hexágono regular de $216\sqrt{3} \text{ cm}^2$ de superficie.
Resp: 581.96 cm^2 .

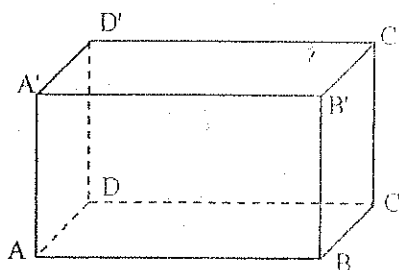
28. -



H) A - C: Paralelepípedo rectángulo

T) $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

29. -



H) A - C' Paralelepípedo rectángulo

$$S_{ABCD} = 48 \text{ m}^2$$

$$S_{DD'C'C} = 42 \text{ m}^2$$

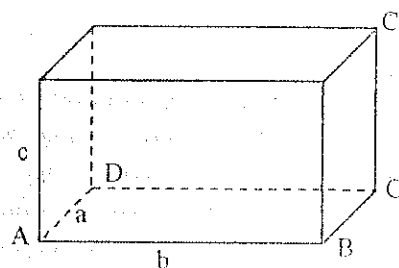
$$S_{AA'C'C} = 70 \text{ m}^2$$

T) $S_L = ?$ Resp: 196 m^2

30. - Calcular el área total de un cubo cuya arista es igual a la diagonal de un paralelepípedo rectángulo de 1660 m^2 de área total y cuya suma de sus tres dimensiones es igual a 51 m.

Resp: 5646 m^2 .

31. -



H) A - C' Paralelepípedo rectángulo

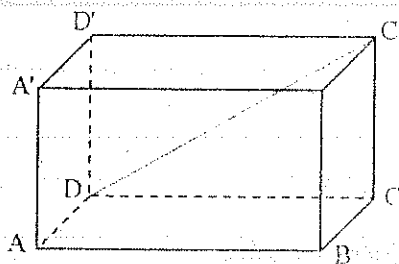
$$a + b + c = 12 \text{ cm}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 50 \text{ m}^2$$

$$S_{ABCD} = 12 \text{ m}^2$$

T) $S_T = ?$ Resp: 94 m^2

32. -



H) A - C' Paralelepípedo recto

$$AC' = \sqrt{33} \text{ cm}$$

$$BD' = 9 \text{ cm}$$

$$AA' = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro de la base} = 18 \text{ cm.}$$

T) $S_T = ?$; $V = ?$ Resp: 112 cm^2 ; 80 cm^3 .

33. - Todas las caras de un paralelepípedo son rombos de lado 4 cm y ángulo agudo 60° . Determinar el volumen del Paralelepípedo.

Resp: 52.25 cm^3 .

34. - Demostrar que en todo paralelepípedo la suma de los cuadrados de las cuatro diagonales es igual a la suma de los cuadrados de las doce aristas.

35. - En un prisma hexagonal regular la diagonal mayor de longitud 5 cm forma un ángulo de 30° con la arista lateral del prisma. Determinar el volumen del prisma.
Resp: 142.61 cm^3 .

36. - La altura de un prisma recto es de 1 m, su base es un rombo de lado 2 m y ángulo agudo 30° . Por un lado de la base se ha trazado un plano que corta al prisma y esta inclinado 60° respecto de la base. Hallar el área de la sección.
Resp: $\frac{4}{\sqrt{3}} \text{ m}^2$.

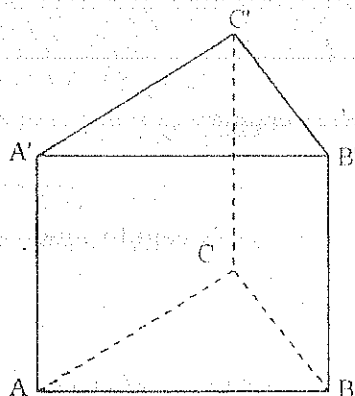
37. - Calcular el área total de un prisma hexagonal regular de $10\sqrt{3} \text{ m}$ de lado en la base, si la base tiene un círculo circunscrito de radio igual a la altura del prisma.
Resp: 3358.84 m^2 .

38. - El área total de un paralelepípedo rectángulo de 4 m de altura es cuatro veces el área de una de las superficies diagonales correspondientes a una de las aristas laterales y el área de esta superficie diagonal es los $5/6$ de la suma de las áreas de las bases. Calcular el área del paralelepípedo.
Resp: 80 m^2 .

39. - Se tiene un recipiente lleno de agua, de forma de paralelepípedo rectángulo de 48 dm^2 de base y 15 cm de altura. Se introduce un prisma cuadrangular regular de hierro, de manera que se apoya por su base sobre el fondo del recipiente y se riegan 24 lt de agua. Después se saca y se vuelve a introducir el mismo prisma apoyándose en una de sus caras laterales, y se riegan 6 lt de agua que quedaba en el recipiente. Calcular en decímetros cúbicos el volumen del prisma de hierro.
Resp: 80 dm^3 .

40. - La superficie total de un cubo es de 486 m^2 . Calcular en metros cuadrados el área total del prisma cuadrangular que resulta de cortar el cubo por un plano que pasa por un lado de la base y forma con esta un ángulo de 30° .
Resp: 405 m^2 .

41. -



H) A - C' Prisma regular

$$V_{A-C'} = 200 \text{ m}^3$$

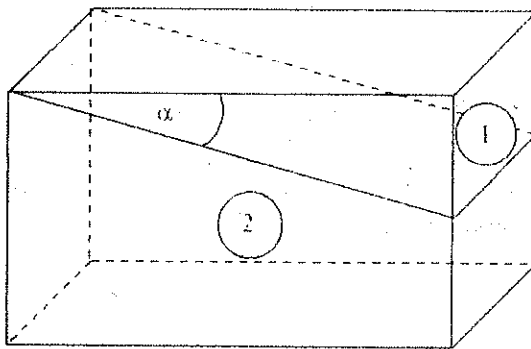
$$\angle B'AC' = 38^\circ$$

T) $AC = ?$

Resp: 7.34 m

42. - Por un punto tomado sobre la arista lateral de un prisma triangular regular con el lado de la base 10 cm se trazan dos planos. Uno de ellos pasa por un lado de la base inferior del prisma y forma un ángulo de 40° con la base; el otro pasa por el lado paralelo de la base superior y forma con ella un ángulo de 50° . Determinar el volumen del prisma y la suma de las áreas de las secciones así obtenidas.
 Resp: 761.57 cm^3 ;

43. -



T) a) Hallar α , tal que:

$$S_I = S_T / 2$$

Resp: 29.3°

b) Hallar α , tal que:

$$V_I = V_T / 2$$

Resp: 33.69°

44. - Hallar el área total de un tronco de prisma regular, cuya base es un cuadrado de lado 3 m. Las bases forman un ángulo de 45° y dos aristas laterales opuestas son de igual longitud, 8 m.

Resp: 117.73 m^2 .

45. - En un paralelepípedo rectángulo, la base mide 60 m^2 , la suma de todas sus aristas es 96 m y la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones es de 200 m^2 .

Calcular la altura del paralelepípedo.

Resp: 8 m.

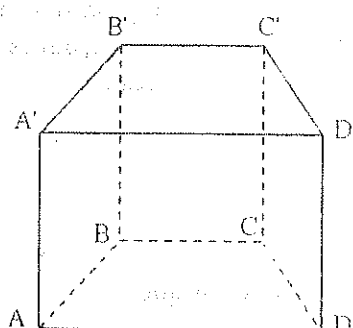
46. - Se da un prisma recto en el cual un triángulo regular sirve de base. Por uno de los lados de la base inferior y por el vértice opuesto de la base superior se ha trazado un plano. El ángulo entre este plano y la base del prisma es igual a 70° y el plano de la sección del prisma es 333 . Determinar el volumen del prisma.

Resp: 13.19 u^3 .

47. - Dado un paralelepípedo rectángulo ABCD - A'B'C'D', AB = 5; BC = 3; AA' = 4. Calcular la distancia mínima entre AB y B'D'.

Resp: 3 u

48. -



H) B' - D Prisma recto

AA' = 4 m

ABCD Trapecio Isósceles

Altura de ABCD = 3 m

AB = 6 m ; BC = 3 m.

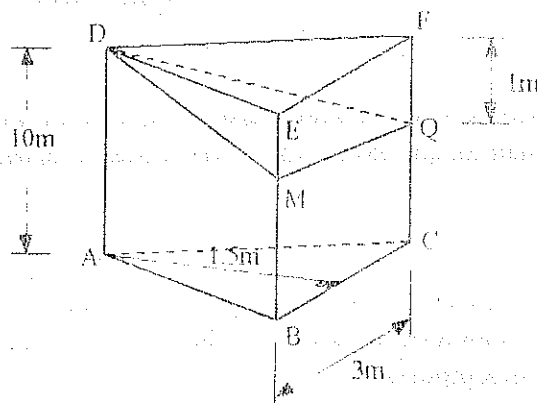
T) Determinar el ángulo y la distancia entre

AA' y B'D

Resp: 65.37° ; 1.59 m

49. - El volumen del tronco de prisma triangular recto de la figura es igual a 25 m^3 . Por el punto D se traza un plano paralelo a la base. Calcular la superficie del plano EMQF y el segmento EM.

Resp:



50. - Se tiene un tetraedro regular de 200 m^2 de superficie total. Se corta el tetraedro con un plano paralelo a una cara obteniéndose un tetraedro cuyas aristas son la mitad de las del tetraedro original y un tronco de pirámide. Calcular la superficie total del tronco de pirámide.

Resp: 175 m^2 .

51. - Desde la base de la altura de una pirámide triangular regular se ha bajado una perpendicular a la arista lateral igual a 5 u. Hallar el volumen de la pirámide si el ángulo diedro entre la cara lateral y la base de la pirámide es igual a 70° .

Resp: 140.7 u^3 .

52. - En un cubo de arista 2 m, se forma un triángulo prolongando las rectas que unen los puntos medios de seis aristas consecutivas y no situadas tres a tres en un plano. Determinar que dichas rectas están en un plano y hallar el área del triángulo.

Resp: $\frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ m}^2$.

53. - Demostrar geométicamente la fórmula:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$$

54. - El área total de un prisma recto de base rectangular es de 144 m^2 , uno de los lados de la base es el doble del contiguo e igual a la altura. Hallar la diagonal del prisma.

Resp: 9 m.

55. - Calcular el volumen y aristas de un paralelepípedo rectángulo cuya área total es de 62 m^2 y cuyas dimensiones son proporcionales a 1, 1.5 y 2.5.

Resp: 30 m^3 ; 2 m ; 3 m ; 5 m.

56. - Calcular las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo sabiendo que están en progresión aritmética, cuya suma es de 24 m y el área total es de 366 m^2 .

Resp: 5 m ; 8 m ; 11 m.

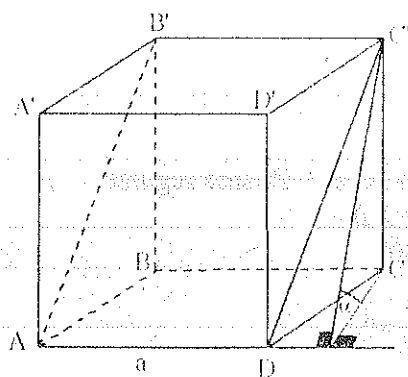
57. - En un cubo se da la distancia de una diagonal y arista no contigua que mide 4 m. Hallar el volumen del cuerpo.

Resp: 181.02 m^3

58. - Se corta un cubo de 125 cm de arista por un plano que pase por los puntos medios de las aristas no contiguas ni paralelas. Calcular el área de la sección resultante

Resp: 20297.5 cm^2 .

59. -



II) ABCD Rombo

ABCD - A'B'C'D' Prisma recto

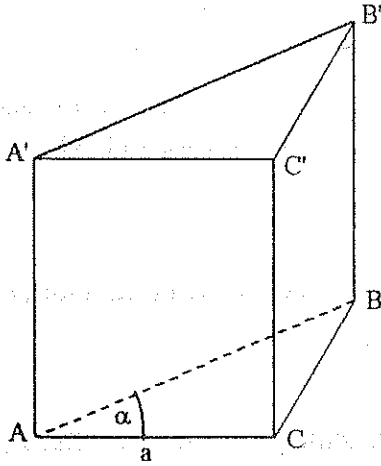
$S_{ABCD} = 150 \text{ u}^2$

$\alpha = 70^\circ$

T) Área lateral del paralelepípedo =?

Resp: 563.8 u^2

60. -

H) $ABC - A'B'C'$ Prisma recto

$$AB = BC$$

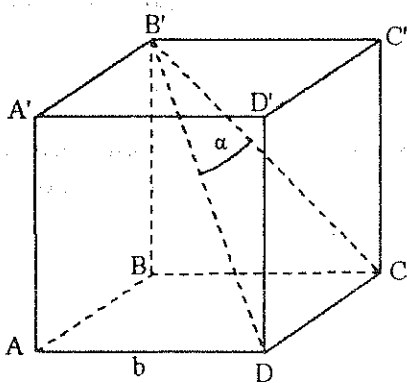
$$a = 10 \text{ u} ; \alpha = 70^\circ$$

Area lateral = Area de las dos bases.

T) $V = ?$

$$\text{Resp: } 200.47 \text{ u}^3$$

61. -

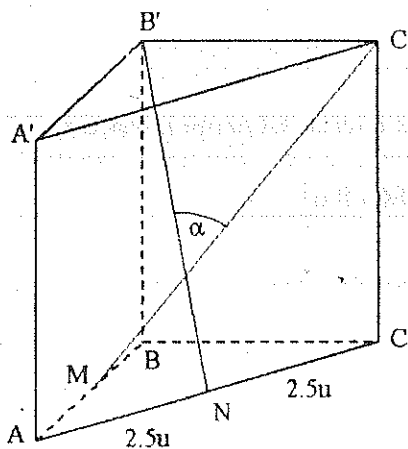
H) $ABCD - A'B'C'D'$ Prisma cuadrangular regular

$$b = 5 \text{ u} ; \alpha = 25^\circ$$

T) $V_{\text{Prisma}} = ?$

$$\text{Resp: } 237.13 \text{ u}^3$$

62. -

H) $ABC - A'B'C'$ Prisma regular

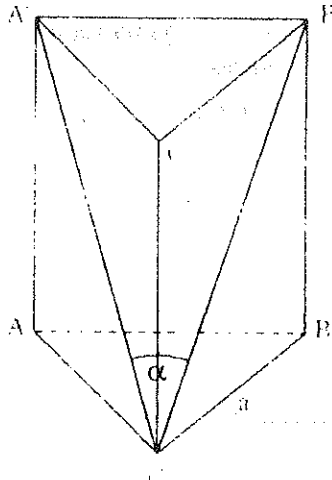
$$AM = MB$$

$$\alpha = 30^\circ$$

T) $V_{\text{Prisma}} = ?$

$$\text{Resp: } 149.64 \text{ u}^3$$

63. -

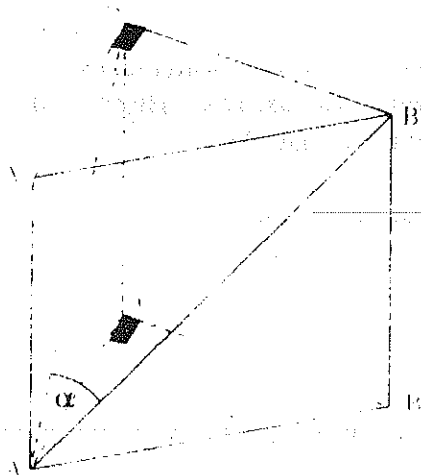


H) $ABC - A'B'C'$ Prisma regular
 $a = 5 \text{ u} ; \alpha = 30^\circ$

I) Area Lateral = ?

Resp: 123.9 u^2

64. -



H) $ABC - A'B'C'$ Prisma recto

$CAB = 30^\circ$

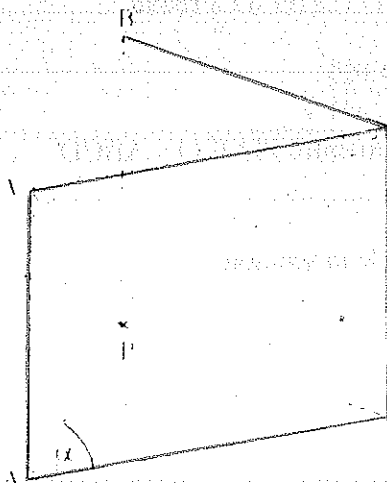
$AC = 5 \text{ u}$

$\alpha = 20^\circ$

I) $V_{\text{Prisma}} = ?$

Resp: 44.136 u^3

65. -



H) $ABC - A'B'C'$ Prisma recto

$AB = BC = 10 \text{ u}$

$\alpha = 70^\circ$

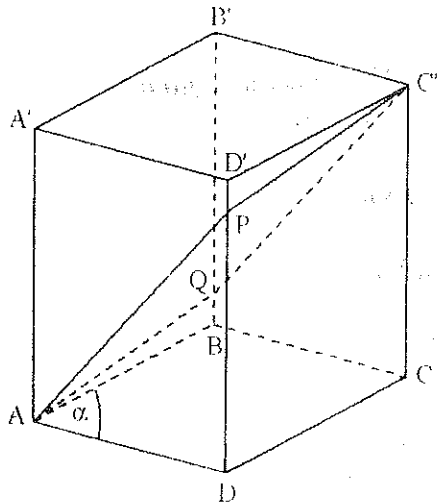
Angulo entre ABC y $A'B'C' = 40^\circ$

I) Area Lateral del Prisma

$V_{B-A'C'C} = ?$

Resp: $211.63 \text{ u}^2 ; 168.9 \text{ u}^3$

66. -



H) ABCD - A'B'C'D' Prisma recto

□ABCD es rombo

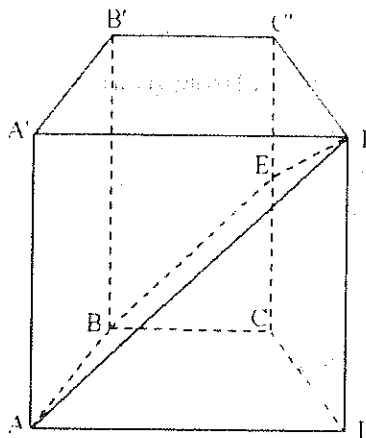
□APC''Q es rombo

$$\alpha = 60^\circ$$

$$PAQ = \frac{\alpha}{2}$$

T) $S_{\square APC''Q} = ?$ Resp: $10 u^2$

67. -



H) ABCD - A'B'C'D' Prisma recto

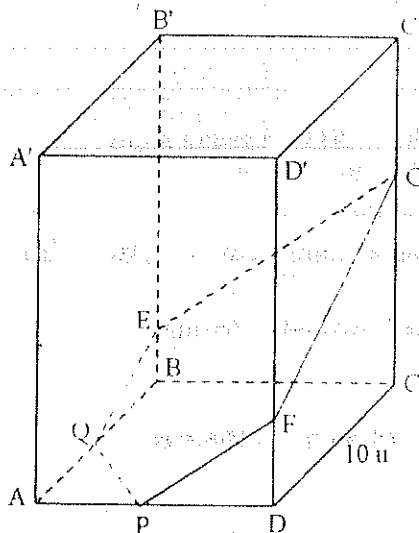
Angulo entre ABCD y ABED' = 70° $r = 10 u$ de ABCD

T) Area de la sección = ?

Area lateral = ?

Resp:

68. -



H) ABCD - A'B'C'D' Prisma regular

$$AP = PD$$

$$AQ = AB/3$$

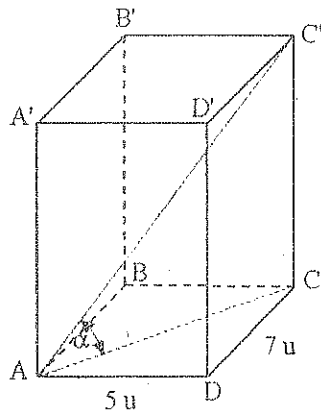
Angulo entre PFGEQ y ABCD

$$= 50^\circ$$

T) Area de la sección = ?

Resp:

69. -

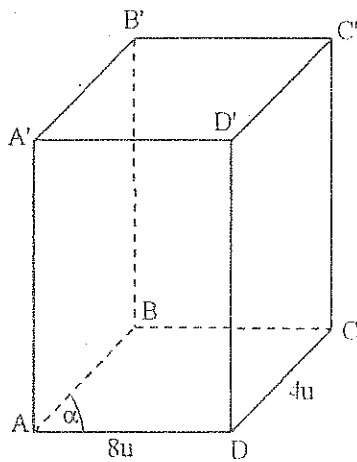


H) A - C' Paralelepípedo
rectángulo
 $\alpha = 40^\circ$

T) $S_L = ?$

Resp: 173.23 u

70. -

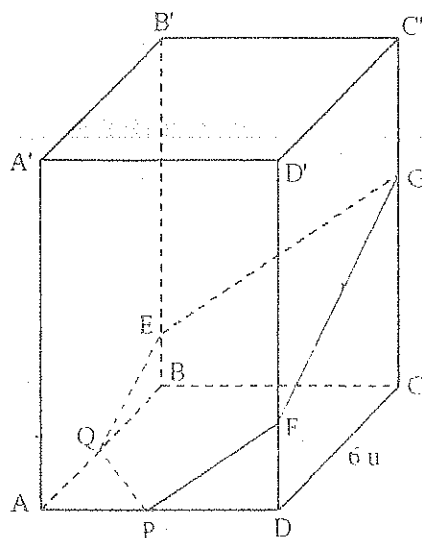


H) A - C' Paralelepípedo recto
 $AC = B'D$
 $\alpha = 40^\circ$

T) $V_{A-C'} = ?$

Resp: 203.68 u³

71. -

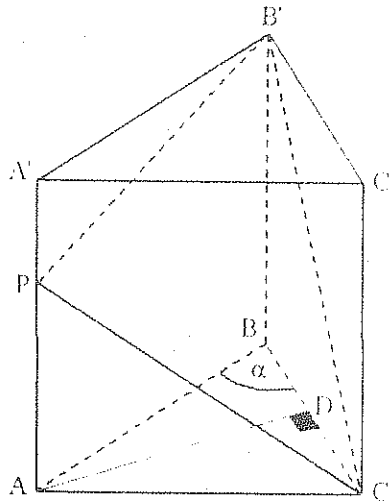


H) A - C' Prisma regular
P punto medio de AD
Q punto medio de AB
Ángulo entre PQEGF y ABCD =
 60°

T) Área de la sección = ?

Resp: 53.13 u²

72. -

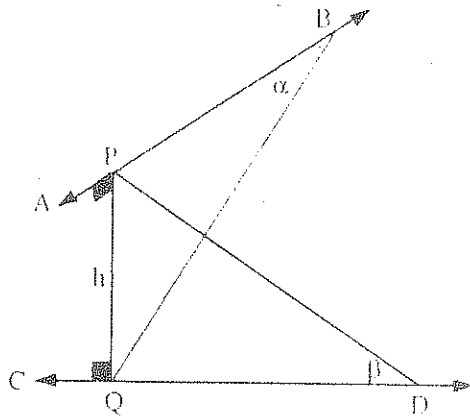


- H) $ABC - A'B'C'$ Prisma recto
 $AB = AC$
 Angulo entre $PB'C$ y $ABC = 40^\circ$
 $\alpha = 70^\circ$
 Plano $PB'C \parallel \overline{AD}$
 $S_L = 430 \text{ u}^2$

T) Area de la seccion =?

Resp: 117.1 u^2

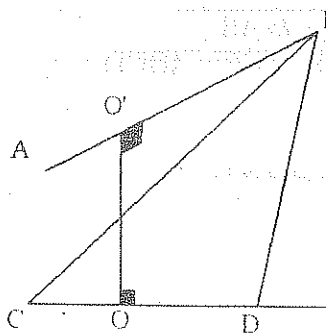
73. -



- H) \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} se cruzan formando un
 ángulo de 70°
 $h = 10 \text{ u}$
 $\alpha + \beta = 45^\circ$

T) $BD = ?$ Resp: 14.1 u

74. -



- H) \overline{AB} y \overline{CD} se cruzan y forman un ángulo de 35°

$$AB = 10 \text{ u}$$

$$CD = 8 \text{ u}$$

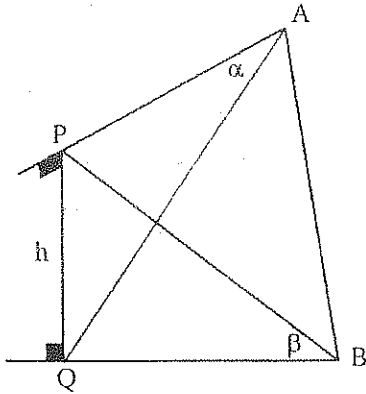
$$OO' = 5 \text{ u}$$

$$\frac{AO}{OB} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{CO'}{O'D} = \frac{3}{2}$$

T) $BD = ?$ $BC = ?$ Resp: $31.53 \text{ u} ; 57.27 \text{ u}$

75. -

H) \overline{AP} y \overline{QB} se cruzan

$$h = 7 \text{ u}$$

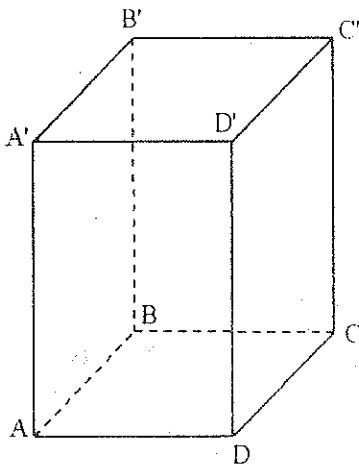
$$\alpha = 30^\circ$$

$$\beta = 50^\circ$$

T) Angulo entre PQ y AB =?

Resp: 62.54°

76. -



H) A - C' Paralelepípedo recto

$$AD' = A'D = 9 \text{ u}$$

$$AB = 7 \text{ u}$$

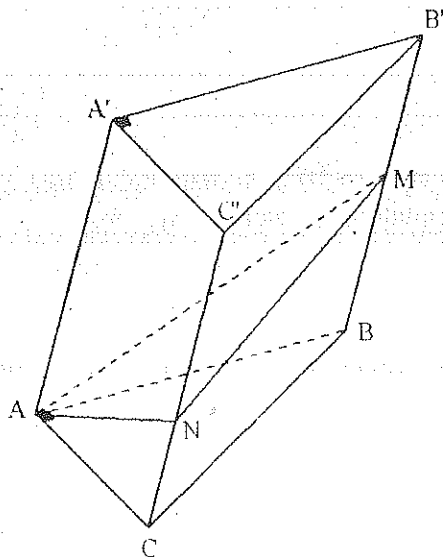
$$AC = 13 \text{ u}$$

$$BD = 11 \text{ u}$$

T) Angulo entre AA'B'B y AAD'D =?

Resp: 90°

77. -



H) ABC - A'B'C' Prisma oblicuo

$$\text{Altura} = 7 \text{ u}$$

$$AM = AN = 5 \text{ u}$$

$$BM + NC = 7.5 \text{ u}$$

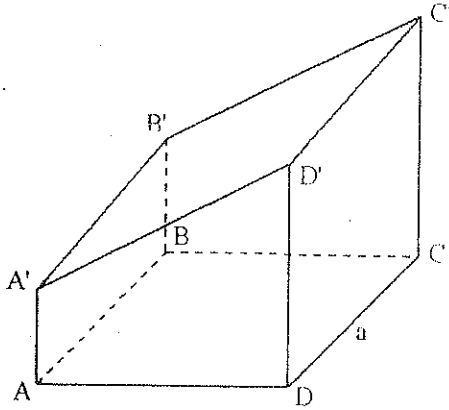
T) a) BM = ? ; CN = ?

$$b) V_{ABC - A'B'C'} = ?$$

$$c) AA' = ?$$

Resp: 2.5 u ; 5 u ; 138.34 u^3 ; 12.78 u .

78. -

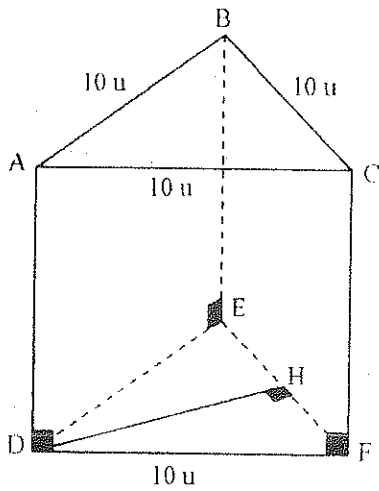


H) A - C' Tronco de prisma regular
 $a = 3 \text{ u}$
 Angulo entre las bases $= 40^\circ$
 $BB' = DD' = 8 \text{ u}$

T) $AA' = ?$
 $CC' = ?$

Resp:

79. -



T) Distancia mínima entre \overline{DH} y \overline{BF}

Resp:

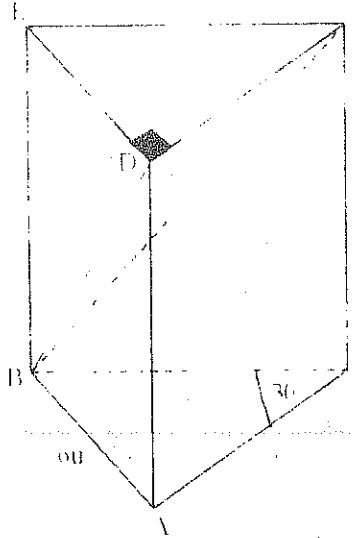
80. - En un prisma triangular regular la arista de la base es 10 u, la diagonal de una cara lateral forma un ángulo de 35° con la otra cara lateral. Calcular: S_L , S_T , y V
Resp:

Resp:

81. - Calcular el volumen de un prisma pentagonal regular si: $S_L = 300u^2$ y $S_B = 100u^2$

Resp:

82



H) ABC - DEF Prisma recto

$$DBF = 40^\circ$$

D) V_{PRISMA} ?

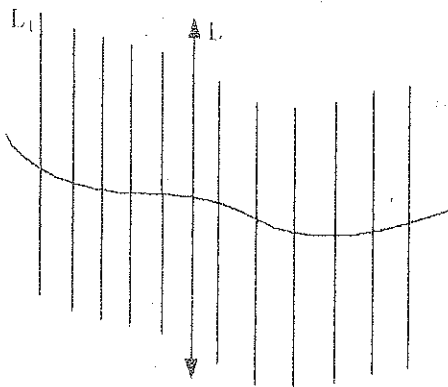
Resp:

UNIDAD 4

4. - CILINDROS

4.1. - SUPERFICIE CILINDRICA

Es la superficie engendrada por una recta, que se mueve paralelamente a una dirección dada apoyándose sobre una línea curva.



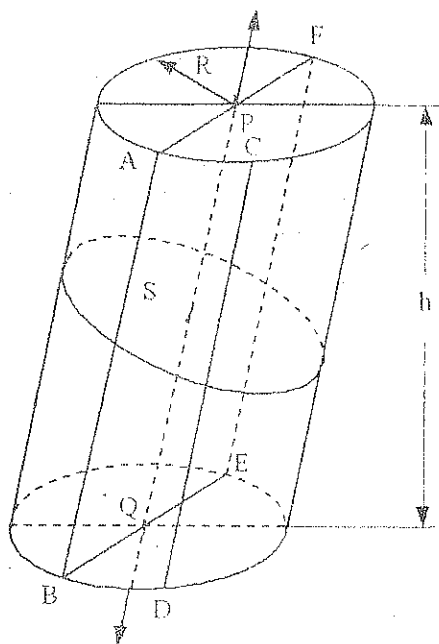
EJE: Dirección dada \vec{L}
 DIRECTRIZ: Línea curva
 GENERATRIZ: L_1

4.2. - CILINDRO CIRCULAR

4.2.1. - DEFINICION

Es el sólido geométrico limitado por una superficie cilíndrica y dos superficies circulares localizadas en planos paralelos.

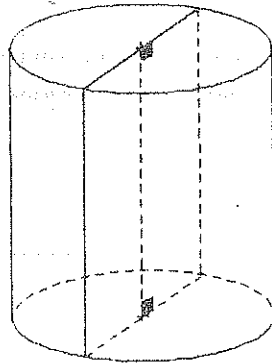
4.3. - ELEMENTOS



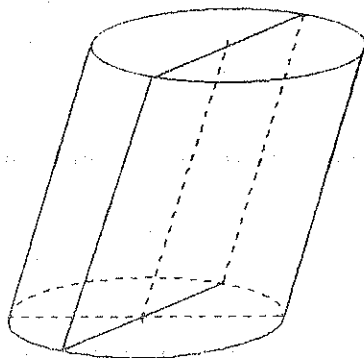
EJE: \overleftrightarrow{PQ}
 GENERATRIZ: \overline{AB} , \overline{CD} ,
 DIRECTRIZ: $\odot(P, R)$
 BASES: $\odot(P, R)$ y $\odot(Q, R)$
 ALTURA: h , perpendicular común a las bases.
 AREA LATERAL: Es el área de la superficie cilíndrica.
 AREA TOTAL: Área Lateral más el área de las bases.
 SECCION RECTA: Es la sección perpendicular a todas las generatrices.
 SECCION AXIAL: Es la sección que contiene el Eje del cilindro. $ABEF$.

4.4. - CLASIFICACION:

4.4.1. - CILINDRO CIRCULAR RECTO O DE REVOLUCION. Si el eje es perpendicular a las bases.



4.4.2. - CILINDRO CIRCULAR OBLICUO. Si el eje no es perpendicular a las bases.



4.5. - PROPIEDADES.

4.5.1. - En todo cilindro circular se puede inscribir y circunscribir prismas que tengan por aristas laterales las generatrices del cilindro y por bases, polígonos inscritos y circunscritos a las bases. Por consiguiente se puede considerar al cilindro circular como un prisma de infinito número de caras.

4.5.2. - El área lateral de un cilindro circular es igual al producto del perímetro de una sección recta por la generatriz.

$$S_L = P_{s.r.} \cdot g$$

4.5.3. - El área lateral del cilindro de revolución es igual al producto del perímetro de la base por la generatriz.

$$S_L = P_B \cdot g = 2 \pi Rg.$$

4.5.4. - El volumen de un cilindro circular es igual al producto de su base por su altura.

$$V = S_B \cdot h = \pi R^2 h$$

4.5.5. - Dos cilindros circulares rectos son semejantes si son engendrados por rectángulos semejantes.

4.5.6. - Las áreas laterales o totales de dos cilindros circulares rectos semejantes son, entre si, como los cuadrados de sus lados homólogos, y sus volúmenes como el cubo de sus lados homólogos.

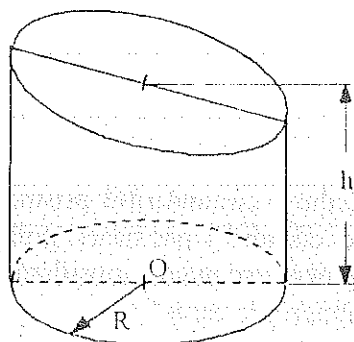
$$\frac{S_{L_1}}{S_{L_2}} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{g_1^2}{g_2^2} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{g_1^2}{g_2^2} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{g_1^3}{g_2^3} = \dots\dots\dots$$

4.6. - TRONCO DE CILINDRO CIRCULAR RECTO.

Es la parte de un cilindro de revolución obtenida al construir una sección oblicua al eje del cilindro.



4.6.1. - AREA LATERAL. El área lateral es igual al perímetro del círculo de la base por el eje.

$$S_L = 2\pi R \cdot h$$

4.6.2. - VOLUMEN. Es igual a la superficie de la base por el eje.

$$V = \pi R^2 \cdot h$$

4.7. - RELACION PRISMA - CILINDRO CIRCULAR.

4.7.1. - CILINDRO DE REVOLUCION INSCRITO EN UN PRISMA.

- La superficie lateral es tangente a las caras laterales.
- Las bases son círculos inscritos en las bases del prisma.
- Son de la misma altura.

4.7.1. - CILINDRO DE REVOLUCION CIRCUNSCRITO A UN PRISMA RECTO

- Las bases del prisma son polígonos inscritos en las bases del cilindro.
- Son de igual altura.

4.8. - EJERCICIOS.

1. - En un cilindro de revolución, demostrar que el volumen cumple:

$$V = \frac{S_L(S_T + S_L)}{8\pi}$$

2. - La altura h de un cilindro de revolución es igual al diámetro del círculo de la base. Un punto del círculo superior está unido con otro del círculo inferior; la recta que une estos puntos forma con el plano de la base del cilindro el ángulo α . Determinar la distancia más corta entre dicha recta y el eje del cilindro.

$$\text{Resp: } \frac{h}{2} \operatorname{Cosec} \alpha \sqrt{1 - \operatorname{Cos} 2\alpha}$$

3. - Si S es el área lateral de un cilindro de revolución cuyo radio de la base es R , demostrar que su volumen es igual a:

$$V = \frac{S \cdot R}{2}$$

4. - Dos cilindros de revolución semejantes tienen áreas totales de $18\pi \text{ cm}^2$ y $50\pi \text{ cm}^2$ respectivamente. ¿En que relación están sus volúmenes?

$$\text{Resp: } 27/125.$$

5. - El desarrollo de la superficie curva de un cilindro de revolución es un rectángulo de diagonal d y forma un ángulo α con la base. Determinar el volumen del cilindro.

$$\text{Resp: } \frac{d^3 \operatorname{Cos}^2 \alpha \operatorname{Sen} \alpha}{4\pi}$$

6. - Calcular la superficie mojada de un cilindro de revolución de peso específico 0.6. $R = 10$ y $h = 20$, que flota horizontalmente en un recipiente que contiene agua.

$$\text{Resp: } 1068.6 \text{ cm}^2$$

7. - El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución es un cuadrado de lado 10 cm. Hallar el volumen del cilindro.

Resp: 79.58 cm^3 .

8. - En un cilindro oblicuo se tiene que la generatriz forma un ángulo de 60° con la base, y la altura del cilindro es el doble del radio r de la sección recta. Hallar el volumen en función de r .

Resp: $4 \frac{3}{3} \pi r^3$

9. - Tres recipientes A, B y C de forma cilíndrica de revolución y semejantes entre sí, contenían vino. La altura de A es de 6 dm, y su radio de 3 dm. Las alturas de los tres recipientes son proporcionales a los números 2, 3 y 5, los volúmenes de vino que contenían eran también proporcionales a dichos números. Se hizo un trasiego para que el vino alcanzara la misma altura en A, B y C y después de efectuado se pasaron 10 lt. de C a A, con lo que resultó que B tenía doble cantidad de vino que A. Se desea saber:

1. ¿Qué cantidad de vino contenían A, B y C primitivamente?
2. ¿Qué alturas?, en el caso anterior, alcanzaba el vino en los tres recipientes, expresadas en decímetros.
3. ¿Qué cantidades de vino contenían A, B y C cuando se igualaron en sus alturas?
4. ¿Qué longitud en decímetros, tenía esa altura única?
5. ¿De qué manera se hizo el trasiego para conseguir la misma altura en los tres recipientes?

Resp: A 125 lt 0.54 m 80 lt
 B 228 lt 0.36 m 180 lt.
 C 380 lt 0.22 m 500 lt.
 0.24 m.
 72 lt de A a C
 48 lt de B a C.

10. - Un recipiente de forma cilíndrica de revolución de dimensiones $R = 10 \text{ m}$, $h = 20 \text{ m}$, contiene agua en una cantidad igual a los $\frac{3}{5}$ de su volumen total. ¿Qué nivel alcanza el agua si se encuentra dispuesto horizontalmente?

Resp: 1.16 m.

11. - En un cilindro de revolución de radio R y altura h , se inscribe un prisma hexagonal regular. Encontrar el valor de K , tal que: $K = \frac{V_{\text{Cilindro}}}{V_{\text{Prisma}}}$

Resp:

12. - En un cilindro de revolución está inscrito un prisma triangular regular. Hallar la relación de sus volúmenes.

Resp:

13. - Se dispone de dos recipientes, un paralelepípedo rectángulo y un cilindro de revolución abiertos en su parte superior. El paralelepípedo tiene por dimensiones 11 u, 11 u y 25 u, y contiene agua hasta una altura de 15 u. El cilindro tiene por dimensiones $R = 5$ u, $h = 20$ u. Se introduce progresivamente el cilindro en el paralelepípedo hasta que sus bases coincidan. Si el espesor es despreciable. Calcular:

- a) Se derramará agua hacia el exterior. ¿Cuánto?
b) ¿Qué cantidad de agua se introduce en el cilindro?

Resp: 3.61 u^3 ; 6.05 u^3 .

14. - Un cilindro de revolución contiene agua hasta la mitad de su altura. si se suelta una piedra, el agua sube 3.5 u. Si el radio del cilindro es 4 u. ¿Cuál es el volumen de la piedra?

Resp: 176 u^3 .

15. - Al aumentar el radio de un cilindro de revolución de 2 m de altura, en 6 m, el volumen aumenta en x. Si la altura aumenta en 6 m el volumen aumenta en x. Calcular el radio de la base del cilindro.

Resp: 6 m

16. - En un tronco de cilindro de revolución, el radio de la base es 15 u, las generatrices mayor y menor se diferencian en 12 u. Si el eje es 40 u. Calcular las generatrices mayor y menor, el Área lateral y el volumen.

Resp: 46 u ; 34 u ; 3768 u^2 ; 28260 u^3 .

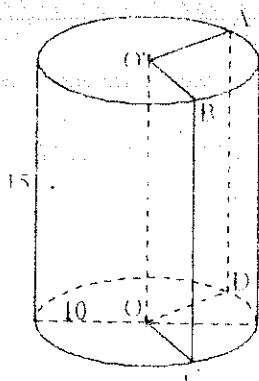
17. - En un prisma pentagonal regular está circunscrito un cilindro de revolución. Calcular la relación entre sus volúmenes.

Resp:

18. - En un cilindro de revolución de dimensiones $R = 9$ u, $h = 18$ u, contiene agua hasta una altura de 10 u. Se introduce otro cilindro de revolución de dimensiones $R_1 = 7$ u y altura 15 u, abierto en su parte superior. Se derramará el agua. ¿Cuánto? ¿Qué cantidad de agua se introduce en el cilindro?

Resp:

19. -



H) $\angle O' B = 100^\circ$

T) $S_L(O'AB - ODC) = ?$

$V(O'AB - ODC) = ?$

$S_T(O'AB - ODC) = ?$

20. - El área lateral de un prisma regular es S , y el apotema de la base es a . Hallar el volumen del cilindro inscrito en el prisma.

Respa:

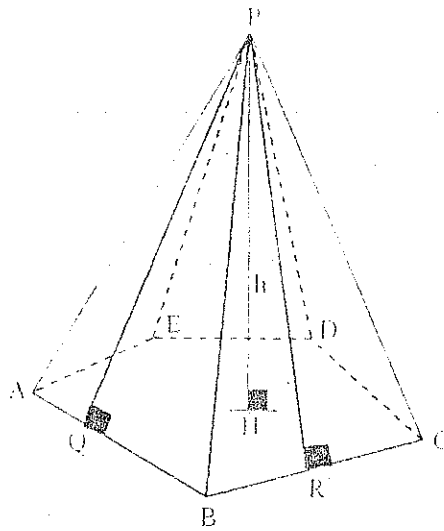
UNIDAD 5

5. - PIRAMIDES

5.1. - DEFINICION

Es un sólido que se obtiene al cortar un ángulo poliedro con un plano que interseque a todas las aristas en puntos distintos del vértice.

5.2. - REPRESENTACION GRAFICA Y ELEMENTOS



BASE: El Polígono ABCDE.....

VERTICE: El Punto P

CARAS LATERALES: Son los triángulos PAB, PBC, PCD.

ARISTAS LATERALES: Son los segmentos PA, PB, PC.....

ALTURA: Es la longitud de la perpendicular trazada desde el vértice a la base: h

APOTEMA: Es la altura de una cara lateral: PQ, PR.....

AREA LATERAL: Es igual a la suma de las áreas de las caras laterales.

AREA TOTAL: Es igual al área lateral más el área de la base.

5.3. - DENOMINACION

Por las letras del vértice y de la base.

Pirámide P - ABCDE.....

5.4. - CLASIFICACION

5.4.1. - Por la Forma de su Base

Triangular La base es un triángulo

Cuadrangular La base un cuadrilátero

Pentagonal La base un Pentágono

Hexagonal La base un Hexágono

h) El área lateral es igual al semiperímetro de la base por la apotema.

$$S_L = S_{\triangle APB} + S_{\triangle BPC} + S_{\triangle CPD} + \dots$$

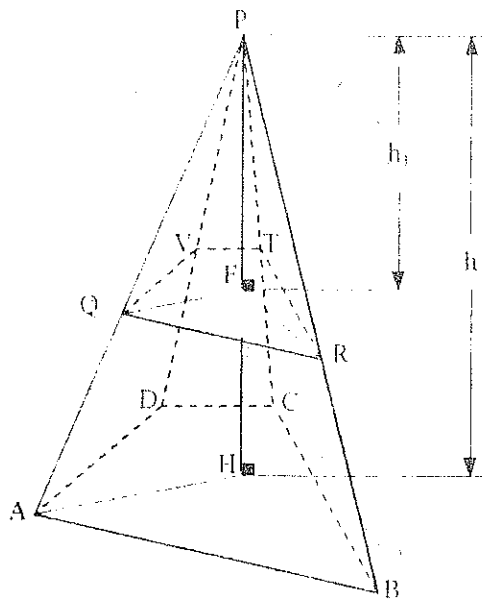
$$S_L = \frac{AB \cdot ap}{2} + \frac{BC \cdot ap}{2} + \frac{CD \cdot ap}{2} + \dots$$

$S_L = a_p \cdot p$ donde: a_p = apotema y p = semiperímetro.

5.5. - PROPIEDADES

5.5.1. - Si en una pirámide se construye una sección paralela a la base; entonces:

- Las aristas, las apotemas y alturas de las dos pirámides son proporcionales.
- Las bases son dos polígonos semejantes
- Las bases están en la misma razón que el cuadrado de la razón de sus partes homólogas.



$$\triangle PAH \sim \triangle PQF : \triangle PHB \sim \triangle PFR : \dots$$

$$\frac{PA}{PQ} = \frac{h}{h_1} = \frac{PB}{PR} = \frac{PC}{PT} = \dots$$

$$\triangle PAB \sim \triangle PQR : \triangle PBC \sim \triangle PRT : \dots$$

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RT} = \frac{PA}{PQ} = \frac{PB}{PR} = \dots$$

$$\frac{AB}{QR} = \frac{h}{h_1} = \frac{PA}{PQ} = \frac{PB}{PR} = \dots$$

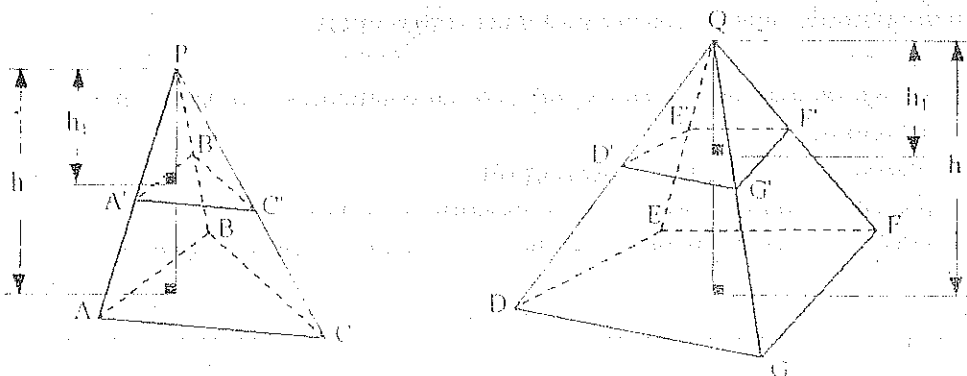
$$\frac{AB}{QR} = \frac{AH}{QF} = \frac{BH}{RF} = \dots$$

$$\Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle QFR$$

$$\Rightarrow ABCDE \dots \sim QRTV \dots$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABCDE \dots}}{S_{QRTV \dots}} = \frac{AB^2}{QR^2} = \frac{h^2}{h_1^2} = \dots$$

5.5.2. - Si dos pirámides tienen alturas iguales, las áreas de las secciones hechas paralelamente a las bases y a igual distancia de sus respectivos vértices son proporcionales a las áreas de las bases.

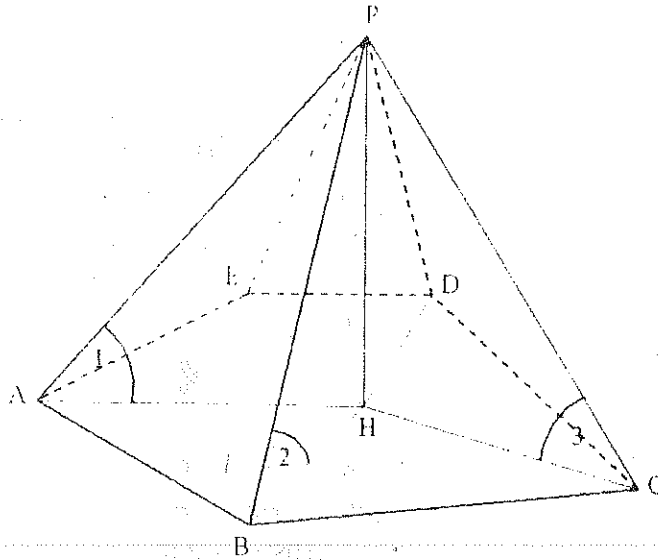


$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{h}{h_1} \quad \frac{S_{DEFG}}{S_{D'E'F'G'}}$$

5.5.3. - Si dos pirámides de igual altura tienen sus bases equivalentes, las secciones trazadas paralelamente a las bases y a iguales distancias de sus respectivos vértices son también equivalentes.

5.5.4. - Si una pirámide tiene las aristas laterales congruentes:

- Los ángulos formados entre las aristas laterales y la base son congruentes.
- La base es un polígono inscriptible.
- El pie de la altura coincide con el circuncentro de la base.



$$\triangle PAH \cong \triangle PBH \cong \triangle PCH \cong \dots$$

$$PH \text{ común, } PA = PB = PC = \dots$$

$$\Rightarrow 1 \cong 2 \cong 3 \cong \dots$$

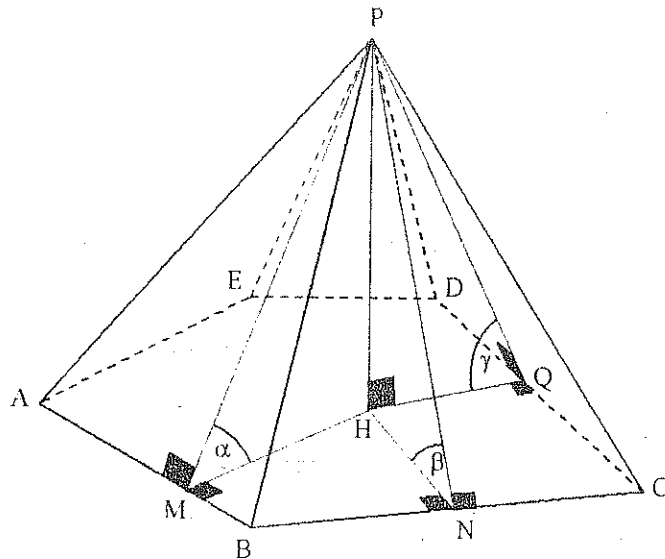
$$\Rightarrow HA = HB = HC = \dots$$

$$\Rightarrow H \text{ es Circuncentro del polígono}$$

5.5.5. - Si una pirámide tiene todas sus apotemas congruentes:

- Los ángulos diedros formados entre las caras laterales y la base son congruentes.
- La base es un Polígono circunscriptible.
- El pie de la altura coincide con el incentro de la base.
- El ángulo diedro formado entre una cara lateral y la base es igual a:

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{S_b}{S_L} \right)$$



$$\triangle PMH \cong \triangle PNH \cong \triangle PQH \cong \dots\dots\dots$$

Rectángulos, PH común, PM = PN = PQ =

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{\gamma} = \dots\dots\dots$$

$$\Rightarrow MH = NH = QH = \dots\dots\dots$$

\Rightarrow H incentro del polígono

$$S_{\triangle PAB} \times \cos \alpha = S_{\triangle AHB}$$

$$S_{\triangle PBC} \times \cos \alpha = S_{\triangle BHC}$$

$$S_{\triangle PCD} \times \cos \alpha = S_{\triangle CHD}$$

$$\dots\dots\dots \dots\dots\dots$$

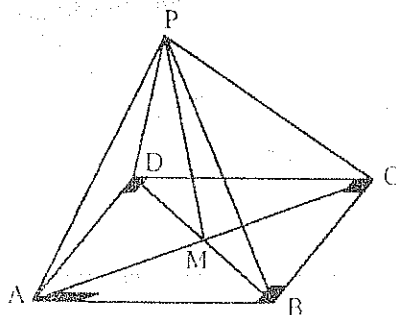
$$S_L \times \cos \alpha = S_B$$

$$\hat{\alpha} = \cos^{-1} \left(\frac{S_B}{S_L} \right), \text{ donde:}$$

S_B = Superficie de la base, y

S_L = Superficie lateral.

5.5.6. - Si la base de una pirámide es un rectángulo, la suma de los cuadrados de dos aristas laterales opuestas es igual a la suma de los cuadrados de las otras dos.

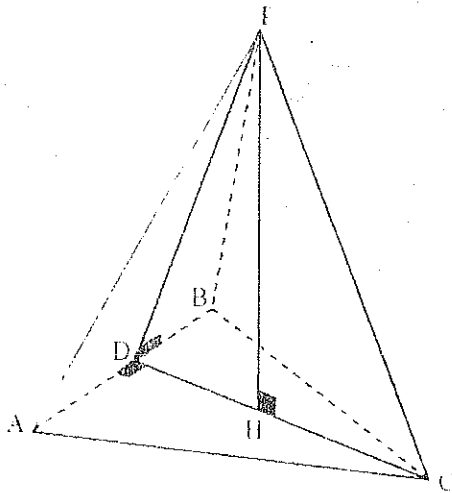


$$\Delta PAC \quad PM^2 = \frac{1}{4}(2PA^2 + 2PC^2 - AC^2)$$

$$\Delta PBD \quad PM^2 = \frac{1}{4}(2PB^2 + 2PD^2 - BD^2)$$

$$\Rightarrow PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$

5.5.7. - Si el pie de la altura de una pirámide triangular está en la altura de la base, la arista de la base relativa a esta altura se cruza perpendicularmente con la arista lateral opuesta.



$$H) \overline{PH} \perp \Delta ABC$$

$$\overline{CD} \perp \overline{AB}$$

$$T) \overline{AB} \perp \overline{PC}$$

$$D) \overline{AB} \perp \overline{DC}$$

$$\overline{AB} \perp \overline{PH}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \perp \Delta PDC$$

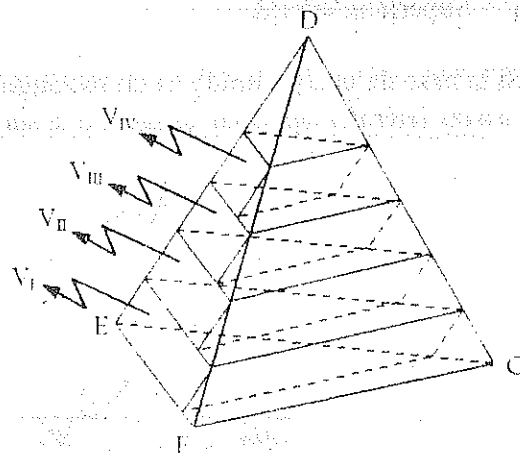
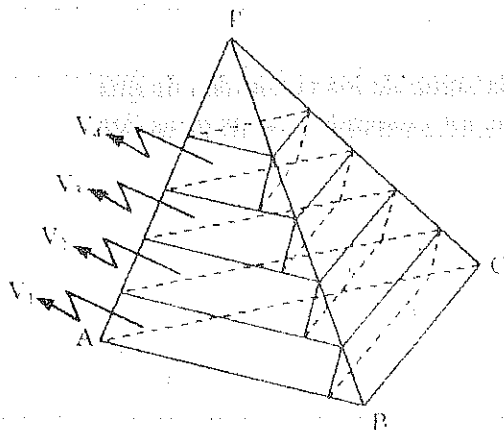
$$\Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{PC}$$

5.5.8. - Las perpendiculares trazadas desde los vértices de una pirámide triangular regular pasan por los ortocentros de las caras opuestas.

5.5.9. - Si el vértice de una pirámide es un triedro trirectángulo, el pie de la altura de la pirámide coincide con el ortocentro de la base.

* 5.6. - VOLUMEN

5.6.1. - Dos tetraedros de bases equivalentes y de alturas iguales son equivalentes.



Dividimos la altura en "n" partes congruentes y por los puntos de división trazamos planos paralelos a las bases respectivamente.

Inscribimos prismas en los tetraedros.

$$V'_{P-ABC} = V_I + V_2 + V_3 + \dots$$

$$V'_{D-EFG} = V_I + V_{II} + V_{III} + \dots$$

$$V_I = V_I$$

$$V_2 = V_{II}$$

$$V_3 = V_{III}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$V'_{P-ABC} = V'_{D-EFG}$$

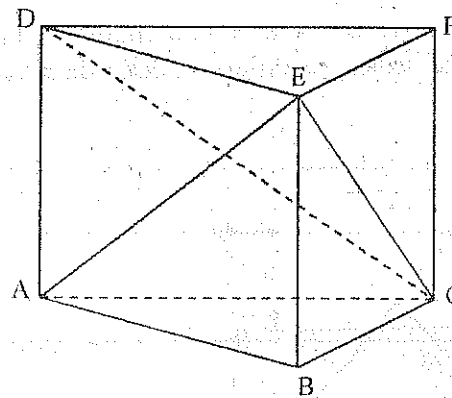
$$\text{Si } n \rightarrow \infty$$

$$V'_{P-ABC} \rightarrow V_{P-ABC}$$

$$V'_{D-EFG} \rightarrow V_{D-EFG}$$

$$\Rightarrow V_{P-ABC} \rightarrow V_{D-EFG}$$

5.6.2. - El volumen de una pirámide triangular es igual a un tercio del producto de su base por su altura.

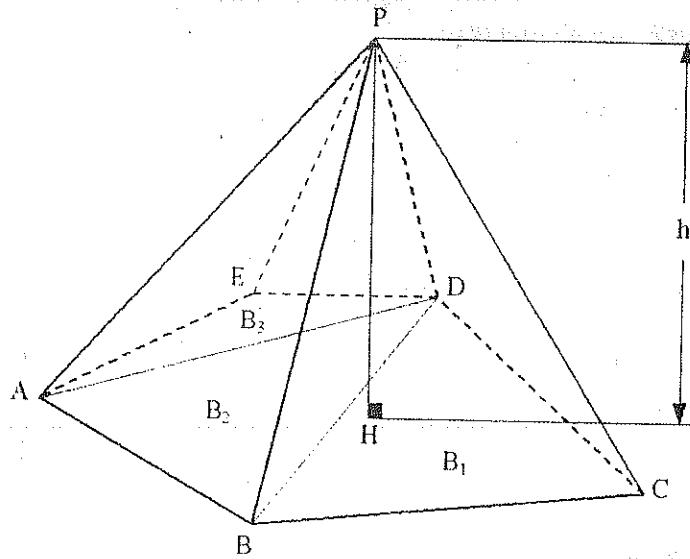


$$V_T = V_{E-ABC} + V_{E-ADC} + V_{E-DFC}$$

$$S_{\Delta ABC} \times h = 3 V_{E-ABC}$$

$$V_{E-ABC} = \frac{S_{\Delta ABC} \times h}{3}$$

5.6.3. - El volumen de una pirámide es igual a un tercio del producto de la superficie de la base por su altura.

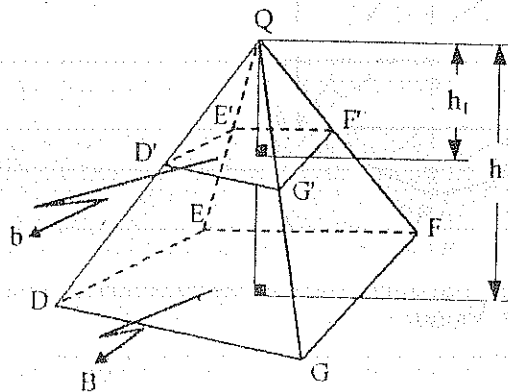


$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$$

$$V_T = \frac{B_1 \times h}{3} + \frac{B_2 \times h}{3} + \frac{B_3 \times h}{3} + \dots$$

$$V_T = \frac{B \times h}{3}$$

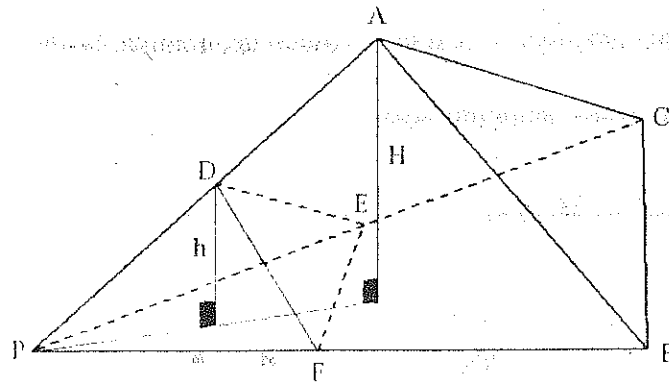
5.6.4. - Si se construye una sección paralela a la base de una pirámide, los volúmenes de las dos pirámides están en la misma razón que el cubo de la relación de dos lados homólogos.



$$\frac{V_{Q-D'E'F'G'...}}{V_{Q-BDEFG...}} = \frac{\frac{b \times h_1}{3}}{\frac{B \times h}{3}}$$

$$\frac{V_{Q-D'E'F'G'...}}{V_{Q-DEFG...}} = \frac{h_1^3}{h^3} = \frac{(D'G')^3}{(DG)^3} = \frac{(QD')^3}{(QD)^3} = \dots\dots\dots$$

5.6.5. - Si los vértices de dos pirámides son triédros congruentes, sus volúmenes están en la misma relación que los productos de sus aristas laterales.

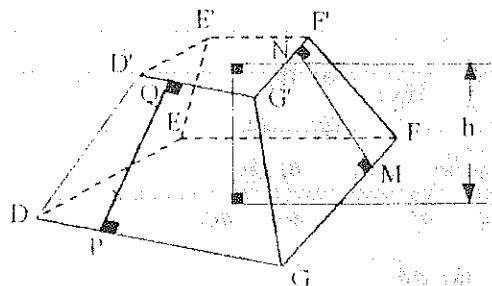


$$\frac{V_{P-DEF}}{V_{P-ABC}} = \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle PBC}} \cdot \frac{h}{H} = \frac{PE \cdot PF \cdot h}{PC \cdot PB \cdot H} = \frac{PE}{PC} \cdot \frac{PF}{PB} \cdot \frac{h}{H}$$

*5.7. - TRONCO DE PIRAMIDE

Es la parte de una pirámide comprendida entre la base y una sección paralela a la base.

5.7.1. - REPRESENTACION GRAFICA Y ELEMENTOS



BASE MAYOR (B): DEFG...

BASE MENOR (b): D'E'F'G'...

ARISTAS LATERALES: DD', EE', FF', GG'.....

CARAS LATERALES: DD'G'G, GG'FF, FF'E'E, EE'D'D,

APOTEMA(ap): Es la altura de una cara lateral, PQ, MN,

ALTURA(h): Es la perpendicular común a las dos bases

DIAGONAL: Es el segmento que une dos vértices no coplanares, DF', E'G', ...

AREA LATERAL: Es igual a la suma de las áreas de todas las caras laterales

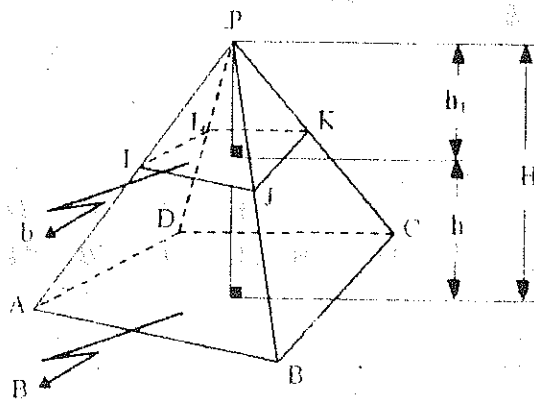
AREA TOTAL: Es la suma del área lateral más las áreas de las bases.

5.7.2. - DENOMINACION

Por las letras de una diagonal: Ejemplo: Tronco de pirámide D - F'

5.7.3. - El volumen de un tronco de pirámide es:

$$V = \frac{h}{3} (B + b + \sqrt{B \cdot b})$$



$$V_{A-K} = V_{P-ABCD} - V_{P-KLM}$$

$$V_{A-K} = \frac{B \cdot H}{3} - \frac{b \cdot h_1}{3}$$

$$\frac{B}{b} = \frac{H}{h_1}$$

$$h_1 = \frac{h \cdot b}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \quad \text{y} \quad H = \frac{h \sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

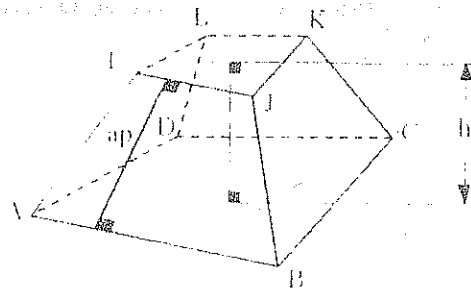
$$V_{A-K} = \frac{B}{3} \cdot \frac{h \sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} - \frac{b}{3} \cdot \frac{h \sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

$$V = \frac{h}{3} (B + b + \sqrt{B \cdot b})$$

5.8. - TRONCO DE PIRAMIDE REGULAR

5.8.1. - PROPIEDADES

- Las bases son polígonos regulares semejantes.
- El segmento que une los centros de las bases es la altura del tronco.
- Todas las aristas laterales son congruentes.
- Todas las apotemas son congruentes.
- Los ángulos diedros en las bases son respectivamente congruentes.
- Los ángulos diedros entre las caras laterales son congruentes.
- El área lateral es igual al producto de la semisuma de los perímetros de las bases por el apotema.



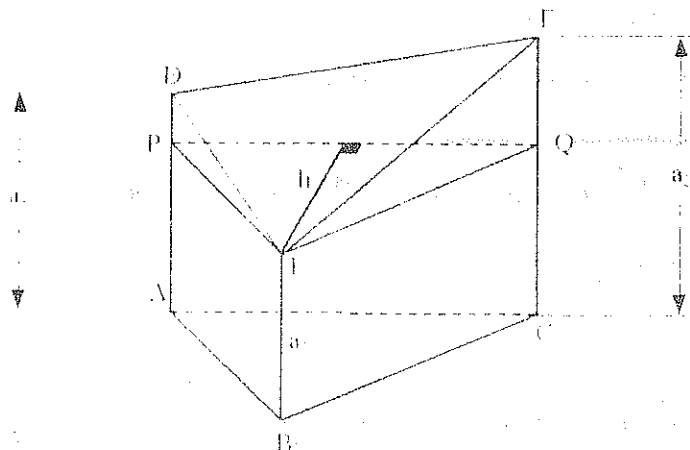
$$S_L = S_{AIDB} + S_{BIKC} + S_{CKJD} + \dots$$

$$S_L = \left(\frac{AB + IJ}{2} \right) ap + \left(\frac{BC + JK}{2} \right) ap + \left(\frac{CD + LK}{2} \right) ap + \dots$$

$$S_L = \left(\frac{P_B + P_b}{2} \right) ap = (P_B + P_b) ap$$

5.8.2. - El volumen de un tronco de prisma triangular recto es:

$V = \frac{B}{3} (a_1 + a_2 + a_3)$, donde: B = superficie de la base, a_1, a_2, a_3 son las aristas laterales.



$$\triangle PEQ \parallel \triangle ABC$$

$$V = V_{\text{Prisma A-Q}} + V_{\text{pirámide E-PDEFQ}}$$

$$V = B \cdot a_1 + \frac{1}{3} \left(\frac{DP + FQ}{2} \right) PQ \cdot h$$

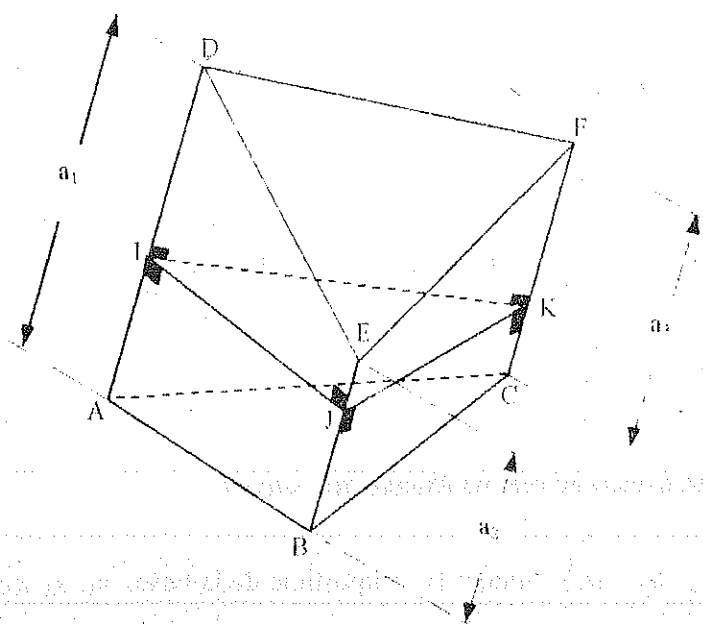
$$V = B \cdot a_1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a_3 - a_1 + a_2 - a_1}{2} \right) PQ \cdot h$$

$$V = \frac{B}{3} (a_1 + a_2 + a_3)$$

5.8.3. - El volumen de un tronco de prisma triangular oblicuo es:

$$V = \frac{A_{S.R.}}{3} (a_1 + a_2 + a_3), \text{ donde; } A_{S.R.} \text{ es el área de la sección recta y } a_1,$$

a_2, a_3 son las aristas laterales.



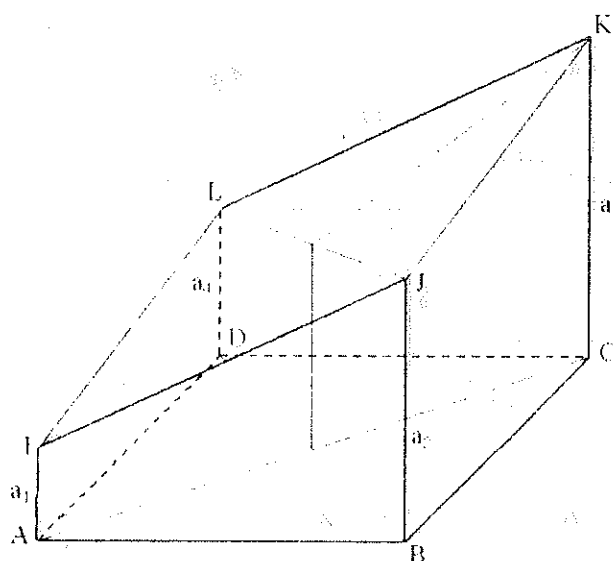
$$V = V_{\text{Tronco A-K}} + V_{\text{Tronco I-E}}$$

$$V = \frac{A_{LJK}}{3} (AI + BJ + CK) + \frac{A_{LJK}}{3} (ID + JE + FK)$$

$$V = \frac{A_{S.R.}}{3} (a_1 + a_2 + a_3)$$

5.8.4.- El volumen de un tronco de paralelepipedo recto es:

$V = B \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)$, donde: B es la superficie de la base y a_1, a_2 son dos aristas laterales opuestas.



$$V = V_{ABC-IJK} + V_{ADC-IJK}$$

$$V = \frac{A_{ABCD}}{2} \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right) + \frac{A_{ABCD}}{2} \left(\frac{a_1 + a_4 + a_3}{3} \right)$$

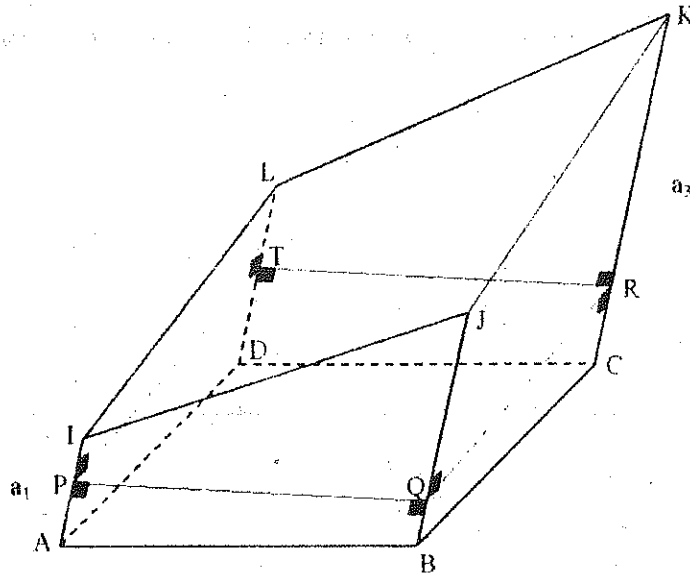
$$V = \frac{A_{ABCD}}{6} (2a_1 + 2a_3 + a_2 + a_4)$$

$$a_1 + a_3 = a_2 + a_4$$

$$V = B \left(\frac{a_1 + a_3}{2} \right)$$

5.8.5. - El volumen de un tronco de paralelepipedo oblicuo es:

$F = A_{S.R.} \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)$, donde: $A_{S.R.}$ es el área de la sección recta y a_1, a_2 son dos aristas opuestas.



$$V = V_{P-C} + V_{P-K}$$

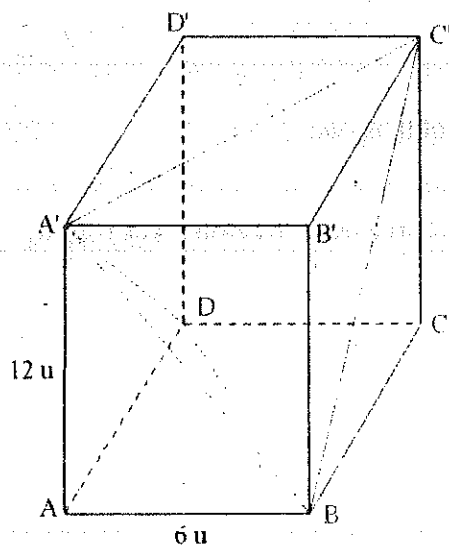
$$V = A_{S.R.} \left(\frac{PI + RK}{2} \right) + A_{S.R.} \left(\frac{PA + RC}{2} \right)$$

$$V = A_{S.R.} \left(\frac{AI + KC}{2} \right)$$

$$V = A_{S.R.} \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)$$

5.9. - EJERCICIOS

1. -

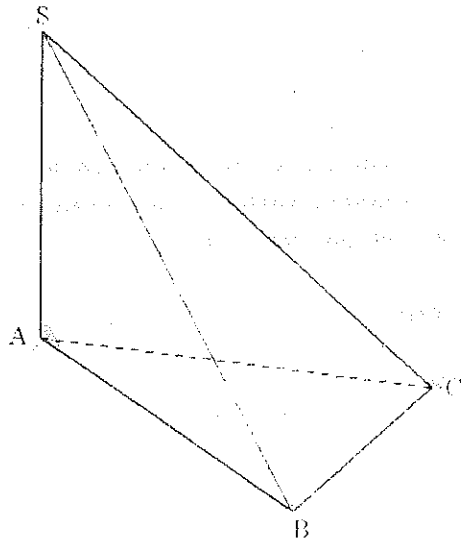


H) A - C' Prisma regular

T) $V_{C'-ABD} = ?$

Resp: $114 u^3$

2. -



H) $\overline{SA} \perp \Delta ABC$
 $BC = 6 \text{ u}$

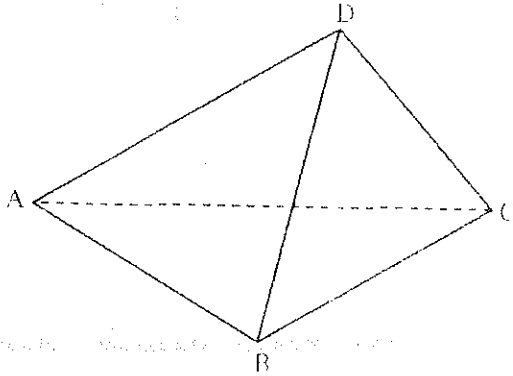
$\angle ACB = 30^\circ$
 $\text{Diedro } \overline{BC} = 45^\circ$

I) $V_{S-ABC} = ?$

Resp: 6.76 u^3

3. - En un tetraedro regular de arista 15 u, ¿A qué altura de la base se debe trazar una sección paralela a ella, para que los volúmenes de los sólidos formados sean iguales?
 Resp: 12.25 u.
4. - En una pirámide cuadrangular regular, de lado de la base 10 cm y altura 20 cm. Determinar el ángulo y la distancia entre una diagonal de la base y una apotema de la pirámide.
 Resp:
5. - En un tetraedro regular de arista 10 u. Calcular el ángulo entre las caras laterales.
 Resp: 70.53° .
6. - En una pirámide cuya base es un triángulo rectángulo de catetos 6 u y 8 u, las aristas laterales miden 10 u cada una. Calcular la altura de la pirámide.
 Resp: 8.67 u
7. - La base de un prisma recto es un triángulo isósceles, los lados iguales miden 10 u, ángulo en la base 55° . Por la base del triángulo y el vértice opuesto del triángulo de la base superior se traza un plano que forma un ángulo de 40° . Determinar el volumen de la pirámide cuadrangular formada.
 Resp:
8. - La superficie lateral de una pirámide triangular regular es 100 u^2 . Determinar el lado de la base si el ángulo entre la cara lateral y la base es 50° .
 Resp:
9. - En un tetraedro regular de arista 10 u. Se divide la altura en tres partes iguales y se traza, por los puntos de división, planos paralelos a la base. Hallar el volumen del sólido intermedio.

13. -



H) $AC = 4u$

$AB = AD = 4\sqrt{2}u$

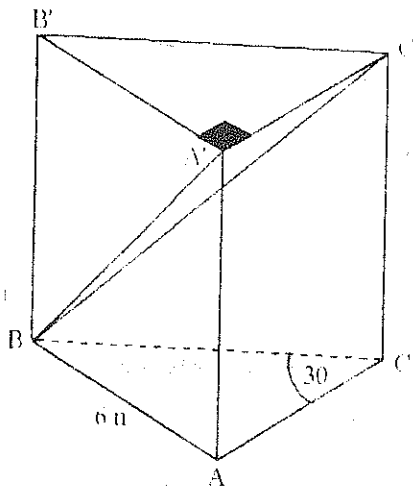
$BC = CD = 6u$

$BD = 8u$

D) $V_{D-ABC} = ?$

Resp: $19.73 u^3$

14. -



H) $ABC - A'B'C'$ Prisma recto

$\angle A'B'C' = 40^\circ$

D) $V_{B-A'C'A} = ?$

Resp:

15. - Un tetraedro regular de arista 20 u contiene agua hasta una altura de 5 u. Calcular el volumen de agua.

Resp: $627.8 u^3$

16. - En una pirámide triangular regular las aristas laterales están inclinadas un ángulo de 50° con la base. Hallar el ángulo de inclinación de las caras laterales con la base.

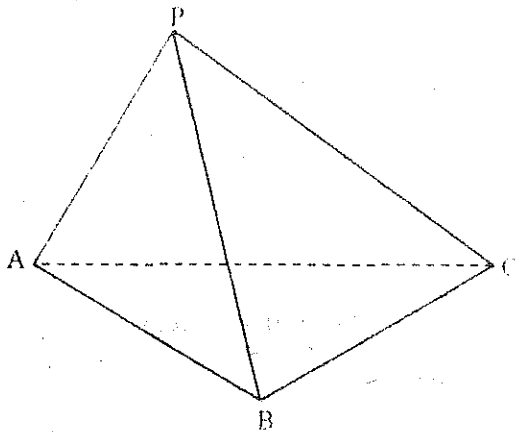
Resp:

17. - Por un punto tomado sobre la arista lateral de un prisma triangular regular, lado de la base 15 u, se traza dos planos, uno de ellos pasa por un lado de la base inferior del prisma y forma un ángulo de 45° con la base. El otro pasa por el lado paralelo a la base superior. Determinar el área lateral y el volumen de la pirámide que tiene por base el plano que pasa por los lados dados y el vértice es el punto dado. Arista lateral del prisma 20 u.

Resp:

18. - En un tetraedro regular $P - ABC$, con las aristas PC , PB y en la prolongación de la arista PA , se dan los puntos D , M y Q tal que; $CD = 4 u$; $AM = MB = 5 u$; $PB = BQ = 10 u$. Determinar la relación de volúmenes que se forman al construir un plano que pasa por los puntos M , Q y D .
Resp:

19. -



H) $P - ABC$ Pirámide triangular regular

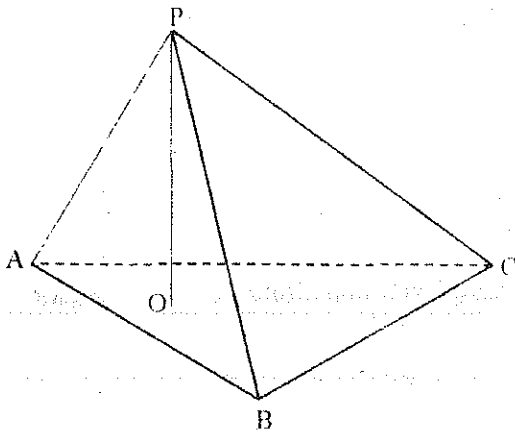
$$S_T = 750 u^2$$

$$\text{Diedro } B - C = 65^\circ$$

T) $AB = ?$

Resp: $32.08 u$

20. -



H) $P - ABC$ Pirámide triangular regular

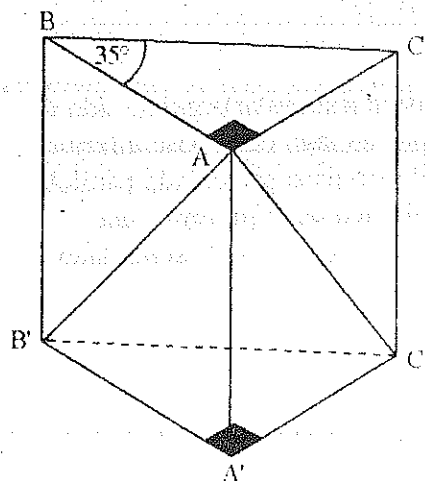
$$PA = 9 u$$

$$PO = h = 6 u$$

T) $\text{Diedro } B - C = ?$

Resp:

21. -



H) $A - B'$ Prisma recto

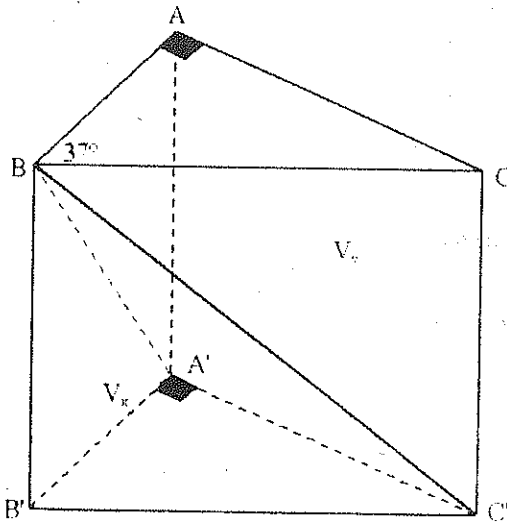
$$BC = 10 u$$

$$\text{Diedro } B' - C' = 70^\circ$$

T) $V_{A - A'B'C'} = ?$

Resp:

22. -

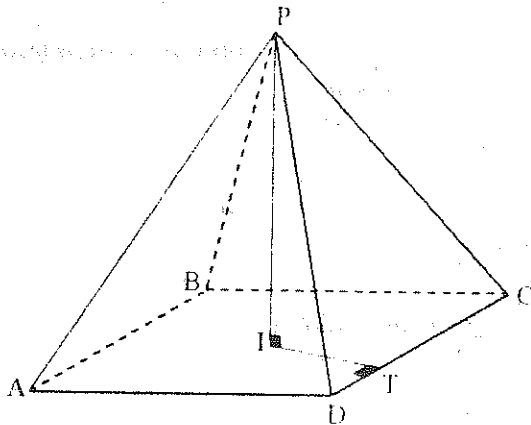


H) A - C' Prisma recto
 $AB + BC = 15 \text{ u}$
 Diedro A' - C' = 65°

T) $V_x = ?$
 $V_y = ?$

Resp:

23. -



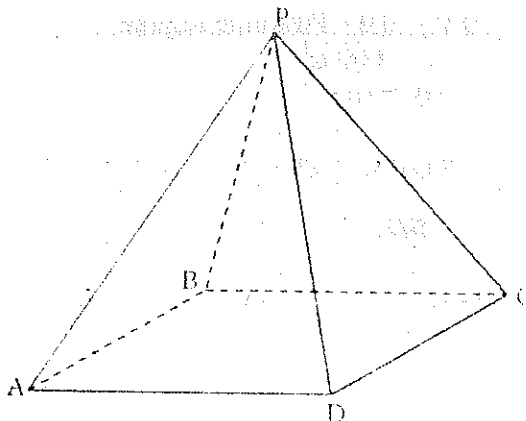
H) $\square ABCD$ Rombo de centro I

$\angle BAI = 30^\circ$
 $IT = r = 5 \text{ m}$
 Diedro A - B = 60°

T) $S_T = ?$
 $V = ?$

Resp: 346.4 u^2 ; 333.33 u^3

24. -



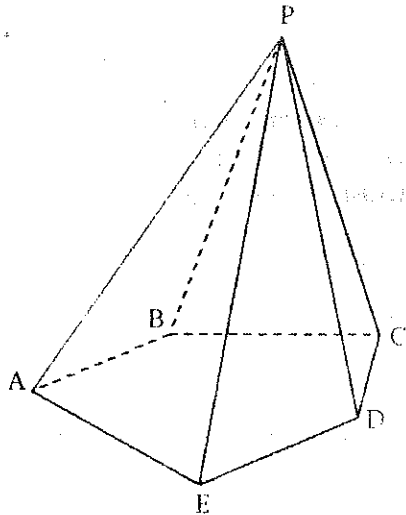
H) P - ABCD Pirámide cuadrangular
 regular
 $PC = 15 \text{ u}$

$\angle PAC = 70^\circ$

T) $V = ?$

Resp: 245.6 u^3

25. -



H) P - ABCDE Pirámide pentagonal
regular

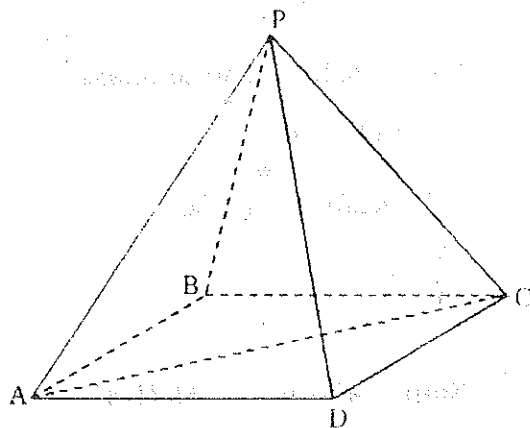
$$S_B = 500 \text{ u}^2$$

$$S_L = 800 \text{ u}^2$$

T) Diedro D - C = ?

Resp: 51.31°

26. -



H) P - ABCD Pirámide cuadrangular
regular

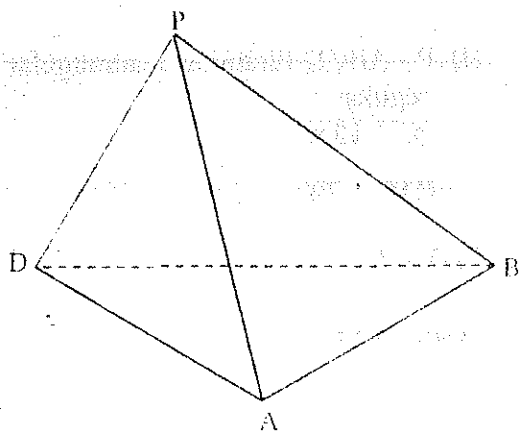
$$V = 70.4 \text{ u}^3$$

$$\angle PCA = 68^\circ$$

T) PA = ?

Resp: 24.42 u

27. -



H) P - ABD Pirámide regular

$$V = 2000 \text{ u}^3$$

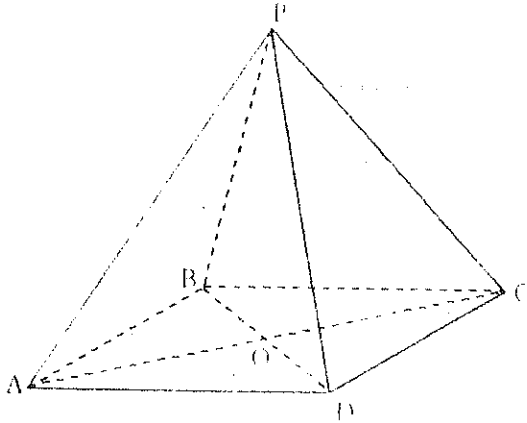
$$AB = 10 \text{ u}$$

T) Diedro A - B = ?

$$\angle PBD = ?$$

Resp:

28. -



II) P - ABCD Pirámide cuadrangular

□ABCD Rectángulo

$$AC = 6 \text{ u}$$

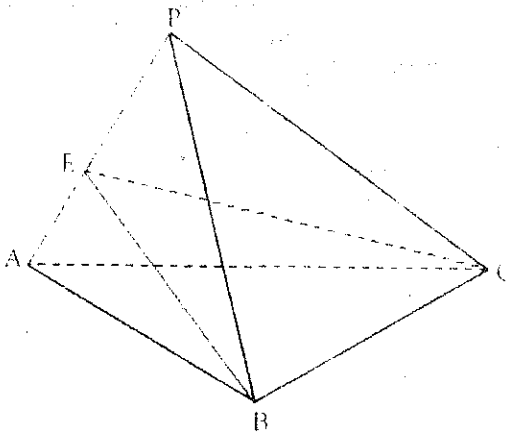
$$\angle COD = 60^\circ$$

$$\angle PAO = \angle PCO = 70^\circ$$

D) $V = ?$

Resp:

29. -



II) P - ABC Pirámide triangular

regular $\overline{AP} \perp \text{Plano BEC}$

$$AB = 5 \text{ u}$$

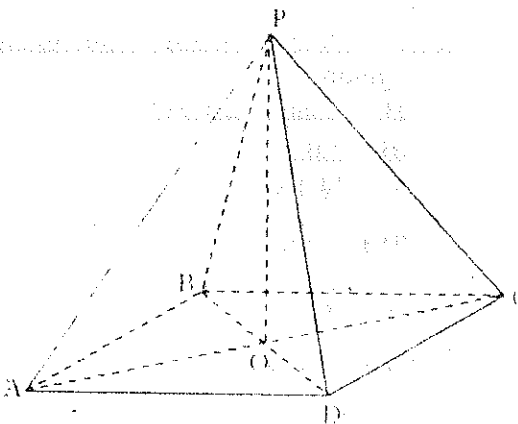
$$PE = 7$$

$$EA = 2$$

D) $S_T = ?$

Resp:

30. -



II) P - ABCD Pirámide cuadrangular

regular

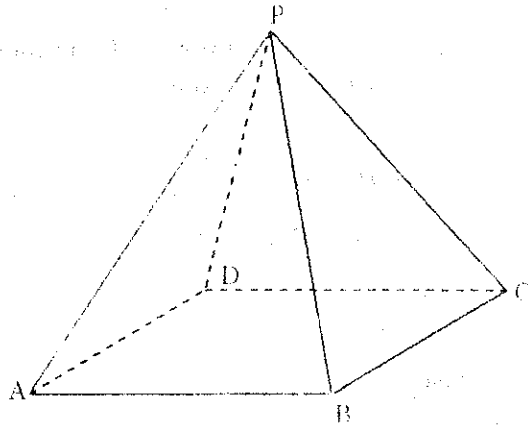
$$\angle BPC = 40^\circ$$

$$S_T = 20 \text{ u}^2$$

D) $PO = ?$

Resp:

31. -



II) P - ABCD Pirámide cuadrangular regular

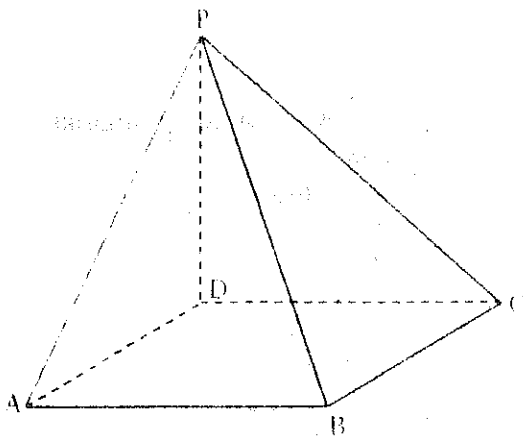
$$PA = 6.5 \text{ u}$$

$$\text{Diedro } P - A = 60^\circ$$

T) $V = ?$

Resp:

32. -



II) P - ABCD Pirámide cuadrangular

$\overline{AD} \perp \text{Plano ABCD}$

$$PD = 5 \text{ u}$$

ABCD Rectángulo

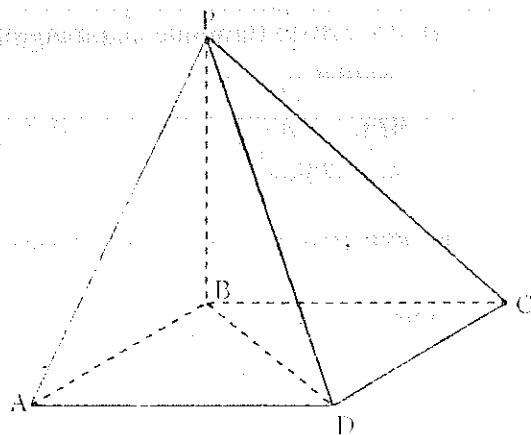
$$\angle PAD = 75^\circ$$

$$\angle PCD = 65^\circ$$

T) $V = ?$

Resp:

33. -



II) P - ABCD Pirámide cuadrangular regular

$\overline{PB} \perp \text{Plano ABCD}$

$$AB = 5 \text{ u}$$

$$PD = 14.14 \text{ u}$$

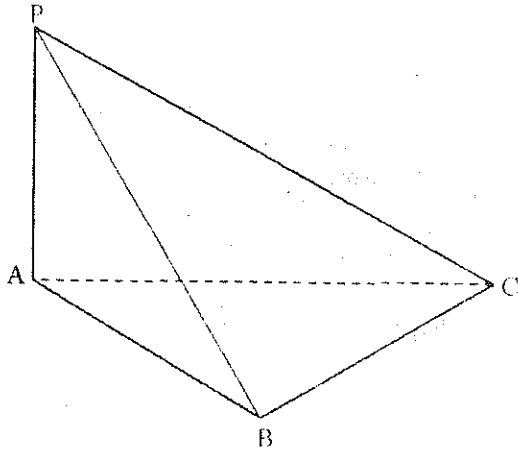
$$\angle PDB = 60^\circ$$

T) $PA = PC = ?$

$$\angle PAB = \angle PCB = ?$$

Resp:

34. -



H) P - ABC Pirâmide triangular

$$AB = BC = CA = 5u$$

$$PA \perp \text{Plano ABC}$$

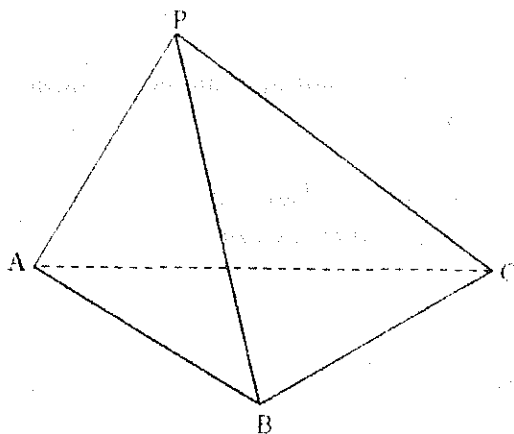
$$PBA = PCA = 55^\circ$$

T) $S_{\Delta PBC} = ?$

Diedro B - C = ?

Resp:

35. -



H) P - ABC Pirâmide triangular regular

$$AB = 12u$$

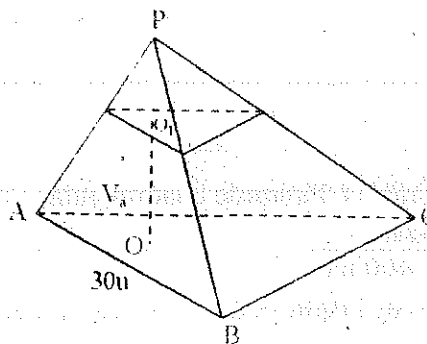
$$\text{Diedro B - C} = 70^\circ$$

T) $S_T = ?$

$$V = ?$$

Resp:

36. -



H) P - ABC Tetraedro regular

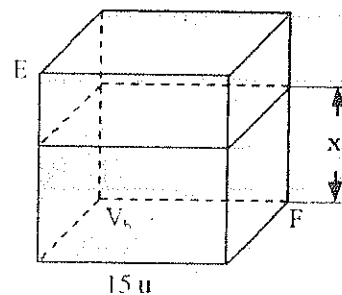
E - F Cubo

$$O_1O = 22.5u$$

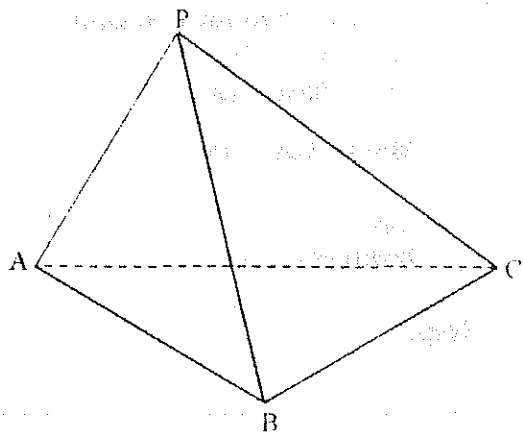
$$V_a = V_b$$

T) $x = ?$

Resp:



37. -

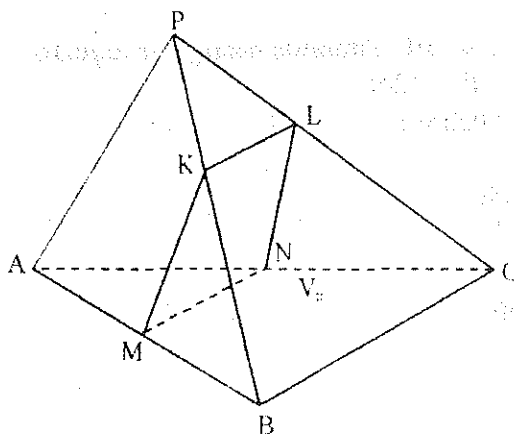


H) P - ABC Pirámide triangular regular
Diedro B - C = 45°

T) Diedro P - C = ?

Resp:

38. -

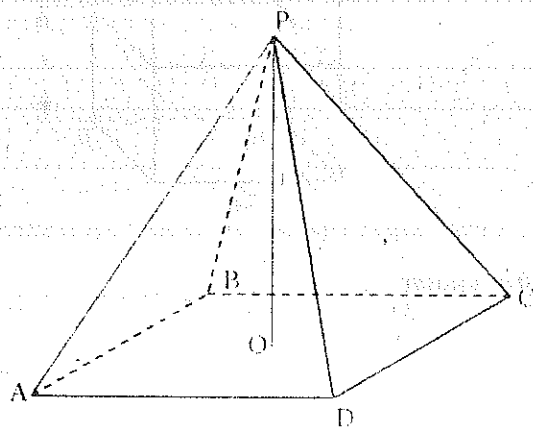


H) P - ABC Pirámide triangular regular
AB = 3.8 u
Diedro A - B = 80°
[KLM] = Plano ABC
M y N puntos medios

T) V_N = ?

Resp: 2.45 u^3

39. -

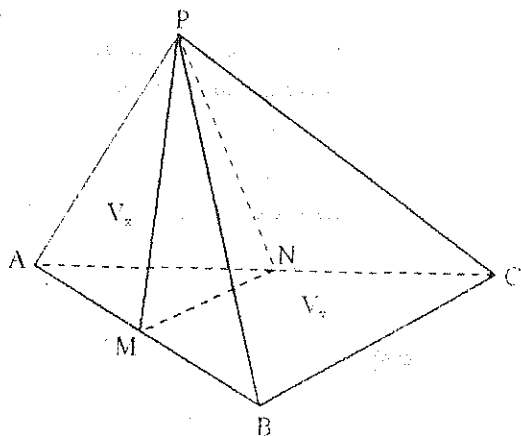


H) P - ABCD Pirámide cuadrangular regular
 $S_L = 400 \text{ u}^2$
PO = h = 10 u

T) AB = ?

Resp: 12.1 u

40. -



H) P - ABC Pirámide triangular regular

$$AB = 9 \text{ u}$$

M y N puntos medios

$$\text{Diedro M - N} = 60^\circ$$

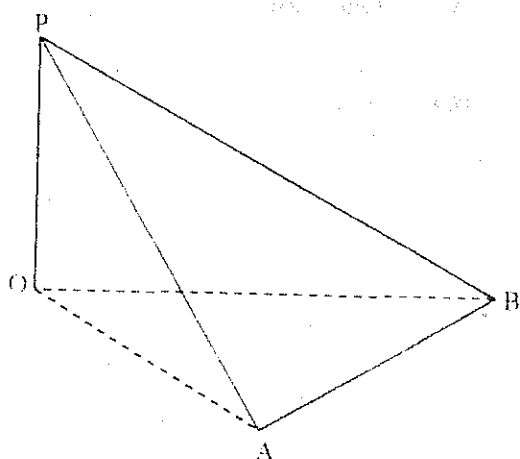
$$\text{T) } S_{\Delta PMN} = ?$$

$$V_x = ?$$

$$V_y = ?$$

Resp:

41. -



H) P - ABCD..... Pirámide regular

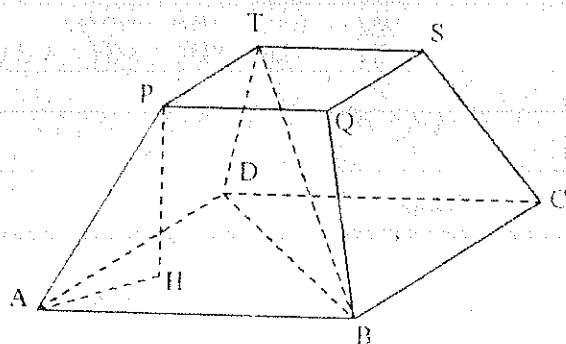
$$\text{Diedro A - B} = 60^\circ$$

$$S_L = 40 \text{ u}^2$$

$$\text{T) } V_{P-ABCD} = ?$$

Resp:

42. -



H) T - B Tronco de pirámide cuadrangular regular

$$PH = h = 9 \text{ m}$$

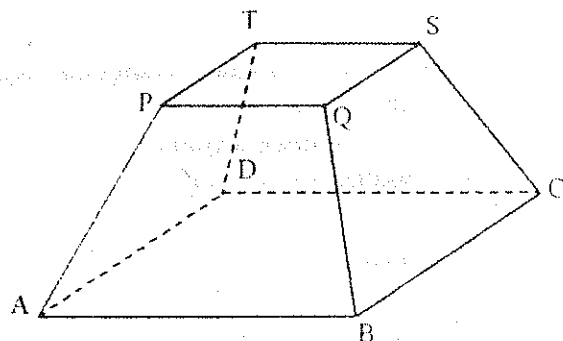
$$P.H = 75^\circ$$

$$T.B.D = 42^\circ$$

$$\text{T) } S_L = ?$$

Resp:

43. -



H) T - B Tronco de pirámide cuadrangular regular

$$AB = 3\sqrt{3} \text{ u}$$

$$PQ = 3 \text{ u}$$

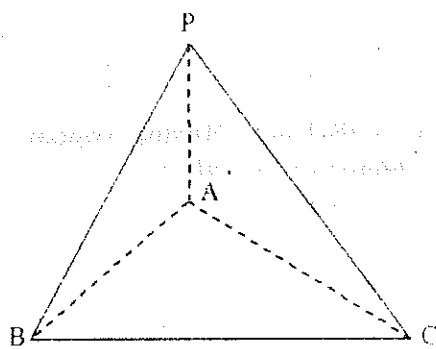
$$\text{Diedro de arista } B - C = 70^\circ$$

T) $S_1 = ?$

$$V = ?$$

Resp:

44. -



H) P - ABC Pirámide triangular

$$\overline{PA} \perp \text{Plano } ABC$$

$$AB = 4.2 \text{ u}$$

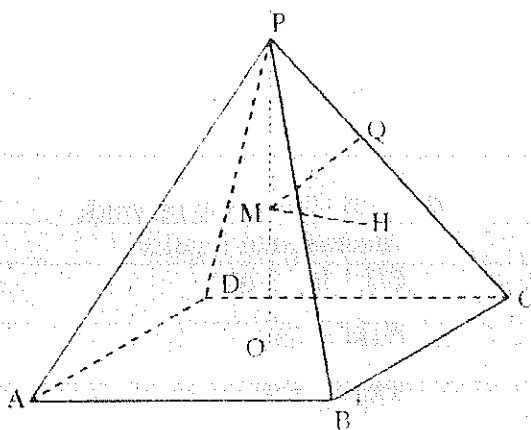
$$\angle PBA = \angle PCA = 60^\circ$$

$$\angle BAC = 90^\circ$$

T) $V = ?$

Resp:

45. -



H) P - ABCD Pirámide cuadrangular regular

$$PM = MO$$

$$\overline{MQ} \perp \overline{PC} ; MQ = 1.8 \text{ u}$$

$$\overline{MH} \perp \text{Plano } PBC ; MH = 1.2 \text{ u}$$

T) $V = ?$

Resp:

46. - La proyección de un tetraedro $P - ABC$, en un plano Q , es un cuadrado de lado 1 cm. Si las proyecciones de los vértices del tetraedro en el plano Q , son: 1 cm, 2 cm, 3 cm y 5 cm respectivamente. Determinar el volumen del tetraedro.

Resp:

47. - Se tiene un tronco de pirámide cuadrangular regular, el lado de la base mayor mide 20 u, el lado de la base menor 15 u, apoyado en su base mayor, contiene agua hasta una altura de 10 u. Calcular el volumen de agua.

Resp:

48. - Se tiene un tronco de pirámide triangular regular de dimensiones, lado de la base mayor 10 u, lado de la base menor 5 u, y de altura 9 u. ¿A qué distancia de la base mayor habrá que trazar un plano paralelo a las bases para que lo divida en dos sólidos equivalentes?

Resp:

49. - En un tronco de prisma cuadrangular regular, el lado de la base es e u, el ángulo entre las bases es 40° , dos aristas laterales opuestas miden 8 u. Calcular la longitud de las otras dos aristas laterales.

Resp:

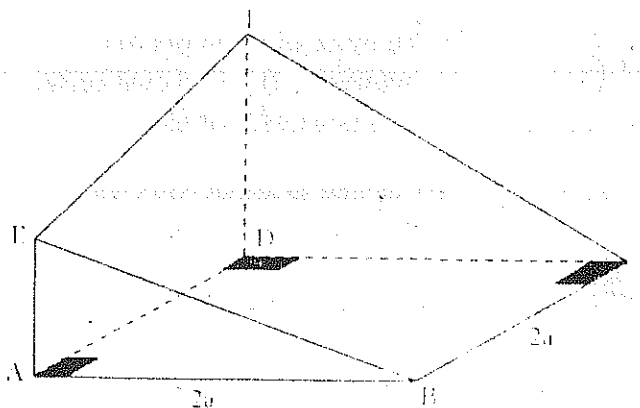
50. - Las bases de un tronco de pirámide regular son 4 m^2 y 2 m^2 . Calcular el área de la sección paralela a las bases construida a una distancia igual a la tercera parte de su altura, a partir de la base mayor.

Resp: 3.25 m.

51. - Una de las aristas de un tetraedro mide 5 m. Si el tetraedro se proyecta en un plano perpendicular a esta arista, el área de la proyección es 5 m^2 . Calcular el volumen del tetraedro.

Resp:

52. -



H) $\overline{FD} \perp$ Plano $A - C$

$$FD = 14 \text{ u}$$

$\overline{EA} \perp$ Plano $A - C$

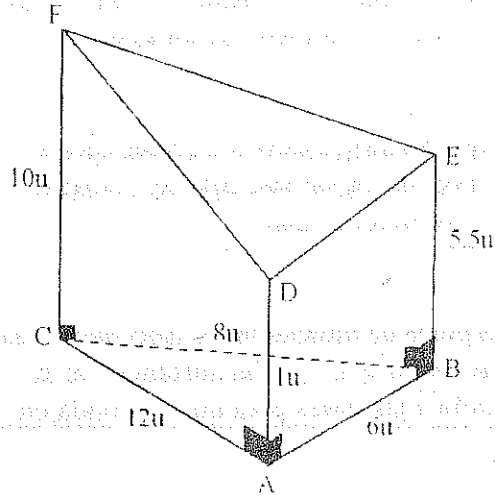
$$EA = 7 \text{ u}$$

$$a = 7 \text{ u}$$

T) $V = 2$

Resp: 1143.33 u^3

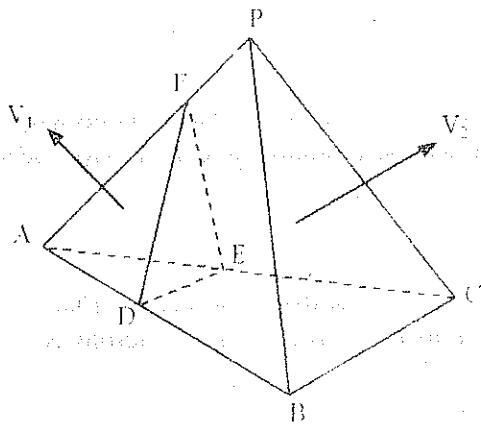
53. -



T) Hallar el volumen de la siguiente figura.

Resp: 117.32 u^3

54. -



H) $BD = 2DA$

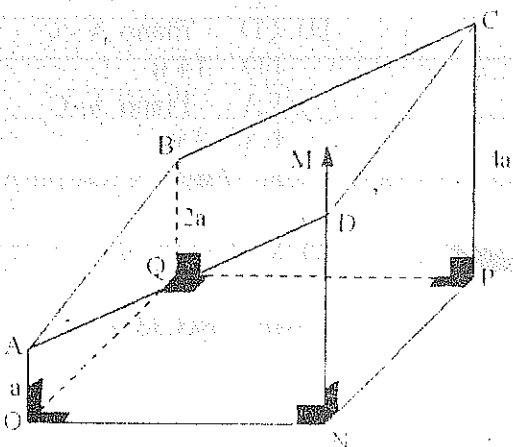
$CE = 2AE$

$AF = 2FP$

T) $\frac{V_2}{V_1} = ?$

Resp: $\frac{25}{2}$

55. -

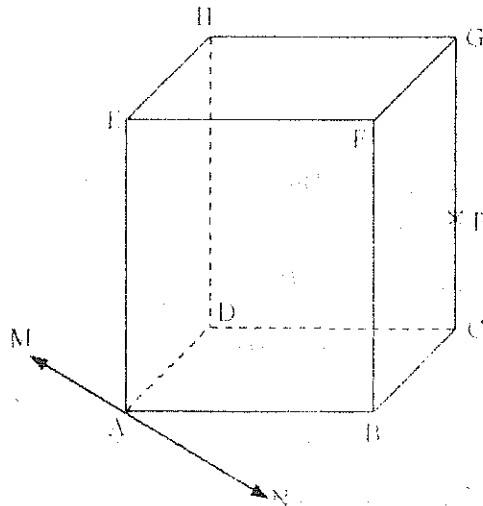


H) Se traza un plano por los puntos A, B y C el cual corta a la recta MN en D.

I) Calcular la arista ND y el volumen del sólido.

Resp: $3a ; 10 a^3$

56. -



H) A - G Prisma cuadrangular regular

$$\frac{AB}{MN} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{MN}{AC}$$

de ABCD

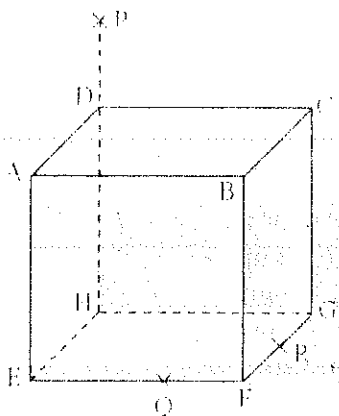
T) Ángulo entre la sección que pasa por MN y P si el volumen comprendido entre esta sección y ABCD es 6.75 cm^3

Resp:

57. - La base de un prisma oblicuo es un triángulo ABC, $C = 90^\circ$, $A = 40^\circ$, $b = 8 \text{ u}$. La cara lateral del prisma que pasa por el lado AC está inclinada un ángulo de 50° con la base. Se traza un plano que pasa por la hipotenusa AB y el vértice C' del triédrico opuesto. Determinar el volumen de la pirámide triangular obtenida sabiendo que sus aristas laterales son iguales.

Resp:

58. -



H) A - G Cubo

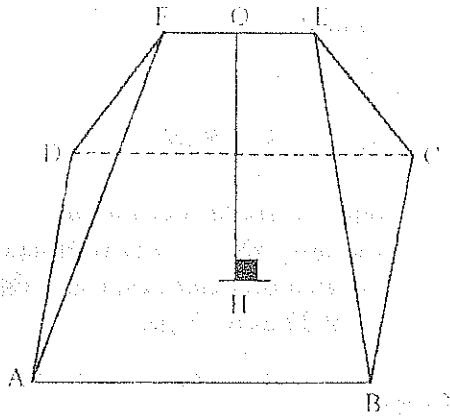
$$AE = 8 \text{ u} : PD = 4 \text{ u}$$

$$QF = 2 \text{ u} : GR = 4 \text{ u}$$

T) Relación de volúmenes formados al construir la sección que pasa por R, Q y P.

Resp:

59. -



H) ABCD rectángulo

$$AB = 8 \text{ m}$$

$$BC = 10 \text{ m}$$

$$\overline{OH} \perp \text{Plano A - C}$$

$$\overline{OH} = 5\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\overline{FE} \parallel \text{Plano A - C}$$

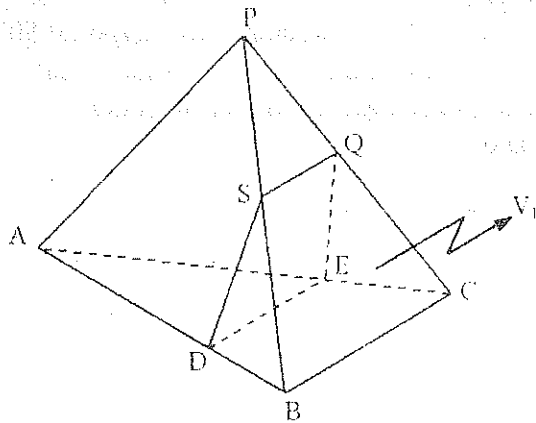
$$FE = 2 \text{ m}$$

$$FA = FD = EB = EC$$

T) $V = ?$

$$\text{Resp: } 150\sqrt{3} \text{ m}^3$$

60. -



H) P - ABC Tetraedro regular

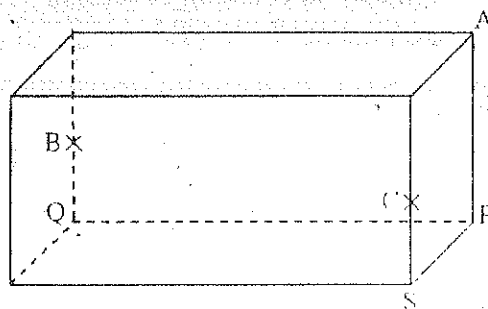
$$SB = QC = a/3$$

$$DB = EC = a/3$$

T) $V_1 = ?$

$$\text{Resp: } \frac{7a^3}{324}$$

61. -



$$H) AP = 20 \text{ m}$$

$$BQ = 4 \text{ m}$$

$$CS = 3 \text{ m}$$

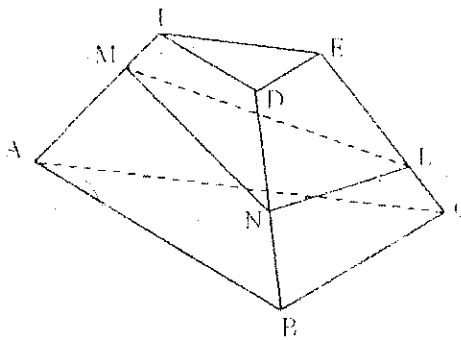
$$SP = 8 \text{ m}$$

$$PQ = 10 \text{ m}$$

T) Determinar la relación de volúmenes en que queda dividido el paralelepípedo rectángulo, por la sección que pasa por los puntos A, B y C.

Resp:

62. -

H) $\angle MBAC = 90^\circ$ $a = 10 \text{ m}$ $\angle MABC = 30^\circ$

Ángulos entre las aristas
laterales y la base $= 70^\circ$

La base menor del tronco se
encuentra a 10 m de altura.

$$FM = \frac{1}{4} FB$$

$$DN = \frac{3}{5} DA$$

$$EL = \frac{5}{6} EC$$

T) Volumen comprendido entre
las bases DEF y LMN.

Resp:

63. - Si en una pirámide $P - ABC$: $AB = AC = 10 \text{ m}$; $BC = 16 \text{ m}$; $PB = PC = 10 \text{ m}$;
 $PA = 6 \text{ m}$ y $PA \perp BC$. Calcular su volumen.

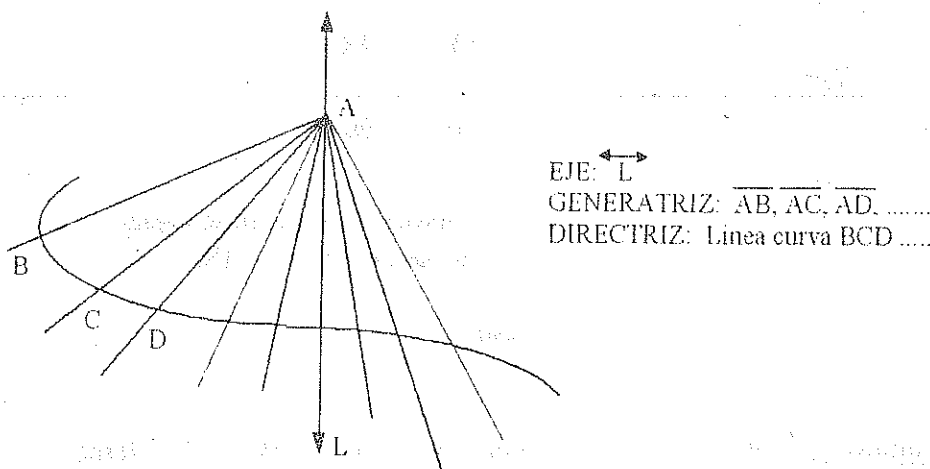
Resp:

UNIDAD 6

6. - CONOS

6.1. - SUPERFICIE CONICA

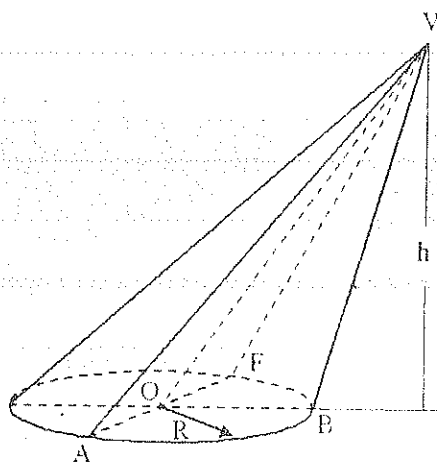
Es la superficie engendrada por una recta que se mueve pasando por un punto fijo y apoyándose constantemente sobre una línea curva.



6.2. - CONO CIRCULAR

Es el sólido geométrico limitado por una superficie circular.

6.3. - ELEMENTOS

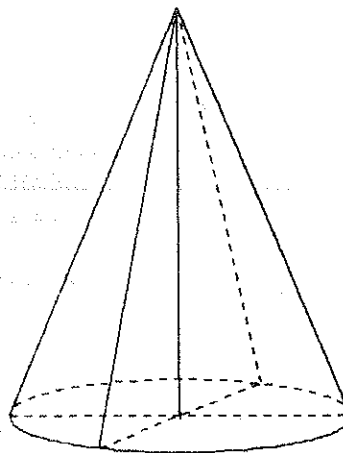


EJE: \overline{VO}
 GENERATRIZ: \overline{VA} , \overline{VB} ,g
 DIRECTRIZ: $\odot(O, R)$
 BASE: $\odot(O, R)$
 ALTURA: h (perpendicular bajada desde el vértice a la base)
 AREA LATERAL: Es el área de la superficie cónica.
 AREA TOTAL: Es el área lateral más el área de la base
 SECCIÓN AXIAL: Es la sección que contiene el eje del cono. VAF.

6.4. - CLASIFICACION

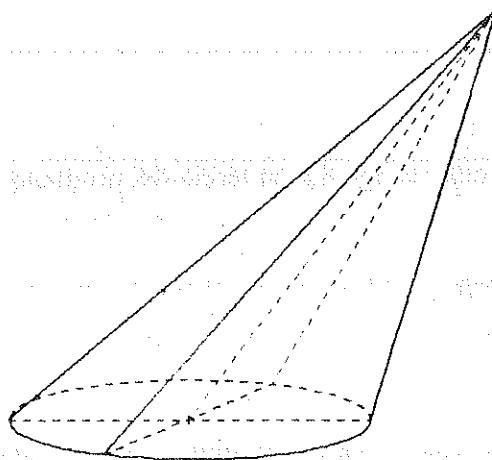
6.4.1. - CONO CIRCULAR RECTO O DE REVOLUCION

Es aquel en el cual, el eje es perpendicular a la base.



6.4.2. - CONO CIRCULAR OBLICUO

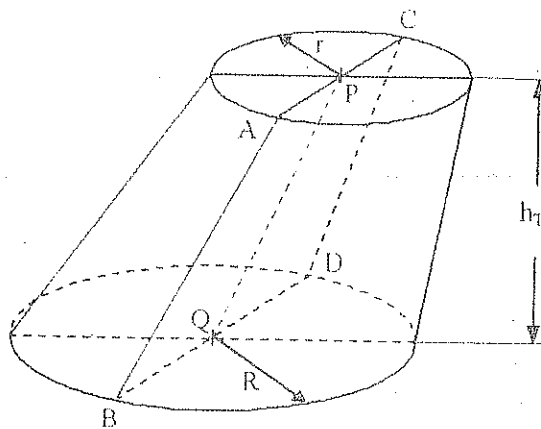
Es aquel, en el cual, el eje no es perpendicular a la base.



6.5. - TRONCO DE CONO

Es la parte de un cono comprendida entre la base y una sección paralela a la base.

6.5.1. - ELEMENTOS



EJE: \overline{PQ}
 BASE MAYOR: $\odot(Q, R)$
 BASE MENOR: $\odot(P, r)$
 GENERATRIZ: $\overline{AB}, \overline{CD}, \dots, g$
 ALTURA: h_T . Perpendicular
 común a las bases.

6.6. - En todo cono circular se puede inscribir y circunscribir pirámides que tengan por aristas laterales las generatrices del cono, y por base, polígonos inscritos y circunscritos a la base. Por consiguiente se puede considerar al cono circular como una pirámide de infinito número de caras.

6.7. - El área lateral de un cono de revolución es igual al producto del semiperímetro de la base por su generatriz.

$$S_L = \frac{P_B \cdot g}{2} = \pi R g$$

6.8. - El volumen de un cono circular es igual a un tercio del producto de su base por su altura.

$$V = \frac{S_B \cdot h}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

6.9. - En todo tronco de cono circular se puede inscribir y circunscribir troncos de pirámides, que tengan por aristas las generatrices, y por bases polígonos inscritos y circunscritos a las bases del cono. Por consiguiente se puede considerar al tronco del cono circular como un tronco de pirámide de infinito número de caras.

6.10. - El área lateral de un tronco de cono de revolución es igual al producto de la semisuma de los perímetros de las bases por su generatriz.

$$S_L = \left(\frac{P_B + P_b}{2} \right) g = \pi(R + r)g$$

6.11. - El volumen de un tronco de cono de revolución es igual a:

$$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{B \times b}) = \frac{h}{3}(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi Rr)$$

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \times r)$$

6.12. - Dos conos circulares rectos son semejantes, si son engendrados por triángulos semejantes.

6.13. - Las áreas laterales o totales de dos conos circulares semejantes son entre sí como los cuadrados de sus lados homólogos y sus volúmenes como el cubo de dos lados homólogos.

$$\frac{S_L}{S_{L1}} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{g^2}{g_1^2} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{S_T}{S_{T1}} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{g^2}{g_1^2} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{R^3}{R_1^3} = \frac{g^3}{g_1^3} = \dots\dots\dots$$

6.14. - RELACION PIRAMIDE - CONO DE REVOLUCION

6.14.1. - PIRAMIDE INSCRITA EN UN CONO

- ♦ La base de la pirámide es un polígono inscrito en la base del cono
- ♦ Los vértices coinciden
- ♦ Tienen la misma altura

6.14.2. - PIRAMIDE CIRCUNSCRITA A UN CONO

- ♦ La base de la pirámide es un polígono circunscrito a la base del cono
- ♦ Los vértices coinciden
- ♦ Tienen la misma altura

6.15. - EJERCICIOS

1. - Dado un cono de revolución de 12m de altura, dividir ésta en tres partes de suerte que los planos paralelos a la base trazados por los puntos obtenidos dividan la superficie lateral del cono en tres partes equivalentes.
Resp: 6.93m ; 9.8m
2. - La generatriz de un cono de revolución es igual al desarrollo del círculo de la base, y su área lateral es de 4m^2 . Determinar la altura del cono.
Resp: 2.79m
3. - Se da un cono de revolución de 3m de radio en la base y de 4m de altura. Determinar a que distancia a partir del vértice debe trazarse un plano paralelo al de la base, para que el área del círculo de intersección sea igual al área lateral del tronco de cono resultante y calcular el volumen de dicho tronco.
Resp: 3.16m ; 19.11m^3
4. - Hallar la relación de los radios de las bases de un tronco de cono de revolución para que el volumen del tronco V y el volumen del cono de base la menor y el vértice el centro de la mayor verifiquen la igualdad: $V = 21v$.
Resp: 4
5. - Calcular los radios de las bases de un tronco de cono de revolución, dados la altura h , el apotema a y su volumen $\frac{\pi b^2 h}{3}$. Aplicación para: $h = 3\text{m}$, $a = 5\text{m}$, $V = 31\pi\text{m}^3$.
Resp: 1m ; 5m
6. - La generatriz de un cono de revolución mide 6u y forma un ángulo de 60° con el plano de la base. Determinar el volumen del cono.
Resp: 48.97u^3 .
7. - A través del vértice de un cono de revolución se ha trazado un plano que forma con la base del cono un ángulo de 35° . Este plano corta a la base por la cuerda AB de longitud 5u que une los extremos del arco de la base del cono, correspondiente al ángulo central 40° . Hallar el volumen del cono.
Resp: 269.09u^3 .

8. - La longitud de la generatriz de un cono de revolución mide $3u$, la circunferencia de la base mide $20u$. Determinar su volumen.
Resp: $70.28u^3$

9. - El ángulo en el vértice de una sección axial de un cono de revolución es igual a 40° y la suma de las longitudes de la altura y la generatriz es igual a $15u$. Hallar el volumen y el área total del cono.
Resp: $53.23u^3$;

10. - El volumen de un cono de revolución es V . Su altura se divide en tres partes iguales y por los puntos de división se trazan dos planos paralelos a la base. Hallar el volumen de la porción central.

Resp: $\frac{7}{27}V$

11. - Determinar el volumen de un cono de revolución, sabiendo que una cuerda de longitud $4u$ trazada en el círculo de la base subtiende un arco de 50° y la altura del cono forma un ángulo de 30° con la generatriz.

Resp:

12. - La superficie lateral de un cono de revolución es igual a $100u^2$ y el área total igual a $140u^2$. Determinar el ángulo que forman la generatriz y la altura.

Resp: 24°

13. - Cuando se desarrolla en un plano, la superficie lateral de un cono de revolución representa un sector circular de ángulo 40° y cuerda $6u$. Determinar el volumen del cono.

Resp: $8501.75u^3$

14. - Un plano trazado por el vértice de un cono de revolución y que forma un ángulo de 50° con la base, corta en el círculo de la base un arco de 60° ; la distancia entre el plano y el centro de la base es $10u$. Hallar el volumen del cono.

Resp: $3701.62u^3$

15. - Un cuadrado de lado $8u$, está inscrito en la base de un cono de revolución. Un plano trazado por el vértice del cono y un lado del cuadrado corta a la superficie del cono a lo largo de un triángulo cuyo ángulo en el vértice es 60° . Determinar el volumen y el área del cono.

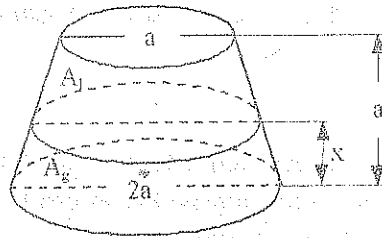
Resp: $189.56u^3$;

16. - El volumen de un cono de revolución es $150u^3$, y la generatriz está inclinada un ángulo de 30° respecto de la base. ¿A qué altura se debe trazar un plano perpendicular al eje del cono para que divida la superficie lateral del cono en dos partes de áreas iguales?

Resp: $10.65u$

17. - Calcular x en función de a para que se cumpla que el peso del aluminio sea igual al de la plata. Si $\frac{\delta_{Al}}{\delta_{Ag}} = \frac{3}{7}$.

Resp: $0.2a$



18. - ¿A qué distancia del vértice de un cono de revolución hay que trazar un plano paralelo a la base para que el área de la sección sea igual al área lateral del tronco de cono resultante? Si la altura del cono es 6m y el radio de la base 2m.

Resp: 5.22m

19. - El área de una sección paralela a la base, resultante de cortar un cono de revolución de 3m de altura, distante del vértice 1m, es de 2.6m^2 . Calcular el volumen del cono.

Resp: 23.4m^3

20. - La base de un cono de revolución es un círculo de 4m de radio y la altura mide 6m. Calcular los volúmenes de los cuerpos que resultan al cortar dicho cono por un plano que pasa por el vértice y uno de los lados del exágono regular inscrito en la base.

Resp: 2.9m^3 ; 97.63m^3

21. - Si un triángulo rectángulo gira sucesivamente alrededor de sus catetos, los volúmenes de los conos generados están en razón inversa de sus alturas.

Resp:

22. - Se dispone de un sólido (peso específico relativo 0.3) de forma tronco cónica de revolución de las siguientes dimensiones; $R = 4\text{m}$, $r = 2\text{m}$, $h = 6\text{m}$, que flota en un recipiente que contiene agua con su base menor sumergida. Calcular el área mojada.

Resp: 56.99m^2

23. - Un cono tiene 3m de altura, la suma de la generatriz y el radio de la base es de 9m. Calcular el ángulo formado en el desarrollo de la superficie lateral del cono.

Resp: 288°

24. - Los radios de dos conos de revolución semejantes miden 4m y 6m respectivamente. ¿En que relación están sus áreas laterales, las áreas totales y los volúmenes?

Resp: $\frac{4}{9}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{8}{27}$

25. - La generatriz de un cono de revolución es de 8m. Calcular la generatriz de un cono de revolución semejante, sabiendo que su área total es el cuádruplo que la del primero.

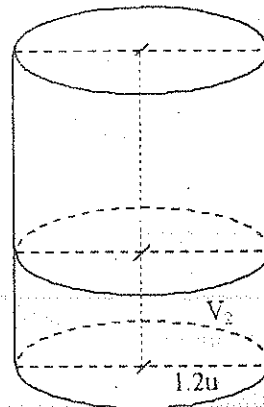
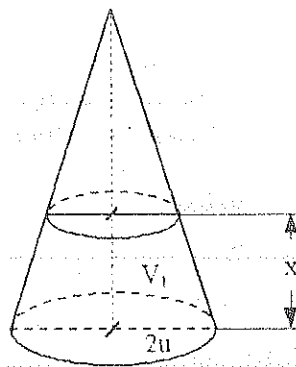
Resp: 16m

26. - En un cono de revolución demostrar que:

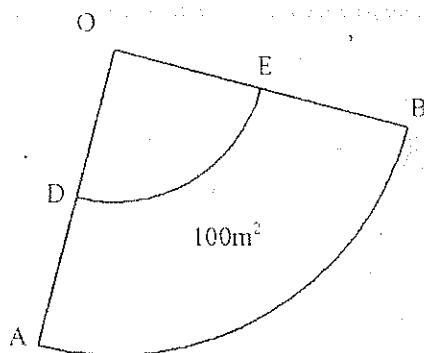
$$9\pi R^2 = S_T \sqrt{(S_T - S_L)(2S_L - S_T)}$$

27. - Se tiene un cono de revolución y un cilindro de revolución de altura 3u. Hallar x para que $V_1 = V_2$.

Resp: 1.28u



28. -



H) $\widehat{DE} = 8m$

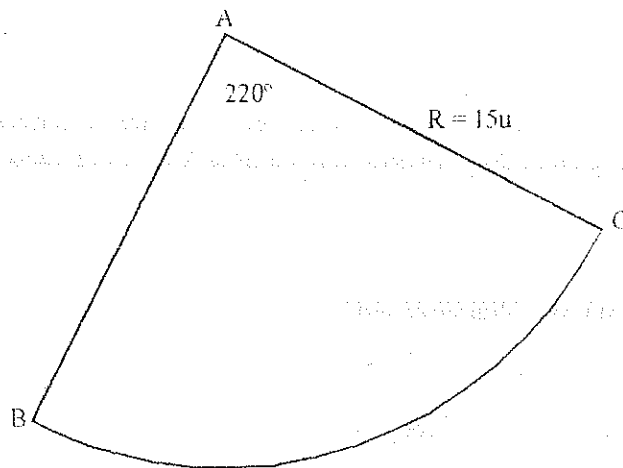
$\widehat{AB} = 20m$

- T) Volumen del Tronco de cono de revolución formado al doblar la superficie ABED.

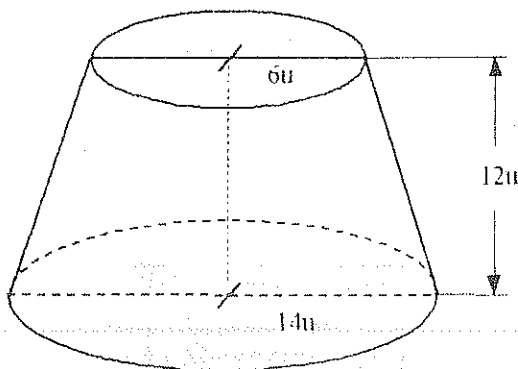
Resp: $113.88m^3$

29. - Hallar el volumen del cono de revolución que se puede construir con el sector circular de la figura.

Resp:



30. -

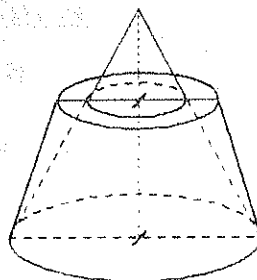


- T) Calcular la superficie húmeda si el tronco de cono de revolución contiene agua hasta una altura de 9u.

Resp:

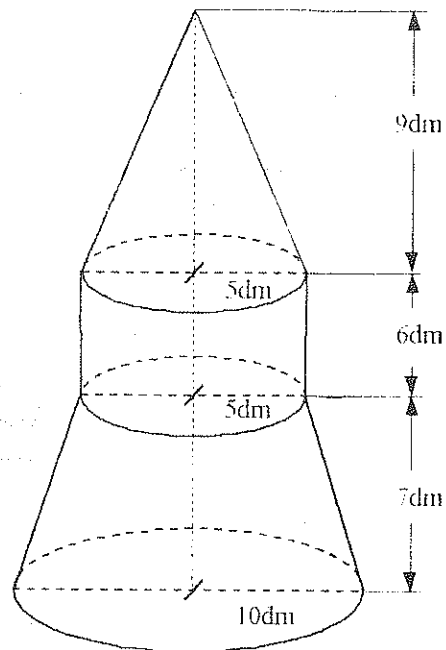
31. - Calcular el volumen común entre el tronco de cono de revolución de dimensiones: $R = 20u$; $r = 12u$; $h = 15u$ y el cono de revolución de dimensiones: $R' = 12u$ y $h' = 20u$.

Resp:



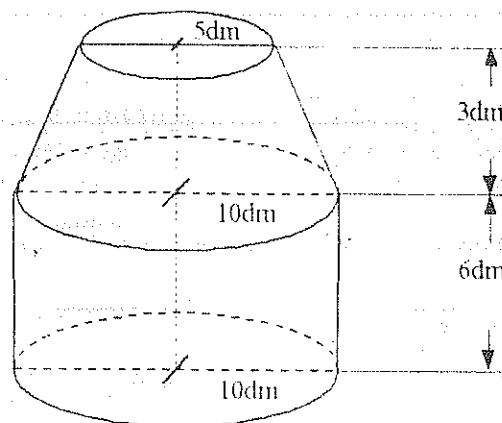
32. - El recipiente contiene 1700 lts. Calcular el nivel del líquido.

Resp: 14.09dm



33. - Calcular el volumen del recipiente. El recipiente contiene agua en una cantidad igual a los $\frac{5}{6}$ del volumen total. Calcular la altura del nivel del líquido.

Resp:



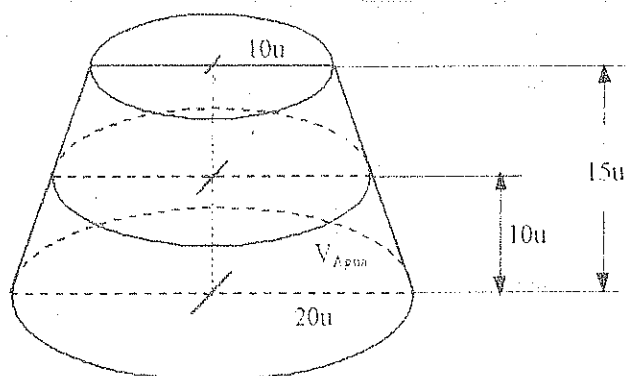
34. - Un tronco de cono de revolución de dimensiones $R = 10u$; $r = 5u$; $h = 15u$, apoyado en su base mayor contiene un volumen de agua igual a los $\frac{3}{5}$ del volumen total. Calcular la altura del nivel del líquido.

Resp:

35. - En un tronco de cono de revolución de 9cm de altura y radios de las bases: $R = 12\text{cm}$; $r = 4\text{cm}$, se trazan planos paralelos a las bases por los puntos de trisección de la altura. Calcular la superficie lateral del tronco de cono intermedio.

Resp:

36. -



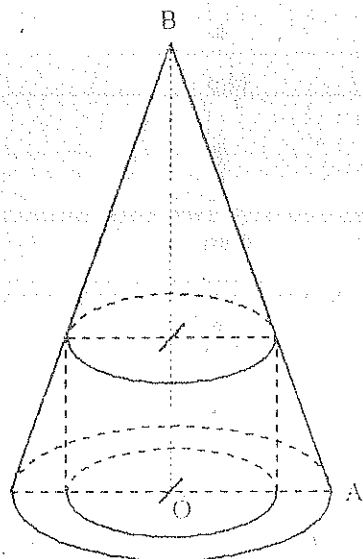
T) Calcular la altura del líquido y la superficie húmeda si se invierte el tronco de cono de revolución.

Resp: $13.18u$;

37. - Dado un cono de revolución de dimensiones; $R = 10u$ y $h = 15u$, está completamente lleno de agua. Calcular el volumen de agua que se derramará si se introduce un tronco de cono de revolución de dimensiones, $R = 16u$; $r = 5u$ y $h = 12u$.

Resp:

38. -



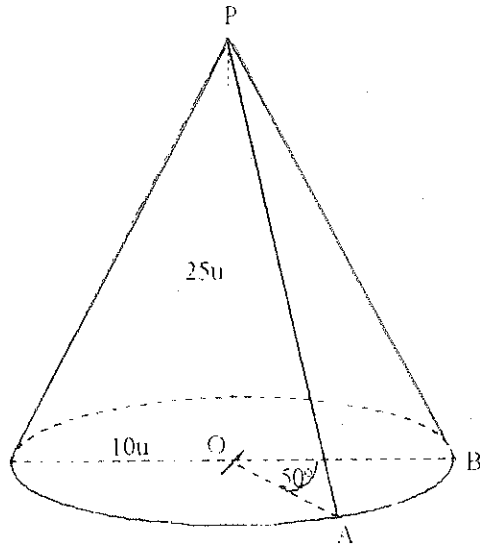
$$\begin{aligned} \text{H) } OA &= 5u \\ OB &= 10u \end{aligned}$$

$$S_{\text{LCilindro}} = \frac{1}{5} S_{\text{LCono}}$$

$$\text{T) } V_{\text{Cilindro}} = ?$$

Resp:

39. -

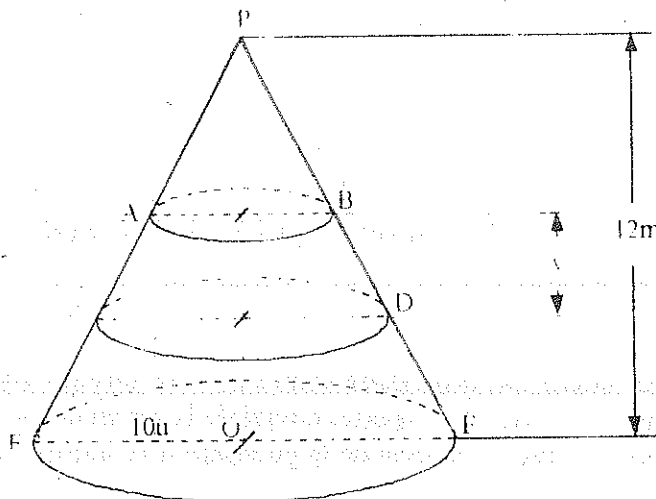


T) S_{Lateral} del Sólido P - OAB =?
 Volumen del Sólido P - AOB =?

Resp:

40. - Calcular "y", para que las secciones dividan a la superficie lateral del cono de revolución en tres partes equivalentes.

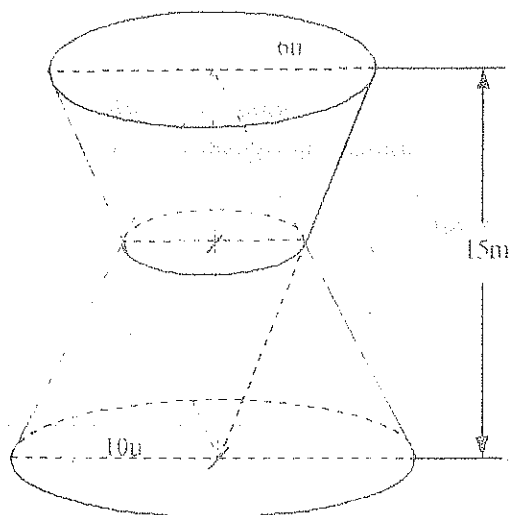
Resp:



41. - En un cono de revolución de dimensiones: $h = 10\text{cm}$ y $R = 7.5\text{cm}$. contiene agua hasta una altura de 4cm . ¿Cuánto subirá el nivel del líquido si se introducen dos cubos de hielo de arista 2cm ?

Resp:

42. -



1) Calcular el volumen común entre los dos conos de revolución.

Resp:

43. - Se tiene dos recipientes (tronco de cono de revolución y cilindro de revolución) abiertos en su parte superior. El tronco de cono tiene dimensiones: $R = 15\text{m}$; $r = 10\text{m}$; $h = 10\text{m}$, y contiene agua hasta una altura de 10m . El cilindro tiene dimensiones $R = 9\text{m}$; $h = 8\text{m}$. Se introduce progresivamente el cilindro en el tronco de cono hasta que las bases coinciden. Si el espesor es despreciable calcular:

- a) ¿Se derramará agua hacia el exterior del tronco de cono? ¿Cuánto?
b) ¿Qué cantidad de agua se introducirá en el cilindro? si no, ¿Qué nivel alcanza el agua?

Resp: 714.17m^3 ; 1321.56m^3

44. - Un cono está inscrito en una pirámide triangular regular. Hallar su volumen, sabiendo que la arista lateral de la pirámide es igual a 10u y el ángulo que forman dos aristas laterales adyacentes es 80° .

Resp:

45. - Una pirámide de base pentagonal está circunscrita a un cono circular recto, cuya altura es igual al radio de la base. La superficie total de la pirámide es dos veces mayor que la del cono. Hallar el volumen de la pirámide si la superficie lateral del cono es igual a $\pi \cdot 2u^2$.

Resp: $\frac{2\pi}{3} u^3$.

46. - La base de una pirámide es un triángulo rectángulo, las caras laterales que pasan por los catetos forman con la base los ángulos de 30° y 60° . A la pirámide está circunscrito un cono circular recto. Determinar el volumen del cono si la altura de la pirámide es igual a 9u .

Resp: $810\pi u^3$

47. - La superficie lateral de una pirámide regular de base triangular con el lado de la base $6u$ es cinco veces mayor que la superficie de la base. Hallar el volumen del cono inscrito en la pirámide.

Resp:

48. - Un cono y un cilindro tienen una base común, y el vértice del cono se encuentra en el centro de la otra base del cilindro. Hallar el valor del ángulo formado por el eje del cono y su generatriz, si se conoce que las superficies totales del cilindro y del cono son entre sí como 7 es a 4.

Resp: 36.8°

49. - El radio del círculo de la base de un cono mide $10u$ y el ángulo en el vértice de su sección axial es 60° . Hallar el volumen de una pirámide triangular circunscrita en el cono.

Resp:

50. - Las caras laterales de una pirámide cuadrangular regular están inclinadas respecto de la base un ángulo de 50° . La altura de las caras de la pirámide es $10u$. Hallar el área total del cono inscrito en la pirámide y el ángulo de inclinación de la arista lateral con la base.

Resp:

51. - Se tiene un tronco de cono de revolución y un cilindro de la misma base y altura. El volumen del tronco de cono es $\frac{2}{3}$ del volumen del cilindro. Hallar la razón de los radios de las bases del cono truncado.

Resp:

52. - Se tiene un cono de revolución y un cilindro de la misma base y altura. ¿A qué distancia de la base común hay que trazar un plano paralelo a la base para que el volumen del tronco sea igual al comprendido entre dicho tronco y el cilindro?

Resp:

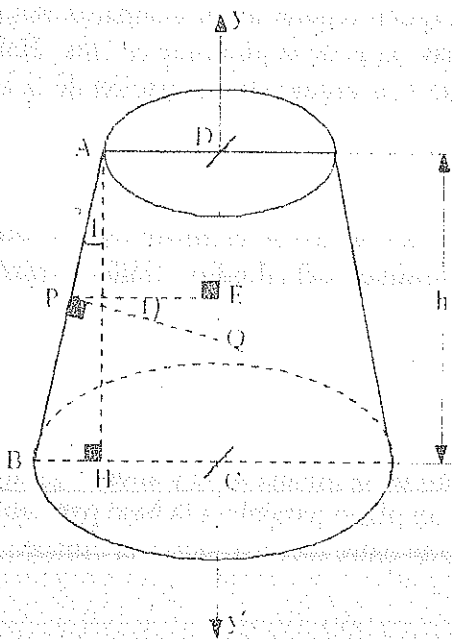
UNIDAD 7

7. - ESFERAS

7.1. - SUPERFICIES DE REVOLUCION

7.1.1: - El área engendrada por una recta que gira alrededor de un eje que no lo atraviesa, y está situada con el en el mismo plano, tiene por medida la proyección de la recta en el eje multiplicada por el perímetro del círculo cuyo radio es la perpendicular a dicha recta en un punto medio hasta su encuentro con el eje.

a) El segmento no tiene ningún punto común con el eje, ni le es paralelo.



$$D) S_{AB(360^\circ \text{pr})} = DC - 2\pi \cdot PQ$$

El área engendrada es el área lateral de un tronco de cono de revolución.

$$S_{AB}(160^\circ \text{pp}) \approx \pi \cdot \frac{1}{2} B(BC + AD).$$

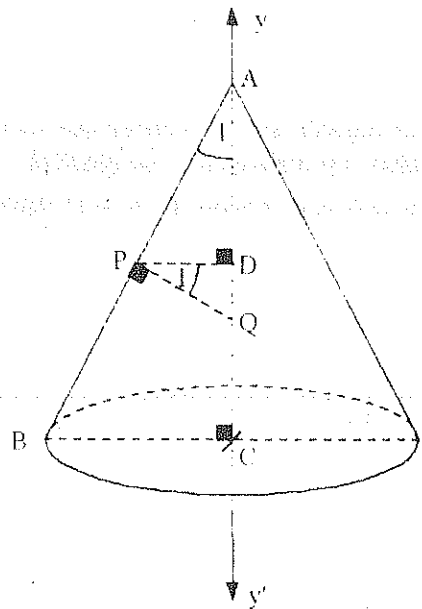
$$S_{AB}(360^\circ \text{ rev}) = \pi \cdot AB \cdot 2PE$$

LABII - MPQE

$$AB \parallel PE \parallel AH \parallel PQ$$

$$S_{AB(360^\circ \text{ rev})} = 2\pi \cdot DC \cdot PQ$$

b) El segmento tiene un extremo con el eje.



$$T) S_{AB(360^\circ, y')} = AC \times 2\pi \times PQ$$

El área engendrada es el área lateral de un cono de revolución.

$$S_{AB(360^\circ, y')} = \pi \cdot BC \cdot AB$$

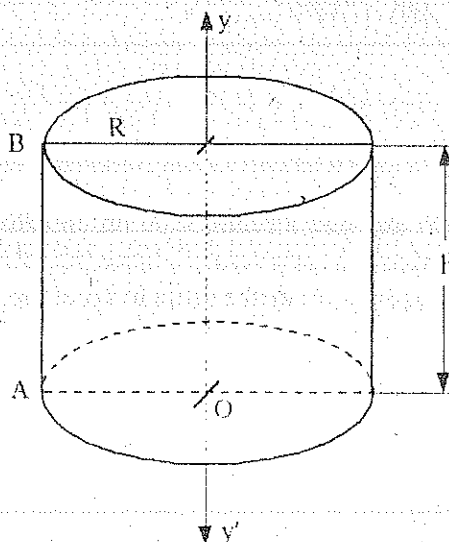
$$S_{AB(360^\circ, y')} = \pi \cdot AB \cdot 2PD$$

$$\triangle ABC \cong \triangle PDQ$$

$$PD \times AB = AC \times PQ$$

$$S_{AB(360^\circ, y')} = 2\pi \cdot AC \cdot PQ$$

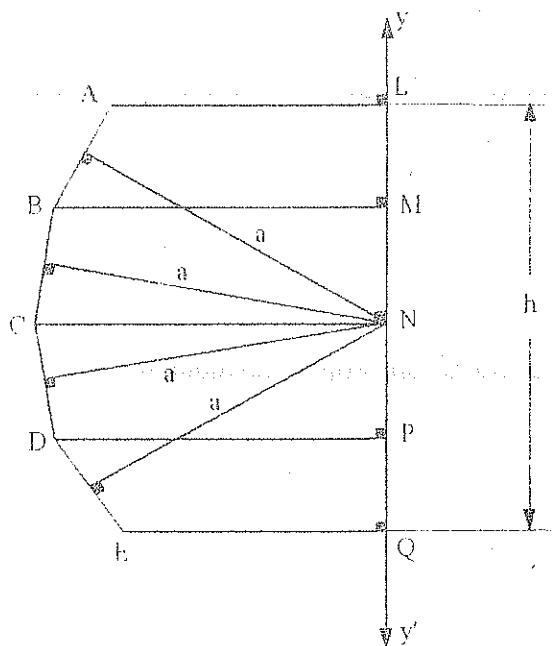
c) El segmento es paralelo al Eje.



El área engendrada es el área lateral de un cilindro de revolución.

$$S_{AB(360^\circ, PP')} = 2\pi \cdot R \cdot h$$

7.1.2. - El área engendrada por una línea poligonal regular que gira alrededor de un eje situado en su plano y que pasa por su centro, sin atravesarla, es igual al producto del perímetro del círculo inscrito por la proyección de la poligonal en el eje.



$$T) S_{ABCD \dots (360^\circ, PP')} = h \cdot 2\pi \cdot a$$

$$S_{ABCD \dots (360^\circ, PP')} = S_{AB(360^\circ, PP')} + S_{BC(360^\circ, PP')} + S_{CD(360^\circ, PP')} + \dots$$

$$S_{ABCD \dots (360^\circ, PP')} = LM \cdot 2\pi \cdot a + MN \cdot 2\pi \cdot a + NP \cdot 2\pi \cdot a + \dots$$

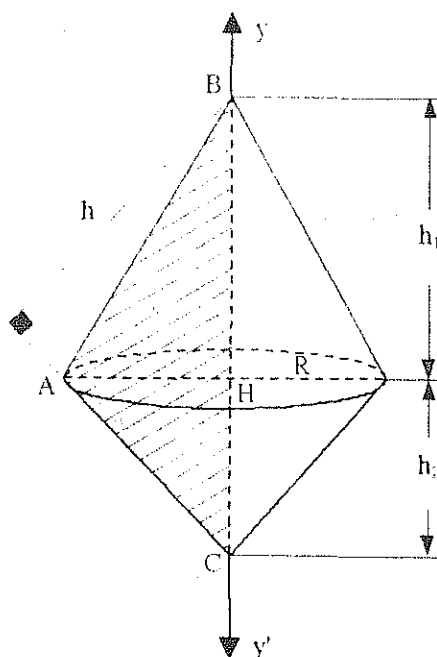
$$S_{ABCD \dots (360^\circ, PP')} = 2\pi \cdot a + (LM + MN + NP + \dots)$$

$$S_{ABCD \dots (360^\circ, PP')} = 2\pi \cdot a \cdot h$$

7.2. - VOLUMENES DE REVOLUCION

7.2.1. - El volumen engendrado por un triángulo que gira alrededor de un eje situado en su plano, y que pasa por uno de sus vértices sin atravesarlo, tiene por medida el producto del área descrita por el lado opuesto al vértice situado en el eje por el tercio de la altura correspondiente.

a) El eje coincide con un lado del triángulo



$$T) V_{\Delta ABC(360^\circ, y-y')} = S_{AC(360^\circ, y-y')} \cdot \frac{h}{3} = \pi R \times AC \cdot \frac{h}{3}$$

$$D) V_{\Delta ABC(360^\circ, y-y')} = V_{\Delta ABH(360^\circ, y-y')} + V_{\Delta AHC(360^\circ, y-y')}$$

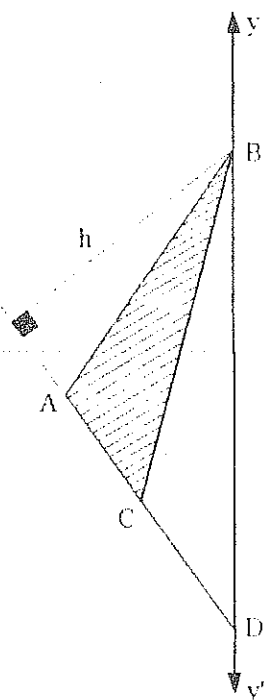
$$V_{\Delta ABC(360^\circ, y-y')} = \pi R^2 \times \frac{h_1}{3} + \pi R^2 \times \frac{h_2}{3} = \pi R^2 \times \frac{BC}{3}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{R \cdot BC}{2} = \frac{AC \cdot h}{2}$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ, y-y')} = \pi R^2 \times \frac{h_1}{3} + \pi R^2 \times \frac{h_2}{3} = \pi R^2 \times \frac{BC}{3}$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ, y-y')} = \pi R \cdot AC \cdot \frac{h}{3}$$

b) Un vértice del triángulo está en el eje.



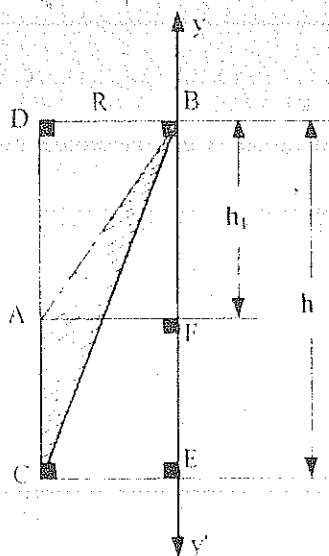
$$T) I_{\Delta ABC(360^\circ, y')} = S_{AC(360^\circ, y')} \cdot \frac{h}{3}$$

$$I_{\Delta ABC(360^\circ, y')} = I_{\Delta ABD(360^\circ, y')} - I_{\Delta BCD(360^\circ, y')}$$

$$I_{\Delta ABC(360^\circ, y')} = S_{AD(360^\circ, y')} \cdot \frac{h}{3} - S_{CD(360^\circ, y')} \cdot \frac{h}{3}$$

$$I_{\Delta ABC(360^\circ, y')} = S_{AC(360^\circ, y')} \cdot \frac{h}{3}$$

c) Un vértice del triángulo está en el eje, y el lado opuesto es paralelo al eje.



$$T) I_{\Delta ABC(360^\circ, y')} = S_{AC(360^\circ, y')} \cdot \frac{R}{3} = \frac{2}{3} \pi AC \cdot R^2$$

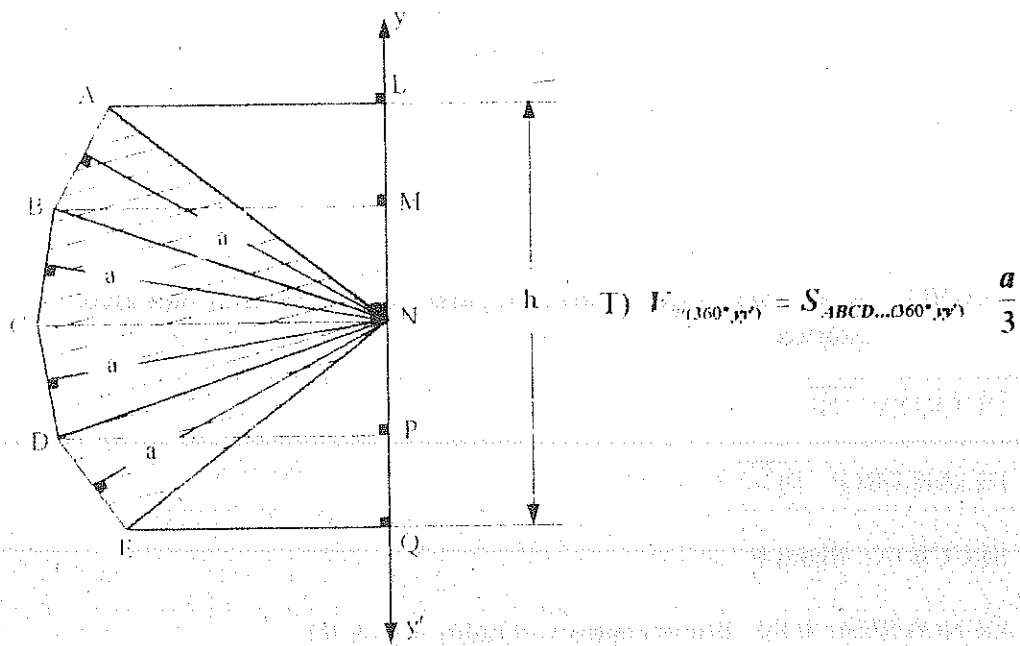
$$V_{\Delta ABC(360^\circ, y')} = V_{DBEC(360^\circ, y')} - V_{\Delta CBE(360^\circ, y')} - (V_{\Delta DBF(360^\circ, y')} - V_{\Delta FBE(360^\circ, y')})$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ, y')} = \pi R^2 \times h - \frac{\pi R^2 \times h}{3} - \pi R^2 \times h_1 + \frac{\pi R^2 \times h_1}{3}$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ, y')} = \frac{2\pi R^2 \times h}{3} - \frac{2\pi R^2 \times h_1}{3}$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ, y')} = \frac{2\pi R^2}{3} \times AC$$

- 7.2.2. - El volumen del sólido engendrado por un sector poligonal regular que gira alrededor de un eje de su plano, que pasa por el centro y no le corta, es igual al tercio del producto del área de la superficie engendrada por la poligonal regular por la apotema.



$$V_{(360^\circ, y')} = V_{\Delta AOB(360^\circ, y')} + V_{\Delta BOC(360^\circ, y')} + V_{\Delta COD(360^\circ, y')} + \dots$$

$$V_{(360^\circ, y')} = S_{AB(360^\circ, y')} \cdot \frac{a}{3} + S_{BC(360^\circ, y')} \cdot \frac{a}{3} + S_{CD(360^\circ, y')} \cdot \frac{a}{3} + \dots$$

$$V_{(360^\circ, y')} = S_{ABCD...}(360^\circ, y') \cdot \frac{a}{3}$$

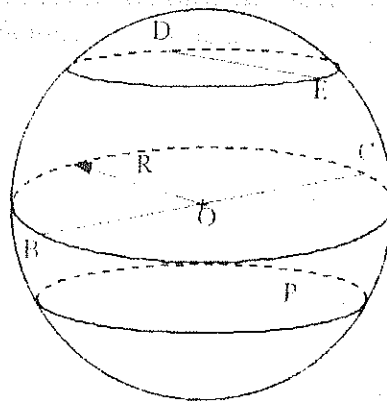
7.3. - SUPERFICIE ESFERICA

Es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de otro punto llamado centro.

7.4. - ESFERA

Es un sólido geométrico limitado por una superficie esférica.

7.4.1. - ELEMENTOS - DENOMINACION



RADIO: Es la distancia del centro a un punto cualquiera de la superficie esférica.

CUERDA: \overline{DE}

DIÁMETRO: \overline{BOC}

SECCION: Plano P

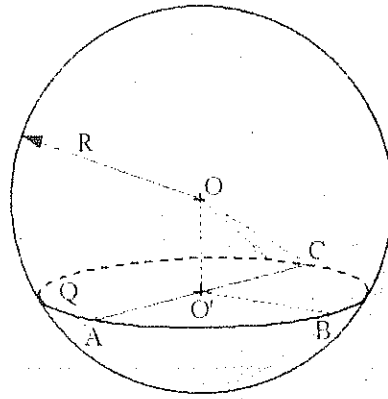
DENOMINACION: Por el centro y el radio $O(O, R)$

7.4.2. - DETERMINACION

Cuatro puntos que no están en el mismo plano determinan una esfera y solo una.

7.4.3. - INTERSECCION: PLANO - ESFERA

Toda sección plana de una esfera es un círculo.



T) Sección $Q = \bigcirc (O', O'A)$

D) $\triangle OAO' \cong \triangle OOB' \cong \triangle OOC' \cong \dots\dots\dots$

$\Rightarrow PA = PB = PC = \dots\dots\dots$

\Rightarrow Sección $Q = \bigcirc (O', O'A)$

7.4.4. - CIRCULO MAXIMO

Es toda sección plana que contiene el centro de la esfera.

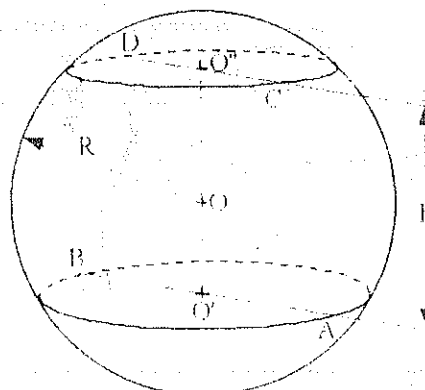
7.4.5. - CIRCULO MENOR

Es toda sección plana que no contiene al centro de la esfera.

7.5. - ZONA ESFERICA

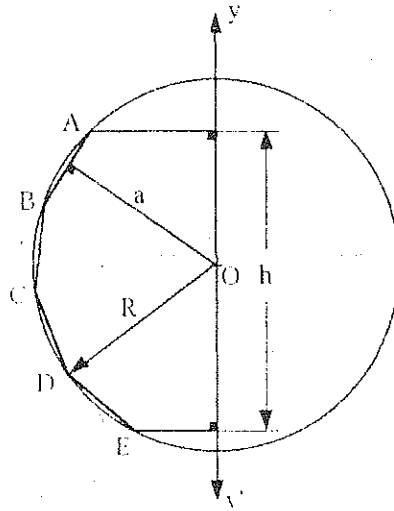
Es la parte de la superficie esférica limitada por dos planos paralelos.

7.5.1. - ELEMENTOS



ALTURA: La distancia entre los dos planos paralelos: h

75.2. - AREA



$$S_{ABCD... (360^\circ, R)} = h \cdot 2\pi \cdot a$$

Si el número de lados de la línea poligonal regular se duplica indefinidamente.

$$n \rightarrow \infty$$

$$a \rightarrow R$$

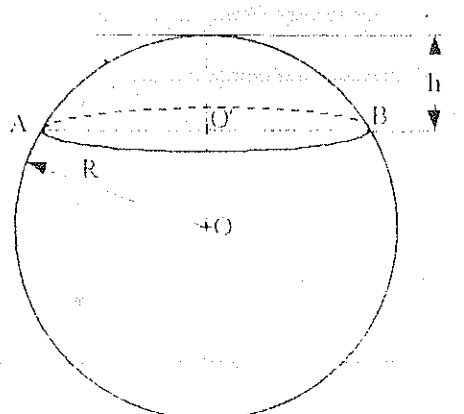
$$\Rightarrow S_{ABCD... (360^\circ, R)} \rightarrow S_{Zona}$$

$$\Rightarrow S_{Zona} = 2\pi \cdot R \cdot h$$

7.6. - CASQUETE ESFERICO

Es la parte de la superficie esférica limitada por un plano secante y otro tangente paralelos.

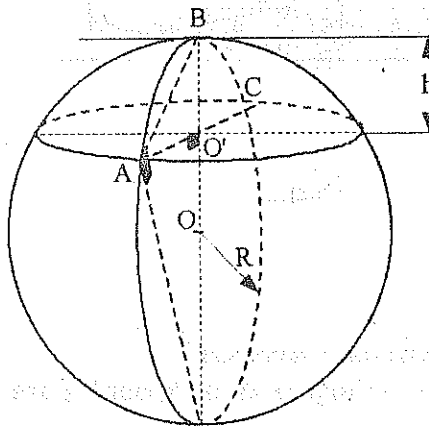
7.6.1. - ELEMENTOS



ALTURA: La distancia entre los planos paralelos; h

7.6.2. - AREA

El área de un casquete es igual al producto de la longitud del círculo máximo por su altura.



Siendo el casquete esférico una zona:

$$S_{\text{Casquete}} = 2\pi \times R \times h$$

$$AB^2 = 2R \times h$$

$$S_{\text{Casquete}} = \pi \times AB^2$$

El área de una Esfera es igual al producto del círculo máximo por el diámetro.

La Esfera es una Zona cuya altura es igual al diámetro.

$$S_{\text{Esfera}} = 2\pi \times R \times h$$

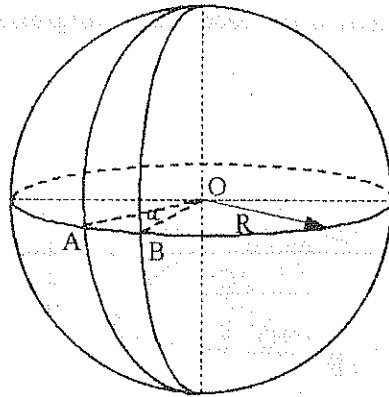
$$h = 2R$$

$$S_{\text{Esfera}} = 4\pi \times R^2$$

7.7. - HUSO ESFERICO

Es la parte de la superficie esférica comprendida entre dos semicírculos máximos.

7.7.1. - ELEMENTOS



LADOS: Son los semicírculos máximos

ANGULO DEL HUSO: El ángulo formado por los dos semicírculos máximos.

7.7.2. - AREA

Es igual al área de la esfera multiplicada por la relación entre el ángulo del huso y 360° .

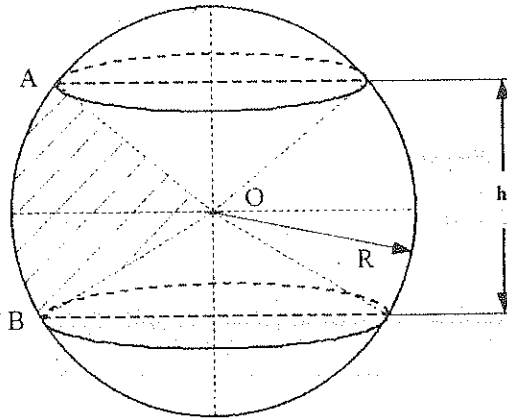
$$S_{\text{Huso}} = \frac{4\pi \times R^2 \times \alpha^\circ}{360^\circ} \quad (\text{ángulo } \alpha \text{ en grados})$$

$$S_{\text{Huso}} = \frac{\pi \times R^2 \times \alpha}{90^\circ} \quad (\text{ángulo } \alpha \text{ en radianes})$$

7.8. - SECTOR ESFERICO

Es la parte de la esfera formada por un sector circular que gira alrededor de un diámetro situado en su plano.

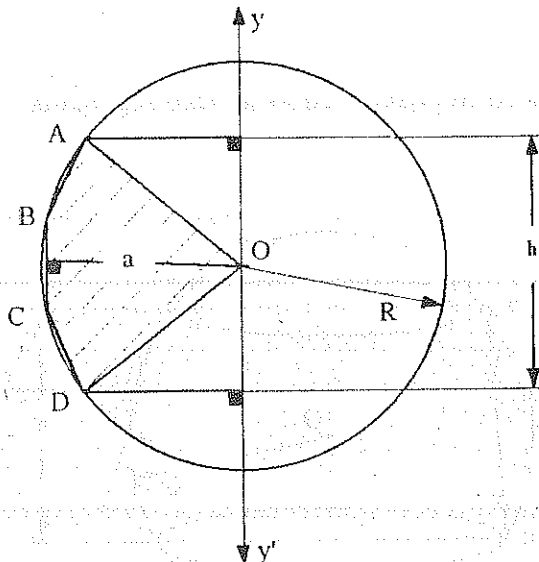
7.8.1. - ELEMENTOS



ALTURA: Proyección del arco AB en el diámetro. H.

7.8.2. - VOLUMEN

El volumen de un sector esférico es igual al producto del área de la zona o casquete que le sirve de base por el tercio del radio de la esfera.



$$V_{\text{casquete}(360^\circ, y)} = S_{ABCD \dots (360^\circ, y)} \cdot \frac{a}{3}$$

$$V_{\text{casquete}(360^\circ, y)} = h \times 2\pi \times a \times \frac{a}{3}$$

Si el número de lados de la línea poligonal regular se duplica indefinidamente, se tiene:

$$n \rightarrow \infty$$

$$a \rightarrow R$$

$$V_{III(360^\circ, pp')} \rightarrow V_{\text{Sector Esférico}}$$

$$V_{III(360^\circ, pp')} = \frac{2}{3} \pi \times R^2 \times h$$

El volumen de una esfera es igual al producto del área esférica por el tercio del radio.

El volumen de una esfera puede ser considerado como el de un sector esférico engendrado por la revolución de la mitad de una región circular alrededor de un diámetro.

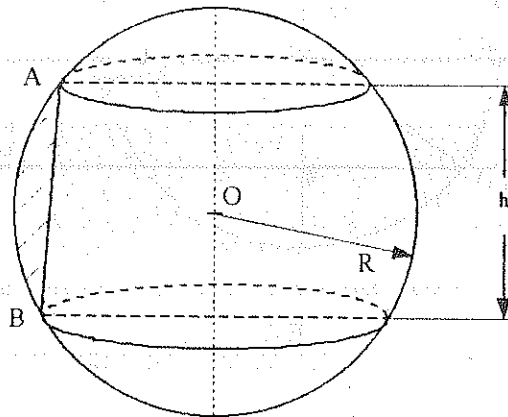
$$h = 2R$$

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3} \pi \times R^3$$

7.9. - ANILLO ESFERICO

Es la parte de una esfera formada por un segmento circular que gira alrededor de un diámetro situado en su plano exterior a dicho segmento.

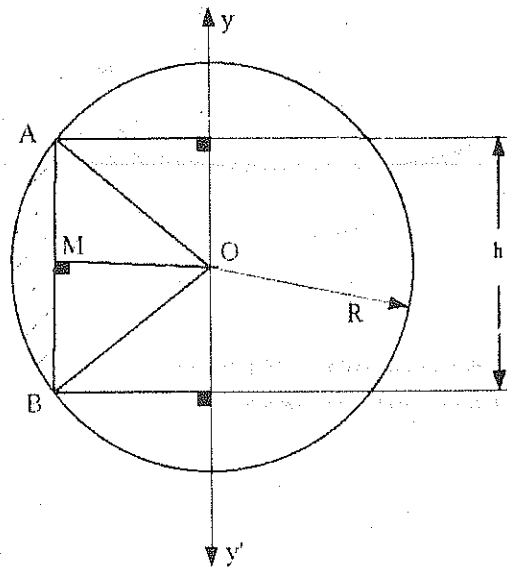
7.9.1. - ELEMENTOS



ALTURA: Proyección del arco AB en el diámetro. h

7.9.2. - VOLUMEN

El volumen del anillo esférico es igual a la sexta parte del volumen del cilindro cuya base tiene por radio la cuerda del segmento circular y por altura la altura del anillo esférico.



$$V_{\text{Anillo Esférico}} = V_{\text{Sector Esférico}} - V_{\Delta OAB(360^\circ, yy')}$$

$$V_{\text{Anillo Esférico}} = \frac{2}{3} \pi \cdot R^2 \cdot h - \frac{2}{3} \pi \cdot OM \cdot h \cdot OM$$

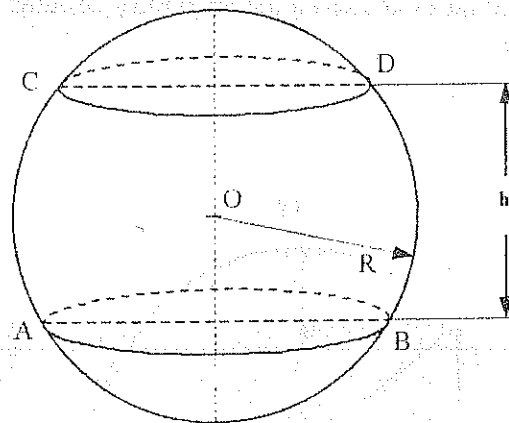
$$OM^2 = R^2 - \frac{AB^2}{4}$$

$$V_{\text{Anillo Esférico}} = \frac{1}{6} \pi \cdot AB^2 \cdot h$$

7.10. - SEGMENTO ESFERICO DE DOS BASES

Es la parte de la esfera comprendida entre dos planos paralelos secantes.

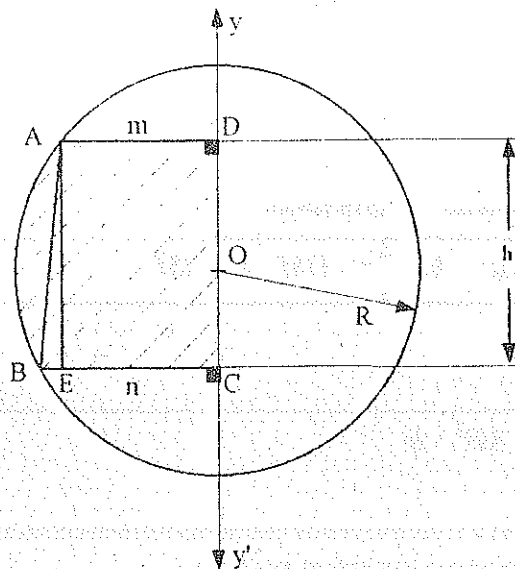
7.10.1. - ELEMENTOS



BASES: Las secciones paralelas A-B; C-D

ALTURA: La distancia entre las bases

7.10.2. - VOLUMEN



$$V_{\text{Segmento}} = V_{\text{Tronco de Cono}} + V_{\text{Anillo}}$$

$$V_{\text{Segmento}} = \frac{\pi h}{3} (m^2 + n^2 + mn) + \frac{\pi h \times AB^2}{6}$$

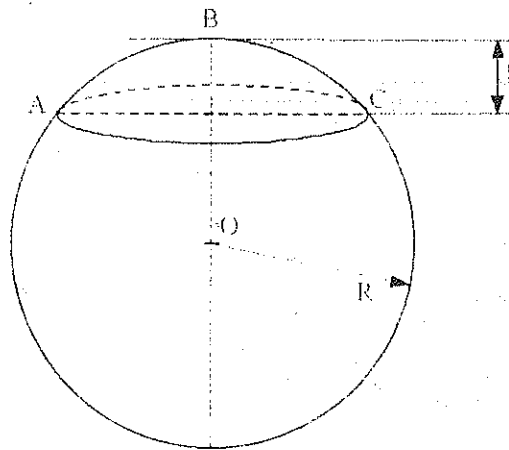
$$AB^2 = h^2 + BE^2 = h^2 + (n - m)^2$$

$$V_{\text{Segmento}} = \frac{\pi h}{6} (3m^2 + 3n^2 + h^2)$$

7.11. - SEGMENTO ESFERICO DE UNA BASE.

Es la parte de la esfera comprendida entre dos planos paralelos el uno secante y el otro tangente.

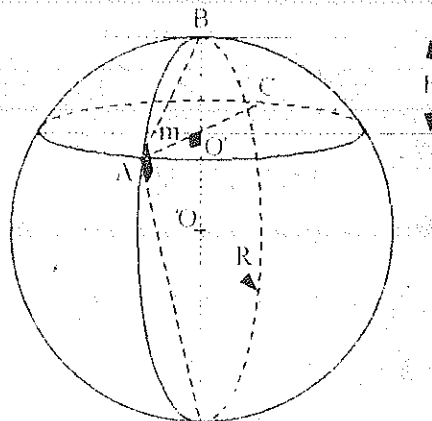
7.11. - ELEMENTOS



BASE: Sección A-C

ALTURA: h

7.11.2. - VOLUMEN



Si uno de los planos es tangente a la esfera, la sección se reduce a un punto.

