

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2012

التمرين الأول

1 أ

لدينا : $\begin{cases} A(-3,0,0) \\ B(0,0,-3) \\ C(0,2,-2) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}(3,0,-3) \\ \overrightarrow{AC}(3,2,-2) \end{cases}$

و منه : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$

إذن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k})$

و نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على (ABC) .

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من المستوى (ABC) .

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) .

فإن المتجهتان \overrightarrow{AM} و $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ متعامدتان .

يعني : $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$

يعني : $\begin{pmatrix} x+3 \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

يعني : $6(x+3) - 3y + 6z = 0$

يعني : $2x - y + 2z + 6 = 0$

و هذه الكتابة الأخيرة هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

1 ب

لدينا : $\begin{cases} (ABC) : 2x - y + 2z + 6 = 0 \\ \Omega(1,1,1) \end{cases}$

إذن : $d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2 \times 1 - 1 + 2 \times 1 + 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3$

نلاحظ إذن أن : $d(\Omega, (ABC)) = 3 = \text{Rayon}(\mathcal{S})$

إذن : المستوى (ABC) مماس للكرة (\mathcal{S}) في نقطة $H(\alpha, \beta, \gamma)$.

2 أ

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من المستقيم (D) . لدينا $\begin{cases} (D) \perp (ABC) \\ \Omega \in (D) \end{cases}$

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

فإن المتجهتان \overrightarrow{AM} و $\overrightarrow{\Omega M}$ مستقيمتان .

يعني : $(\exists \theta \in \mathbb{R}) ; \overrightarrow{\Omega M} = \theta(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$

يعني : $(\exists \theta \in \mathbb{R}) ; \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \theta \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

يعني : $(D) : \begin{cases} x-1 = 6\theta \\ y-1 = -3\theta \\ z-1 = 6\theta \end{cases} ; (\theta \in \mathbb{R})$

يعني : $(D) : \begin{cases} x = 6\theta + 1 \\ y = -3\theta + 1 \\ z = 6\theta + 1 \end{cases} ; (\theta \in \mathbb{R})$

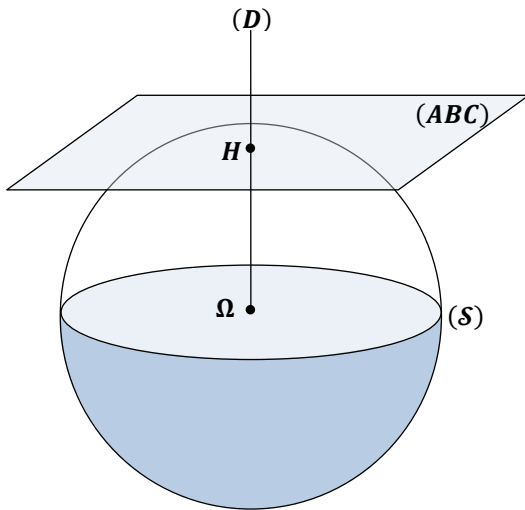
يعني : $(D) : \begin{cases} x = 2(3\theta) + 1 \\ y = -(3\theta) + 1 \\ z = 2(3\theta) + 1 \end{cases} ; (\theta \in \mathbb{R})$

نضع : $3\theta = t$ نحصل على : $(t \in \mathbb{R}) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامترى للمستقيم (D) .

2 ب

في هذا السؤال سوف نستعمل التمثيل البارامترى للمستقيم (D) و المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) . و نستعين بالشكل التالي :



بما أن المستوى (ABC) مماس لـ (\mathcal{S}) في H . فإن : $(\Omega H) \perp (ABC)$ (1)

و نعلم أن : $(D) \perp (ABC)$ (2)

إذن من (1) و (2) نستنتج أن : $(\Omega H) \parallel (D)$

و بما أن : Ω نقطة مشتركة بين المستقيمين (ΩH) و (D) .

فإن المستقيمان (D) و (ΩH) منطبقان . يعني : $H \in (D)$ (3)

حصلنا إذن على ما يلي : $\begin{cases} H \in (D) \\ H \in (ABC) \end{cases}$

و لدينا : $(D) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

و لدينا كذلك : $\begin{cases} H(\alpha, \beta, \gamma) \\ (ABC) : 2x - y + 2z + 6 = 0 \end{cases}$

بما أن $H(\alpha, \beta, \gamma)$ نقطة مشتركة بين المستقيم (D) و المستوى (ABC) .

فإن المثلث (α, β, γ) يحقق كلاً من التمثيل البارامترى للمستقيم (D)

و المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) .

إذن : $(\exists t \in \mathbb{R}) : \begin{cases} \alpha = 2t + 1 \\ \beta = -t + 1 \\ \gamma = 2t + 1 \\ 2\alpha - \beta + 2\gamma + 6 = 0 \end{cases}$

نعوض قيم α و β و γ في المعادلة الأخيرة نحصل على :

$2(2t + 1) - (-t + 1) + 2(2t + 1) + 6 = 0$

يعني : $4t + t + 4t + 9 = 0$ إذن : $t = -1$

2 ج

يكفي أن نبرهن على أن : $aff(C) = -i aff(A) + 5i + 9$
 لدينا حسب المعطيات : $aff(A) = a = (2 - i)$
 إذن : $-i aff(A) + 5i + 9 = -i(2 - i) + 5i + 9$
 $= -2i - 1 + 5i + 9 = 3i + 8 = aff(C)$
 حصلنا إذن على : $-i aff(A) + 5i + 9 = aff(C)$
 إذن حسب الكتابة العقدية للدوران \mathcal{R} نستنتج أن : $\mathcal{R}(A) = C$

التمرين الثالث:

1

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 1$
 من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 3 > 1$. إذن العبارة (P_0) صحيحة .
 ليكن $n \in \mathbb{N}$ نفترض أن : $u_n > 1$.
 نحتاج إلى أن نبرهن على أن : $u_{n+1} > 1$
 و عادة ما ننطلق من $u_{n+1} > 1$ لكي نحدد العبارة التي سننطلق منها
 باستعمال المسار العكسي و هو ما سوف أعرضه الآن :

نحتاج إلى : $u_{n+1} > 1$
 يعني نحتاج إلى : $\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} > 1$
 يعني نحتاج إلى : $4u_n + 3 > 3u_n + 4$
 يعني نحتاج إلى : $u_n > 1$
 و هذه المتفاوتة متوفرة لدينا حسب الافتراض

إذن تمكنا من إيجاد المسار العكسي للبرهان .
 و البرهان الذي يجب كتابته على ورقة التحرير هو التالي :

لدينا حسب الافتراض : $u_n > 1$
 إذن : $4u_n - 3u_n > 4 - 3$ يعني : $4u_n + 3 > 3u_n + 4$
 يعني : $\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} > 1$ يعني : $u_{n+1} > 1$

أي أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

خلاصة : حصلنا على النتائج التالية : $\{ (P_0) \text{ est vraie} ; (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; (\forall n \in \mathbb{N}) \}$

إذن حسب مبدأ التراجع : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 1$

2 أ

ليكن : $(n \in \mathbb{N})$. لدينا : $1 - v_n = 1 - \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$
 $= \frac{u_n + 1}{u_n + 1} - \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{2}{u_n + 1}$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$

و نعلم حسب السؤال (1) أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 1$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n + 1 > 2 > 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{u_n + 1} > 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{2}{u_n + 1} > 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - v_n > 0$

نعوض t بقيمة -1 في المعادلات الثلاث الأولى نحصل على :

$$\begin{cases} \alpha = 2(-1) + 1 = -1 \\ \beta = -(-1) + 1 = 2 \\ \gamma = 2(-1) + 1 = -1 \end{cases}$$

و بالتالي : $H(-1, 2, -1)$ هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S)

التمرين الثاني:

1 أ

لدينا : $\frac{c - a}{b - a} = \frac{(8 + 3i) - (2 - i)}{(6 - 7i) - (2 - i)} = \frac{6 + 4i}{4 - 6i} = \frac{3 + 2i}{2 - 3i}$
 $= \frac{(3 + 2i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{6 + 13i - 6}{2^2 - (3i)^2} = \frac{13i}{4 + 9} = \frac{13i}{13} = i$

و بالتالي : $(*) \quad \frac{c - a}{b - a} = i$

1 ب

لدينا : $\frac{c - a}{b - a} = i$ إذن : $\begin{cases} \left| \frac{c - a}{b - a} \right| = |i| \\ \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) \equiv \arg(i) [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} \left| \frac{c - a}{b - a} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} AC = AB \\ \arg(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} AC = AB \\ \arg(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

و بالتالي ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في نفس النقطة A .

2 أ

لدينا Ω منتصف القطعة $[BC]$. إذن : $aff(\Omega) = \frac{aff(B) + aff(C)}{2}$
 $aff(\Omega) = \frac{(6 - 7i) + (8 + 3i)}{2} = (7 - 2i) = \omega$ يعني :

2 ب

لدينا \mathcal{R} دوران مُعرّف بما يلي : $\mathcal{R}_\Omega\left(\frac{-\pi}{2}\right) : \begin{matrix} (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) \mapsto M'(z') \end{matrix}$

و ننطلق من الكتابة التالية : $\mathcal{R}(M) = M'$

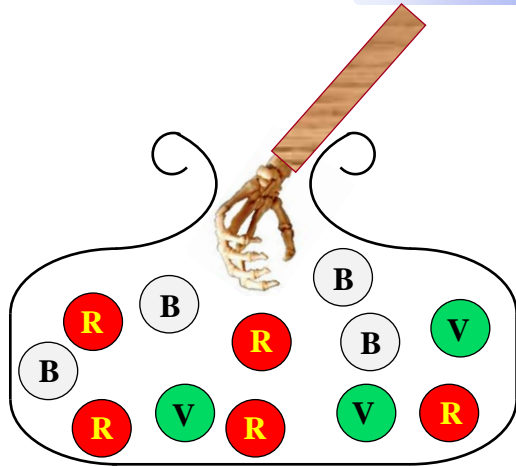
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (z' - \omega) &= e^{\frac{-i\pi}{2}}(z - \omega) \\ \Leftrightarrow z' - (7 - 2i) &= \left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)(z - 7 + 2i) \\ \Leftrightarrow z' - (7 - 2i) &= (-i)(z - 7 + 2i) \\ \Leftrightarrow z' &= -iz + 7i + 2 + 7 - 2i \\ \Leftrightarrow z' &= -iz + 5i + 9 \end{aligned}$$

و هذه الكتابة الأخيرة تُعبّر عن الكتابة العقدية للدوران \mathcal{R} .

و بذلك يصبح الدوران \mathcal{R} مُعرّف بما يلي :

$$\mathcal{R}_\Omega\left(\frac{-\pi}{2}\right) : \begin{matrix} (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) \mapsto M'(-iz + 5i + 9) \end{matrix}$$

التمرين الرابع:



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من كيس يحتوي على 12 كرة فإن التجربة تُحتمل C_{12}^3 نتيجة ممكنة .
يعني : $card(\Omega) = C_{12}^3 = 220$. بحيث Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

$$p \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right) = \frac{card \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right)}{card(\Omega)} = \frac{C_5^3}{220} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

2

$$\begin{aligned} p \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات من} \\ \text{نفس اللون} \end{array} \right) &= p \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{خضراء} \end{array} \right) \\ &= \frac{card \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right)}{card(\Omega)} + \frac{card \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right)}{card(\Omega)} + \frac{card \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{خضراء} \end{array} \right)}{card(\Omega)} \\ &= \frac{C_5^3}{220} + \frac{C_4^3}{220} + \frac{C_3^3}{220} = \frac{10}{220} + \frac{4}{220} + \frac{1}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44} \end{aligned}$$

3

للإجابة على هذا السؤال أقترح طريقتين :
الطريقة الأولى:

$$\begin{aligned} p \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{كرة حمراء} \\ \text{واحدة على الأقل} \end{array} \right) &= p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين حمراوين} \\ \text{أو كرتان تخالفان} \\ \text{مخالفة للأحمر} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين حمراوين} \\ \text{أو كرتان تخالفان} \\ \text{مخالفة للأحمر} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين حمراوين} \\ \text{أو كرتان تخالفان} \\ \text{مخالفة للأحمر} \end{array} \right) \\ &= \frac{C_5^1 \times C_7^2}{card(\Omega)} + \frac{C_5^2 \times C_7^1}{card(\Omega)} + \frac{C_5^3 \times C_7^0}{card(\Omega)} \\ &= \frac{5 \times 21}{220} + \frac{10 \times 7}{220} + \frac{10}{220} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44} \end{aligned}$$

2 ب

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \quad \text{ليكن } n \in \mathbb{N} \text{ لدينا حسب السؤال أ) :}$$

$$\text{إذن : } v_n(u_n + 1) = u_n - 1$$

$$\text{يعني : } v_n u_n + v_n = u_n - 1$$

$$\text{أي : } v_n u_n - u_n = -1 - v_n$$

$$\text{يعني : } u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$$

$$\text{أي : } u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} \quad \text{أي : } u_n = \frac{-1 - v_n}{v_n - 1}$$

$$\text{و بالتالي : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$

3 أ

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1} \quad \text{لدينا حسب السؤال 2 أ) :}$$

$$\text{يعني : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = 1 - \frac{2}{u_n + 1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1} + 1} \quad \text{أي :}$$

$$= 1 - \frac{2}{\left(\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} + 1 \right)} = 1 - \frac{2}{\left(\frac{7u_n + 7}{3u_n + 4} \right)}$$

$$= 1 - \frac{2(3u_n + 4)}{7u_n + 7} = \frac{7u_n + 7 - 6u_n - 8}{7u_n + 7}$$

$$= \frac{(u_n - 1)}{7(u_n + 1)} = \frac{1}{7} v_n$$

$$\text{و بالتالي : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = \frac{1}{7} v_n$$

$$\text{يعني : } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{7} .$$

$$\text{إذن الحد العام } v_n \text{ يكتب على الشكل التالي : } v_n = v_0 \left(\frac{1}{7} \right)^{n-0}$$

$$\text{لدينا : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} \right)^n \quad \text{إذن } v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2}$$

3 ب

$$\text{نلاحظ أن } \left(\frac{1}{7} \right)^n \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{7} \text{ و هو عدد حقيقي موجب و أصغر من 1}$$

$$\text{إذن : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{7} \right)^n = 0 \quad \text{و منه : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} \right)^n = 0$$

$$\text{يعني : } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = 0$$

$$\text{و لدينا حسب السؤال 2 أ) : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$$

$$\text{يعني : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n + 1 = \frac{2}{1 - v_n}$$

$$\text{يعني : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{2}{1 - v_n} - 1$$

$$\text{و بالتالي : } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1 - v_n} - 1 \right) = \frac{2}{1 - 0} - 1 = 1$$

$$\text{يعني : } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 1$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

من أجل $x = 0$ نحصل على :

$$f'(0) = 1 + \frac{2e^0}{(e^0 + 1)^2} = 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

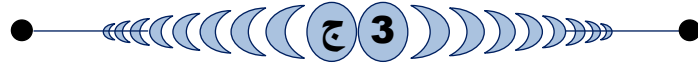
نعلم أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x > 0$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 2e^x > 0$ و $(e^2 + 1)^2 > 0$

و منه : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$

يعني : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) > 0$

إذن f دالة تزايدية قطعاً على \mathbb{R} .



نعلم أن معادلة المماس (T) للمنحنى (\mathcal{C}) في النقطة x_0 تُكتب على الشكل :

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

إذن من أجل $x_0 = 0$ نجد : $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

يعني : $(T) : y = f'(0) \cdot x + f(0)$

و لدينا : $f'(0) = \frac{3}{2}$ و $f(0) = 0$

إذن المعادلة الديكارتية للمماس (T) تُصبح : $(T) : y = \frac{3}{2}x$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} \right)$$

$$= \left(+\infty + 1 - \frac{2}{+\infty} \right) = (+\infty + 1 - 0) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} - (x + 1) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{e^x + 1} \right) = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$

و منه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x + 1)} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty} = 1 + 0 - 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{إذن :}$$

الطريقة الثانية : استعمال تقوية الحدث المضاد .

إذا كان \bar{A} هو الحدث المضاد للحدث A فإن : $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

نضع : $A = \{ \text{الحصول على كرة واحدة على الأقل} \}$

إذن : $\bar{A} = \{ \text{الحصول على ثلاث كرات من ألوان تخالف الأحمر} \}$

$$p \left(\begin{array}{c} \text{ثلاث كرات} \\ \text{تخالف اللون} \\ \text{الأحمر} \end{array} \right) = p \left(\begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{خضراء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{بيضاويتين} \\ \text{أو الأخرى} \\ \text{خضراء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{خضراويتين} \\ \text{أو الأخرى} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right)$$

$$= p \left(\begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{خضراء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{بيضاويتين} \\ \text{و الأخرى} \\ \text{خضراء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{خضراويتين} \\ \text{و الأخرى} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right)$$

$$= \frac{C_4^3}{220} + \frac{C_3^3}{220} + \frac{C_4^2 \times C_3^1}{220} + \frac{C_3^2 \times C_4^1}{220}$$

$$= \frac{4}{220} + \frac{1}{220} + \frac{18}{220} + \frac{12}{220} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$$

إذن : $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

$$p(A) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{44 - 7}{44} = \frac{37}{44}$$

و بالتالي : احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل هو : $\frac{37}{44}$

التمرين الخامس :



ليكن x عنصراً من \mathbb{R} . لدينا : $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

$$f(-x) = -x + \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = -x + \frac{e^{-x}(1 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)}$$

$$= -x + \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = - \left(x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) = -f(x)$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(-x) = -f(x)$

و هذا يعني أن الدالة f دالة فردية و تمثيلها المباني متماثل بالنسبة للنقطة O أصل المعلم .



$$x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} = x + \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{2}{e^x + 1}$$

$$= x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = f(x)$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$



لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 1 - \left(\frac{2}{e^x + 1} \right)'$$

$$= 1 - \left(\frac{-2e^x}{(e^x + 1)^2} \right) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

• **6 أ** •

ليكن x عددا حقيقيا . لدينا : $H'(x) = (x - \ln(e^x + 1))'$

$$= 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} = h(x)$$

إن H دالة أصلية للدالة h على \mathbb{R} .

