

## Contrôle continu N° 1

### Exercice 1 : Système libre non amorti

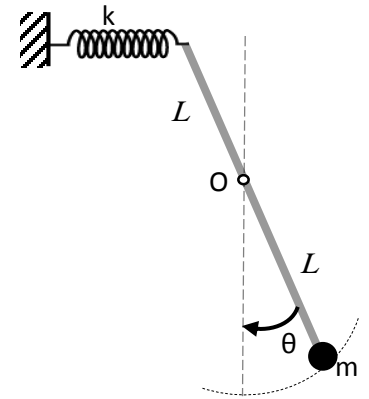
7 pts

On considère un système composé d'une tige sans masse de longueur  $2l$

Qui peut pivoter dans le plan vertical autour du point O. L'extrémité du bas attachée à une masse ponctuelle  $m$  et l'autre extrémité est connectée à une ressort de raideur  $k$  d'un côté et à un amortisseur de l'autre.

A l'équilibre la tige est verticale et le ressort est au repos.

La tige est écartée de son état d'équilibre puis relâchée sans vitesse initiale pour osciller librement. La période des oscillations mesurée est de 1 s.



- 1- Calculer l'énergie cinétique  $E_c$  du système en fonction de  $\theta$ .

$$E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

- 2- Calculer l'énergie potentielle  $E_p$  du système en fonction de  $\theta$ .

$$E_c = \frac{1}{2} k l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m g l \theta^2 - m g l \quad \text{par rapport au niveau du point O}$$

- 3- Etablir l'équation de mouvement du système et donner l'expression de la pulsation propre  $\omega_0$ .

$$m l^2 \ddot{\theta} + (m g l + k l^2) \theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \left( \frac{k}{m} + \frac{g}{l} \right) \theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{l}}$$

- 4- Si la longueur  $L=1$  m et la masse  $m=0.5$  kg calculer la constante de raideur  $k$ .

$$T = 1 \text{ s} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 6.28 \text{ rad/s}$$

$$k = \left( \omega_0^2 - \frac{g}{l} \right) m = 14.81 \text{ kg.m.s}^{-2}$$

Remarque : on prend  $g=9.81$  m/s<sup>2</sup> et  $\pi=3.14$ .

### Exercice 2 : Système libre amorti

7 pts

On reprend le système de l'exercice 1 et on introduit un amortisseur de constante  $\alpha$ .

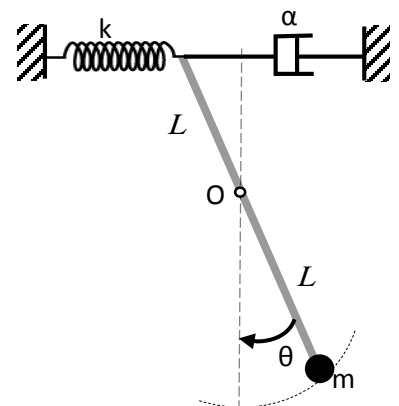
1. Ecrire l'équation de mouvement et donner l'expression du facteur d'amortissement.

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{2m} \dot{\theta} + \left( \frac{k}{m} + \frac{g}{l} \right) \theta = 0 \quad \text{d'ou} \quad \delta = \frac{\alpha}{2m}$$

2. On écarte le système d'un angle  $\theta(0) = 10^\circ$  et on laisse le système évoluer librement. On constate que l'amplitude des oscillations est diminuée de moitié au bout de 5 oscillations. En déduire la constante d'amortissement  $\alpha$ .

$$D = \frac{1}{5} \ln \left( \frac{\theta_0}{0.5\theta_0} \right) = 0.14 = \delta T_a = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

$$\delta = \frac{D\omega_0}{\sqrt{4\pi^2 + D^2}} = 0.14 \text{ s}^{-1}$$



**Contrôle continu N° 1**

$$\delta = \frac{\alpha}{2m} = 0.14 \text{ kg.s}^{-1} \rightarrow \boxed{\alpha = 0.14 \text{ kg.s}^{-1}}$$

- 2- Pour la suite, on choisit pour l'amortisseur la valeur de  $\alpha = 6.28 \text{ kg.m/s}$ . Ecrire l'expression de la réponse du système  $\theta(t)$  dans ce cas.