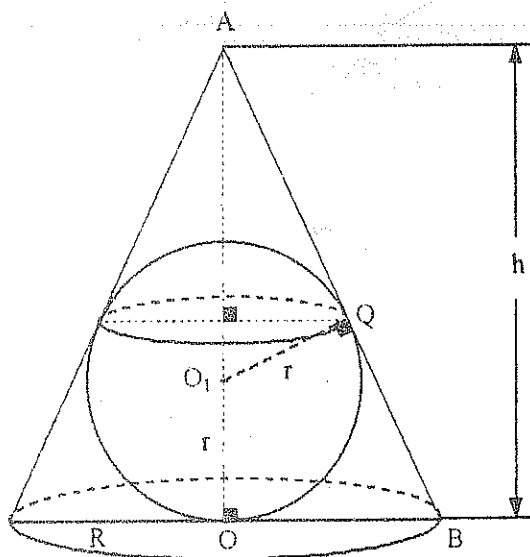
$$V_{\text{Segmento}} = \frac{\pi h}{6} (3m^2 + h^2)$$

$$m^2 = h(2R - h)$$

$$V_{\text{segmento}} = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$$

7.12. - RELACION ESFERA SOLIDO

El volumen de un sólido geométrico, es igual al producto de la superficie total por un tercio del radio de la esfera inscrita.



$$T) V = \frac{S_T \times r}{3}$$

$$D) V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h \quad (1)$$

$$\frac{S_T \times r}{3} = \frac{(S_L + S_B) \times r}{3}$$

$$\frac{S_T \times r}{3} = \frac{(\pi R \cdot AB + \pi R^2) \times r}{3}$$

$$\frac{S_T \times r}{3} = \frac{\pi R \cdot r (AB + R)}{3} \quad (2)$$

$$\Delta AOB \approx \Delta AO_1Q$$

$$\frac{R}{AB} = \frac{r}{h-r} \Rightarrow \frac{R}{AB+R} = \frac{r}{h} \quad (3)$$

(3) en (2)

$$\frac{S_T \times r}{3} = \frac{\pi R \cdot r \cdot R \cdot h}{3 \cdot r} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} \quad (4)$$

(1) en (4)

$$V = \frac{S_T \times r}{3}$$

7.13. - RELACION: ESFERA - PRISMA

7.13.1. - ESFERA INSCRITA EN UN PRISMA RECTO

- Es tangente a todas las caras del prisma
- El radio del círculo inscrito en la base es igual al radio de la esfera.
- La altura del prisma es igual al diámetro de la esfera

7.13.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UN PRISMA

- Los vértices del prisma están en la superficie de la esfera

7.14. - RELACION: ESFERA - CILINDRO CIRCULAR

7.14.1. - ESFERA INSCRITA EN UN CILINDRO CIRCULAR RECTO

- La esfera es tangente tanto a las bases del cilindro como a su superficie lateral.
- Los centros de las bases son los puntos de tangencia de la esfera con el cilindro de revolución.
- Los puntos de tangencia con la superficie lateral es un círculo máximo paralelo a las bases.
- El radio del círculo inscrito en la base es igual al radio de la esfera.
- La altura del prisma es igual al diámetro de la esfera.

7.14.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UN CILINDRO CIRCULAR RECTO

- Las bases del cilindro de revolución son secciones planas paralelas iguales de la esfera.

7.15. - RELACION: ESFERA - PIRAMIDE

7.15.1. - ESFERA INSCRITA EN UNA PIRAMIDE

- La esfera es tangente a todas las caras laterales como a la base.
- El centro de la esfera inscrita equidista de todas las caras de la pirámide.
- Una esfera puede inscribirse en una pirámide si los planos bisectrices de todos sus ángulos diedros se intersecan en un mismo punto.
- Una esfera siempre se puede inscribir en una pirámide regular
- Una esfera puede inscribirse en cualquier pirámide de base triangular.

7.15.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UNA PIRAMIDE

- Todos los vértices de la pirámide se encuentran en la superficie de la esfera.
- El centro de la esfera es el punto de intersección de todos los planos bisectrales de todos los ángulos diedros de la pirámide. Es el punto de intersección de todos los planos trazados por los puntos medios de las aristas de la pirámide perpendicularmente a dichas aristas.

- Una esfera puede circunscribirse a una pirámide si es posible circunscribir un círculo al polígono que sirve de base a la pirámide.
- Una esfera puede circunscribirse a una pirámide triangular
- Una esfera puede circunscribirse a una pirámide regular.

7.16. - RELACION: ESFERA - CONO CIRCULAR

7.16.1. - ESFERA INSCRITA EN UN CONO DE REVOLUCION

- Es tangente a la base del cono y a su superficie lateral
- El centro de la base es el punto de tangencia
- La tangencia con la superficie lateral es un círculo situado en un plano paralelo a la base
- El centro de la esfera se halla en la altura del cono

7.16.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UN CONO DE REVOLUCION

- El vértice del cono se halla en la superficie de la esfera
- La base del cono es una sección plana de la esfera
- El centro de la esfera esta en la altura del cono.

7.17. - RELACION: ESFERA - TRONCO DE PIRAMIDE

7.17.1. - ESFERA INSCRITA EN UN TRONCO DE PIRAMIDE

- Es tangente a las bases y a todas las caras laterales
- El diámetro de la esfera es igual a la altura del tronco de pirámide

7.17.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UN TRONCO DE PIRAMIDE

- Las bases del tronco de pirámide son polígonos inscritos en dos secciones planas de la esfera.

7.18. - RELACION: ESFERA - TRONCO DE CONO DE REVOLUCION

7.18.1. - ESFERA INSCRITA EN UN TRONCO DE CONO DE REVOLUCION

- La esfera es tangente a las bases y a la superficie lateral
- Los puntos de tangencia son los centros de las bases
- La tangencia con la superficie lateral es un círculo
- La altura es igual al diámetro de la esfera

7.18.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UN TRONCO DE CONO DE REVOLUCION

- Las bases del tronco de cono de revolución son dos secciones planas paralelas.

7.19. - EJERCICIOS

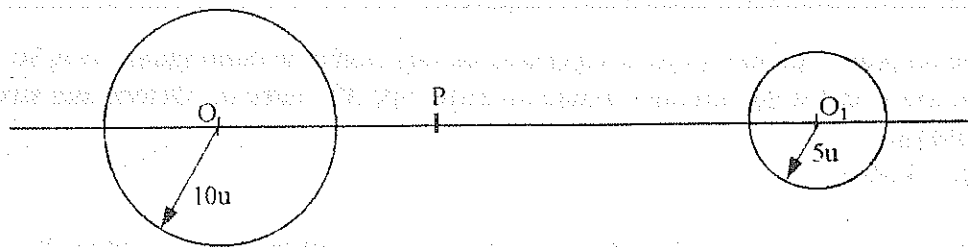
1. - Dos esferas de radios 15 m y 13 m tienen sus centros a 14 m de distancia. Calcular el volumen común de las dos esferas.
Resp: 3547.9 m^3
2. - Desde que altura podría verse el $1/6$ de la superficie de la tierra.
Resp: $R/2$
3. - Dados los radios de dos esferas que se cortan y la distancia de sus centros, calcular el espesor, diámetro, superficie y volumen de la lente que determinan. Aplicación:
 $R = 10\text{m}$, $r = 8\text{m}$, $d = 15\text{m}$.
Resp: 3m ; 14.91m^2 ; 192.68 m^3 ;
4. - Desde un punto situado sobre la superficie de una esfera de radio igual a 6 u, se trazan tres cuerdas iguales que forman un ángulo de 30° entre sí. Determinar sus longitudes.
Resp: 11.45u
5. - Cuatro esferas iguales de radio 8 u son tangentes exteriormente una a otra, de manera que cada una es tangente a las otras tres. Hallar el radio de la esfera que es tangente a las cuatro esferas primeras y que las contienen en su interior.
Resp: 19.59u
6. - Hallar el volumen de un segmento esférico de altura 7 u cuya sección equidistante de las bases es 58 u^2 .
Resp: 1185.68 u^3
7. - En una esfera hueca, cuyo radio interior es de 12 cm, se vierte una cierta cantidad de agua de suerte que la relación entre las áreas de la superficies mojada y sin mojar es de $3/5$. Hallar el área de la superficie mojada.
Resp: 678.58 cm^2
8. - Se tiene una esfera de radio 10m y densidad relativa 0.6 que flota en un recipiente que contiene agua. Calcular la superficie mojada de la esfera.
Resp: 712.58 m^2
9. - Se tiene una semiesfera de densidad 1.5 g/cm^3 , el radio exterior de 10 dm, y el radio interior de 9 dm, que flota en un recipiente que contiene agua. Hallar cuántos litros de aceite se deben adicionar a la semiesfera para que ésta se sumerja los $2/3$ de su radio exterior. Densidad del aceite $.8 \text{ g/cm}^3$.
Resp: 293.26 lt .
10. - Cortar una esfera de radio 10 u con un plano tal que las áreas de los casquetes formados estén en la relación de $2/3$. Hallar la distancia desde el centro de la esfera a la sección.
Resp: 2 u .

11. - De un extremo del diámetro de una esfera se ha trazado una cuerda de tal modo que la superficie formada por la rotación de la cuerda alrededor del diámetro divide el volumen de la esfera en dos partes equivalentes. Determinar el ángulo entre la cuerda y el diámetro.

Resp: $\text{Arc Cos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

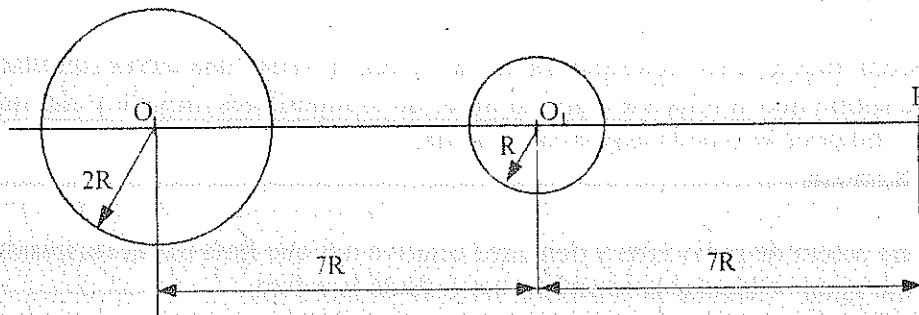
12. - En que punto de la línea de centros deberá situarse un observador P para mirar áreas iguales en las dos esferas, si la distancia entre los centros es de 50 u.

Resp: 12.75 u



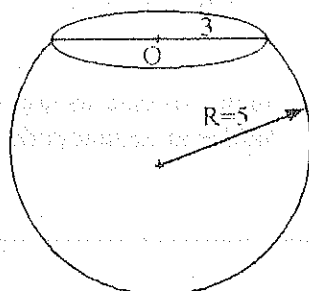
13. - Calcular en la esfera O, el área que observa una persona P ubicada en la línea de centros como indica la figura.

Resp: $35 R^2$

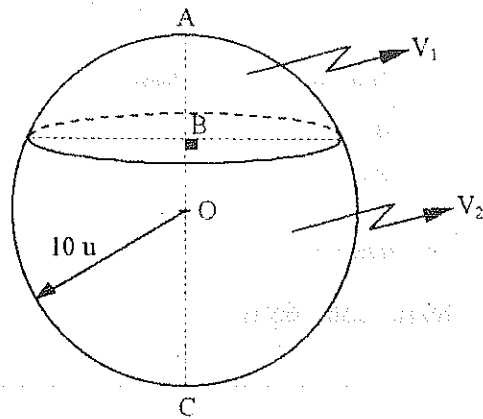


14. - El recipiente de la figura (segmento esférico de una base) se tapa con una esfera de radio 4 u. Calcular el volumen disponible en el recipiente.

Resp: $512.39 u^3$



15. -

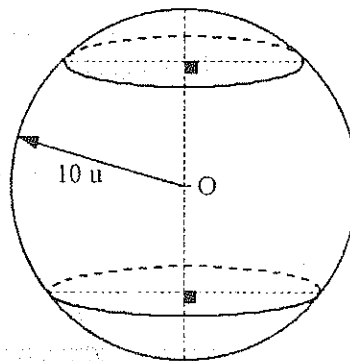


$$H) \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$$

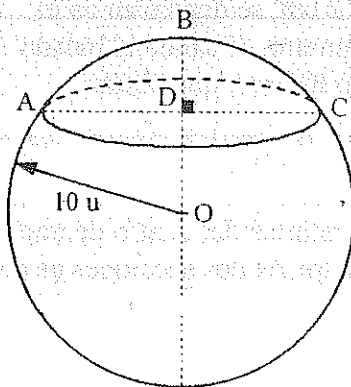
$$T) \frac{V_1}{V_2} = ?$$

Resp: 19/35

16. - Si la superficie de la zona esférica es la tercera parte de la superficie de la esfera.
Determinar el volumen del segmento esférico de dos bases.

Resp: 2034.84 u^3 

17. -

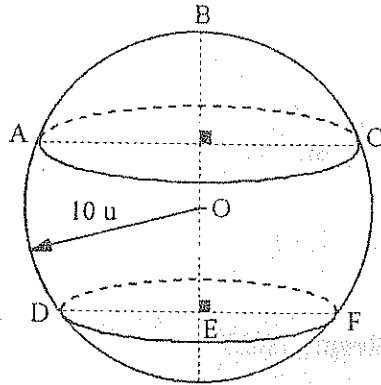


$$H) \begin{aligned} AD &= 3 \text{ u} \\ DB &= 2 \text{ u} \end{aligned}$$

T) Area y volumen del casquete
esférico menor.

Resp:

18. -



$$H) S_{Zona-ACFD} = \frac{7}{16} S_{Esfera}$$

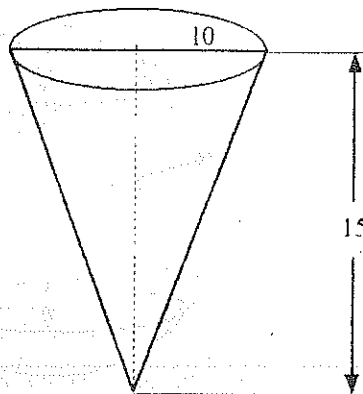
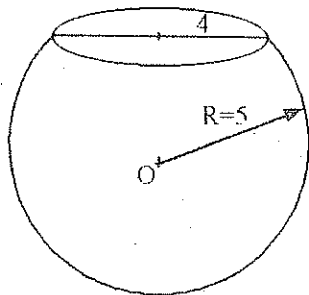
$$\frac{BD}{DE} = \frac{3}{4}$$

$$T) V_{ACFD} = ?$$

$$\text{Resp: } 2562.65 \text{ u}^3$$

19. - El recipiente de la figura (segmento esférico de una base) se tapa con un cono de revolución. Calcular el volumen disponible.

$$\text{Resp: } 368.61 \text{ u}^3$$



20. - Se tiene un cono de helado de diámetro 5 cm y altura 12 cm, se depositan en el tres cucharadas semiesféricas de helado de 5 cm de diámetro. Cuando el helado se derrita dentro del cono, lo rebosará?. Cuánto?. Si no lo hace, qué altura alcanzara en el cono?.

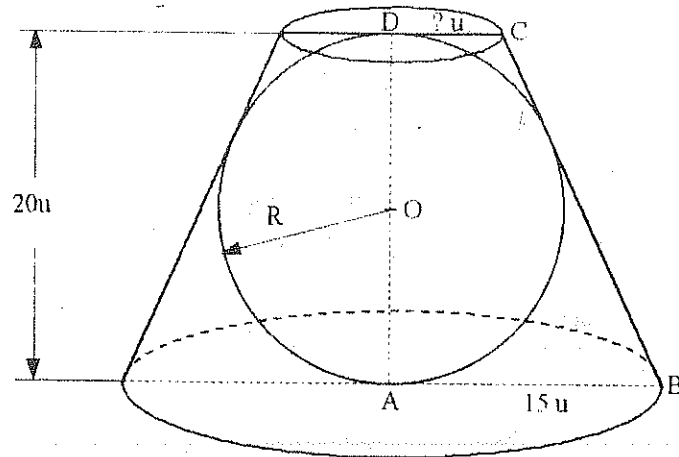
$$\text{Resp: } 19.63 \text{ u}^3$$

21. - Las áreas de dos secciones paralelas ubicadas a lados distintos del centro de una esfera son de 283.69 m^2 y 204.06 m^2 . Si la distancia entre las dos secciones es de 10 m. Calcular el área de la zona esférica formada.

$$\text{Resp: } 628.3 \text{ m}^2$$

22. - El recipiente tronco cónico de revolución esta lleno de agua y contiene una esfera sólida inscrita. Calcular el nivel del agua cuando se retira la esfera.

$$\text{Resp: } 5.96 \text{ u}$$

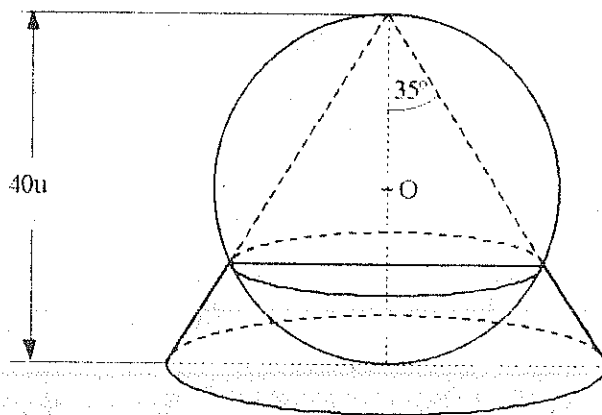


23. - Se tiene una esfera inscrita en un cono de revolución de 15 cm de radio y 32 cm de altura. Calcular el volumen comprendido entre la base del cono y la superficie de la esfera.

Resp:

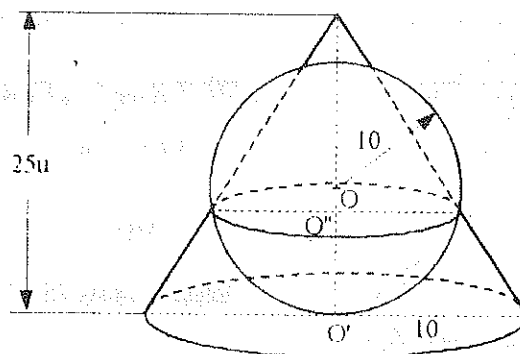
24. - Determinar el volumen común entre la esfera y el cono.

Resp:



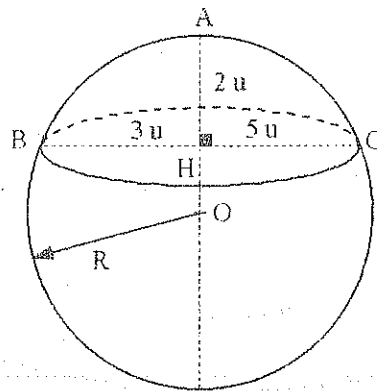
25. - Determinar el volumen común entre la esfera y el cono

Resp: 1961.27 u^3



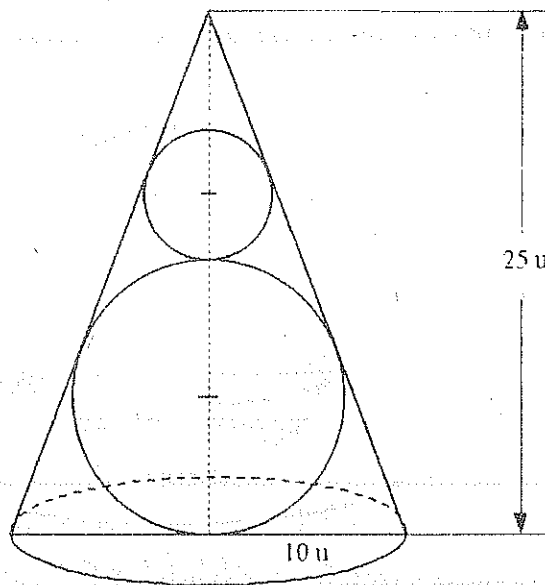
26. - Determinar el área y el volumen del casquete esférico.

Resp:

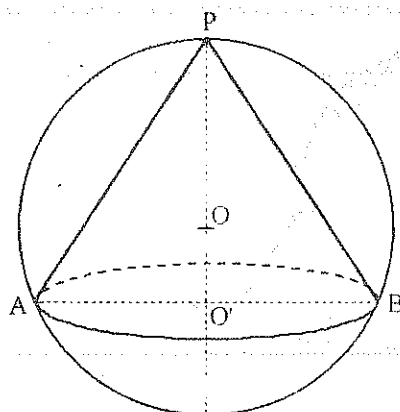


27. - Calcular el volumen de aire de la siguiente figura:

Resp:



28. -



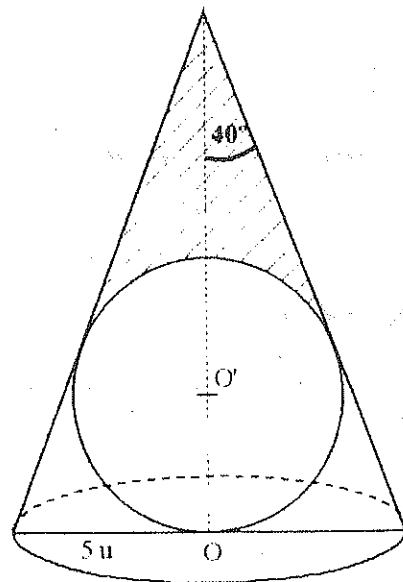
$$H) V_{P-AB} = \frac{1}{4} V_{\text{Esfera}}$$

$$PO' = 7u$$

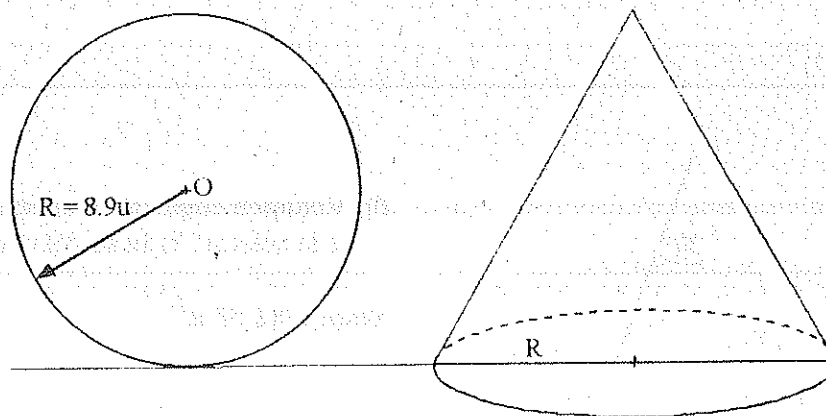
$$T) V_{\text{Esfera}} = ?$$

$$\text{Resp: } 1436.75 u^3$$

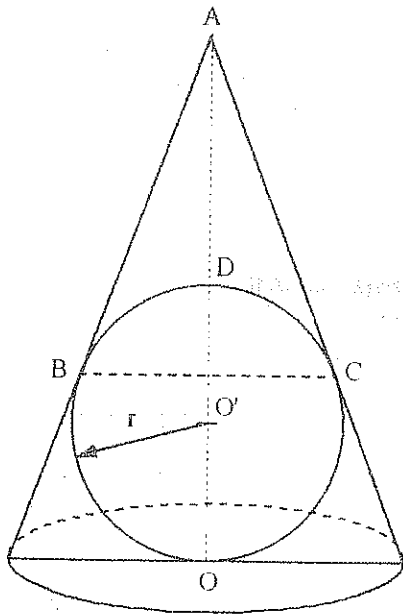
29. -

T) $V_{\text{res}} = ?$ Resp: $2.63 u^3$

30. - Si la altura del cono es igual al diámetro de la esfera y el radio de la base igual al radio de la esfera. ¿A qué distancia del vértice del cono se debe trazar un plano paralelo a la base para que las secciones determinadas en los dos objetos sean de igual área.

Resp: $14.28 u$ 

31. -



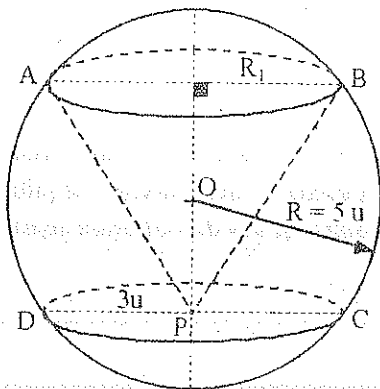
$$H) AB = 4 \text{ u}$$

$$\frac{1}{4} S_{\text{Esfera}} = S_{\text{Lateral-cono-ABC}}$$

$$T) r = ?$$

$$\text{Resp: } 6.47 \text{ u}$$

32. -

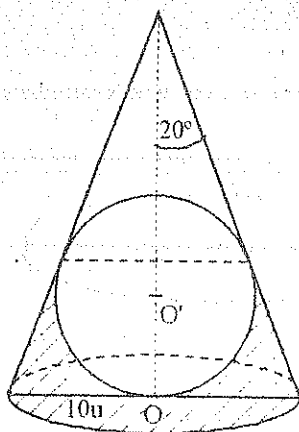


$$H) V_{ABCD} = \frac{1}{3} V_{P-AB}$$

$$T) R_1 = ?$$

$$\text{Resp: } 3 \text{ u}$$

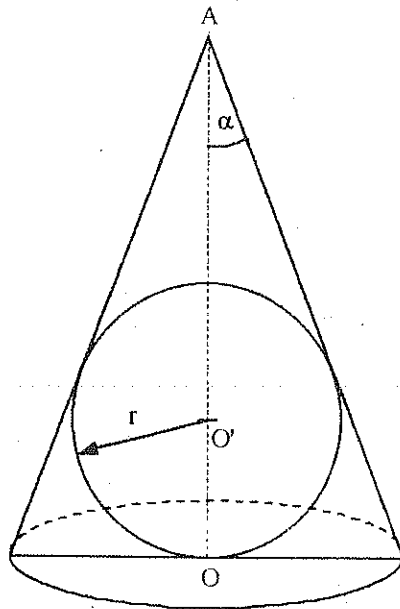
33. -



T) Volumen entre la superficie
de la esfera y la base del cono

$$\text{Resp: } 982.55 \text{ u}^3$$

34. -



$$H_1) \frac{S_{Esfera}}{S_{Cono}} = \frac{4}{3}$$

$$T_1) \alpha = ?$$

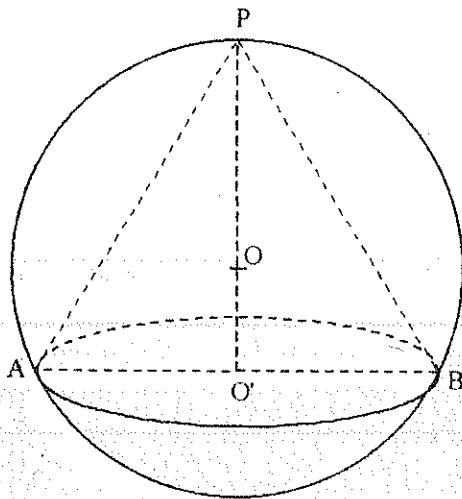
Resp: 60°

$$H_2) \frac{V_{Cono}}{V_{Esfera}} = 2$$

$$T_2) \frac{S_{Tot. Cono}}{S_{Esfera}} = ?$$

Resp: 2

35. -



$$H) S_{Lateral P-AB} = \frac{1}{2} S_{Zona P-AB}$$

$$T) PO_1 = ?$$

Resp: $\frac{3}{2} R$