• **6 ب** •

$$\int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) dx = \int_0^{\ln 2} h(x) dx = [H(x)]_0^{\ln 2}$$

$$= [x - \ln(e^x + 1)]_0^{\ln 2} = (\ln 2 - \ln 3) - (0 - \ln 2)$$

$$= 2 \ln 2 - \ln 3 = \ln 4 - \ln 3 = \ln \left(\frac{4}{3} \right)$$

• **6 ج** •

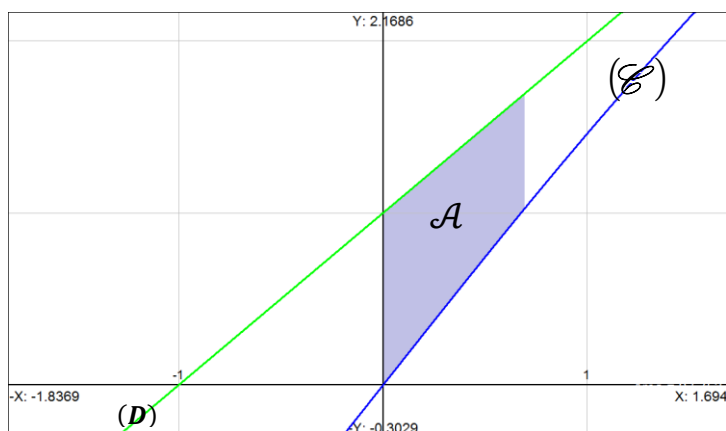
لتكن \mathcal{A} مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (\mathcal{E}) و المستقيم (D) و المستقيمين $x = \ln 2$ و $x = 0$. لدينا :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} |f(x) - (x + 1)| dx = \int_0^{\ln 2} \left| \frac{-2}{e^x + 1} \right| dx$$

$$= 2 \int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) dx = 2 \left(\ln \left(\frac{4}{3} \right) \right) \approx 0,57 \text{ unité}^2$$



صورة أخرى للمساحة \mathcal{A}



لقد حصلنا لحد الآن على النهايات التالية :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x = 1 \end{cases}$$

إن من هذه النهايات الثلاث نستنتج أن المستقيم $(D) : y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (\mathcal{E}) بجوار $+\infty$.

• **4 ج** •

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (\mathcal{E}) و المستقيم (D) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x + 1)$.

لدينا : $f(x) - (x + 1) = (x + 1) - \frac{2}{e^x + 1} - (x + 1)$

$$= \frac{-2}{e^x + 1}$$

و نعلم أن : $e^x > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

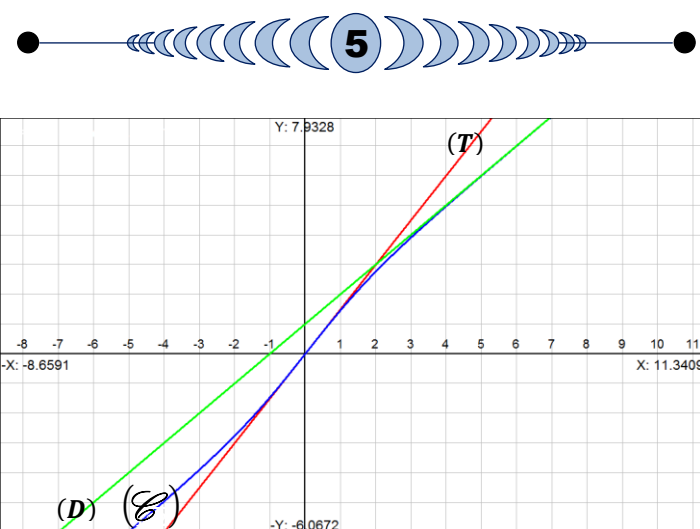
إن : $e^x + 1 > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

يعني : $\frac{-2}{e^x + 1} < 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

يعني : $f(x) - (x + 1) < 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

يعني : $f(x) < (x + 1)$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

و بالتالي : المستقيم (D) يوجد فوق المنحنى (\mathcal{E})



المنحنى (\mathcal{E}) لوحده