$$\delta = \omega_0 \rightarrow \theta(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\delta t}$$

- 3- A l'instant  $t=0$ , lorsque le système est au repos  $\theta(0)=0$ , on communique une vitesse initiale angulaire quelconque au système  $\theta(0)=\dot{\theta}_0$  le système évolue vers une position maximale puis rebrousse chemin. A quel instant  $t_{\max}$  le déplacement angulaire  $\theta(t)$  atteint sa valeur maximale.

$$\theta(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$$

$$\dot{\theta} = c_2 e^{-\delta t} - \delta c_2 t e^{-\delta t}$$

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \rightarrow c_2 = \dot{\theta}_0$$

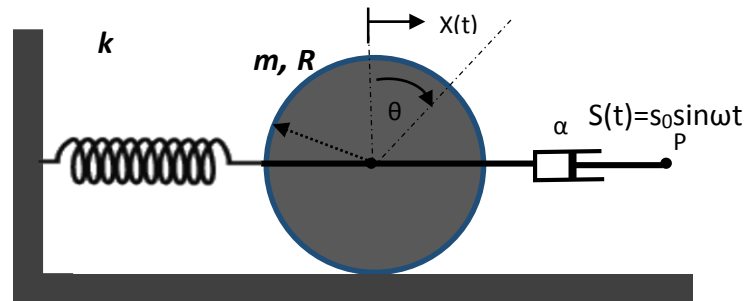
$$\dot{\theta}(t_{\max}) = 0 \rightarrow t_m = \frac{1}{\delta} = 1.47 \text{ s}$$

- 4- L'amortissement est proportionnel à la vitesse

**Exercice 3 : Système forcé (fréquence forcée)**

Un cylindre homogène de masse  $M$  et de rayon  $R$  roule sans glisser sur un plan horizontal. Son mouvement est repéré par le déplacement  $x(t)$  de son centre de masse par rapport à sa position d'équilibre. Un déplacement  $s(t) = S_0 \cos \omega t$  est imposé au point P.

6 pts



- 1- Etablir l'équation différentielle du mouvement du système et préciser les expressions du facteur d'amortissement  $\delta$  et de la pulsation propre  $\omega_0$ .

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2, \text{ Or } x = R \dot{\theta} \text{ d'ou } \boxed{E_c = \frac{3}{4} m \dot{x}^2}$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} k x^2}$$

3

$$\boxed{D = \frac{1}{2} \alpha (\dot{x} - \dot{s})^2 = \frac{1}{2} \alpha (\dot{x} - s_0 \omega \cos(\omega t))^2}$$

$$L'eqt \text{ de mvt: } \frac{3}{2} m \ddot{x} + kx = -\alpha (\dot{x} - s_0 \omega \cos(\omega t))$$

$$\ddot{x} + \frac{2\alpha}{3m} \dot{x} + \frac{2k}{3m} x = \frac{2\alpha}{3m} (s_0 \omega \cos(\omega t))$$

$$\delta = \frac{\alpha}{3m} = 60 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} = 18.97 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$A_0 = \frac{2\alpha s_0 \omega}{3m}$$

- 2- Donner la réponse totale du système correspondant aux valeurs calculées de  $\delta$  et de  $\omega_0$ .

**Contrôle continu N° 1**

$$\delta > \omega_0 \text{ donc } x_H = C_1 e^{r_1} + C_2 e^{r_2}$$

1.5

La solution complète qui est la réponse totale du système

$$x(t) = C_1 e^{r_1} + C_2 e^{r_2} + X \sin(\omega t + \Phi)$$

$r_1$  et  $r_2$  sont les solutions de l'équation caractéristique et sont négatifs

$$r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0$$

3- En régime permanent, donner l'expression de l'amplitude des vibrations en fonction de  $S_0$ ,  $\delta$ ,  $\omega_0$  et  $\omega$ .

La solution devient  $x = x_p = X \sin(\omega t + \Phi)$

$$\text{avec } X = \frac{2\alpha S_0 \omega}{3m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$

$$\Phi = \text{Arctan} \left( -\frac{2\delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

1.5

On donne  $M = 10\text{kg}$ ,  $\alpha = 1800\text{ kg/s}$ ,  $k = 5400\text{N/m}$ ,  $R = 0.05\text{ m}$

Exo1: