Texto para el Estudiante

Matemática 8º

Houghton Mifflin Harcourt

GALILEO EDITORIAL

Este método de enseñanza de la matemática ha sido diseñado y realizado por autores profesores de varias universidades de los Estados Unidos de América y adaptado al currículum nacional chileno por Editorial Galileo.

Autores: Jennie M. Bennett, Edward B. Burger, David J. Chard, Earlene J. Hall, Paul A. Kennedy, Freddie L. Renfro, Tom W. Roby, Janet K. Scheer & Bert k. Waits.

El presente título forma parte del PROYECTO GALILEO para la enseñanza de la matemática.

Editoras

Silvia Alfaro Salas
Yuvica Espinoza Lagunas
Sara Cano Fernández

Ayudante editorial

Ricardo Santana Friedli

Redactores / Colaboradores

Silvia Alfaro Salas
Profesora de Matemática y Computación. Licenciada en Matemática y Computación. Universidad de Santiago de Chile.

Yuvica Espinoza Lagunas
Profesora de Educación General Básica.
Pontificia Universidad Católica de Chile.

Jorge Chala Reyes
Profesor de Educación General Básica.
Universidad de Las Américas.

Ingrid Guajardo
Profesora de Educación General Básica.
Pontificia Universidad Católica Silva Henríquez.

María Alejandra Hurtado
Profesora de Educación General Básica.
Pontificia Universidad Católica de Chile.

Equipo Técnico

Coordinación: Job López

Diseñadores:
Melissa Chávez Romero
Marcela Ojeda Ampuero
Rodrigo Pávez San Martín
Nikolás Santis Escalante
David Silva Carreño
Camila Rojas Rodríguez
Cristhián Pérez Garrido

Houghton Mifflin Harcourt

GALILEO EDITORIAL

Copyright © 2009 by Harcourt, Inc.
© 2014 de esta edición Galileo Libros Ltda.

Todos los derechos reservados. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida o transmitida en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea electrónico o mecánico, incluyendo fotocopia, grabación o cualquier sistema de almacenamiento y recuperación de información sin el permiso por escrito del editor.

Las solicitudes de permiso para hacer copias de cualquier parte de la obra deberán dirigirse al centro de Permisos y derechos de autor, Harcourt, Inc., 6277 Sea Harbor Drive, Orlando, Florida 32887-6777.

HARCOURT y el logotipo son marcas comerciales de Harcourt Harcourt, Inc., registradas en los Estados Unidos de América y / o en otras jurisdicciones.

Versión original
Mathematics Content Standards for California Public Schools reproduced by permission, California Department of Education, CDE Press, 1430 N Street, Suite 3207, Sacramento, CA 95814

ISBN: 978-956-8155-24-7
EDICIÓN ESPECIAL PARA EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN
Prohibida su comercialización.

Texto para el Estudiante

Matemática

8º Básico

Houghton Mifflin Harcourt
GALILEO EDITORIAL

CAPÍTULO

1

Operaciones con números enteros

Indice

¿ESTÁS LISTO? 3
Vistazo previo 4
Leer y escribir matemáticas 5
1-1 Representar la multiplicación 6
1-2 Multiplicar enteros 10
Prueba de ¿Listo para seguir? 14
Enfoque en resolución de problemas: Comprende el problema 15
1-3 Dividir enteros 16
Conexión con las Ciencias 21
1-4 Más de multiplicar y dividir enteros 22
1-5 Operaciones con enteros 24
Prueba de ¿Listo para seguir? 28
Conexiones con el mundo real: Derrumbe de la mina San José 29
¡Vamos a jugar! Magia matemática 30
¡Está en la bolsa! Armemos una libreta 31
Guía de estudio: Repaso 32
Prueba del capítulo 34
Evaluación acumulativa 35

Enlace WEB

Para buscar en internet:

www.thatquiz.org/es/previewtest?0/W/G/L16871293584070

www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-article-20391.html

www.sectormatematica.cl/basica/santillana/multiplicacion_enteros.pdf

Enfoque del capítulo

- Representar la multiplicación con fichas y en la recta numérica
- Dividir números enteros
- Realizar operatoria con números enteros

Potencias

CAPÍTULO 2

¿Estás listo? 37
Vistazo previo 38
Leer y escribir matemáticas 39
2-1 **Potencias** 40
2-2 **Notación científica** 44
Prueba de ¿Listo para seguir? 48
Enfoque en resolución de problemas: Resuelve 49
2-3 **Multiplicación de potencias** 50
2-4 **División de potencias** 54
2-5 **Potencia de una potencia** 58
Prueba de ¿Listo para seguir? 62
Conexiones con el mundo real: comidas del mundo 63
¡Vamos a jugar! Los palíndromos 64
¡Está en la bolsa! La rueda matemática 65
Guía de estudio: Repaso 66
Prueba del capítulo 68
Evaluación acumulativa 69

