

٢٠١٨ - ٢٠١٩ م

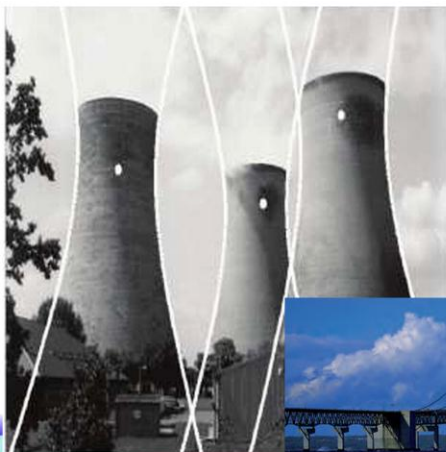
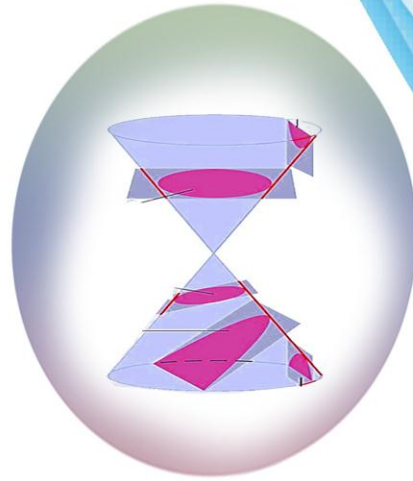
القطوع المخروطية

لطلاب الصف
الثالث الثانوي

إعداد :

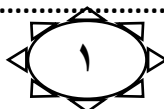
أ/ خليل المعازي

مدرس الرياضيات
بمدرسة الرشيد الحديثة



فهرس المحتويات

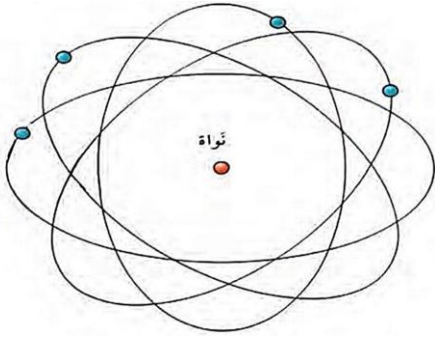
٣.....	القطوع المخروطية وأهمية دراستها
٤.....	مراجعة عامة
٦.....	القطوع المخروطية
٨.....	أولاً / القطع المكافئ
٨.....	معادلة القطع المكافئ
٩.....	النماذج القياسية للقطع المكافئ
١١.....	تمارين على القطع المكافئ
١١.....	النوع الأول/ القطع في وضع قياسي
١١.....	معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع
١٣.....	صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة
١٥.....	النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي
١٩.....	النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع مكافئ
٢١.....	نشاط (١)
٢٢.....	ثانياً / القطع الناقص
٢٢.....	معادلة القطع الناقص
٢٦.....	تمارين على القطع الناقص
٢٦.....	النوع الأول/ القطع في وضع قياسي
٢٦.....	معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع
٢٨.....	صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة
٣٤.....	النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي
٣٥.....	النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع ناقص
٣٦.....	نشاط (٢)
٣٨.....	ثالثاً / القطع الزائد
٣٩.....	معادلة القطع الزائد
٤٢.....	تمارين على القطع الزائد



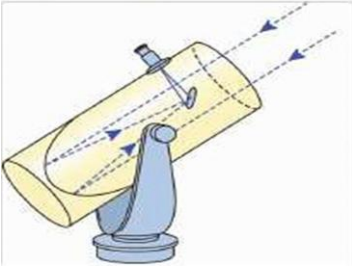
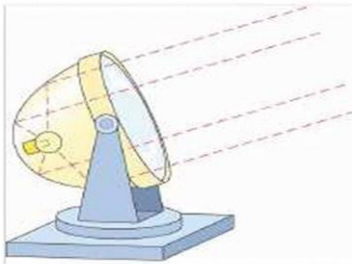
النوع الأول/ القطع في وضع قياسي.....	٤٢
معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع	٤٢
صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة.....	٤٤
النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي.....	٤٨
النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع زائد	٤٩
التعريف العام للقطوع باستخدام التخالف المركزي	٥٠
نشاط (٣)	٥٤

الخط
المع
ازي

القطوع المخروطية وأهمية دراستها



في الكون والطبيعة من حولنا كثير من الصناعات والهندسة المعمارية تتخذ شكل قطوع مخروطية كما يمكن ملاحظة حركة الكواكب والنجوم حيث أنها تتحرك في مدارات تتخذ أحد أشكال القطوع ، وفي الذرة والإلكترون يلاحظ المختصون بأن الإلكترونات تدور حول النواة في مدارات تشبه قطع ناقص. ومن التطبيقات الأخرى للقطوع المخروطية استخدامها في انتشار الصوت حيث تصنع آلات تكبير الصوت الحديثة بشكل يتخذ أحد أشكال القطوع. وكذلك تستخدم في انتشار الضوء كما في كشافات السيارات، فهو مجسم لقطع مكافئ وضع في بؤرته مصباحاً وعندما يخرج الضوء من هذا المصباح ينعكس على السطح العاكس وبصورة تجعل الضوء منتشر أمام السيارة. وهناك الكثير من التطبيقات وفيما يلي صور لبعض تلك التطبيقات.



تبنى السدود والحواجز المائية على شكل قطوع مخروطية لتحمل قوة دفع الماء وتخفيف قوة الاحتكاك.



جسر مائي على شكل قطع مخروطي



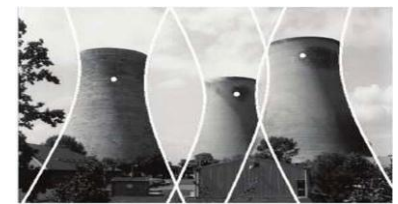
تصنع بعض الآلات الطبية على شكل قطع مخروطي كما في الصورة.



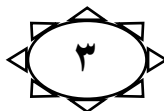
أطباق استقبال الترددات تصنع على شكل قطوع مخروطية .



تبنى بعض الجسور على شكل قطع مخروطي لإعطاء الجسور المقاومة اللازمة لتحمل الحمولات عليه .



تبنى مداخن المصانع وصوامع الغلال على شكل قطع زائد كما هو ملاحظ.

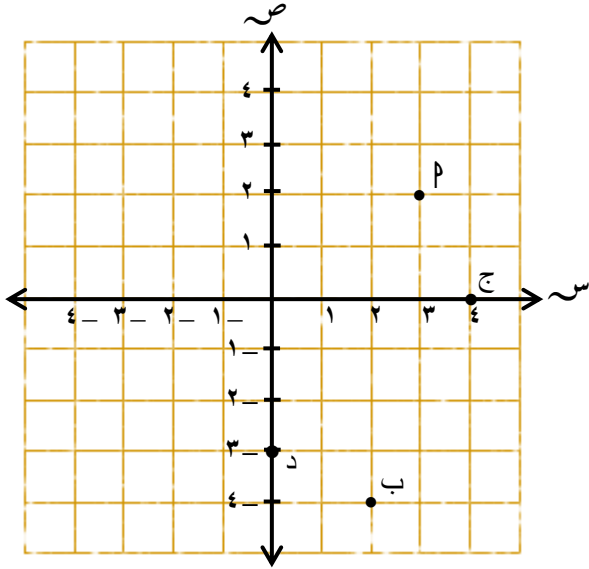


مراجعة عامة Review

تعتبر هذه الوحدة جزء من موضوعات الهندسة التحليلية والتي تفصل وتصف أشكال نشاهدها من حولنا وتشرحها وتفسرها، وقبل دراسة مواضيع هذه الوحدة على الطالب الإلمام ببعض الأساسيات التي سنوضحها و نقدم أمثلة عليها في بداية شرح دروس الوحدة.

أولاً/ مفاهيم عامة :

❖ مستوى الإحداثيات المتعامدة (المستوى الإحداثي): عبارة عن تقاطع محورين يسمى المحور الأفقي بالمحور السيني والمحور الرأسي بالمحور الصادي ومن تسمياته "المستوى الديكارتي" والشكل المرسوم جانباً يبين ذلك.



ملاحظات على مستوى الإحداثيات المتعامدة :

(١) كل نقطة في المستوى لها إحداثيان سيني وصادي وتسمى بأحد الأحرف الهجائية مثل م ، ب ، ... وتكتب بالشكل: م(س ، ص) .

مثال/ في الشكل المرسوم جانباً إحداثي النقطة

م هو (٣ ، ٢) وتكتب النقطة م مع إحداثيها

بالشكل: م (٣ ، ٢) ، كذلك نلاحظ أن إحداثي ب هو (٢ ، -٤) .
(٢) المحوران الإحداثيان يقسمان المستوى إلى أربعة أرباع .

(٣) أي نقطة تقع على محور السينات إحداثيها الصادي صفر ، وأي نقطة تقع على محور الصادات إحداثيها السيني صفر .

مثال/ إحداثي النقطة ج في الشكل المرسوم هو (٤ ، ٠) وإحداثي النقطة د هو (٠ ، -٣)

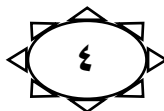
ثانياً/ قوانين هامة :

القوانين التالية مهمة و يجب التركيز عليها :

(١) قانون إحداثي منتصف القطعة المستقيمة م ب :

يرمز للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين م (س_١ ، ص_١) ، ب (س_٢ ، ص_٢) بالرمز م ب̄ ويعطى إحداثي نقطة المنتصف بالقانون:

$$\text{إحداثي منتصف م ب} = \left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢} , \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢} \right)$$



(٢) قانون البُعد بين نقطتين :

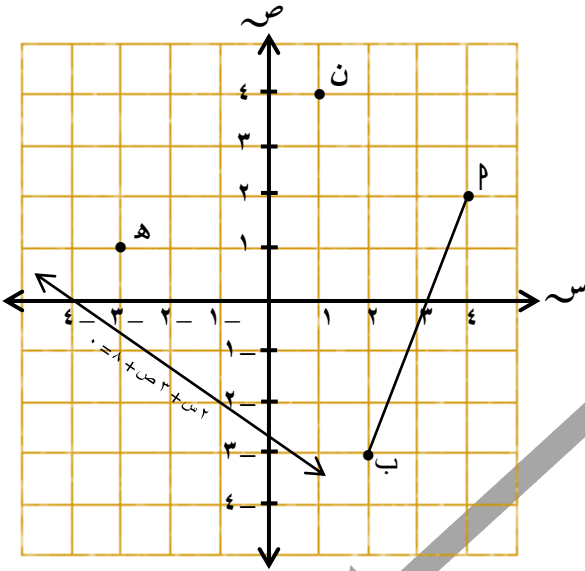
يرمز للبعد بين النقطتين P (س_١، ص_١) ، B (س_٢، ص_٢) بالرمز $|P|$ ويعطى بالقانون :

$$\sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2} = |P|$$

(٣) قانون البُعد بين نقطة ومستقيم :

نرمز للبعد بين النقطة P (س_١، ص_١) والمستقيم AB (س_١، ص_١) بالرمز F ، ويمكن إيجاد قيمة F بالقانون التالي :

$$F = \frac{|س_١ + ص_١ + س_٢ + ص_٢|}{\sqrt{س_٢^2 + ص_٢^2}}$$



مثال/ من الشكل المرسوم أوجد ما يلي :

- (١) إحداثي النقطة هـ
- (٢) إحداثي منتصف \overline{AB}
- (٣) $|P|$
- (٤) بُعد النقطة N عن المستقيم الذي معادلته $٢س + ٣ص = ٨$

الحل

(١) إحداثي هـ هو $(-٣, ١)$

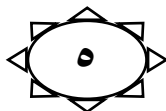
$$(٢) \text{ إحداثي منتصف } \overline{AB} = \left(\frac{٢ + ٤}{٢}, \frac{٣ + (-١)}{٢} \right) = \left(٣, -١ \right)$$

$$(٣) |P| = \sqrt{(٤ - ٢)^2 + (٢ - ٤)^2} = \sqrt{٢^2 + ٢^2} = \sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$$

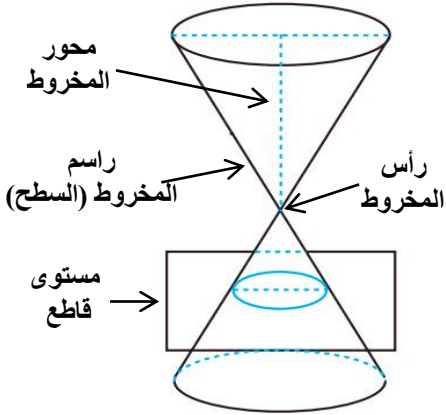
(٤) من معادلة المستقيم: $٢ = P$ ، $٣ = B$ ، $٨ = J$

ومن إحداثي النقطة N : $س_١ = ١$ ، $ص_١ = ٤$

$$\therefore F = \frac{|س_١ + ص_١ + س_٢ + ص_٢|}{\sqrt{س_٢^2 + ص_٢^2}} = \frac{|٨ + ١٢ + ٢|}{\sqrt{٩ + ٤}} = \frac{|٢٢|}{\sqrt{١٣}} = \frac{٢٢}{\sqrt{١٣}}$$



القطوع المخروطية Conic Section



مخروط دائري قائم مزدوج

تعريف:

القطوع المخروطية هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس (مخروط دائري قائم مزدوج) والتقاطع يكون مع كليهما أو أحدهما.

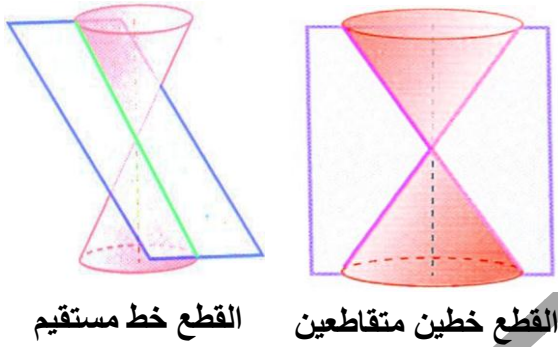
من التعريف يتبين أن سبب تسمية القطوع المخروطية بهذا الاسم وهو أنها ناتجة من تقاطع مستوى (قاطع) مع مخروط دائري قائم مزدوج.

حالات تقاطع مستوى مع مخروط دائري قائم مزدوج:

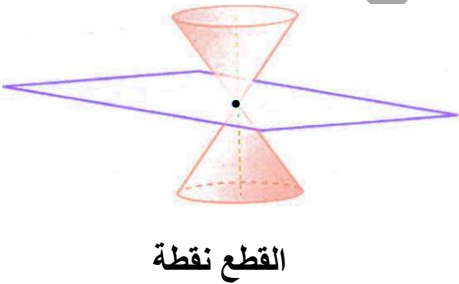
هناك حالتان ناتجتان من تقاطع مستوى مع مخروط مزدوج قائم وفق لموقع نقطة رأس المخروط حيث:

الحالة الأولى / نقطة رأس المخروط المزدوج تقع على المستوى القاطع:

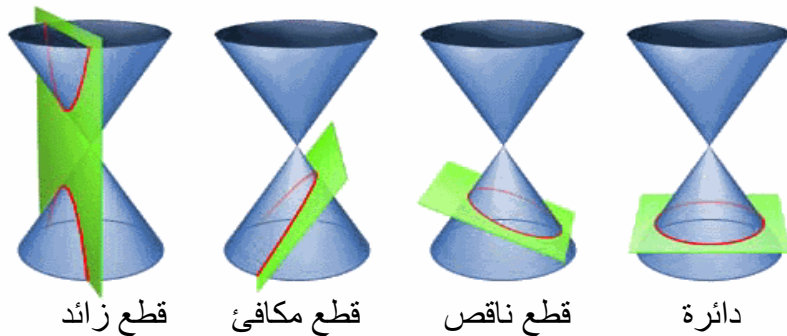
وفي هذه الحالة يتكون لدينا ٤ أشكال (غير حقيقية) هي:



- ١ إذا كان المستوى القاطع يمس سطح المخروط (الرأس) فإن القطع الناتج عبارة عن خط مستقيم.
- ٢ إذا كان المستوى القاطع عمودي على القاعدتين ويمر بمحور المخروط فإن القطع الناتج عبارة عن خطين متقاطعين.



- ٣ إذا كان المستوى القاطع عمودي على محور المخروط من نقطة تقاطع الخطين الراسمين (منتصف المحور) فإن القطع الناتج عبارة عن نقطة.
- ٤ هناك حالة شاذة يكون القطع فيها عبارة عن خطين مستقيمين متوازيين. (يترك للطالب البحث في هذه الحالة)



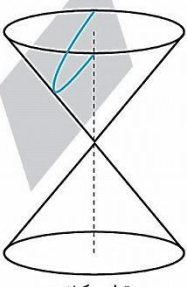
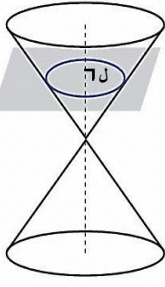
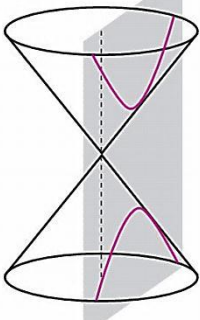
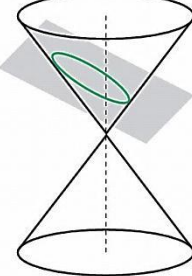
الحالة الثانية/ نقطة رأس المخروط المزدوج ليست على المستوى القاطع:

وفي هذه الحالة يتكون لدينا

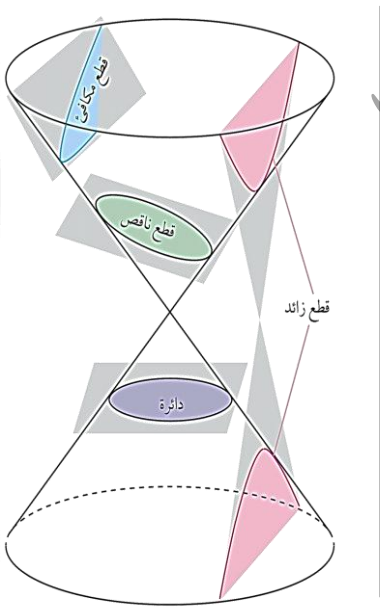
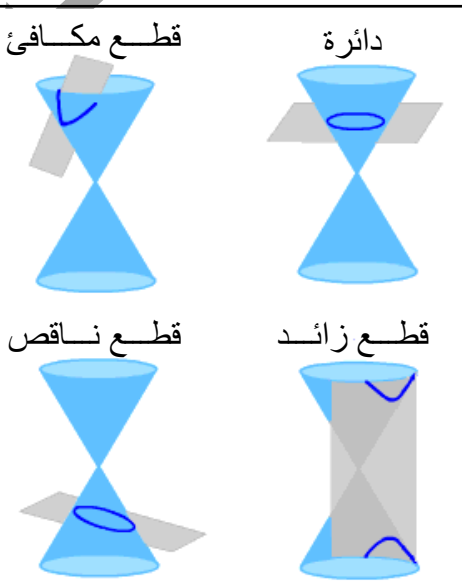
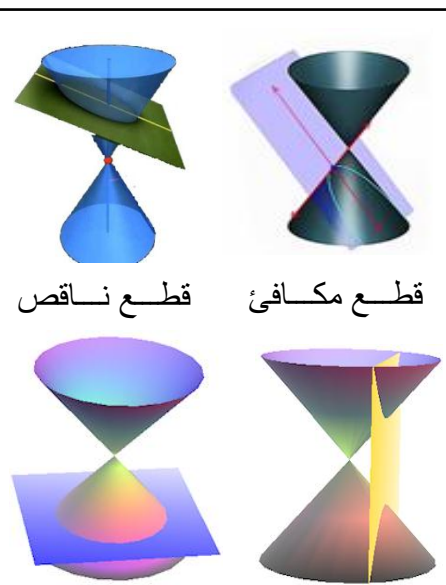
٤ أشكال (حقيقية)

كما في الشكل المقابل

وفيما يلي توضيح لكل حالة :

<p>② منحنى التقاطع قطعاً مكافئاً:</p>  <p>إذا كان المستوى القاطع موازياً لأحد رواسم المخروط كما في الشكل المقابل</p>	<p>① منحنى التقاطع دائرة:</p>  <p>إذا كان المستوى القاطع عمودياً على محور المخروط أي أن قياس زاوية $\theta = 90^\circ$</p>
<p>④ منحنى التقاطع قطعاً زائداً: عندما يكون المستوى القاطع موازياً لمحور المخروط ويوضح ذلك الشكل المقابل</p>  <p>قطع زائد المستوى القاطع موازٍ لمحور المخروط</p>	<p>③ منحنى التقاطع قطعاً ناقصاً: إذا كان المستوى القاطع مائلاً على محور المخروط ولا يوازي أي راسم من رواسم المخروط .</p>  <p>قطع ناقص المستوى القاطع مائل على المحور وغير موازٍ لأي من رواسم المخروط</p>

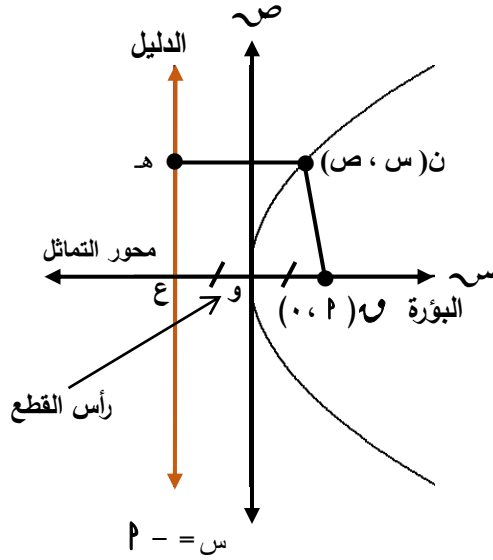
أشكال توضيحية إضافية:

 <p>شكل يوضح القطوع المخروطية الحقيقية</p>	<p>توضيح منحنيات القطوع المخروطية</p> 	<p>مجسم القطوع المخروطية</p> 
--	---	--

أولاً / القطع المكافئ Parabola

تعريف :

القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي بُعدها عن نقطة ثابتة (تسمى البؤرة) يساوي بُعدها عن مستقيم ثابت (يسمى دليل القطع المكافئ).
الشكل المرسوم جانباً عبارة عن قطع مكافئ إحداثي بؤرته $(0, p)$ وواضح أن $|و| = |ن| = |ن-ه|$



شكل يوضح القطع المكافئ

ملاحظات :

(1) محور تماثل القطع (محور التناظر): هو المستقيم الذي يمر بالبؤرة وعمودي على الدليل واختصاراً يسمى محور القطع.

(1) رأس القطع (ذروته): هي نقطة تقاطع القطع مع محوره وهي تنصف (تقع في منتصف) المسافة بين البؤرة والدليل.

$$(2) |و| = |و| = |و-ع| = p$$

(3) القطع المكافئ منحنى مفتوح من جهة واحدة بحيث تقع بؤرته داخل القطع ويقع الدليل خارج القطع (أمام الرأس).

معادلة القطع المكافئ:

باستخدام تعريف القطع المكافئ سنقوم باستنتاج معادلة القطع وبالاستعانة بالشكل المرسوم أعلاه يكون :
لتكن $ن(س، ص) \in$ القطع، $و(0, p)$ البؤرة ، ومعادلة الدليل هي $س = -p \iff س = -p + 0$
∴ بعد النقطة ن عن البؤرة $و(0, p) =$ بعد النقطة ن عن الدليل $(س = -p + 0)$

$$\sqrt{(س-0)^2 + (ص-p)^2} = \sqrt{(س+p)^2}$$

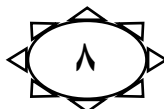
$$\iff \sqrt{(س-0)^2 + (ص-p)^2} = |س+p| \quad \text{بالتربيع}$$

$$س^2 - 2سپ + پ^2 + ص^2 = (س+p)^2$$

$$\iff س^2 - 2سپ + پ^2 + ص^2 = س^2 + 2سپ + پ^2$$

$$\iff ص^2 = 4سپ, \quad 0 < پ$$

وتمثل المعادلة $ص^2 = 4سپ$ الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ من النموذج الأول



مثال/ أثبت أن معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(0, p)$ ودليله $p = 0$ ، هي :

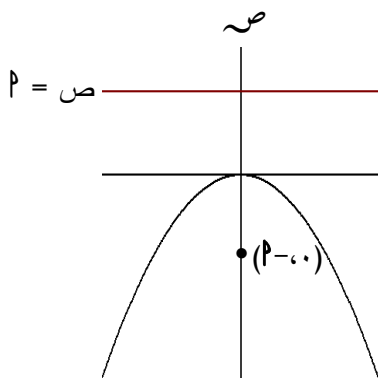
$$s^2 = p^2 - 4p$$

الحل

∴ معادلة الدليل هي $p = s \iff p = s - 0 = 0$ ،

نفرض أن (s, p) ∈ القطع

∴ بعد النقطة N عن البؤرة $(0, p) =$ بعد النقطة N عن الدليل $(s - p = 0)$



$$\sqrt{(p - s)^2 + 0^2} = \sqrt{(p + s)^2 + 0^2}$$

$$\sqrt{(p - s)^2} = \sqrt{p^2 + s^2 + 2ps} \iff |p - s| = \sqrt{p^2 + s^2 + 2ps}$$

$$s^2 + 2ps + p^2 = (p - s)^2$$

$$s^2 + 2ps + p^2 = p^2 - 2ps + s^2 \iff 4ps = 0$$

$$s^2 = p^2 - 4p$$

وتمثل المعادلة $s^2 = p^2 - 4p$ ، الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ من النموذج الرابع

ملاحظة : كل نقطة على القطع تحقق معادلة القطع ولهذا عند إيجاد المعادلة نحن نفترض أي نقطة على القطع .

النماذج القياسية للقطع المكافئ:

يكون القطع في وضع قياسي إذا تحققت إحدى الحالات التالية :

(١) إذا كانت معادلة القطع في وضع نموذجي أي تأخذ أحد الأشكال: $s^2 = p^2 - 4p$ ، $s^2 = p^2 - 4p$

، $s^2 = p^2 - 4p$ ، $s^2 = p^2 - 4p$

(٢) رأس القطع نقطة الأصل وبؤرته على أحد المحورين (الرأس والبؤرة نموذجيان).

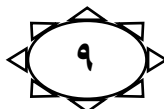
(٣) رأسه نقطة الأصل ودليله موازٍ لأحد المحورين.

(٤) إذا كانت البؤرة والدليل معاً نموذجيان أي إذا كانت البؤرة $(0, p)$ فإن الدليل $s = p$ وإذا كانت

البؤرة $(0, p)$ فإن الدليل $s = p$ وإذا كانت البؤرة $(p, 0)$ فإن الدليل $s = p$ وإذا كانت البؤرة

$(p, 0)$ فإن الدليل $s = p$

هناك أربعة نماذج قياسية للقطع المكافئ وسنبين فيما يلي صفات النماذج الأربعة ورسم منحنياتها .

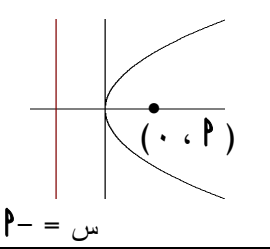
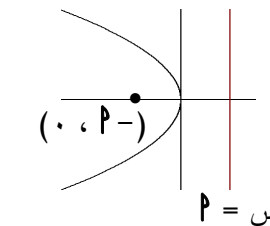
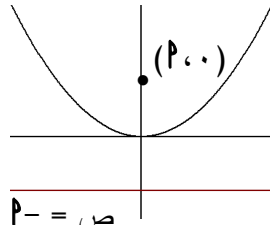
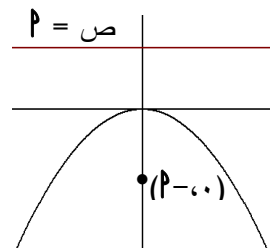


صفات القطع المكافئ :

الصفات التي يتم البحث فيها للقطع المكافئ هي :

- (١) إحداثي الرأس (٢) اتجاه فتحة القطع
(٣) إحداثي البؤرة (٤) معادلة الدليل (٥) محور القطع (محور التماثل)

الجدول التالي يبين الصفات السابقة في النماذج الأربعة للقطوع المكافئة

النموذج	معادلة القطع	البؤرة	معادلة الدليل	محور القطع	اتجاه فتحة القطع	رسم القطع
الأول	$ص^2 = ٤پس$ ($٠ < پ$)	($٠, پ$)	$س = -پ$	السينات الموجب $٠ = ص$	يمين	
الثاني	$ص^2 = ٤پ-س$ ($٠ < پ$)	($٠, پ-$)	$س = پ$	السينات السالب $٠ = ص$	يسار	
الثالث	$س^2 = ٤پص$ ($٠ < پ$)	($پ, ٠$)	$ص = -پ$	الصادات الموجب $٠ = س$	أعلى	
الرابع	$س^2 = ٤پ-ص$ ($٠ < پ$)	($پ-, ٠$)	$ص = پ$	الصادات السالب $٠ = س$	أسفل	

ملاحظات :

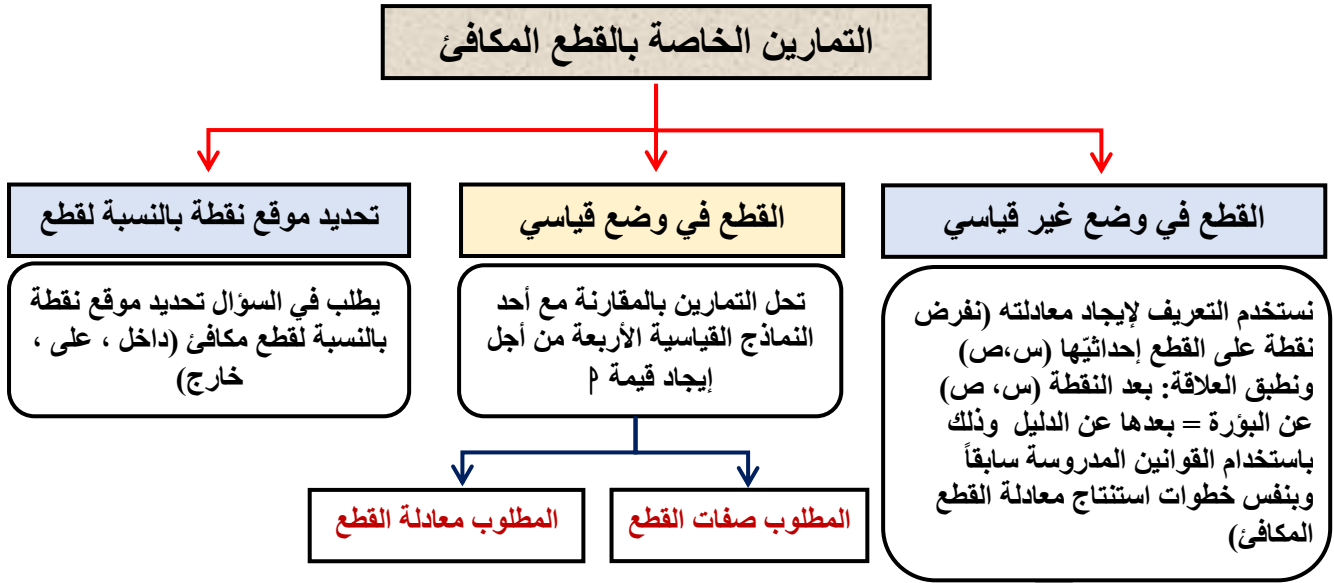
(١) التربيع دائماً يتبع معادلة محور القطع (إذا كان التربيع للمتغير س فإن معادلة محور القطع هي

$س = ٠$ أي أن محور القطع هو محور الصادات، وإذا كان التربيع للمتغير ص فإن معادلة

محور القطع هي $ص = ٠$ أي أن محور القطع هو محور السينات).

(٢) في النماذج القياسية رأس القطع نقطة الأصل ($٠, ٠$)

تكون تمارين القطع المكافئ عادةً وفق المخطط التالي:



تذكر أن/ في القطع المكافئ:

- ❖ البعد بين البؤرة والدليل $p_2 = p$
- ❖ البعد بين البؤرة والرأس = البعد بين الرأس والدليل $p = p$
- ❖ نقطة تقاطع المحور مع القطع هي رأس القطع.

تمارين على القطع المكافئ

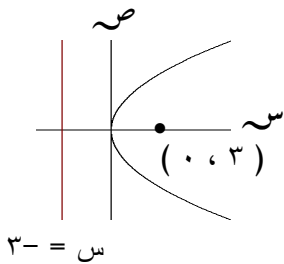
النوع الأول/ القطع في وضع قياسي

① معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع :

مثال/ أوجد إحداثي البؤرة و معادلة الدليل ثم ارسم القطع في كل حالة مما يلي :

(١) إذا كانت معادلة القطع: $ص^2 = ١٢ س$

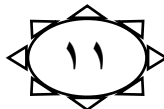
الحل



س = -٣

المعادلة تمثل قطع مكافئ في وضع قياسي من النموذج الأول
بالمقارنة بالمعادلة: $ص^2 = ٤ پ س$ نجد أن: $٤ پ = ١٢ \Rightarrow پ = ٣$
صفات القطع: محور القطع السينات الموجب ومعادلته: $ص = ٠$

إحداثي الرأس (٠، ٠) ، إحداثي البؤرة (٠، ٣) ، و معادلة دليله $س - ٣ = ٠$

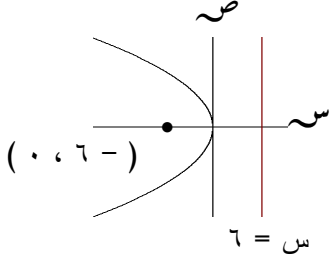


(٢) إذا كانت معادلة القطع: $ص^2 + ٢٤س = ٠$

الحل

$\therefore ص^2 + ٢٤س = ٠ \therefore ص^2 = -٢٤س$: قطع مكافئ في وضع قياسي من النموذج الثاني

بالمقارنة بالمعادلة: $ص^2 = -٢٤س$ نجد أن: $٢٤ = ٤٢٤ \iff ٦ = ٢٤$



صفات القطع: محور القطع السينات السالب ومعادلته: $ص = ٠$

و رأسه النقطة $(٠, ٠)$ وإحداثيّ البؤرة $(٠, ٦-)$

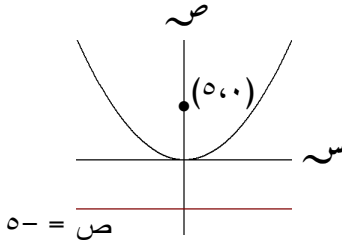
و معادلة دليله $٦ = س$

(٣) إذا كانت معادلة القطع: $ص^3 = ٦٠س$

الحل

$\therefore ص^3 = ٦٠س$ (بالقسمة على ٣) $\iff ص^3 = ٢٠س$: قطع مكافئ في وضع قياسي من النموذج الثالث

بالمقارنة بالمعادلة: $ص^3 = ٢٠س$ نجد أن: $٢٠ = ٤٢٠ \iff ٥ = ٢٠$



صفات القطع: محور القطع الصادي الموجب ومعادلته: $س = ٠$

و رأسه النقطة $(٠, ٠)$ وإحداثيّ البؤرة $(٥, ٠)$

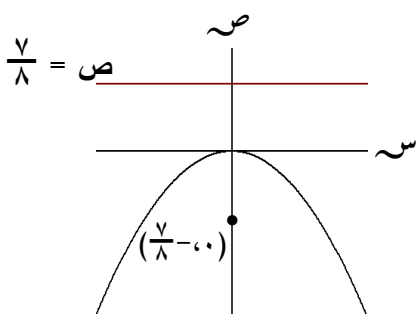
و معادلة دليله $٥ = ص$

(٤) إذا كانت معادلة القطع: $ص = \frac{٢}{٧}س^2 - ١$

الحل

$\therefore ص = \frac{٢}{٧}س^2 - ١$ (بالضرب في $\frac{٧}{٢}$) $\iff \frac{٧}{٢}ص = س^2 - \frac{٧}{٢}$: قطع مكافئ في وضع قياسي من النموذج الرابع

بالمقارنة بالمعادلة: $س^2 = \frac{٧}{٢}ص + \frac{٧}{٢}$ نجد أن: $\frac{٧}{٢} = ٢٤ \iff \frac{١}{٤} \times \frac{٧}{٢} = ٢ \iff \frac{٧}{٨} = ٢$



صفات القطع: محور القطع الصادي السالب ومعادلته: $س = ٠$

و رأسه النقطة $(٠, ٠)$ وإحداثيّ البؤرة $(\frac{٧}{٨}, ٠)$

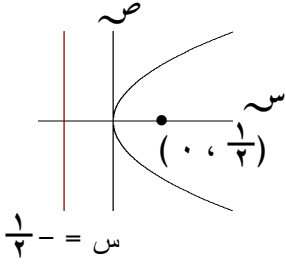
و معادلة دليله $\frac{٧}{٨} = ص$

(٥) إذا كانت معادلة القطع: $\frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س}$

الحل

∴ $\frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س}$ (بضرب طرفين × وسطين) $\Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س}$ قطع مكافئ في وضع قياسي من النموذج الأول

بالمقارنة بالمعادلة: $\frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س}$ نجد أن: $\frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س}$



صفات القطع: محور القطع السينات الموجب ومعادلته: $x = 0$

إحداثي الرأس $(0, 0)$

إحداثي البؤرة $(0, \frac{1}{4})$

و معادلة دليله $x = \frac{1}{4}$

ⓑ صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة:

مثال/ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي يحقق ما يلي:

(١) الرأس $(0, 0)$ والبؤرة $(0, 9)$

الحل

∴ الرأس والبؤرة نموذجيان ، البؤرة تقع على الصادات الموجب ∴ القطع قياسي (محوره الصادات

الموجب) من النموذج الثالث معادلته: $\frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س}$ بؤرته $(0, 9) = (0, 36)$ $\Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س}$

∴ معادلة القطع: $\frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س}$ $\Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س}$

(٢) رأسه نقطة الأصل وبؤرته $(0, -\frac{1}{4})$

الحل

∴ الرأس والبؤرة نموذجيان ، البؤرة تقع على السينات السالب ∴ القطع قياسي (محوره السينات

السالب) من النموذج الثاني معادلته: $\frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س}$ بؤرته $(0, -\frac{1}{4}) = (0, -\frac{1}{16})$ $\Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س}$

∴ معادلة القطع: $\frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س}$ $\Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س} \Leftrightarrow \frac{y^2}{ص} = \frac{x^2}{س}$

ملاحظة / من مسميات النقطة $(0, 0)$: نقطة الأصل ، مبدأ الإحداثيات ، نقطة تقاطع محور السينات

بمحور الصادات .

(٣) بؤرته $(0, \frac{3}{4})$ ودليله : $٤ س + ٣ = ٠$

الحل

الدليل: $٤ س + ٣ = ٠ \iff ٤ س = -٣ \iff س = -\frac{3}{4}$

∴ الدليل والبؤرة نموذجيان ، البؤرة تقع على السينات الموجب ∴ القطع قياسي (محوره السينات

الموجب) من النموذج الأول معادلته: $ص^٢ = ٤ پ س$ ، بؤرته $(0, پ) = (0, \frac{3}{4}) \iff پ = \frac{3}{4}$

∴ معادلة القطع: $ص^٢ = ٤ پ س \iff ص^٢ = ٣ س \iff ٣ س = ص^٢$

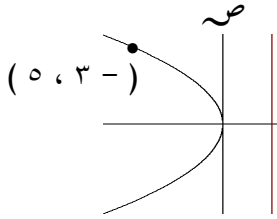
(٤) رأسه مبدأ الإحداثيات و محوره هو المحور السيني و القطع يمر بالنقطة $(-٣, ٥)$

الحل

∴ رأس القطع نقطة الأصل ومحوره هو محور السينات ، ∴ النقطة $(-٣, ٥)$ تقع في الربع الثاني يتبين أن:

القطع في وضع قياسي (محوره السينات السالب) من النموذج الثاني معادلته: $ص^٢ = -٤ پ س$

∴ القطع يمر بالنقطة $(-٣, ٥)$ ∴ النقطة تحقق معادلة القطع



نعوض في معادلة القطع عن $س = -٣$ ، $٥ = ص$ لإيجاد قيمة $پ$ فيكون: $٥ = ص$

$$٥^٢ = -٤ پ (-٣) \iff ٢٥ = ١٢ پ \iff پ = \frac{٢٥}{١٢}$$

∴ بؤرته $(0, -\frac{٢٥}{١٢})$ ودليله $س = -\frac{٢٥}{١٢}$ ، معادلته: $ص^٢ = -٤ پ س \iff ٢٥ = -٣ \times -٤ پ \iff ٢٥ = ١٢ پ$

(٥) فتحة القطع باتجاه السينات الموجب و بؤرته $(٠, ٤)$ ودليله يبعد عن بؤرته بمقدار ٨ وحدات طولية

الحل

∴ البعد بين البؤرة والدليل $٢ پ = ٨ \iff پ = ٤$

∴ فتحة القطع باتجاه السينات الموجب ، ∴ البؤرة $(٠, ٤)$

∴ القطع في وضع قياسي (محوره السينات الموجب) من النموذج الأول معادلته: $ص^٢ = ٤ پ س$

∴ معادلة القطع: $ص^٢ = ٤ پ س \iff ص^٢ = ١٦ س \iff ١٦ س = ص^٢$

النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي

مثال/ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي يحقق ما يلي:

(۱) بۇرتە (۱-، ۲-) ودليله س = ۲ ص - ۳

الحل

:: البؤرة والدليل غير نموذجيان :: القطع في وضع غير قياسي ولإيجاد معادلة القطع نستخدم التعريف

نفرض أن: $n(s, v) \in \text{القطع}$ ، \therefore البؤرة $(-1, -2)$ والدليل: $s - 2v + 3 = 0$

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة (- ١ ، - ٢) = بعد النقطة ن عن الدليل (س - ٢ ص + ٣ = ٠)

$$\frac{|3 + 2\sqrt{s} - s|}{\sqrt{(2-) + 1}\sqrt{}} = \sqrt{(2 + \sqrt{s}) + (1 + s)}\sqrt{}$$

$$\frac{|s - s^2 + s^3|}{\sqrt[5]{s}} = \sqrt[5]{s^4 + s^3 + s^2 + s + 1}$$

$$s^2 + s + 4v + 5 = \frac{1}{6}(s^2 + s + 4v - 9 + 4sv - s^6 + 12v)$$

بالضرب $\times 5$ وجميع الحدود المتشابهة تكون معادلة القطع بالشكل :

∴ معادلة القطع : $4س^2 + ص^2 + 4س + 32 + 16 = 0$

***** * * * ***** * * * ***** * * * ***** * * * *****

(۲) بۇرتە (۳، - ۱) ودلیله س = - ۱

الحل

٢٠ البؤرة والدليل غير نموذجيان .: القطع في وضع غير قياسي ولإيجاد معادلة القطع نستخدم التعريف

∴ البؤرة (٣، -١) والدليل: $s = -١$ وبفرض: $n(s, ص) \ni$ القطع

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة (٣ ، -١) = بعد النقطة ن عن الدليل (س + ١ = ٠)

$$\frac{|1+s|}{\sqrt[2]{0. + 11}\sqrt{}} = \sqrt[2]{(1+ص) + (3-س)} \sqrt{}$$

$$|1 + s| = \sqrt{1 + 2s + 2s^2 + 9 + s^6 - s^2}$$

$$\cancel{س^۲} - ۹س + \cancel{ص^۲} + ۲ص + ۱ = \cancel{س^۲} + ۲س + \cancel{۱} + ص$$

∴ معادلة القطع : $ص^2 + ٢ ص - ٨ س + ٩ = ٠$

إيجاد إحداثي الرأس أو معادلة الدليل في الوضع غير القياسي :

إذا كان القطع المكافئ في وضع غير قياسي فإنه:

① لإيجاد إحداثي نقطة رأس القطع إذا لم تكن معلومة نتبع ما يلي:

نحدد البؤرة و نقطة تقاطع الدليل مع محور القطع فيكون الرأس في منتصف المسافة ما بينهما (بين البؤرة والدليل) أي نستخدم قانون إحداثي منتصف قطعة مستقيمة المذكور سابقاً في بداية الوحدة

② إذا كانت البؤرة معلومة وإحداثي الرأس معلوم والمطلوب نقطة تقاطع الدليل مع محور القطع:

نفرض أن النقطة هي (م ، هـ) ثم نستخدم قانون إحداثي منتصف قطعة مستقيمة لإيجاد قيمة م ، هـ .

③ إذا لم تكن معادلة الدليل معلومة:

✓ نوجد نقطة تقاطع الدليل مع محور القطع بالطريقة الواردة في فقرة ٢ السابقة.

✓ نوجد ميل محور القطع حيث: $m = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ وذلك بدلالة البؤرة ورأس القطع (نقطتين تقع على المحور)

✓ ميل الدليل = $\frac{1 - \text{ميل محور القطع}}{\text{لأنهما متعامدين}}$

✓ تكون معادلة الدليل بالشكل: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

حيث: م: ميل محور القطع ، (س_١ ، ص_١) هي نقطة تقاطع الدليل مع محور القطع.

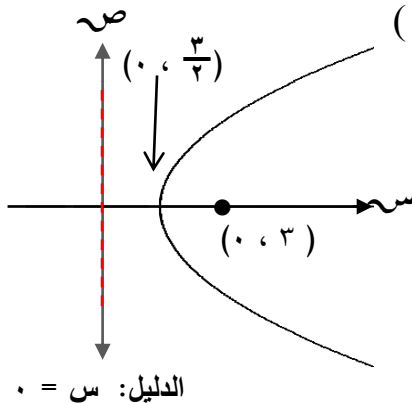
(٣) بؤرته (٠ ، ٣) ودليله س = ٠ ثم أوجد رأسه وارسمه .

الحل

∴ البؤرة والدليل غير نموذجيان ∴ القطع في وضع غير قياسي ولإيجاد معادلة القطع نستخدم التعريف

∴ البؤرة (٠ ، ٣) والدليل : س = ٠ وبفرض أن: ن (س ، ص) ∈ القطع

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة (٠ ، ٣) = بعد النقطة ن عن الدليل (س = ٠)



الدليل: س = ٠

$$\frac{|س|}{\sqrt{٠ + ١}} = \sqrt{(٠ - ص)^2 + (٣ - س)^2}$$

$$\sqrt{س^2} = \sqrt{ص^2 + ٩ + س^2 - ٦ص}$$

$$س^2 = ص^2 + ٩ + س^2 - ٦ص$$

$$\therefore \text{معادلة القطع: } ص^2 = ٦ - س$$

لإيجاد إحداثي رأس القطع: ∴ الدليل س = ٠ ∴ نقطة تقاطع الدليل مع محور القطع هي (٠، ٠)
 ∴ الرأس يقع في منتصف المسافة بين البؤرة (٠، ٣) ونقطة تقاطع الدليل مع المحور (٠، ٠)

$$\therefore \text{إحداثي الرأس} = \left(\frac{٠+٠}{٢}, \frac{٠+٣}{٢} \right) = \left(٠, \frac{٣}{٢} \right)$$

حل آخر لإيجاد نقطة الرأس: ∴ محور القطع هو محور السينات ∴ نقطة تقاطع منحنى القطع مع محور السينات هي رأس القطع ولإيجاد نقطة تقاطع منحنى القطع مع محور السينات نضع ص = ٠ فيكون:

$$٦س - ٩ = ٠ \iff س = \frac{٩}{٦} \iff س = \frac{٣}{٢} \therefore \text{الرأس} \left(٠, \frac{٣}{٢} \right)$$

(٤) رأسه (٣، ٢-) و بؤرته (٣، ٤-) وارسمه.

الحل

∴ الرأس والبؤرة غير نموذجيان ∴ القطع في وضع غير قياسي ولإيجاد معادلة القطع نستخدم التعريف

أولاً / نوجد معادلة الدليل: بفرض أن نقطة تقاطع محور القطع مع الدليل هي (م، هـ)

∴ الرأس نقطة المنتصف بين البؤرة ونقطة التقاطع المفروضة فإن:

$$\frac{٤-}{٢} = \frac{م+٣}{٢} \iff م = ٠ \iff ٣ = \frac{٣+هـ}{٢} \iff هـ = ٣$$

∴ النقطة (٣، ٠) تقع على الدليل ولإيجاد ميل محور القطع يكون:

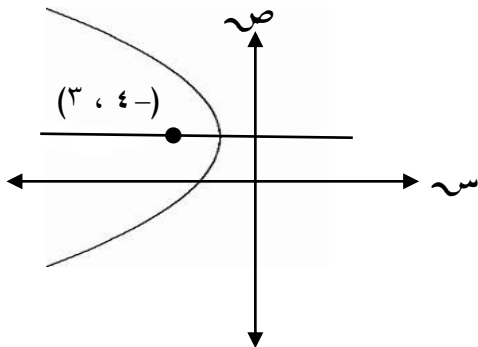
$$\text{ميل المحور} = \frac{٣-٣}{٤+٢} = ٠ \quad (\text{محور القطع موازي للسينات})$$

∴ الدليل منطبق على محور الصادات (لأن محور القطع والدليل متعامدان) معادلة الدليل هي: س = ٠

ثانياً نستخدم التعريف

نفرض أن: ن (س، ص) ∈ القطع ∴ البؤرة (٣، ٤-) والدليل: س = ٠

∴ بُعد النقطة ن عن البؤرة (٣، ٤-) = بُعد النقطة ن عن الدليل (س = ٠)



$$\frac{|س|}{\sqrt{٠+١}} = \sqrt{(٣-ص)^2 + (٤+ص)^2}$$

$$|س| = \sqrt{٩+ص^2-٢ص+١٦+٨ص+ص^2} \quad \text{بالتربيع}$$

$$س^2 = ٩+ص^2-٢ص+١٦+٨ص+ص^2$$

$$\therefore \text{معادلة القطع: } ص^2 - ٢ص + ٨ص + ٢٥ = ٠$$

(٥) رأسه (١، ٢) و بؤرتيه (١، -١) وارسمه.

الحل

∴ الرأس والبؤرة غير نموذجيان ∴ القطع في وضع غير قياسي ولإيجاد معادلة القطع نستخدم التعريف

أولاً / نوجد معادلة الدليل: بفرض أن نقطة تقاطع محور القطع مع الدليل هي (م ، هـ)

∴ الرأس نقطة المنتصف بين البؤرة ونقطة التقاطع المفروضة فإن :

$$٢ = \frac{م + ١}{٢} \iff م = ٣ ، \quad ١ = \frac{هـ + ١}{٢} \iff هـ = ٣$$

∴ النقطة (٣، ٣) تقع على الدليل ولإيجاد ميل محور القطع يكون:

$$\text{ميل المحور} = \frac{٣ - ١}{٣ - ١} = ٢ \iff \text{ميل الدليل} = -\frac{١}{٢} \quad (\text{لأن محور القطع والدليل متعامدان})$$

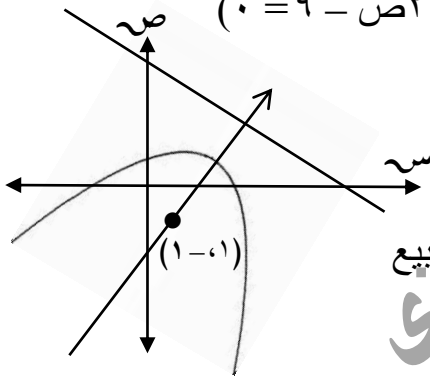
∴ الدليل يمر بالنقطة (٣، ٣) وميله $-\frac{١}{٢}$

$$\text{∴ معادلة الدليل هي: } \frac{ص - ٣}{٣ - ٣} = -\frac{١}{٢} \iff ٢ص - ٦ = ٣ + س \iff ٢ص + س = ٩ \iff ٠ = ٩ - ٢ص + س$$

ثانياً نستخدم التعريف

نفرض أن: ن(س ، ص) ∈ القطع ، ∴ البؤرة (١، -١) والدليل : ٠ = ٩ - ٢ص + س

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة (١، -١) = بعد النقطة ن عن الدليل (٠ = ٩ - ٢ص + س)



$$\frac{|٩ - ٢ص + س|}{\sqrt{٢^٢ + ١^٢}} = \sqrt{(١ - س)^٢ + (٢ + ص)^٢}$$

$$\frac{|٩ - ٢ص + س|}{٥} = \sqrt{١ + ص^٢ + ٢ص + ١ + س^٢ - ٢س} \quad \text{بالتربيع}$$

$$\frac{(٩ - ٢ص + س)^٢}{٥} = ٢ + ص^٢ + ٢ص + ١ + س^٢ - ٢س \quad \text{بالمضرب } ٥ \times \text{ وفك القوس}$$

$$٥(س^٢ - ٢س + ٢ + ص^٢ + ٢ص + ١) = ٢٤ص^٢ + ٨١ + ٤س + ٤سص - ١٨س - ٣٦ص$$

وبترتيب الحدود وجمع الحدود المتشابهة

$$\text{∴ معادلة القطع : } ٤س^٢ + ٢ص^٢ - ٤سص + ٨س + ٤ص - ٧١ = ٠$$

***** * * * ***** * * * ***** * * * *****

$$\boxed{\text{قاعدة:}} (س + ص + ع)^٢ = س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢سص + ٢صع + ٢سع$$

النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع مكافئ

لأثبت وقوع نقطة ن(س ، ص) على القطع المكافئ أو داخله أو خارجه فإن:

- (١) إذا كان بُعدها عن بؤرة القطع = بُعدها عن دليل القطع فإن النقطة تقع على القطع المكافئ .
 (٢) إذا كان بُعدها عن بؤرة القطع < بُعدها عن دليل القطع فإن النقطة تقع خارج القطع المكافئ.
 (٣) إذا كان بُعدها عن بؤرة القطع > بُعدها عن دليل القطع فإن النقطة تقع داخل القطع المكافئ.

مثال/ أثبت أن النقطة (٢ ، ٢) تقع داخل القطع المكافئ الذي معادلته: ص^٢ = ١٢ س

الحل

من معادلة القطع واضح أن القطع في وضع قياسي من النموذج الأول معادلته: ص^٢ = ٤ پ س
 أولاً / نوجد البؤرة والدليل: ∴ المعادلة ص^٢ = ١٢ س بالمقارنة ١٢ = ٤ پ ← ٣ = پ

∴ البؤرة (٠ ، ٣) = (٠ ، پ) ، الدليل: س - = پ - ← س - = ٣ -

ثانياً / نوجد بُعد النقطة (٢ ، ٢) عن البؤرة (٠ ، ٣) وبُعدها عن الدليل ونقارن بينهما كما يلي:

$$\text{بُعد النقطة عن البؤرة} = \sqrt{(٢ - ٠)^2 + (٢ - ٣)^2} = \sqrt{٢^2 + (-١)^2} = \sqrt{٤ + ١} = \sqrt{٥}$$

$$\text{بُعد النقطة عن الدليل} = \frac{|٥|}{\sqrt{١}} = \frac{|٣ + ٢ \times \text{صفر} + ٢ \times ١|}{\sqrt{٢٠ + ٢١}} = ٥$$

∴ $\sqrt{٥} > ٥ \leftarrow$ البُعد عن البؤرة > البُعد عن الدليل ∴ النقطة تقع داخل القطع المكافئ. هـ.ط.ث

لمعرفة موقع نقطة ن(پ ، ب) بالنسبة لقطع مكافئ معطى معادلته فإن:

نرتب حدود معادلة القطع بحيث تكون صفيرية (تساوي صفر) وبشرط أن يكون معامل س^٢ أو ص^٢ موجب ثم نعوض بـ س = پ ، ص = ب فإذا كان:

(١) الناتج = ٠ فإن النقطة تقع على منحنى القطع المكافئ

(٢) الناتج > ٠ فإن النقطة تقع داخل القطع المكافئ

(٣) الناتج < ٠ فإن النقطة تقع خارج منحنى القطع المكافئ

مثال (١) أين تقع النقطة (١ ، ٣) بالنسبة للقطوع التالية :

$$(١) \text{ ص } ٩ = ٢ \text{ س}$$

الحل

نضع المعادلة بالشكل: $\text{ص } ٩ - ٢ \text{ س} = ٠$ ، ونعوض بـ $\text{س} = ١$ ، $\text{ص} = ٣$ فيكون:

$$٩ - ٢ \times ١ = ٧ \neq ٠ \quad \therefore \text{النقطة تقع على القطع (تحقق معادلة القطع)}$$

$$(٢) \text{ س } ٢ = ٢ \text{ ص}$$

الحل

نضع المعادلة بالشكل: $\text{س } ٢ - ٢ \text{ ص} = ٠$ ، ونعوض بـ $\text{س} = ١$ ، $\text{ص} = ٣$ فيكون:

$$٢ - ٢ \times ٣ = -٤ \neq ٠ \quad \therefore \text{النقطة تقع داخل القطع}$$

$$(٣) \text{ س } ٦ = ٢ \text{ ص} - \frac{١}{٣}$$

الحل

نضع المعادلة بالشكل: $\text{س } ٦ = ٢ \text{ ص} - \frac{١}{٣}$ ، ونعوض بـ $\text{س} = ١$ ، $\text{ص} = ٣$ فيكون:

$$٦ = ٢ \times ٣ - \frac{١}{٣} = ٦ - \frac{١}{٣} \neq ٠ \quad \therefore \text{النقطة تقع خارج القطع}$$

مثال (٢) إذا كان القطع المكافئ $\text{س } ٢ = ٢ \text{ ص}$ يمر بالنقطة (٢ ، ٣) فأوجد قيمة p ؟

الحل

\therefore القطع يمر بالنقطة (٢ ، ٣) \therefore النقطة تحقق معادلة القطع

نعوض عن $\text{س} = ٢$ ، $\text{ص} = ٣$ في معادلة القطع فيكون :

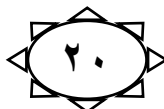
$$٢ = ٢ \times ٣ - p \quad \iff \quad ٢ = ٦ - p \quad \iff \quad p = ٤$$

⌘ ... تمرين التحدي ... ⌘

(١) إذا كان القطع المخروطي $\text{ص } ٥ = ٢ \text{ س}$ يمر بالنقطة (هـ ، ٥) فأوجد قيمة هـ

(٢) أوجد معادلة المحل الهندسي لكل النقاط التي بعدها عن (٤ ، ٠) أقل من بعدها عن

المستقيم $\text{س} = ٦$ بمقدار واحد



نشاط (١)

(٨) أكمل الفراغ في كل فقرة مما يلي بما يجعلها صحيحة:

- ① المعادلة $س^2 + ٢٠ ص = ٠$ تمثل قطع مكافئ بؤرته هي
- ② المعادلة $س - ٤ ص^2 = ٠$ تمثل قطع مكافئ بؤرته هي
- ③ إذا كانت معادلة الدليل هي $ص = ١٢٥, ٠$ ورأسه $(٠, ٠)$ فإن معادلة القطع المكافئ هي
- ④ القطع المكافئ $س^2 = ص$ دليله هو وبؤرته
- ⑤ المعادلة $س^2 = ك ص - ٣$ ص تمثل معادلة قطع مكافئ عندما $ك =$
- ⑥ موقع النقطة $(٣, ٥)$ بالنسبة للقطع $ص^2 + ٢ س = ٠$
- ⑦ معادلة دليل القطع المكافئ $ص^2 - ٤ س = ٠$ هي
- ⑧ البعد بين البؤرة والدليل في القطع المكافئ $ص^2 = ٨ س$ يساوي
- ⑨ إذا كان بُعد نقطة على قطع مكافئ عن بؤرته ٤ وحدات فإن بُعد هذه النقطة عن الدليل =
- ⑩ محور تناظر القطع المكافئ $ص^2 = ٢٤ س$ هو
- ⑪ في القطع المكافئ إذا كان بُعد نقطة عن البؤرة أكبر من بعدها عن الدليل فإنها تقع
- ⑫ إذا كان القطع المكافئ $ص^2 = ك س$ يمر بالنقطة $(٢, -٦)$ فإن قيمة $ك =$

(ب) استنتج صفات القطع الذي معادلته:

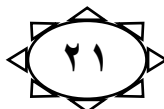
① $٣ ص^2 - ٥ س = س$ ② $٠ = \sqrt{٤ ص + س^2}$ ③ $٢ ص = \sqrt{٨ س}$

(ج) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي فيه :

- ① البؤرة $(٠, ٦)$ ومعادلة دليله $س = ٦$ (الاجابة: $ص^2 - ٢٤ س = ٠$)
- ② البؤرة $(٠, \frac{1}{4})$ ومعادلة دليله $ص = -\frac{1}{4}$ (الاجابة: $س^2 = ص$)
- ③ الرأس نقطة الأصل ومعادلة دليله $س + ١٥ = ٠$ (الاجابة: $ص^2 = ١٢ س$)
- ④ الرأس نقطة الاصل ومتماثل بالنسبة لمحور الصادات ويمر بالنقطة $(٢, -٣)$ (الاجابة: $س^2 = -\frac{4}{3} ص$)
- ⑤ البؤرة $(٢, ٢)$ ومعادلة دليله $س = ٨$ (الاجابة: $ص^2 - ٤ ص + ١٢ س - ٥٦ = ٠$)
- ⑥ البؤرة $(٢, ١)$ ومعادلة دليله $ص = -٧$ (الاجابة: $س^2 - ٤ س - ١٦ ص - ٤٤ = ٠$)
- ⑦ الرأس $(١, ٥)$ و البؤرة $(٣, ٥)$ (الاجابة: $ص^2 - ١٠ ص + ١٦ س + ٩ = ٠$)

(د) أوجد معادلة المحل الهندسي لجميع النقاط التي تتحرك بحيث يكون بعدها عن النقطة $(٣, ٢)$

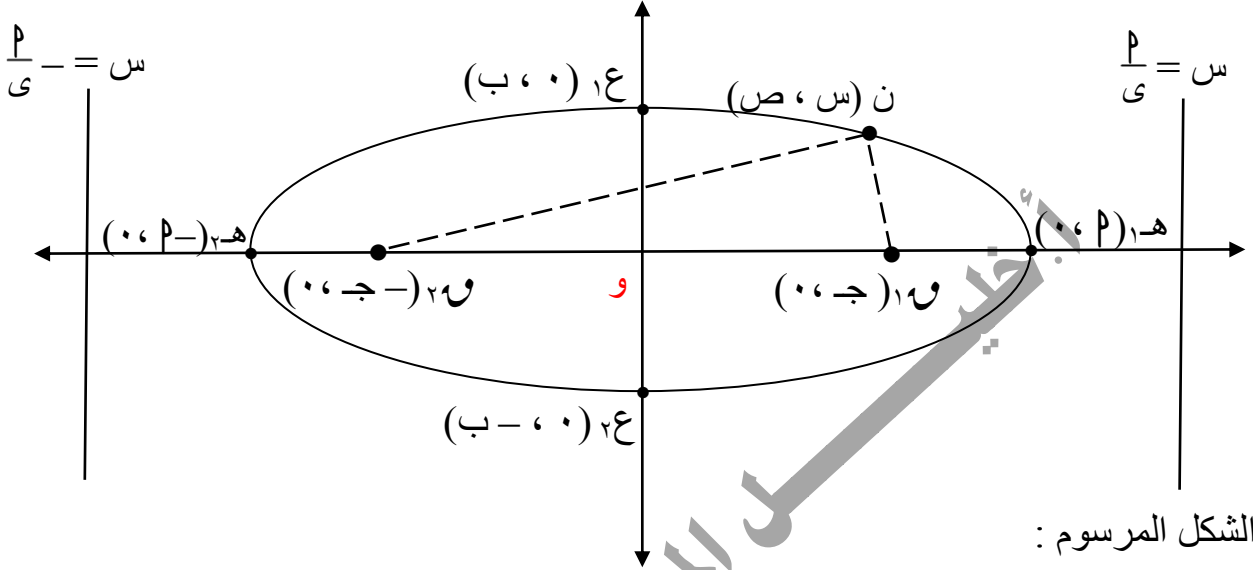
يساوي بعدها عن المستقيم $س = -٤$ (الاجابة: $ص^2 - ٤ ص - ١٤ س - ٣ = ٠$)



ثانياً / القطع الناقص Ellipse

تعريف :

القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي مجموع بُعديها عن نقطتين ثابتتين (تسمى البؤرتين) في المستوى يساوي طولاً ثابتاً (طول المحور الأكبر ومقداره $2a$).



من الشكل المرسوم :

- ✓ تسمى النقطتان: $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ **البؤرتين** والبعد بينهما يسمى **البعد البؤري** ويساوي $2c$
- ✓ تسمى القطعة المستقيمة a الواسلة بين الرأسين **بالمحور الأكبر** للقطع الناقص و طوله $2a$
- ✓ تسمى القطعة المستقيمة b **بالمحور الأصغر** للقطع الناقص و طوله $2b$
- ✓ تسمى النقطتان $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ **رأسي القطع** (وهما نقطتا تقاطع القطع بالمحور الأكبر)
- ✓ النقطة **و** تسمى **مركز القطع** الناقص وهي نقطة تقاطع محوري القطع الناقص.
- ✓ يسمى المستقيم الذي معادلته $\frac{x}{a} = 1$ دليل القطع المرافق للبؤرة $(a, 0)$ ، ويسمى المستقيم الذي معادلته $\frac{x}{a} = -1$ دليل القطع المرافق للبؤرة $(-a, 0)$ ويسمى المستقيمان **دليلي القطع الناقص**

ملاحظات :

- ① البعد بين مركز القطع و أحد رأسيه a ، و البعد بين مركز القطع و إحدى بؤرتيه c
- ② البعد بين الرأسين $a <$ البعد بين البؤرتين

التخالف المركزي : يسمى العدد $\frac{c}{a}$ التخالف المركزي للقطع ويرمز له بالرمز e أي أن :

$e = \frac{c}{a}$ ويمكن في القطع الناقص إيجاداه أيضاً بالقانون : $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ويكون: $e < 1$



معادلة القطع الناقص:

سنستخدم تعريف القطع الناقص لاستنتاج معادلة القطع وبالإستعانة بالشكل المرسوم في الصفحة السابقة

يكون: لتكن ن (س، ص) \in القطع ، وبؤرتيه $و١ (ج، ٠)$ ، $و٢ (-ج، ٠)$

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة $و١ (ج، ٠)$ + بعد النقطة ن عن البؤرة $و٢ (-ج، ٠)$ = ٢٢

$$\therefore ٢٢ = |ن و١| + |ن و٢|$$

$$\Leftarrow ٢٢ = \sqrt{(٠-ص)^2 + (ج+س)^2} + \sqrt{(٠-ص)^2 + (ج-س)^2}$$

$$\Leftarrow \sqrt{(ج+س)^2 + ص^2} - ٢٢ = \sqrt{(ج-س)^2 + ص^2}$$

$$س^2 - ٢جس + ج^2 + ص^2 = (٢٢ - \sqrt{(ج+س)^2 + ص^2})^2$$

$$س^2 - ٢جس + ج^2 + ص^2 = ٢٢^2 - ٢ \cdot ٢٢ \cdot \sqrt{(ج+س)^2 + ص^2} + (ج+س)^2 + ص^2$$

$$\Leftarrow ٢٢ \sqrt{(ج+س)^2 + ص^2} = ٢٢^2 - س^2 + ٢جس - ج^2 - ص^2$$

$$\sqrt{(ج+س)^2 + ص^2} = \frac{٢٢^2 - س^2 + ٢جس - ج^2 - ص^2}{٢٢}$$

$$٢٢ \sqrt{(ج+س)^2 + ص^2} = ٢٢^2 - س^2 + ٢جس - ج^2 - ص^2$$

$$\Leftarrow ٢٢ \sqrt{(ج+س)^2 + ص^2} = ٢٢^2 - س^2 + ٢جس - ج^2 - ص^2$$

$$س^2 - ٢جس + ج^2 + ص^2 = (٢٢ - \sqrt{(ج+س)^2 + ص^2})^2$$

$$س^2 - ٢جس + ج^2 + ص^2 = ٢٢^2 - ٢ \cdot ٢٢ \cdot \sqrt{(ج+س)^2 + ص^2} + (ج+س)^2 + ص^2$$

$$\Leftarrow ٢٢ \sqrt{(ج+س)^2 + ص^2} = ٢٢^2 - س^2 + ٢جس - ج^2 - ص^2$$

$$س^2 - ٢جس + ج^2 + ص^2 = (٢٢ - \sqrt{(ج+س)^2 + ص^2})^2$$

$$١ = \frac{ص^2}{٢٢^2 - ج^2} + \left(\frac{١}{٢٢}\right)^2$$

وتمثل المعادلة $١ = \frac{ص^2}{٢٢^2 - ج^2} + \left(\frac{١}{٢٢}\right)^2$ ، الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص من النموذج الأول

✧ نقاط تقاطع القطع الناقص في الصورة القياسية مع المحاور:

- ✓ مع محور السينات نضع $ص = ٠$ فيكون: $١ = \frac{ص^2}{٢٢}$ (ضرب طرفين \times وسطين) $\Leftarrow ص^2 = ٢٢$
- ∴ $ص = \pm ٢$ أي أن النقطتين $(٠, ٢)$ ، $(٠, -٢)$ واقعتين على القطع الناقص وهي نقاط تقاطع القطع الناقص في الوضع القياسي مع محور السينات.
- ✓ مع محور الصادات نضع $س = ٠$ فيكون: $١ = \frac{ص^2}{٢٢}$ (ضرب طرفين \times وسطين) $\Leftarrow ص^2 = ٢٢$
- ∴ $ص = \pm ٢$ أي أن النقطتين $(٢, ٠)$ ، $(-٢, ٠)$ واقعتين على القطع الناقص وهي نقاط تقاطع القطع الناقص في الوضع القياسي مع محور الصادات.

✧ تأثير التخالف المركزي على القطع الناقص (مهم) :

نعلم أن التخالف المركزي $٢ = \frac{ج}{م}$ وعليه فإن: إذا كان $٠ = ٢$ فإن:

$$\frac{ج}{م} = ٠ \Leftarrow ج = ٠ \quad \therefore ٢ = \frac{ج}{م} + ٢ = ٢ \Leftarrow ٢ = ٢ \Leftarrow ٢ = ٢ \quad \text{وهذا يعني أن}$$

القطع الناقص يتحول إلى دائرة نصف قطرها $٢ = م$ ، ويكون موقع البؤرتين في مركز الدائرة لأن $ج = ٠$ وتصبح المعادلة بالشكل: $س^2 + ص^2 = ٢$ (لذا تعتبر الدائرة حالة خاصة من القطع الناقص)

✧ تذكر أن/ في القطع الناقص:

- ① دائماً ٢ ، $ب$ ، $ج$ قيم موجبة لأنها أطوال حيث أن: طول المحور الأكبر $٢ = ٢$ ، طول المحور الأصغر $٢ = ب$ ، البعد بين البؤرتين (البعد البؤري) $٢ = ج$
 - ② دائماً $٢ < ب$ ، $٢ < ج$ أي أن: ٢ هي أكبر الأطوال في القطع الناقص.
 - ③ دائماً قيمة الطرف الأيسر لمعادلة القطع الناقص موجب واحد والطرف الأيمن عبارة عن مجموع مربعين.
 - ④ $٢ = ٢ + ج$ (قانون مهم وخاص بالقطع الناقص فقط)
 - ⑤ البؤرتان $(٠, \pm ٢) = (٠, \pm ٢)$ (يمكن إيجاد إحداثيات البؤرتان بمعرفة قيم ٢ ، ٢)
 - ⑥ معاملي ٢ ، $ص$ قيم موجبة دائماً وفي مقامهما القيمة الأكبر هي قيمة ٢
 - ⑦ محاور السينات محور تماثل (تناظر) للقطع وكذلك محور الصادات محور تماثل (تناظر) للقطع
- حيث: إذا استبدلنا $ب - س$ أو $ص - ب$ في المعادلة القياسية للقطع فإن المعادلة لا تتغير.
- ⑧ القطع الناقص متماثل (متناظر) أيضاً حول نقطة الأصل $(٠, ٠)$ أي متماثل حول مركزه.

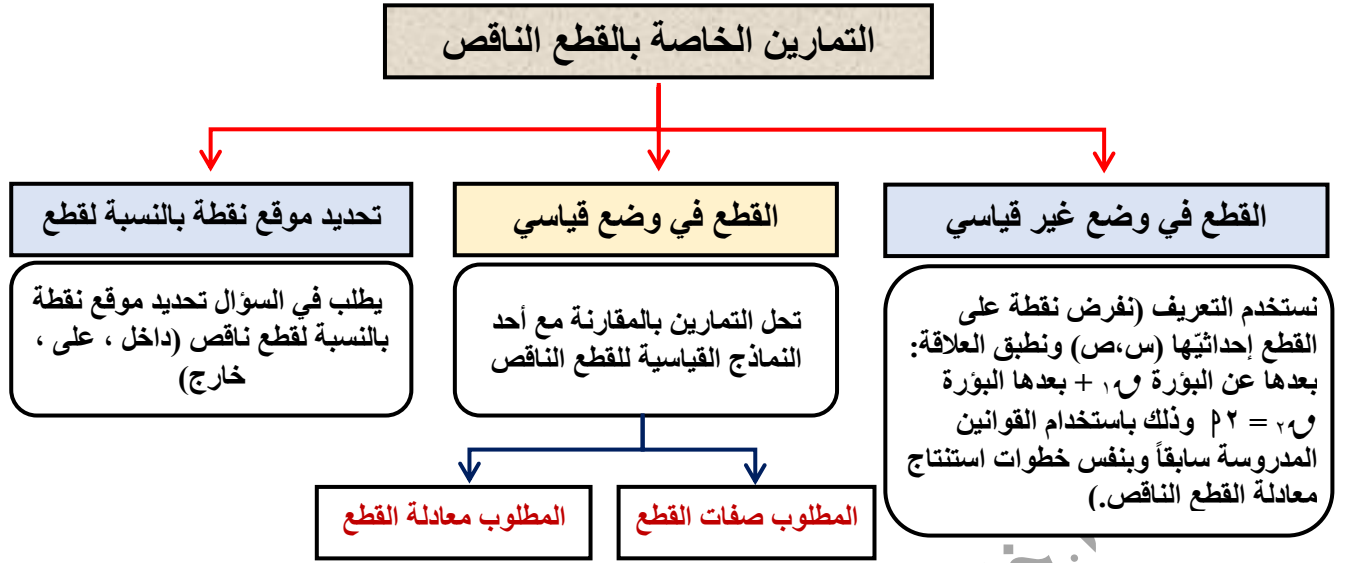
يوجد نموذجان قياسيان للقطع الناقص فيما يلي توضيح لهما :

الصفات	النموذج الأول	النموذج الثاني
المعادلة	$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ، $b < a$ مقام x^2 < مقام y^2	$1 = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}$ ، $b < a$ مقام x^2 < مقام y^2
المركز	(0, 0)	(0, 0)
المحور الأكبر يقع على	السينات	الصادات
الرأسان	(0, $\pm a$)	($\pm a$, 0)
البؤرتان	(0, $\pm c$)	($\pm c$, 0)
معادلة الدليلان	$\frac{x}{c} \pm \frac{y}{a} = 1$ أو $\frac{x}{c} \pm \frac{y}{b} = 1$	$\frac{x}{c} \pm \frac{y}{b} = 1$ أو $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{c} = 1$
التخالف المركزي	$e = \frac{c}{a} > 1$ أو $e = \frac{c}{b} > 1$	$e = \frac{c}{b} > 1$ أو $e = \frac{c}{a} > 1$
طول المحور الأكبر	$2a$ (ويقع على محور السينات)	$2a$ (ويقع على محور الصادات)
طول المحور الأصغر	$2b$ (ويقع على محور الصادات)	$2b$ (ويقع على محور السينات)
البعد البؤري	$2c$	
الرسم		

ملاحظة هامة: يمكن إيجاد معادلتَي الدليلين في النموذج الأول بإحدى الصيغتين:

$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 1$ أو $\frac{x}{b} \pm \frac{y}{a} = 1$ ، وفي النموذج الثاني بإحدى الصيغتين: $\frac{x}{c} \pm \frac{y}{b} = 1$ أو $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{c} = 1$ وذلك حسب معطيات السؤال..

تكون تمارين القطع الناقص عادةً وفق المخطط التالي:



تمارين على القطع الناقص

النوع الأول/ القطع في وضع قياسي

⑤ معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع :

مثال/ أوجد صفات القطع الناقص الذي معادلته :

$$(1) \quad ١٦س + ٢٥ص = ٤٠٠ \quad \text{ثم ارسمه}$$

الحل

نضع المعادلة بصورة قياسية وذلك بالقسمة على ٤٠٠ فيكون :

$$١ = \frac{١٦س}{٤٠٠} + \frac{٢٥ص}{٤٠٠} \quad \leftarrow \quad ١ = \frac{٢س}{١٢٥} + \frac{٥ص}{٨٠}$$

$$\therefore \text{القطع في وضع قياسي من النموذج الأول ومعادلته : } ١ = \frac{٢س}{١٢٥} + \frac{٥ص}{٨٠}$$

$$\therefore ٢٥ = ٢٢ \leftarrow ٥ = ٢ \quad , \quad ١٦ = ٢٢ \leftarrow ٤ = ٢$$

$$٢٢ = ٢٢ \leftarrow ٢٥ = ٢٢ \leftarrow ١٦ = ٢٢ \leftarrow ٩ = ٢٢ \leftarrow ٣ = ٢٢$$

$$\text{إحداثيات الرأسين } (٠, ٥) = (٠, ٢) = (٠, ٥)$$

$$\text{إحداثيات البؤرتين } (٠, ٣) = (٠, ٢) = (٠, ٣)$$



$$\frac{25}{3} \pm = س \iff \frac{25}{3} \pm = س$$

$$10 = 5 \times 2 = 22 = \text{طول المحور الأكبر}$$

$$8 = 4 \times 2 = 2 = \text{طول المحور الأصغر}$$

$$6 = 3 \times 2 = 2 = \text{البعد البؤري}$$

$$\frac{3}{5} = ي \iff \frac{3}{5} = ي$$

لاحظ أن: $1 > ي$

$$(2) \quad 0 = 288 - (9ص^2 + 16س^2) \quad \text{ثم ارسمه}$$

الحل

نضع المعادلة بصورة قياسية وذلك بترتيب الحدود والقسمة على 2 فيكون:

$$1 = \frac{ص^2}{16} + \frac{س^2}{9} \iff 1 = \frac{ص^2}{144} + \frac{س^2}{144} \iff 144 = 9ص^2 + 16س^2$$

∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني ومعادلته: $1 = \frac{ص^2}{16} + \frac{س^2}{9}$

$$16 = 4^2 \iff 9 = 3^2 \iff 16 = 4^2 \iff 9 = 3^2 \iff 16 = 4^2 \iff 9 = 3^2$$

$$16 = 4^2 \iff 9 = 3^2 \iff 16 = 4^2 \iff 9 = 3^2 \iff 16 = 4^2 \iff 9 = 3^2$$

$$(4 \pm, 0) = (4 \pm, 0)$$

$$(3 \pm, 0) = (3 \pm, 0)$$

$$\frac{16}{9} \pm = ص \iff \frac{16}{9} \pm = ص$$

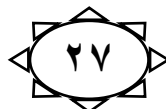
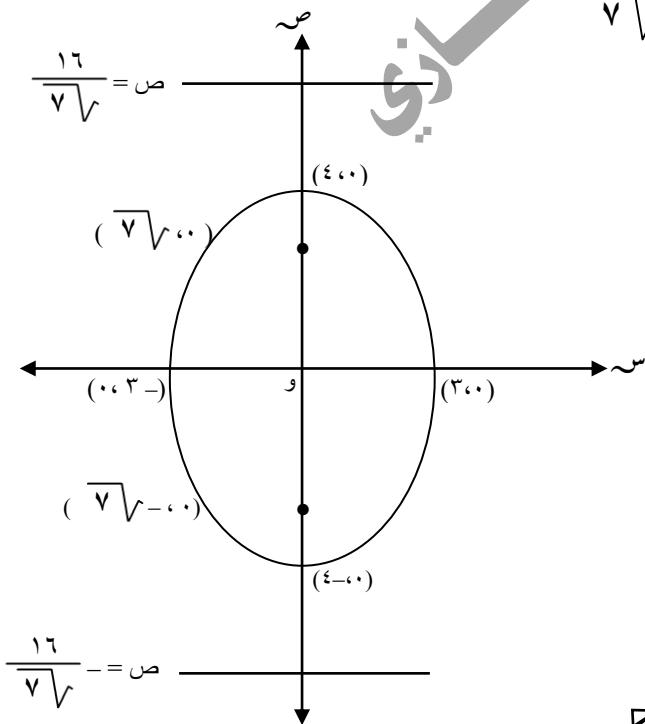
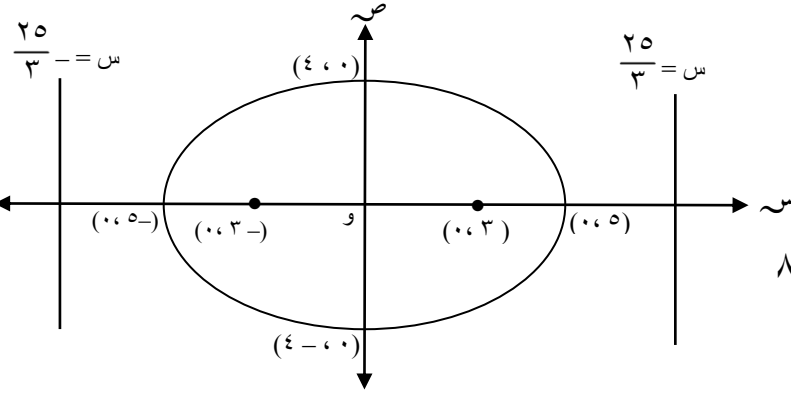
$$8 = 4 \times 2 = 22 = \text{طول المحور الأكبر}$$

$$6 = 3 \times 2 = 2 = \text{طول المحور الأصغر}$$

$$7\sqrt{2} = 2 = \text{البعد البؤري}$$

$$\frac{7\sqrt{2}}{4} = ي \iff \frac{7\sqrt{2}}{4} = ي$$

لاحظ أن: $1 > ي$



ب) صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة:

مثال/ أوجد معادلة القطع الناقص الذي يحقق ما يلي:

(١) طولي محوريه ٦ ، ١٠ وحدات ومركزه (٠ ، ٠) ومحوره الأكبر منطبق على محور السينات .

الحل

∴ المحور الأكبر منطبق على محور السينات ، والمركز (٠،٠) ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول

$$\boxed{25 = p^2} \iff 5 = p \iff 10 = p^2 \iff p^2 = 25 \text{ طول المحور الأكبر}$$

$$\boxed{9 = b^2} \iff 3 = b \iff 6 = b^2 \iff b^2 = 9 \text{ طول المحور الأصغر}$$

$$\therefore \text{ معادلة القطع هي: } 1 = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9}$$

(٢) المحور الأكبر منطبق على السينات وطوله ١٤ وحدة ، و البعد البؤري يساوي ١٠ وحدات

ومركز القطع نقطة الأصل

الحل

∴ المحور الأكبر منطبق على محور السينات ، والمركز نقطة الأصل ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول

$$\boxed{49 = p^2} \iff 7 = p \iff 14 = p^2 \iff p^2 = 49 \text{ طول المحور الأكبر}$$

$$25 = c^2 \iff 5 = c \iff 10 = c^2 \iff c^2 = 25 \text{ البعد البؤري}$$

$$\boxed{24 = b^2} \iff 25 + b^2 = 49 \iff b^2 + c^2 = p^2$$

$$\therefore \text{ معادلة القطع هي: } 1 = \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24}$$

(٣) الرأسان (٠ ، ٦ ±) ، والبؤرتان (٠ ، ٧ ±)

الحل

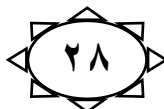
∴ الرأسين والبؤرتان في وضع نموذجي وتقع على محور السينات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول

$$\boxed{36 = p^2} \iff 6 = p \iff (0, 6 \pm) = (0, p \pm) \text{ الرأسان}$$

$$7 = c \iff 7\sqrt{2} = c \iff (0, 7\sqrt{2} \pm) = (0, c \pm) \text{ ، والبؤرتان}$$

$$\boxed{29 = b^2} \iff 7 + b^2 = 36 \therefore b^2 + c^2 = p^2 \therefore$$

$$\therefore \text{ معادلة القطع هي: } 1 = \frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{36}$$



(٤) الرأسان $(\frac{3}{4} \pm, 0)$ ، وطول محوره الأصغر $\frac{2}{3}$

الحل

∴ الرأسين نموذجيان، ويقعان على محور الصادات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني

$$\boxed{\frac{9}{16} = p} \iff \frac{3}{4} = p \iff (\frac{3}{4} \pm, 0) = (p \pm, 0) \text{ الرأسان}$$

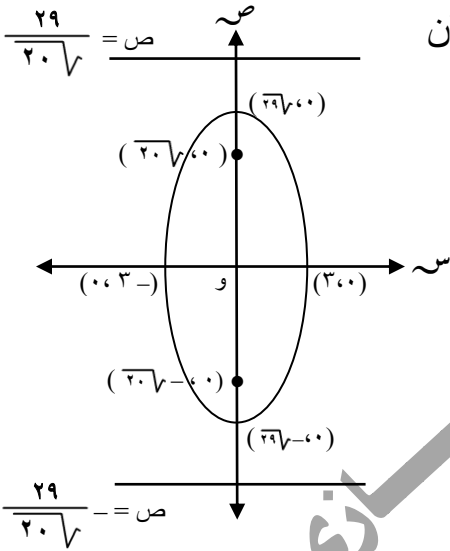
$$\boxed{\frac{1}{9} = b} \iff \frac{1}{3} = b \iff \frac{2}{3} = b \therefore \text{طول المحور الأصغر} = b = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{معادلة القطع هي: } 1 = \frac{ص^2}{\frac{9}{16}} + \frac{س^2}{\frac{1}{9}} \iff \text{المعادلة هي: } 1 = \frac{ص^2}{9} + \frac{س^2}{1}$$

(٥) منحنى القطع يقطع المحور الأصغر عند $(0, 3 \pm)$ ، والبؤرتان $(\pm 20\sqrt{2}, 0)$ ثم أرسمه

الحل

∴ البؤرتين نموذجيتان، ويقعان على محور الصادات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني



منحنى القطع في النموذج الثاني يقطع محور السينات عند النقطتان

$(0, b \pm)$ وبالمقارنة:

$$\boxed{9 = b} \iff 3 = b \therefore$$

$$(20\sqrt{2} \pm, 0) = (a \pm, 0) \text{ البؤرتان}$$

$$20\sqrt{2} = a \iff 20\sqrt{2} = a \therefore$$

$$\boxed{29 = p} \iff 20 + 9 = p \therefore b + a = p \therefore$$

$$\therefore \text{معادلة القطع هي: } 1 = \frac{ص^2}{9} + \frac{س^2}{29}$$

(٦) دليله : $ص = \pm 12$ ، والبؤرتان $(0, 5 \pm)$

الحل

∴ البؤرتين نموذجيتان، ويقعان على محور الصادات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني

$$25 = a \iff 5 = a \iff (0, 5 \pm) = (0, a \pm) \text{ البؤرتان}$$

$$\boxed{60 = p} \iff 12 = \frac{p}{2} \iff 12 = \frac{p}{2} \iff \frac{p}{2} \pm = ص \therefore \text{الدليلان}$$

$$\boxed{35 = b} \iff 20 + b = 60 \therefore b + a = p \therefore$$

$$\therefore \text{معادلة القطع هي: } 1 = \frac{ص^2}{60} + \frac{س^2}{35}$$



(٧) البورتان (٠ ، ٣ ±) ، وطول محوره الأكبر يساوي ضعف طول محوره الأصغر .

الحل

∴ البورتين نموذجيتان، وتقعان على محور الصادات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني

$$\text{البورتان } (٠ ، ٣ \pm) = (ج \pm ، ٠) \iff ج = ٣ \iff ج^٢ = ٩$$

∴ طول المحور الأكبر = ضعف طول المحور الأصغر (معطى في السؤال)

$$\therefore ٢ \times ٢ = ٢ \times ٢ \iff ٢ \times ٢ = ٢ \times ٢ \iff ٢ \times ٢ = ٢ \times ٢$$

$$\therefore ٢ \times ٢ = ٢ \times ٢ \iff ٢ \times ٢ = ٢ \times ٢ \iff ٢ \times ٢ = ٢ \times ٢$$

$$\iff ٢ \times ٢ = ٢ \times ٢ \iff ٢ \times ٢ = ٢ \times ٢ \iff ٢ \times ٢ = ٢ \times ٢$$

$$\text{معادلة القطع هي : } ١ = \frac{٢ \text{ ص}}{١٢} + \frac{٢ \text{ س}}{٣}$$

(٨) تخالفه المركزي $١ = \frac{٢}{٢}$ ، ودليله : $٨ \pm = ٨$ ، ومركز القطع نقطة الأصل .

الحل

∴ الدليلين نموذجيان ويقعان على محور السينات، ومركز القطع نقطة الأصل ∴ القطع في وضع قياسي من

النموذج الأول

$$\text{التخالف المركز : } ١ = \frac{٢}{٢} \iff \frac{٢}{٢} = ١ \iff \frac{٢}{٢} = ١$$

$$\text{الدليلان : } ٨ \pm = ٨ \iff ٨ = ٨ \iff ٨ = ٨$$

$$\therefore ٢ \times ٢ = ٢ \times ٢ \iff ٢ \times ٢ = ٢ \times ٢ \iff ٢ \times ٢ = ٢ \times ٢$$

$$\therefore ٢ \times ٢ = ٢ \times ٢ \iff ٢ \times ٢ = ٢ \times ٢ \iff ٢ \times ٢ = ٢ \times ٢$$

$$\therefore \text{معادلة القطع هي : } ١ = \frac{٢ \text{ ص}}{١٢} + \frac{٢ \text{ س}}{١٦}$$

⌘ ... سؤال التحدي ... ⌘

قطع مكافئ معادلته : $٢٤ = ٢ \text{ ص}$ أوجد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه بؤرة القطع

المكافئ ورأسه نقطة الأصل ومجموع طولي محوريه = ٣٦ ؟ (الإجابة: $١ = \frac{٢ \text{ ص}}{١٢} + \frac{٢ \text{ س}}{٣٦}$)



(٩) البورتان $(٠, ٣ \pm)$ ، والقطع يمر بالنقطة $(١, ٤)$ ؟

الحل

∴ البورتان نموذجيتان وتقعان على محور السينات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول

معادلته : $١ = \frac{ص}{٢} + \frac{س}{٢م}$ ∴ البورتان $(٠, ٣ \pm) = (٠, ج \pm)$ ∴ $٣ = ج \leftarrow ٩ = ج^٢$

$$٩ - ٢م = ٢ب \leftarrow ٩ + ٢ب = ٢م \leftarrow ٢ب + ٢ج = ٢م ∴ ،$$

∴ القطع يمر بالنقطة $(١, ٤)$ فتحقق معادلته، نعوض عن س = ٤ ، ص = ١ ، $٩ - ٢م = ٢ب$ فيكون :

$$\frac{١}{٩ - ٢م} + \frac{١٦}{٢م} = ١ \quad \text{بالمضرب} \quad [(٩ - ٢م)٢م] \leftarrow (٩ - ٢م)٢م = ٢م + ١٤٤ - ٢م١٦ \leftarrow$$

$$٠ = (١٨ - ٢م)(٨ - ٢م) \leftarrow ٠ = ١٤٤ + ٢م٢٦ - ٤م \leftarrow ٢م٩ - ٤م = ١٤٤ - ٢م١٧$$

$$\text{إما } ٠ = ٨ - ٢م \leftarrow ٨ = ٢م \text{ مرفوضة لأن } ٢م > ٢ج$$

$$\text{أو } ٠ = ١٨ - ٢م \leftarrow ١٨ = ٢م \leftarrow ١٨ = ٢م \text{ مقبولة}$$

$$٩ - ٢م = ٢ب ∴ ٩ - ١٨ = ٢ب \leftarrow ٩ = ٢ب$$

$$\text{∴ معادلة القطع هي : } ١ = \frac{ص}{٩} + \frac{س}{١٨}$$

(١٠) مركز القطع $(٠, ٠)$ ، والقطع يمر بالنقطتين $(٣, ٤)$ ، $(١, -٤)$ ومحوراه محوري الاحداثيات

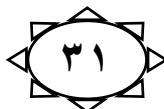
الحل

∴ مركز القطع نقطة الأصل $(٠, ٠)$ ومحوراه محور الاحداثيات ∴ القطع في وضع قياسي وبالتالي

$$\text{سنفرض معادلته بالشكل : } ١ = \frac{ص}{٢م} + \frac{س}{٢ل}$$

∴ القطع يمر بالنقطة $(٣, ٤)$ نعوض عن س = ٤ ، ص = ٣ فيكون :

$$١ = \frac{٩}{٢م} + \frac{١٦}{٢ل} \quad (١) \dots\dots\dots$$



∴ القطع يمر بالنقطة $(-1, 4)$ نعوض عن $s = -1$ ، $v = 4$ فيكون :

$$(2) \dots\dots\dots 1 = \frac{16}{2م} + \frac{1}{2ج} \quad \text{بالضرب } 16 \times \text{ يكون :} \quad (3) \dots\dots\dots 16 = \frac{256}{2م} + \frac{16}{2ج}$$

بطرح (٣) من (١) يكون :

$$1 = \frac{9}{22} + \frac{16}{22}$$

$$16 = \frac{206}{2} + \frac{16}{2}$$

$$\frac{247}{10} = 24 \frac{7}{10} \leftarrow 24 \times 10 = 240 - 7 \leftarrow (24 \times \text{بالضرب}) \quad 10 - \frac{206}{2} - \frac{9}{2}$$

نعوض في معادلة (٢) عن قيمة M^2 فيكون :

$$\frac{240}{247} - 1 = \frac{1}{247} \quad \Leftarrow \quad 1 = \frac{240}{247} + \frac{1}{247} \quad \Leftarrow \quad 1 = \frac{16}{18} + \frac{1}{247}$$

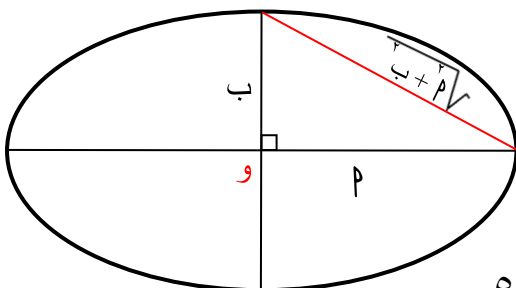
$$\frac{\gamma_{\Sigma\gamma}}{\gamma} = \gamma_J \iff \frac{\gamma}{\gamma_{\Sigma\gamma}} = \frac{1}{\gamma_J}$$

معادلة القطع هي : $1 = \frac{\frac{ص}{٢٤٧}}{\frac{١٥}{٧}} + \frac{\frac{س}{٢٤٧}}{\frac{٧}{١٥}}$ ويمكن كتابتها بالشكل : $1 = \frac{١٥ص}{٢٤٧} + \frac{٧س}{٢٤٧}$

أو بالشكل: $٢٤٧ = ٧س + ١٥ص$ لاحظ أن القطع من النموذج الأول لأن: $\frac{٢٤٧}{١٥} < \frac{٢٤٧}{٧}$

البُعد بين طرفي (نهايتي) المحور
الأكبر والأصغر

بالاعتماد على الشكل المرسوم جانباً يمكن إيجاد البُعد بين طرفي (نهايتي) المحور الأكبر والمحور



الأصغر في القطع الناقص بالقانون: البعد $\sqrt{p} + b$

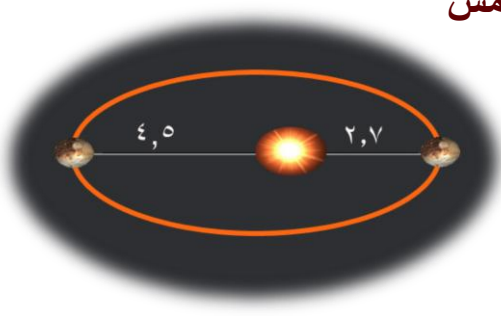
مثال/ إذا كان طول المحور الأكبر و المحور الأصغر في قطع

ناقص يساوي ٢٤ ، ١٠ على الترتيب أوجد البعد بين طرفيهما

الحل: $٥ = ب \leftarrow ١٠ = ب^٢$ ، $١٢ = پ \leftarrow ٢٤ = پ^٢$

$$١٣ = \sqrt{١٦٩} \sqrt{} = \sqrt{٢٥ + ١٤٤} \sqrt{} = \sqrt{٥ + ١٢} \sqrt{} = \sqrt{\text{ب} + \text{م}} \sqrt{} = \text{البُعد}$$

مثال (١١) يدور كوكب بلوتو على شكل قطع ناقص تقع الشمس عند إحدى بؤرتيه فإذا علم أن أصغر بُعد وأكبر بُعد بينه وبين الشمس يحدثان عندما يكون كوكب بلوتو عند رأسي القطع وكانت أصغر مسافة ٢,٧ بليون ميل تقريباً وأكبر مسافة ٤,٥ بليون ميل تقريباً أوجد التخالف المركزي لمدار كوكب بلوتو؟



الحل

$$أصغر\ بُعد + أكبر\ بُعد = ٢٢ \iff ٢٢ = أكبر\ بُعد + ٢,٧$$

$$٣,٦ = p \iff ٧,٢ = ٢٢ \therefore$$

$$بُعد\ الشمس\ عن\ المركز = ج \iff ج = أكبر\ بُعد - p$$

$$٠,٩ = ج \iff ٣,٦ - ٤,٥ = ج$$

$$التخالف\ المركزي\ c = \frac{ج}{p} \iff \frac{٠,٩}{٣,٦} = c$$

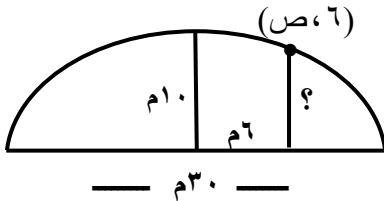
$$\iff c = \frac{٩}{٣٦} \iff c = \frac{١}{٤}$$



مثال (١٢) بُنيَ جسر مقوس على شكل نصف قطع ناقص قاعدته أفقيه فإذا كان طول قاعدته ٣٠ م وأقصى ارتفاع للجسر ١٠ م أوجد ارتفاع الجسر على بُعد ٦ م من مركز القاعدة

الحل

∴ الجسر أفقي ∴ يتبع النموذج القياسي الأول معادلته: $\frac{ص^2}{p} + \frac{ب^2}{٢٢٥} = ١$



$$٢٢٥ = ٢p \iff ١٥ = p \iff ٣٠ = ٢٢ \therefore$$

$$١٠٠ = ب^2 \iff ١٠ = ب \therefore$$

$$\therefore معادلة\ القطع: \frac{ص^2}{١٠٠} + \frac{ب^2}{٢٢٥} = ١$$

∴ (٦، ص) تقع على القطع

$$\frac{١٨٩٠٠}{٢٢٥} = ص^2 \iff \frac{١٨٩}{٢٢٥} = \frac{ص^2}{١٠٠} \iff \frac{٣٦}{٢٢٥} - ١ = \frac{ص^2}{١٠٠} \iff ١ = \frac{ص^2}{١٠٠} + \frac{٣٦}{٢٢٥} \therefore$$

$$\iff ص = \sqrt{\frac{١٨٩٠٠}{٢٢٥}} \approx ٩,١٧ \text{ أي أن الارتفاع المطلوب يساوي تقريباً } ٩,١٧$$



النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي

مثال/ أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $(0, 0)$ ، $(0, 3)$ ، إذا كان طول محوره الأكبر يساوي ٦ ؟

الحل

القطع في وضع غير قياسي لأن البؤرتين غير نموذجيتين و سنستخدم تعريف القطع الناقص لاستنتاج

معادلة القطع : لتكن $(س, ص)$ \in القطع

\therefore بعد النقطة ن عن البؤرة $(0, 0)$ + بعد النقطة ن عن البؤرة $(0, 3)$ $= ٦$

$$٦ = \sqrt{(٠-ص)^2 + (٣-س)^2} + \sqrt{(٠-ص)^2 + (٠-س)^2}$$

$$\Leftarrow \sqrt{(٠-ص)^2 + (٣-س)^2} - ٦ = \sqrt{(٠-ص)^2 + (٠-س)^2} \quad \text{بالتربيع وفك الأقواس}$$

$$س^2 - ٦س + ٩ + ص^2 - ٦(\sqrt{(٠-ص)^2 + (٣-س)^2} - ٦) = ص^2 + س^2$$

$$\Leftarrow \cancel{س^2} - ٦س + ٩ + ص^2 - ٦\sqrt{(٠-ص)^2 + (٣-س)^2} + ٣٦ = \cancel{ص^2} + \cancel{س^2}$$

$$\Leftarrow -٦س + ٩ + ص^2 - ٦\sqrt{(٠-ص)^2 + (٣-س)^2} = ٣٦ - ٩ + س^2$$

$$\Leftarrow -٦س + ٩ + ص^2 - ٦\sqrt{(٠-ص)^2 + (٣-س)^2} = ٢٧ - س^2 \quad \text{بالقسمة على ٣ للتبسيط}$$

$$٢س^2 - ١٢س + ٩ + ص^2 - ١٢\sqrt{(٠-ص)^2 + (٣-س)^2} = ٢٧ - ٢س^2 \quad \text{بالتربيع} \Leftarrow ٤س^2 - ١٢س + ٩ + ص^2 - ١٢\sqrt{(٠-ص)^2 + (٣-س)^2} = ٢٧$$

$$\Leftarrow ٤س^2 - ١٢س + ٩ + ص^2 - ١٢\sqrt{(٠-ص)^2 + (٣-س)^2} = ٢٧$$

$$\Leftarrow ٤س^2 - ١٢س + ٩ + ص^2 - ١٢\sqrt{(٠-ص)^2 + (٣-س)^2} = ٢٧$$

$$\Leftarrow ٤س^2 - ١٢س + ٩ + ص^2 - ١٢\sqrt{(٠-ص)^2 + (٣-س)^2} = ٢٧$$

$$\boxed{١٢س^2 - ٣٦س + ٨١ - ص^2 = ٠} \quad \text{(المعادلة المطلوبة)}$$

النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع ناقص

لإثبات وقوع نقطة ن(س ، ص) على القطع الناقص أو داخله أو خارجه فإن:

- (١) إذا كان بُعدها عن ν + بُعدها عن $\mu = \mu_2$ فإن النقطة تقع على القطع الناقص .
 (٢) إذا كان بُعدها عن ν + بُعدها عن $\mu < \mu_2$ فإن النقطة تقع خارج القطع الناقص .
 (٣) إذا كان بُعدها عن ν + بُعدها عن $\mu > \mu_2$ فإن النقطة تقع داخل القطع الناقص .

مثال/ أثبت أن النقطة $(٤, ٠)$ تقع خارج القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{٢٥} + \frac{y^2}{٩} = ١$

الحل

من معادلة القطع واضح أن القطع في وضع قياسي من النموذج الاول ، $p = 25$ ، $b = 9$
أولاً / نوجد إحداثيات البؤرتين:

$\therefore \text{پ} = \text{ب} + \text{ج} \quad \therefore 25 = 9 + \text{ج} \quad \Leftarrow \text{ج} = 16 \quad \Leftarrow \text{ج} = 16 \quad \Leftarrow \text{ع} = 4$
 \therefore البُورتان $(0, 4)_1$ ، $(0, 4)_{-2}$

ثانياً / نوجد مجموع بُعدي النقطة $(٤, ٠)$ عن البُورتين $(٠, ٤)$ و $(٠, -٤)$ كما يلي:

$$\sqrt{16+16}\sqrt{+} + \sqrt{16+16}\sqrt{-} = \sqrt{(\cdot - \varepsilon) + (\varepsilon + \cdot)}\sqrt{+} + \sqrt{(\cdot - \varepsilon) + (\varepsilon - \cdot)}\sqrt{-}$$

$$\sqrt{2}\sqrt{+} = \sqrt{2}\sqrt{-} \times 2 = \sqrt{32}\sqrt{-} = \sqrt{32}\sqrt{+} + \sqrt{32}\sqrt{-} = \text{مجموع البُعدين} \therefore$$

نقارن بين مجموع البُعدين و قيمة p_2 نلاحظ: $\therefore p_2 = 20 \iff p = 5 \iff p_2 = 10$

٨ $\sqrt{2} < 10 \iff$ مجموع البُعدين < ٢٢ . \therefore النقطة تقع خارج القطع الناقص. هـ. ط. ث

لمعرفة موقع نقطة ن (م ، ن) بالنسبة لقطع ناقص معطى معادلته فإن:

نرتب حدود معادلة القطع بحيث تكون صفرية (تساوي صفر) وبشرط أن يكون معامل s^2 و s

موجب ثم نعوض بـ $s = m$ ، $v = n$ فإذا كان:

- (١) الناتج = ٠ فإن النقطة تقع على منحنى القطع الناقص
(٢) الناتج > ٠ فإن النقطة تقع داخل القطع الناقص
(٣) الناتج < ٠ فإن النقطة تقع خارج منحنى القطع الناقص

مثال/ أين تقع النقطة (٣، ١) بالنسبة للقطوع التالية :

$$(١) \quad ١ = ٢س + ٤ص$$

الحل

نضع المعادلة بالشكل: $٢س + ٤ص = ١$ ، ونعوض عن س = ١ ، ص = ٣ فيكون:

$$٢ \times ١ + ٤ \times ٣ = ١ - ٣٦ + ٢ = ١ - ٣٤ = -٣٣ < ٠ \quad \therefore \text{النقطة تقع خارج القطع}$$

$$(٢) \quad ٣س = ٥٠ - ٢ص$$

الحل

نضع المعادلة بالشكل: $٣س + ٢ص = ٥٠$ ، نعوض عن س = ١ ، ص = ٣ فيكون :

$$٣ \times ١ + ٢ \times ٣ = ٥٠ - ١٨ + ٣ = ٣٥ > ٠ \quad \therefore \text{النقطة تقع داخل القطع}$$

$$(٣) \quad ١ = \frac{٢ص}{٢٢٥} + \frac{١٢س}{٢٥}$$

الحل

نضع المعادلة بالشكل: $\frac{٢ص}{٢٢٥} + \frac{١٢س}{٢٥} = ١$ ، نعوض عن س = ١ ، ص = ٣ فيكون :

$$\frac{٢ \times ٣}{٢٢٥} + \frac{١٢ \times ١}{٢٥} = ١ - ١ = ٠ \quad \therefore \text{النقطة تقع على القطع}$$

⌚ ... سؤال التحدي ... ⌚

① إذا كان البعد البؤري لقطع ناقص يساوي نصف البعد بين طرفي محوريه الأكبر والأصغر فأوجد

التخالف المركزي للقطع. (الإجابة: $\frac{2}{17}$)

② أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه $(٠, \pm ٤)$ ومساحته ١٢π سم^٢ علماً بأن مساحته تُعطى

بالعلاقة التالية: مساحة القطع الناقص $\pi a b$ ب (الإجابة: $\frac{٢ص}{٩} + \frac{٢س}{١٦} = ١$)

نشاط (٢)

(٨) أكمل الفراغ بما يناسب :

- ① طول المحور الأكبر للقطع الناقص $٩س^٢ + ١٦ص^٢ = ١$ يساوي
- ② الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته $١ = \frac{ص^٢}{٢٥} + \frac{س^٢}{٩}$ يساوي
- ③ معادلتا الدليلين للقطع: $٣س^٢ + ٢ص^٢ = ٢$ هما:
- ④ في القطع الذي معادلته $ص^٢ + م س^٢ = ٤$ إذا كانت قيمة $م = ١$ فإن $١ =$
- ⑤ قطع ناقص طولاً محوريه ٨ ، ١٠ فإن البعد بين بؤرتيه = و البعد بين طرفي محوريه =
- ⑥ إذا كان تخالف قطع ناقص $= ٠,٣$ وطول المحور الأكبر $= ٢٠$ ويقع على السينات ومحوراه هما محور الاحداثيات فإن إحداثي البؤرتين =
- ⑦ النقطة $(٢, -٥)$ بالنسبة للقطع $٢س^٢ + \frac{١}{٣}ص^٢ = ٧$ تقع

(ب) استنتج صفات القطع الناقص ثم أرسمه إذا كانت معادلته:

$$\textcircled{٢} \quad ١٨س^٢ + ٤ص^٢ = ٣٦$$

$$\textcircled{٤} \quad ١ = \frac{ص^٢}{٢} - \frac{س^٢}{١}$$

$$\textcircled{١} \quad ٢٥س^٢ + ٩ص^٢ = ٢٢٥$$

$$\textcircled{٣} \quad ١ = \frac{ص^٢}{٤} + \frac{س^٢}{٩}$$

(ج) أوجد معادلة القطع الناقص الذي فيه:

- ① محوره الأكبر على محور السينات وطوله $= ٦\sqrt{٢}$ ومركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(٢, ٣)$
- ② التخالف المركزي $= \frac{٣}{٤}$ ويمر بالنقطة $(٦, ٤)$ وبؤرتاه على محور السينات ومركزه $(٠, ٠)$
- ③ محوره الأكبر على محور السينات ومركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(٢, ٦)$ ، $(٤, ٣)$.
- ④ مجموع بُعدي أي نقطة على القطع عن $(٠, ٣)$ ، $(٠, ٩)$ يساوي ١٢
- (الإجابة: ① $٨س^٢ + ١٨ص^٢ = ١٤٤$ ② $١ = \frac{٧س^٢}{٥٠٨} + \frac{٤ص^٢}{١٢٧}$ ③ $١ = \frac{س^٢}{٤٥} + \frac{ص^٢}{٢٠}$ ④ $١ = ٣س^٢ + ٤ص^٢ - ٣٦ = ٠$)

(د) قطع مخروطي محوره الأكبر يقع على محور السينات، ومركزه $(٠, ٠)$ ، و اختلافهالمركزي $= ٠,٦$ ، والبعد بين بؤرتيه $= ٦$ وحدات طولية ، عين نوع القطع واوجد معادلته .(الإجابة: قطع ناقص ، $١٦س^٢ + ٢٥ص^٢ = ٤٠٠$)(هـ) أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه $(٠, ٦ \pm)$ والنسبة بين طولي محوريه الأكبر والأصغر

$$(الإجابة: \frac{٤ص^٢}{٨١} + \frac{س^٢}{٣٦} = ١)$$

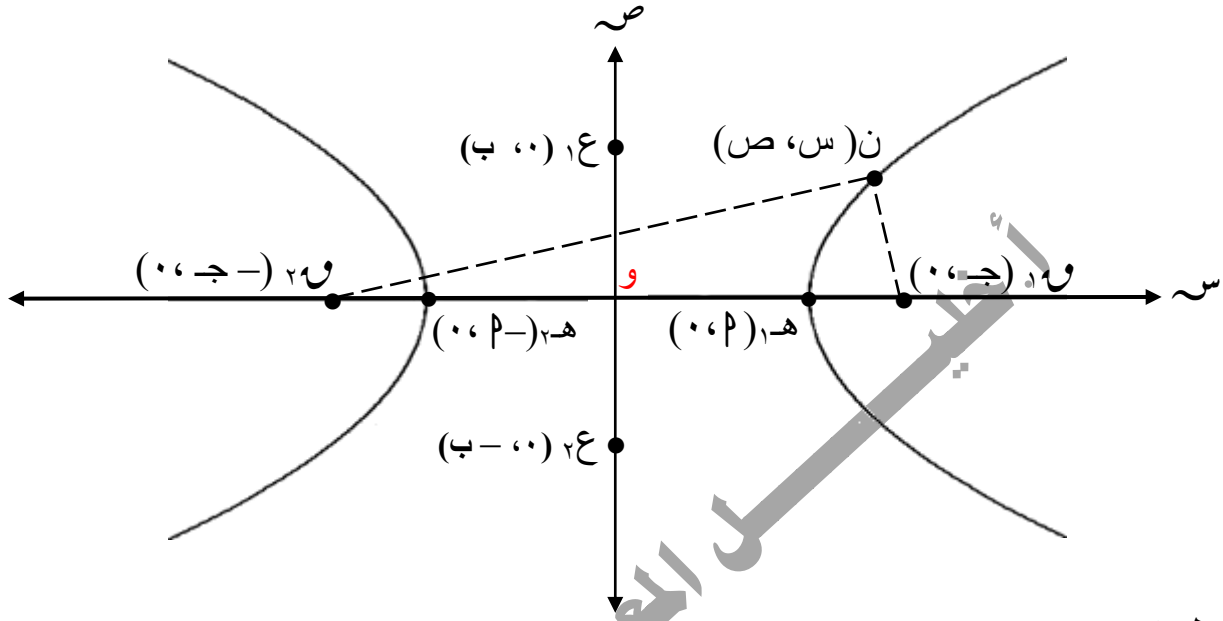
تساوي ٤ : ٣



ثالثاً / القطع الزائد Hyperbola

تعريف:

القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي الفرق بين بُعديها عن نقطتين ثابتتين (تسمى البؤرتين) في المستوى يساوي طولاً ثابتاً (يسمى طول المحور القاطع ومقداره $2a$).



ملاحظات :

(١) تسمى النقطتان $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ **بؤرتي القطع الزائد** و يسمى البعد بين البؤرتين

بالبعد البؤري و بالتالي فإن: $2a = |a - (-a)|$

(١) يسمى المستقيم المار بالبؤرتين $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ **بالمحور القاطع** أو **المحور البؤري** وهو المحور

الرئيسي للقطع ويكون: طول المحور القاطع يساوي $2a$ أي أن: $2a = |a - (-a)|$

(٢) القطعة المستقيمة ac هي المنصف العمودي للقطعة المستقيمة $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ و تسمى

المحور المرافق أو **المحور غير القاطع** حيث: $2b = |c - (-c)|$

(٣) تسمى النقطتان $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ **رأسي القطع** الزائد وهما نقطتا تقاطع منحنى القطع مع المحور القاطع.

(٤) النقطة **و** تسمى **مركز القطع** الزائد وهي نقطة تقاطع المحور القاطع مع المحور المرافق.

(٥) البعد بين البؤرتين (البعد البؤري) $<$ البعد بين الرأسين .

(٦) القطع الزائد متماثل بالنسبة لمحور السينات وكذلك محور الصادات ومتماثل بالنسبة لنقطة الأصل (المركز).

(٧) بالنسبة للتخالف المركزي للقطع الزائد: $1 < e$ لأن $a < c$

معادلة القطع الزائد:

سنستخدم تعريف القطع الزائد لاستنتاج معادلة القطع وبالاستعانة بالشكل المرسوم في الصفحة السابقة

يكون: لتكن $N(س، ص) \in$ القطع ، وبؤرتيه $و١(ج، ٠)$ ، $و٢(ج، -٠)$

∴ بعد النقطة N عن البؤرة $و١(ج، -٠)$ - بعد النقطة N عن البؤرة $و٢(ج، ٠)$ $٢٢ =$

$$٢٢ = |١و| - |٢و|$$

$$٢٢ = \sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج - س)} - \sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج + س)}$$

$$\sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج - س)} + ٢٢ = \sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج + س)} \quad \Leftarrow$$

$$\sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج - س)} + ٢٢ = \sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج + س)} \quad \Leftarrow$$

$$\sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج - س)} + ٢٢ = \sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج + س)} \quad \Leftarrow$$

$$\sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج - س)} + ٢٢ = \sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج + س)} \quad \Leftarrow$$

$$\sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج - س)} + ٢٢ = \sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج + س)} \quad \Leftarrow$$

$$\sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج - س)} + ٢٢ = \sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج + س)} \quad \Leftarrow$$

$$\sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج - س)} + ٢٢ = \sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج + س)} \quad \Leftarrow$$

$$\sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج - س)} + ٢٢ = \sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج + س)} \quad \Leftarrow$$

$$\sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج - س)} + ٢٢ = \sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج + س)} \quad \Leftarrow$$

$$\sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج - س)} + ٢٢ = \sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(ج + س)} \quad \Leftarrow$$

$$١ = \frac{ص}{٢٢ - ج} - \left(\frac{١}{٢٢}\right) \quad \text{وللتبسيط نضع } ج - ٢٢ = ب \quad ، \quad ج < ٢٢ \quad \text{فحصل على}$$

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد من النموذج الأول:

$$\text{حيث: } ج < ٢٢ ، ج < ب ، ج - ٢٢ = ب + ٢٢$$

$$١ = \frac{ص}{٢٢ - ج} - \frac{١}{٢٢}$$

✳ نقاط تقاطع القطع الزائد في الصورة القياسية مع المحاور:

- ✓ مع محور السينات نضع $v = 0$ فيكون: $1 = \frac{v^2}{p^2}$ (ضرب طرفين \times وسطين) $\Leftrightarrow s^2 = p^2$
- ∴ $s = \pm p$ أي أن النقطتين $(0, p)$ ، $(0, -p)$ واقعتين على القطع الزائد وهي نقاط تقاطع القطع الزائد في الوضع القياسي مع محور السينات.
- ✓ مع محور الصادات نضع $s = 0$ فيكون: $1 = \frac{v^2}{b^2}$ (ضرب طرفين \times وسطين) $\Leftrightarrow v^2 = b^2$
- لا يمكن حل المعادلة ∴ النقطتين $(b, 0)$ ، $(-b, 0)$ غير واقعتان على القطع الزائد أي أن القطع الزائد القياسي التابع للنموذج الأول لا يتقاطع مع محور الصادات.

✳ استنتاج معادلتَي المستقيمتين المقاربة للقطع الزائد :

لإيجاد معادلتَي المستقيمتين المقاربتين في القطع الزائد نضع معادلة القطع تساوي صفراً فيكون:

بالنسبة للنموذج الأول:

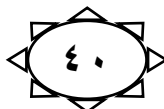
$$0 = \frac{v^2}{b^2} - \frac{s^2}{p^2} \Leftrightarrow \frac{v^2}{b^2} = \frac{s^2}{p^2} \Leftrightarrow v = \pm \frac{b}{p}s \quad \boxed{v = \pm \frac{b}{p}s}$$

بالنسبة للنموذج الثاني:

$$0 = \frac{s^2}{b^2} - \frac{v^2}{p^2} \Leftrightarrow \frac{s^2}{b^2} = \frac{v^2}{p^2} \Leftrightarrow s = \pm \frac{b}{p}v \quad \boxed{s = \pm \frac{b}{p}v}$$

✳ تذكر أن/ في القطع الزائد :

- ✓ دائماً p ، b ، a قيم موجبة لأنها أطوال (أبعاد) حيث أن: طول المحور القاطع $= 2p$ ، طول المحور المرافق $= 2b$ ، البعد بين البؤرتين (البعد البؤري) $= 2a$
- ✓ دائماً $a < p$ ، $a < b$ بينما قد يكون $p < b$ أو $b < p$ أو $p = b$ وهذا يعني أن: a هي أكبر الأطوال في القطع الزائد.
- ✓ دائماً قيمة الطرف الأيسر لمعادلة القطع موجب واحد، والطرف الأيمن عبارة عن فرق بين مربعين.
- ✓ $a^2 = p^2 + b^2$ (قانون مهم وخاص بالقطع الزائد).
- ✓ يوجد مستقيمتان مقاربتان للقطع الزائد.
- ✓ إذا كان طول المحور القاطع = طول المحور المرافق فإن القطع يسمى قطع زائد متساوي الساقين.
- ✓ إذا كان القطع الزائد متساوي الساقين ($p = b$) فإن: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ (على الطالب إثبات ذلك)



يوجد نموذجان قياسيان للقطع الزائد فيما يلي توضيح لهما :

الصفات	النموذج الأول	النموذج الثاني
المعادلة	$1 = \frac{ص^2}{ب^2} - \frac{س^2}{م^2}$ (س موجبة)	$1 = \frac{ص^2}{ب^2} - \frac{س^2}{م^2}$ (س سالبة)
المركز	(0, 0)	(0, 0)
الرأسان	(0, ±ب)	(±ب, 0)
البورتان	(0, ±ج)	(±ج, 0)
المستقيمان المقاربان	$ص = \pm \frac{ب}{م} س$ أو $0 = \frac{ص^2}{ب^2} - \frac{س^2}{م^2}$	$ص = \pm \frac{ب}{م} س$ أو $0 = \frac{ص^2}{ب^2} - \frac{س^2}{م^2}$
معادلة الدليلان	$\frac{ب}{ج} \pm = س$ أو $\frac{ب}{ج} \pm = ص$	$\frac{ب}{ج} \pm = س$ أو $\frac{ب}{ج} \pm = ص$
التخالف المركزي	$1 < \frac{ج}{ب} = ي$ أو $1 < \frac{ج}{م} = ي$	$1 < \frac{ج}{ب} = ي$ أو $1 < \frac{ج}{م} = ي$
طول المحور القاطع	٢ ب (ويقع على محور السينات)	٢ ب (ويقع على محور السينات)
طول المحور المرافق	٢ ب (ويقع على محور السينات)	٢ ب (ويقع على محور السينات)
البعد البؤري	٢ ج	٢ ج
الرسم		

ملاحظة: إذا كانت إشارة س^٢ موجبة فإن القطع الزائد من النموذج الأول و مقام س^٢ يمثل قيمة م^٢ ، وإذا كانت إشارة س^٢ سالبة فإن القطع الزائد من النموذج الثاني و مقام س^٢ يمثل قيمة ب^٢

تمارين على القطع الزائد

ملحوظة : كل التمارين المأخوذة في القطع الناقص تطابق تماماً تمارين القطع الزائد وبنفس مخطط تمارين القطع الناقص المذكور سابقاً ... لذا تحل التمارين بنفس الطرق والاستراتيجيات المتبعة مع مراعاة صفات القطع الزائد وصيغة المعادلة وما يترتب على ذلك من اضافة أو تغيير.

النوع الأول/ القطع في وضع قياسي

① معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع :

مثال/ أوجد صفات القطع الزائد الذي معادلته :

$$(1) \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \quad \text{أو} \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11$$

الحل

نضع المعادلة بصورة قياسية كالتالي:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \quad \text{أو} \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \quad \text{أو} \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \quad \text{أو} \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \quad \text{أو} \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \quad \text{أو} \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \quad \text{أو} \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11$$

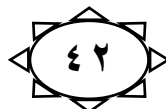
$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \quad \text{أو} \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \quad \text{أو} \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \quad \text{أو} \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \quad \text{أو} \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11 \quad \text{أو} \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 11$$



$$(٢) \text{ س}^٢ - \frac{٤}{٩} \text{ ص}^٢ + \frac{١}{٤} = ٠$$

الحل

نضع المعادلة بصورة قياسية كالتالي:

$$\text{س}^٢ - \frac{٤}{٩} \text{ ص}^٢ + \frac{١}{٤} = ٠ \quad \text{س}^٢ - \frac{٤}{٩} \text{ ص}^٢ = -\frac{١}{٤} \quad (\text{بالضرب } \times ٤) \quad ٤ \text{ س}^٢ - \frac{١٦}{٩} \text{ ص}^٢ = -١ \quad ١ = \frac{٤ \text{ س}^٢}{١} - \frac{١٦ \text{ ص}^٢}{٩}$$

∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني ومحوره القاطع يقع على محور الصادات ومعادلته: $١ = \frac{\text{س}^٢}{١} - \frac{\text{ص}^٢}{٩}$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{٩}{١٦} = \frac{٢}{١٦} \text{ ب}^٢ \quad \frac{٣}{٤} = \text{ب} \quad \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} \text{ ب}^٢ \quad \frac{٤}{١٦} + \frac{٩}{١٦} = \frac{٢}{١٦} \text{ ج}^٢ \quad \frac{١}{٤} + \frac{٩}{١٦} = \frac{٢}{١٦} \text{ ج}^٢ \quad \frac{١٣}{١٦} = \frac{٢}{١٦} \text{ ج}^٢ \quad \frac{١٣}{٤} = \frac{٢}{١٦} \text{ ج}^٢ \end{aligned}$$

إحداثيات الرأسين $(\frac{٣}{٤} \pm, ٠) = (\text{ب} \pm, ٠)$ إحداثيات البؤرتين $(\frac{١٣}{٤} \pm, ٠) = (\text{ج} \pm, ٠)$

$$\text{الدليلان: ص} = \frac{\text{ب}^٢}{\text{ج}} \quad \text{ص} = \frac{\frac{٩}{١٦}}{\frac{١٣}{١٦}} \text{ ب}^٢ = \frac{٩}{١٣} \text{ ب}^٢ \quad \text{ص} = \frac{٩}{١٣} \text{ ب}^٢ \quad \text{ص} = \frac{٩}{١٣} \text{ ب}^٢$$

طول المحور القاطع $\frac{٣}{٤} = \frac{٣}{٤} \times ٢ = \text{ب}^٢$ طول المحور المرافق $١ = \frac{١}{٤} \times ٢ = \text{ب}^٢$ البعد البؤري $\frac{١٣}{٤} = \frac{١٣}{٤} \times ٢ = \text{ج}^٢$

$$\text{التخالف المركزي: } \frac{\text{ج}}{\text{ب}} = \text{ي} \quad \text{ي} = \frac{\frac{١٣}{٤}}{\frac{٣}{٤}} = \frac{١٣}{٣}$$

$$\text{المقاربات: ص} = \frac{\text{ب}^٢}{\text{ج}} \quad \text{ص} = \frac{\frac{٩}{١٦}}{\frac{١٣}{١٦}} \text{ ب}^٢ = \frac{٩}{١٣} \text{ ب}^٢ \quad \text{ص} = \frac{٩}{١٣} \text{ ب}^٢ \quad \text{ص} = \frac{٩}{١٣} \text{ ب}^٢$$

ب) صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة:

مثال/ أوجد معادلة القطع الزائد الذي يحقق ما يلي:

(١) رأساه (٠، ±٦) وتخالفه المركزي يساوي $\frac{5}{3}$.

الحل

∴ الرأسان نموذجيان ويقعان على محور الصادات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني

$$\therefore \text{الرأسان} (0, \pm 6) = (p, \pm 6) \therefore p = 6 \iff \boxed{p^2 = 36}$$

$$\text{التخالف المركزي: } \frac{c}{p} = \frac{5}{3} \iff \frac{c}{6} = \frac{5}{3} \iff c = 10 \iff 10^2 = 100 = c^2$$

$$\therefore c^2 = p^2 + b^2 \iff 100 = 36 + b^2 \iff b^2 = 64 \iff \boxed{b^2 = 64}$$

$$\therefore \text{معادلة القطع هي: } 1 = \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64}$$

(٢) البؤرتان (٠، ±٨)، وطول المحور غير القاطع (المرافق) = ٦

الحل

∴ البؤرتان نموذجيتان وتقعان على محور السينات ∴ القطع في وضع قياسي ويتبع النموذج الأول

$$\therefore \text{البؤرتان} (0, \pm 8) = (0, \pm c) \therefore c = 8 \iff c^2 = 64$$

$$\therefore \text{طول المحور غير القاطع (المرافق)} = 2b = 6 \iff b = 3 \iff \boxed{b^2 = 9}$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 \iff 64 = a^2 + 9 \iff a^2 = 55 \iff \boxed{a^2 = 55}$$

$$\therefore \text{معادلة القطع هي: } 1 = \frac{x^2}{55} - \frac{y^2}{9}$$

(٣) البؤرتان (٠، ±٦)، وأحد دليليه س = ٣.

الحل

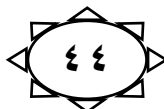
∴ البؤرتان نموذجيتان وتقعان على محور السينات ∴ القطع في وضع قياسي ويتبع النموذج الأول

$$\therefore \text{البؤرتان} (0, \pm 6) = (0, \pm c) \iff c = 6 \iff c^2 = 36$$

$$\text{الدليل: } \frac{p}{c} = \frac{3}{6} \iff \frac{p}{6} = \frac{3}{6} \iff p = 3 \iff \boxed{p^2 = 18}$$

$$\therefore c^2 = p^2 + b^2 \iff 36 = 18 + b^2 \iff b^2 = 18 \iff \boxed{b^2 = 18}$$

$$\therefore \text{معادلة القطع هي: } 1 = \frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{18}$$



(٤) رأساه $(\pm\sqrt{2}, ٠)$ ، والقطع يمر بالنقطة $(-١, ٣)$ ؟

الحل

الرأسان نموذجيان ويقعان على محور الصادات وبالتالي القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني

$$\boxed{\wedge = \textcircled{p}} \iff \sqrt[p]{\textcircled{p}} = p \therefore (\sqrt[p]{\textcircled{p}} \pm \epsilon, \epsilon) = (p \pm \epsilon, \epsilon) \text{ الرأسان} \therefore$$

∴ القطع يمر بالنقطة $(-1, 3)$ نعوض عن $s = -1$ ، $v = 3$ ، $p = 8$ في المعادلة فيكون :

$$١ = \frac{١}{٢} - \frac{٩}{٨} \quad \text{بضرب } ٨ \times \text{ب} ٨ \text{ يكون: } ٨ - ٩ \text{ ب} ٨ = ٨$$

$$\boxed{٨ = ٢ب} \iff ٨ = ٢ب - ٩ \iff ٨ = ٢ب - ٨ \iff ٨ = ٢ب - ٨$$

***** * * * ***** * * * ***** * * * ***** * * * *****

... صورة أخرى لمعادلتى المستقيمان المقاربان ...

يمكن استنتاج صورة أخرى لمعادلتى المستقيمان المقاربان لقطع زائد (بدلالة ص) بالشكل التالي:

بالنسبة للنموذج الأول:

$$\boxed{\text{س} = \frac{\text{پ}}{\text{ب}} \pm} \quad \leftarrow \quad \text{س} = \frac{\text{پ}}{\text{ب}} \quad \leftarrow \quad \frac{\text{س}}{\text{پ}} = \frac{\text{ص}}{\text{ب}} \quad \leftarrow \quad \cdot = \frac{\text{ص}}{\text{ب}} - \frac{\text{س}}{\text{پ}}$$

بالنسبة للنموذج الثاني:

$$\boxed{\text{ص} \frac{\text{ب.ج}}{\text{م}} \pm = \text{س}} \quad \leftarrow \quad \cancel{\text{ص} \frac{\text{ب.ج}}{\text{م}} = \text{س}} \quad \leftarrow \quad \frac{\text{ص}}{\text{م}} = \frac{\text{س}}{\text{ب.ج}} \quad \leftarrow \quad \cdot = \frac{\text{س}}{\text{ب.ج}} - \frac{\text{ص}}{\text{م}}$$

***** * * * ***** * * * ***** * * * ***** * * * *****

... سؤال التحدي ...

اختر الإجابة الصحيحة :			
١) المعادلة $s^2 + 5s + 5 = 0$ تمثل قطع زائد عندما تكون قيم $p \dots$			
أ) $p < 5$	ب) $p > 5$	ج) $p \leq 5$	د) $p = 5$
٢) القطع المخروطي الذي رأساه $(0, 5 \pm)$ ومعادلتى دليليه : $s = \pm 3$ قطع			
أ) مكافئ	ب) ناقص	ج) زائد	د) دائرة
٣) المعادلة $s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0$ تمثل معادلة			
أ) قطع مكافئ	ب) قطع ناقص	ج) قطع زائد	د) دائرة

(٥) دليلاه : ص = ± ٤ ، والمقاربات : ص = ± ٣

الحل

∴ معادلتى المقاربات فى وضع نموذجي ∴ مركز القطع نقطة الأصل ، ∴ الدليلان ص = ± ٤ (أى

أنها تقطع محور الصادات) ∴ القطع قياسى من النموذج الثانى معادلته : $1 = \frac{ص}{٢م} - \frac{س}{٢ب}$

الدليلان : ص = ± $\frac{٢}{ج} \Leftarrow \frac{٢}{ج} = \frac{٢}{٤} \Leftarrow ج = ٤ = ٢م \Leftarrow ٤ = \frac{٢}{ج} \Leftarrow \frac{٢}{ج} \pm ص = \frac{٢}{ج}$ (١)

المقاربات : ص = ± $\frac{٢}{ب} \Leftarrow \frac{٢}{ب} = \frac{٢}{٣} \Leftarrow ٣ = ٢ب \Leftarrow ٣ = \frac{٢}{٤} = \frac{٢}{٩} \Leftarrow ٣ = \frac{٢}{٩}$ (٢)

$٠ = ٢م + ٢ب = \frac{٢}{٩} \Leftarrow \frac{٢}{٩} = \frac{٢}{٩} + ٢م \Leftarrow \frac{٢}{٩} = \frac{٢}{٩} + ٢م \Leftarrow \frac{٢}{٩} = \frac{٢}{٩} + ٢م$

$٠ = \frac{٢}{٩} - \frac{٢}{٩} = ٠$ مرفوضة أو $٠ = \frac{٢}{٩} - \frac{٢}{٩}$

$$\frac{٢٠٨}{٩} = ٢م \Leftarrow \frac{٢٠٨}{٩} = ٢م \Leftarrow \frac{٢٠٨}{٩} = ٢م$$

$$\frac{٨٣٢}{٨١} = ٢ب \Leftarrow \frac{٨٣٢}{٨١} = ٢ب \Leftarrow \frac{٨٣٢}{٨١} = ٢ب$$

∴ معادلة القطع هي : $1 = \frac{ص}{\frac{٨٣٢}{٨١}} - \frac{س}{\frac{٢٠٨}{٩}}$ ويمكن وضعها بالشكل : $1 = \frac{٨١ص}{٨٣٢} - \frac{٩س}{٢٠٨}$

(٦) البورتان (٠، ٢) ، والمقاربات : ص = ± ٣

الحل

∴ البورتان نموذجيتان وتقعان على محور السينات ، ∴ المقاربات ص = ± ٣ ∴ القطع فى وضع

قياسى من النموذج الأول معادلته : $1 = \frac{ص}{٢م} - \frac{س}{٢ب}$

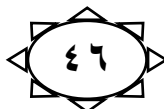
∴ البورتان (٠، ٢) = (٠، ج) ∴ $٢ = ج \Leftarrow ٢ = ج \Leftarrow ٢ = ج$

المقاربات : ص = ± $\frac{٢}{ب} \Leftarrow \frac{٢}{ب} = \frac{٢}{٣} \Leftarrow ٣ = ٢ب \Leftarrow ٣ = \frac{٢}{٩} = \frac{٢}{٩}$

$٢ = ٢ب + ٢ب = \frac{٢}{٩} \Leftarrow \frac{٢}{٩} = \frac{٢}{٩} + ٢ب \Leftarrow \frac{٢}{٩} = \frac{٢}{٩} + ٢ب$

$$\frac{١٨}{٥} = ٢ب \Leftarrow \frac{١٨}{٥} = ٢ب \Leftarrow \frac{١٨}{٥} = ٢ب$$

∴ معادلة القطع هي : $1 = \frac{ص}{\frac{١٨}{٥}} - \frac{س}{\frac{٢}{٩}}$ ويمكن وضعها بالشكل : $1 = \frac{٥ص}{١٨} - \frac{٩س}{٢}$



(٧) تخالفه المركزي $\sqrt{3}$ ، ومركز القطع مبدأ الاحداثيات، ومحوره القاطع على محور السينات ، والقطع يمر بالنقطة (٣ ، ٢) ثم أرسم القطع .

الحل

∴ المحور القاطع على محور السينات ، ∴ مركز القطع نقطة الأصل ∴ القطع قياسي من النموذج الأول معادلته : $1 = \frac{ص^2}{ب^2} - \frac{س^2}{م^2}$

$$\frac{ص^2}{ب^2} = 1 \iff \frac{ص^2}{ب^2} - \frac{س^2}{م^2} = 1 \iff \frac{ص^2}{ب^2} = 1 + \frac{س^2}{م^2} \iff \frac{ص^2}{ب^2} = \frac{م^2 + س^2}{م^2} \iff \frac{ص^2}{ب^2} = \frac{ج^2}{م^2} \iff \frac{ص}{ب} = \frac{ج}{م}$$

$$\frac{ص}{ب} = \frac{ج}{م} \iff \frac{ص}{ب} = \frac{ج}{م} \iff \frac{ص}{ب} = \frac{ج}{م} \iff \frac{ص}{ب} = \frac{ج}{م} \iff \frac{ص}{ب} = \frac{ج}{م}$$

∴ القطع يمر بالنقطة (٣ ، ٢) نعوض عن $س = ٣$ ، $ص = ٢$ ، $ب = ٢$ فيكون :

$$1 = \frac{٢^2}{ب^2} - \frac{٣^2}{م^2} \iff 1 = \frac{٤}{ب^2} - \frac{٩}{م^2} \iff 1 = \frac{٤}{ب^2} - \frac{٩}{م^2} \iff 1 = \frac{٤}{ب^2} - \frac{٩}{م^2} \iff 1 = \frac{٤}{ب^2} - \frac{٩}{م^2}$$

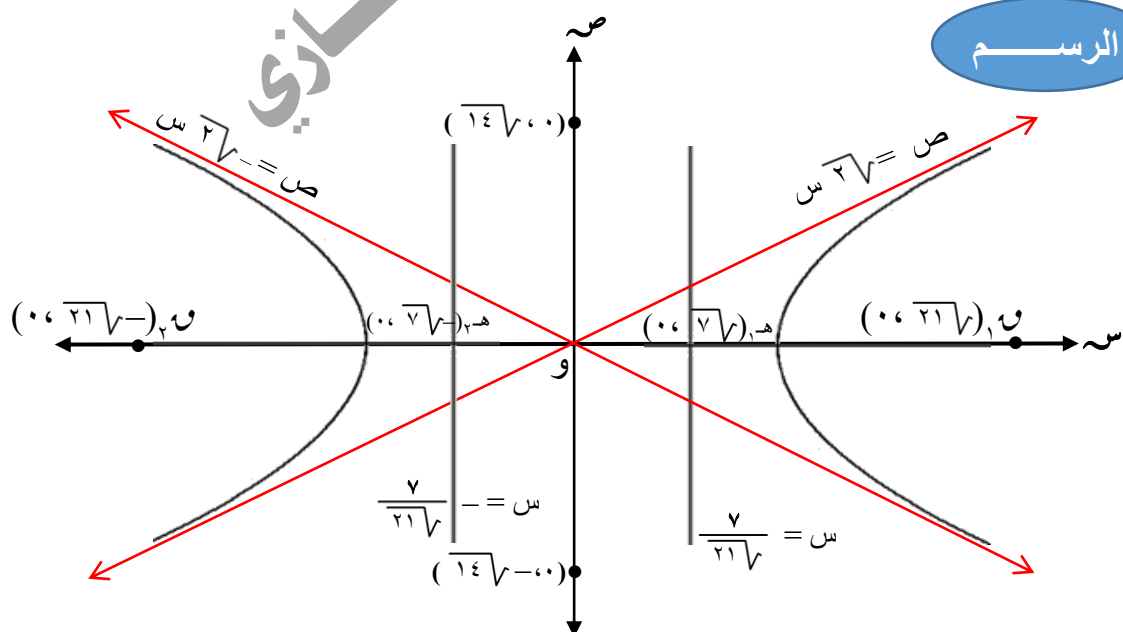
$$\frac{٤}{ب^2} - \frac{٩}{م^2} = 1 \iff \frac{٤}{ب^2} = 1 + \frac{٩}{م^2} \iff \frac{٤}{ب^2} = \frac{م^2 + ٩}{م^2} \iff \frac{٤}{ب^2} = \frac{م^2 + ٩}{م^2} \iff \frac{٤}{ب^2} = \frac{م^2 + ٩}{م^2}$$

$$\frac{٤}{ب^2} = \frac{م^2 + ٩}{م^2} \iff \frac{٤}{ب^2} = \frac{م^2 + ٩}{م^2} \iff \frac{٤}{ب^2} = \frac{م^2 + ٩}{م^2} \iff \frac{٤}{ب^2} = \frac{م^2 + ٩}{م^2}$$

إحداثيات الرأسين $(٠ ، ب \pm) = (٠ ، \sqrt{٧} \pm)$ ، إحداثيات البؤرتين $(٠ ، ج \pm) = (٠ ، ٢١ \pm)$

$$\frac{ب}{ج} \pm = س \iff \frac{\sqrt{٧}}{٢١} \pm = س$$

$$\frac{ب}{ج} \pm = س \iff \frac{\sqrt{٧}}{٢١} \pm = س \iff \frac{١٤}{\sqrt{٧}} \pm = س \iff \frac{١٤}{\sqrt{٧}} \pm = س$$



النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي

مثال/ أوجد معادلة المنحنى الذي ترسمه النقطة ن التي تتحرك بحيث يكون الفرق بين بُعديها عن النقطتين $(0, 2)$ ، $(0, 5)$ يساوي ١ ؟

الحل

∴ ن تتحرك بحيث يكون الفرق بين بُعديها ∴ القطع زائد و النقطتين $(0, 2)$ ، $(0, 5)$ هما بؤرتي القطع وواضح أنهما غير نموذجيتان ∴ القطع في وضع غير قياسي ... سنستخدم تعريف القطع الزائد

لاستنتاج معادلة القطع : لتكن ن (س ، ص) ∈ القطع

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة $(0, 5)$ - بعد النقطة ن عن البؤرة $(0, 2)$ = ١

$$1 = \sqrt{(0-s)^2 + (5-v)^2} - \sqrt{(0-s)^2 + (2-v)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(0-s)^2 + (5-v)^2} = 1 + \sqrt{(0-s)^2 + (2-v)^2} \quad \text{بالتربيع وفك الأقواس}$$

$$s^2 - 20s + 25 + v^2 = (1 + \sqrt{(0-s)^2 + (2-v)^2})^2 = s^2 + 10 + 20s + v^2 + 2\sqrt{(0-s)^2 + (2-v)^2}$$

$$\Leftrightarrow -20s + 25 + v^2 = 10 + 20s + v^2 + 2\sqrt{(0-s)^2 + (2-v)^2} \quad \text{بالتربيع}$$

$$\Leftrightarrow -20s + 25 + v^2 = 10 + 20s + v^2 + 2\sqrt{(0-s)^2 + (2-v)^2} \quad \text{بالقسمة على 2 للتبسيط}$$

$$\Leftrightarrow -20s + 25 + v^2 = 10 + 20s + v^2 + 2\sqrt{(0-s)^2 + (2-v)^2} \quad \text{بالتربيع}$$

$$\Leftrightarrow -20s + 25 + v^2 = 10 + 20s + v^2 + 2\sqrt{(0-s)^2 + (2-v)^2}$$

$$\Leftrightarrow -20s + 25 + v^2 = 10 + 20s + v^2 + 2\sqrt{(0-s)^2 + (2-v)^2}$$

$$\Leftrightarrow -20s + 25 + v^2 = 10 + 20s + v^2 + 2\sqrt{(0-s)^2 + (2-v)^2}$$

$$\boxed{0 = 96 + 56s + v^2 - 8s^2} \quad \text{∴ المعادلة المطلوبة هي:}$$

النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع زائد

لأثبتات وقوع نقطة ن(س ، ص) على القطع الزائد أو داخله أو خارجه فإن:

- (١) إذا كان بُعدها عن $و٢$ - بُعدها عن $و١$ $٢٢ = ١٠$ فإن النقطة تقع على القطع الزائد .
- (٢) إذا كان عن $و٢$ - بُعدها عن $و١$ $٢٢ > ١٠$ فإن النقطة تقع خارج القطع الزائد .
- (٣) إذا كان بُعدها عن $و٢$ - بُعدها عن $و١$ $٢٢ < ١٠$ فإن النقطة تقع داخل القطع الزائد .

مثال/ أثبت أن النقطة (٠ ، ٢) تقع خارج القطع الزائد الذي معادلته: $\frac{ص^2}{٩} - \frac{س^2}{١٦} = ١$

الحل

من معادلة القطع واضح أن القطع في وضع قياسي من النموذج الاول ، $٢٢ = ١٠$ ، $١٦ = ٢٢$ ، $٩ = ٢٢$ أولاً / نوجد إحداثيات البؤرتين:

$$\therefore ج٢ = ٢٢ + ٢٢ = ١٠ + ١٦ = ٢٦ \iff ج٢ = ٢٦ \iff ج٢ = ٢٦ \iff ج٢ = ٢٦ \iff ج٢ = ٢٦$$

٠. البؤرتان $و١(٠، ٥)$ ، $و٢(٠، -٥)$

ثانياً / نوجد الفرق بين بُعدي النقطة (٠ ، ٢) عن البؤرتين $و١(٠، ٥)$ ، $و٢(٠، -٥)$ كما يلي:

$$٤ = ٣ - ٧ = \sqrt{٠ + ٩} - \sqrt{٠ + ٤٩} = \sqrt{٠ + ٩} - \sqrt{٠ + ٤٩} = \sqrt{٠ + ٩} - \sqrt{٠ + ٤٩}$$

٠. الفرق بين البُعدين $٤ = ٣ - ٧$ ، $١٦ = ٢٢ \iff ٤ = ٢٢ \iff ٨ = ٢٢$ نقارن بين الفرق بين

البُعدين وقيمة ٢٢ نجد أن: $٨ > ٤ \iff$ الفرق بين البُعدين $٢٢ > ٨$ ٠. النقطة خارج القطع الزائد.

لمعرفة موقع نقطة ن(م ، ن) بالنسبة لقطع زائد معطى معادلته فإن:

نرتب حدود معادلة القطع بحيث تكون صفيرية (تساوي صفر) وبشرط أن يكون الحد المطلق سالب ثم

نعوض ب س = م ، ص = ن فإذا كان:

(١) الناتج = ٠ فإن النقطة تقع على منحنى القطع الزائد

(٢) الناتج > ٠ فإن النقطة تقع خارج القطع الزائد

(٣) الناتج < ٠ فإن النقطة تقع داخل القطع الزائد

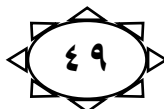
مثال/ أين تقع النقطة (٢ ، ٦) بالنسبة للقطع الزائد: $٧ = ٢٢ - ٥ص - ٢س$

الحل

نضع المعادلة بالشكل: $٢س - ٥ص - ٧ = ٠$ ، ونعوض عن س = ٦ ، ص = ٢ فيكون:

$$٢ \times ٦ - ٥ \times ٢ - ٧ = ١٢ - ١٠ - ٧ = -٥ < ٠ \therefore$$

٠. النقطة تقع داخل القطع



التعريف العام للقطاع باستخدام التخالف المركزي

تعريف:

القطاع المخروطي هو المحل الهندسي لجميع النقاط التي نسبة بُعدها عن نقطة ثابتة (تسمى البؤرة) إلى بُعدها عن مستقيم ثابت (يسمى الدليل المرافق للبؤرة) يساوي عدد ثابت (يسمى التخالف المركزي ويرمز له بالرمز u)

و وفقاً لقيمة التخالف المركزي " u " يمكن التعرف على نوع القطع المخروطي حيث:

- ① إذا كان: $u = 1$ فإن القطع مكافئ
- ② إذا كان: $u > 1$ فإن القطع ناقص، (حالة خاصة) إذا كان $u = 0$ فإن القطع دائرة
- ③ إذا كان: $u < 1$ فإن القطع زائد

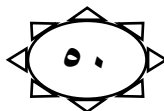
معلومات مهمة :

- ① في القطع الناقص إذا كان $u = 1$ فإن القطع يمثل دائرة نصف قطرها $p = b$ ، وستكون قيمة التخالف المركزي $u = 0$ ، وقيمة $j = 0$.
- ② في القطع الزائد إذا كان $u = 1$ فإن قيمة التخالف المركزي $u = \sqrt{2}$ (القطع متساوي الساقين)
- ③ في القطع الزائد إذا كان $u = 1$ فإن المستقيمين المقاربين متعامدين ومعادلتها $v = \pm s$
- ④ في القطع المخروطي إذا كان $u < 1$ فإن القطع ناقص.
- ⑤ في القطع المخروطي إذا كان $u > 1$ فإن القطع زائد.

... تدريب ...

أكمل كل فقرة من الفقرات التالية بما يجعلها صحيحة :

- (١) إذا كان $u = 1$ فإن القطع
- (٢) إذا كان $u > 1$ فإن القطع
- (٣) في القطع الناقص إذا كان طول المحور الأكبر يساوي طول المحور الأصغر فإن معادلة القطع تمثل
- (٤) نوع القطع الذي تخالفه المركزي يساوي $u = 0$ هو قطع والذي تخالفه $u = 2, 3$ هو قطع
- (٥) إذا كان البعد بين إحداثيات الرأسين أقل من البعد بين إحداثيات البؤرتين فإن القطع



مثال (١) أوجد التخالف المركزي للمعادلة : $\frac{y^2}{٢٥} + \frac{x^2}{١٠٠} = ١$ في الحالات التالية :

١ = م (١)

الحل

نعوض عن $m = 1$ في المعادلة فتصبح بالشكل $\frac{v^2}{p} + \frac{u^2}{p} = 1$ وهي تمثل معادلة دائرة $\therefore u = 0$.

* * * ***** * * *

$$٣ - = م \quad (٢)$$

الحل

نعوض عن $m = 3$ في المعادلة فتصبح بالشكل $\frac{s}{p} - \frac{3}{p} = 1$ ويمكن كتابة المعادلة بالشكل:

وهي تمثل معادلة قطع زائد $1 = \frac{v^2}{\frac{p^2}{3}} - \frac{s^2}{p^2}$

$$\frac{p_2}{\sqrt{3}\sqrt{}} = \rightarrow \leftarrow = \quad \frac{p_2}{\sqrt{3}} = \rightarrow \leftarrow = \quad \frac{p}{\sqrt{3}} + \frac{p}{\sqrt{3}} = \rightarrow \leftarrow = \quad \frac{p}{\sqrt{3}} + \frac{p}{\sqrt{3}} = \rightarrow \leftarrow =$$

$$\frac{2}{3\sqrt{p}} = \frac{\frac{p2}{3\sqrt{p}}}{p} = \frac{2}{p} = 5$$

* * *

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{m} \quad (3)$$

الحل

نعوض عن $m = 4$ في المعادلة فتصبح بالشكل $\frac{s}{p} + \frac{4v}{p} = 1$ ويمكن كتابة المعادلة بالشكل:

$$١ = \frac{ص}{\frac{٢}{٢}} + \frac{س}{\frac{٢}{٢}}$$

وهي تمثل معادلة قطع ناقص

$$\frac{{}^2p_3}{\xi} = {}^2\underset{\cdot}{\downarrow} \iff \frac{{}^2p}{\xi} - {}^2p = {}^2\underset{\cdot}{\downarrow} \iff {}^2\underset{\cdot}{\downarrow} + \frac{{}^2p}{\xi} = {}^2p \iff {}^2\underset{\cdot}{\downarrow} + {}^2\underset{\cdot}{\downarrow} = {}^2p \therefore$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{p\sqrt{3}}{2}}{p} = \frac{1}{2} \therefore \frac{\sqrt{3}}{p} = \frac{1}{2} \therefore \frac{p\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \leftarrow$$

مثال (٢) حدد نوع المنحنى الذي تمثله المعادلة : $p^2 = 4v^2 + 1$ في الحالات التالية :

$$(1) \quad 4 = p$$

الحل : بالتعويض عن $4 = p$ في المعادلة $4 = p^2 + 4v^2$ وهي تمثل دائرة

$$(2) \quad 4 = -p$$

الحل : بالتعويض عن $4 = -p$ في المعادلة $4 = p^2 - 4v^2$ وهي تمثل قطع زائد

$$(3) \quad 6 = p$$

الحل : بالتعويض عن $6 = p$ في المعادلة $6 = p^2 + 4v^2$ وهي تمثل قطع ناقص

مثال (٣) حدد نوع المنحنى الذي تمثله المعادلة : $1 = \frac{v^2}{16} + \frac{s^2}{9-l}$ في الحالات التالية :

$$(1) \quad 5 = l$$

الحل : بالتعويض عن $5 = l$ في المعادلة تصبح بالشكل $1 = \frac{v^2}{16} + \frac{s^2}{4}$ وهي تمثل دائرة

$$(2) \quad 2 = l$$

الحل : بالتعويض عن $2 = l$ في المعادلة تصبح بالشكل $1 = \frac{v^2}{16} - \frac{s^2}{3}$ وهي تمثل قطع زائد

$$(3) \quad 6 = l$$

الحل : بالتعويض عن $6 = l$ في المعادلة تصبح بالشكل $1 = \frac{v^2}{16} + \frac{s^2}{3}$ وهي تمثل قطع ناقص

مثال (٤) إذا كان : $y = \text{صفر}$ أوجد قيمة l في معادلة القطوع التالية:

$$(1) \quad 1 = \frac{v^2}{4l} + \frac{s^2}{12} \quad (2) \quad 1 = \frac{v^2}{5} + \frac{s^2}{1+l^2}$$

الحل

$$(1) \quad y = \text{صفر} \therefore p^2 = b^2 \Leftarrow 12 = 4l \Leftarrow l = 3$$

(٢) نضع المعادلة بصورة قياسية بالشكل : $1 = \frac{v^2}{\frac{5}{4}} + \frac{s^2}{1+l^2}$ ، \therefore التخاليف = صفر

$$\therefore p^2 = b^2 \Leftarrow 1 + l^2 = \frac{5}{4} \Leftarrow l^2 = 1 - \frac{5}{4} \Leftarrow l^2 = -\frac{1}{4} \Leftarrow l = \frac{3}{4}$$



مثال (٥) لدينا المعادلة التالية : $ل س^٢ + ٥ ص^٢ = م$ أكمل الجدول التالي :

المجاهيل	المعادلة بعد التعويض عن المجاهيل	نوعها
$ل = ٥ ، م < ٠$	$٥ س^٢ + ٥ ص^٢ = م ، م < ٠$	تمثل معادلة دائرة
$ل - ٥ = م ، م < ٠$	$٥ ص^٢ - ٥ س^٢ = م ، م < ٠$	تمثل قطع زائد
$ل = ٧ ، م < ٠$	$٧ س^٢ + ٥ ص^٢ = م ، م < ٠$	تمثل قطع ناقص

*** بشكل عام في المثال السابق إذا كان : $ل > ٠ ، م > ٠$ فإن المعادلة تمثل قطع زائد .

*** بشكل عام في المثال السابق إذا كان : $ل < ٠ ، م > ٠$ فإن المعادلة تمثل مجموعة خالية

نشاط (٣)

(أ) أكمل الفراغ بما يناسبه :

- ① طول المحور الرئيسي للقطع الزائد $s^2 - 9v^2 = 36 + 0$ يساوي
- ② البعد البؤري للقطع الزائد $9v^2 - 16s^2 = 144$ يساوي
- ③ طول المحور المرافق للقطع الزائد $(\frac{s}{3} - \frac{s}{2})(\frac{s}{3} + \frac{s}{2}) = 1$ هي
- ④ معادلتى المستقيمان المقاربان للقطع $3s^2 - 2v^2 = 2$ هي
- ⑤ معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وبؤرته $(\pm 12, 0)$ وطول محوره القاطع $= 10$ هي
- ⑥ البعد بين البؤرتين في القطع المخروطي $\frac{s^2}{5} - \frac{v^2}{4} = 1$ يساوي
- ⑦ في القطع $s^2 + m^2 = 4$ إذا كان $m = 1$ فإن التخالف المركزي =
- ⑧ في القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وتخالفه $2\sqrt{2}$ معادلتى المقاربان هي
- ⑨ قطع مخروطي في وضع قياسي إذا كانت بؤرتاه في المركز فإن القطع
- ⑩ في القطع الزائد الذي محوره القاطع ينطبق على المحور السيني و مركزه $(0,0)$ تكون معادلتى المستقيمان المقاربان هي
- ⑪ التخالف المركزي للقطع $9s^2 + 2v^2 = 9$ يساوي
- ⑫ إحداثي كلا من نهايتي المحور المرافق للقطع $4s^2 - 16v^2 = 64$ هما
- ⑬ التخالف المركزي للقطع $\frac{s^2}{3\sqrt{2}} - \frac{v^2}{3\sqrt{2}} = 1$ هو
- ⑭ في القطع الزائد الذي أطوال محاوره متساوية تخالفه المركزي يساوي

(ب) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة، وعلامة (×) أمام العبارة الخطأ فيما يلي:

- ① طرفي أو نهايتي المحور الأكبر للقطع الناقص من النموذج الأول هي $(\pm 10, 0)$ ()
- ② القطع الناقص هو المحل الهندسي لجميع النقاط التي نسبة بُعدها عن البؤرة إلى بعدها عن الدليل المرافق لهذه البؤرة يساوي التخالف المركزي y ، $y > 1$ ()
- ③ الدليلان للقطع $\frac{s^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 1$ يقطعان المحور القاطع عند النقطة $(\pm \frac{1}{2}, 0)$ ()

(ج) اختر من المجموعة (٢) ما يناسبها من المجموعة (ب)

المعادلة (٣- م) $س^٢ + ص^٢ = ٧$

ب	٢
١) $٣ < م$	١) تمثل معادلة قطعاً مكافئاً عندما
٢) $٣ > م$	٢) تمثل معادلة قطعاً ناقصاً عندما
٣) $٤ = م$	٣) تمثل معادلة قطعاً زائداً عندما
٤) $٣ = م$	٤) تمثل معادلة دائرة عندما

(د) أوجد صفات القطع الزائد الذي معادلته:

$$١) \quad ٩س^٢ - ص^٢ = ٣٦ \quad ٢) \quad ١ = \frac{ص^٢}{٢} - \frac{س^٢}{٢}$$

(هـ) أوجد قيم ك التي تجعل المعادلة $٢س^٢ + كص^٢ = ٨$ تمثل معادلة قطع زائد؟

(و) أوجد قيم م التي تجعل المعادلة (٩ - م) $١ = ٢س^٢ + ص^٢$ تمثل قطعاً زائداً؟

(ز) أوجد معادلة القطع الزائد إذا كان المقاريبان : $ص = ٢ \pm س$ ، والرأسان $(٠, ٦ \pm)$ ،

وارسمه
(الاجابة : $\frac{ص^٢}{١٤٤} - \frac{س^٢}{٣٦} = ١$)

(ح) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل والبعد بين بؤرتيه ١٢ ، واختلافه المركزي

$٣ = ٤$ ، ومحوره القاطع منطبق على الصادات، وارسمه
(الاجابة : $\frac{ص^٢}{٢٠} - \frac{س^٢}{١٦} = ١$)

(ط) قطع زائد طول محوره الأكبر يساوي ٢ وينطبق على محور السينات و معادلتي الدليلين

$س = \pm \frac{١}{٤}$ ، ومركزه نقطة الأصل أوجد معادلته وصفاته ثم ارسمه
(الاجابة : $\frac{ص^٢}{١٥} - \frac{س^٢}{١٥} = ١$)

(ك) في القطع الزائد $س^٢ - ص^٢ = ١$ أوجد :

١) معادلة الدليلين (الاجابة : $س = \pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$) ٢) إحداثي الرأسين (الاجابة : $(٠, ١ \pm)$)

(ي) أوجد معادلة المنحنى الذي ترسمه النقطة ن التي تتحرك بحيث يكون الفرق بين بُعديها عن

النقطتين $(٠, ٢)$ ، $(٠, ١٠)$ يساوي ١ ؟ (الاجابة : $٢٥٢س^٢ - ٤ص^٢ - ٣٠٢٤س + ٩٠٠٩ = ٠$)