Enlace WEB

Para buscar en internet:

www.sectormatematica.cl/basica/santillana/potencias.pdf

Enfoque del capítulo

- Desarrollar potencias de bases enteras y fraccionarias
- Aplicar propiedades de las potencias
- Utilizar estrategias de cálculo mental

CAPÍTULO

3

Transformaciones isométricas y teselaciones

¿ESTÁS LISTO? 71
Vistazo previo 72
Leer y escribir matemáticas 73
3-1 Transformaciones isométricas 74
3-2 Traslaciones, simetrías y rotaciones 78
LABORATORIO DE TECNOLOGÍA: TRASLACIONES, REFLEXIONES Y ROTACIONES USANDO SOFTWARE GEOMÉTRICO 83
Prueba de ¿Listo para seguir? 84
Enfoque en resolución de problemas: Identifica la transformación que debes realizar 85
3-3 Simetría y reflexión 86
3-4 Teselados 90
LABORATORIO DE PRÁCTICA: CREAR TESELADOS 92
Prueba de ¿Listo para seguir? 94
Conexiones con el mundo real: La Alhambra 95
¡Vamos a jugar! Colorear teselados 96
¡Está en la bolsa! Proyecto CD de geometría 97
Guía de estudio: Repaso 98
Prueba del capítulo 101
Evaluación acumulativa 102

Enlace WEB

Para buscar en internet:

http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Isometria_Transformaciones.html

Enfoque del capítulo

- Reconocer transformaciones
- Dibujar transformaciones
- Combinar y hallar transformaciones
- Aplicar transformaciones isométricas

CAPÍTULO

4

Fundamentos de geometría

¿ESTÁS LISTO? 105

Vistazo previo 106
Leer y escribir matemáticas 107

4-1 Circunferencia, su perímetro y sus elementos 108
4-2 Círculo, circunferencia, área y perímetro 112
Prueba de ¿Listo para seguir? 116
Enfoque en resolución de problemas: Repasa 117
4-3 Área total de pirámides y conos 118
4-4 Área total de prismas y cilindros 122
4-5 Volumen de pirámides y conos 126
LABORATORIO DE PRÁCTICA: CALCULAR EL VOLUMEN DE PIRÁMIDES Y CONOS 130
4-6 Volumen de prismas y cilindros 132
LABORATORIO DE PRÁCTICA: CALCULAR EL VOLUMEN DE PRISMAS Y CILINDROS 138
Prueba de ¿Listo para seguir? 140
Conexiones con el mundo real: Tortas decoradas 141
¡Vamos a jugar! Mentes en flor 142
¡Está en la bolsa! CD 3-D 143
Guía de estudio: Repaso 144
Prueba del capítulo 147
Evaluación acumulativa 148

Enlace WEB

Para buscar en internet:

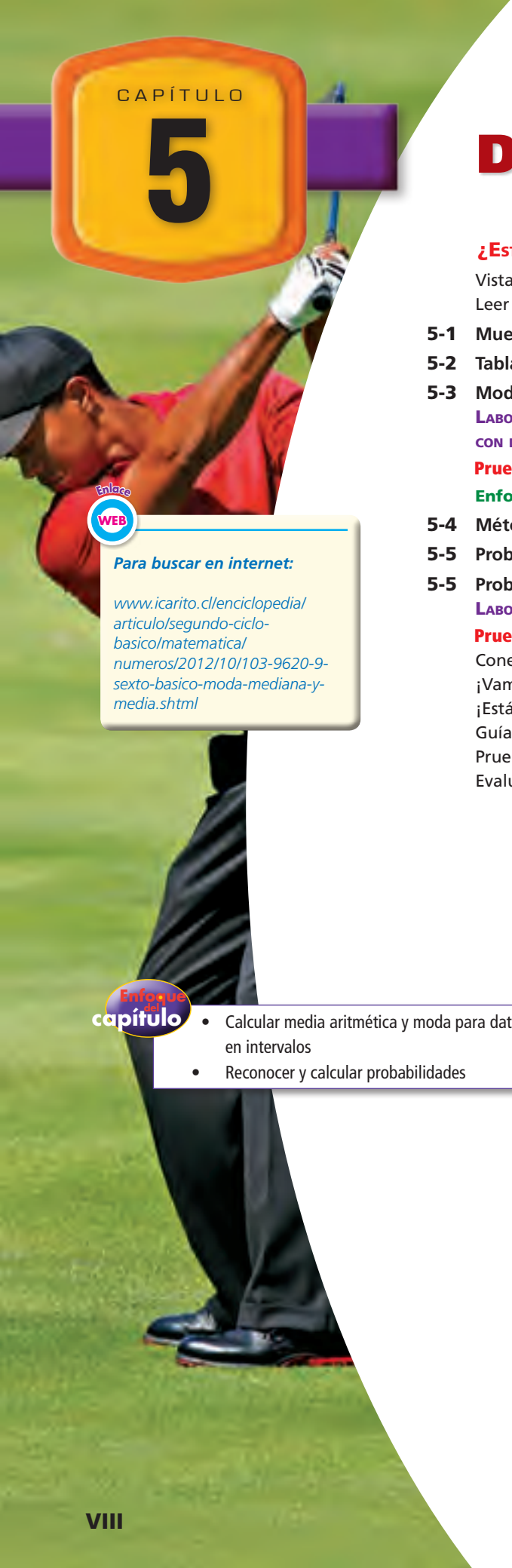
www.juegosdelogica.com/numero_pi.htm

http://www.aplicaciones.info/decimales/geoes05.htm

http://www.ditutor.com/geometria_espacio/volumen_cono.html

Enfoque del capítulo

- Usar fórmulas para calcular áreas, perímetros y volúmenes
- Resolver problemas relacionados con medición y fórmulas



CAPÍTULO

5

Datos y azar

¿Estás listo? 151
Vistazo previo 152
Leer y escribir matemáticas 153
5-1 Muestras y encuestas 154
5-2 Tabla de frecuencias y media aritmética 158
5-3 Moda para datos agrupados 164
Laboratorio de Tecnología: Construir una tabla de frecuencias con datos agrupados 168
Prueba de ¿Listo para seguir? 170
Enfoque en resolución de problemas: Resuelve 171
5-4 Métodos de conteo y espacios muestrales 172
5-5 Probabilidad experimental 176
5-5 Probabilidad teórica 180
Laboratorio de práctica: Simulaciones 184
Prueba de ¿Listo para seguir? 186
Conexiones con el mundo real: La bicicleta 187
¡Vamos a jugar! La aguja de Buffon 188
¡Está en la bolsa! El negocio de la probabilidad 189
Guía de estudio: Repaso 190
Prueba del capítulo 193
Evaluación acumulativa 194

Enlace WEB

Para buscar en internet:

www.icarito.cl/enciclopedia/articulo/segundo-ciclo-basico/matematica/numeros/2012/10/103-9620-9-sexto-basico-moda-mediana-y-media.shtml

Enfoque del capítulo

- Calcular media aritmética y moda para datos agrupados en intervalos
- Reconocer y calcular probabilidades

CAPÍTULO 6

Gráficos de funciones, ecuaciones y análisis de proporcionalidad

¿ESTÁS LISTO? 197
Vistazo previo 198
Leer y escribir matemáticas 199

6-1 Cómo resolver ecuaciones con variables en ambos lados 200
LABORATORIO DE PRÁCTICA: MODELO DE ECUACIONES CON VARIABLES EN AMBOS LADOS 205

6-2 Funciones, tablas y gráficos 206
Prueba de ¿Listo para seguir? 210
Enfoque en resolución de problemas: Comprende el problema 211
LABORATORIO DE PRÁCTICA: EXPLORAR LAS PROPORCIONES 212

6-3 Proporcionalidad directa e inversa 214

6-4 Análisis de proporciones utilizando software gráfico 218
Prueba de ¿Listo para seguir? 222
Conexiones con el mundo real: Torre Entel 223
¡Vamos a jugar! ¡Cuidado con el copión! 224
¡Está en la bolsa! Una carpeta que vale la pena 225
Guía de estudio: Repaso 226
Prueba del capítulo 229
Evaluación acumulativa 230

Glosario 232
Índice temático 256
Solucionario 258
Bibliografía 264

Enlace WEB

Para buscar en internet:

www.google.cl/search?q=.+Educación.uncomo.com/articulo/como-graficar-las-funciones-matematicas-basicas-1320.html

Enfoque del capítulo

- Usar ecuaciones para describir las relaciones que se muestran en una tabla
- Hallar variables usando propiedades y el sentido numérico
- Analizar proporciones usando software gráficos

Enfoque en resolución de problemas

Plan de resolución de problemas

Para resolver bien un problema, primero necesitas un buen plan de resolución de problemas. A continuación, se explica en detalle el plan que se usa en este libro.

COMPRENDE el problema

¿Qué se te pide que encuentres?	Vuelve a escribir la pregunta con tus propias palabras.
¿Qué información se da?	Identifica los datos del problema.
¿Qué información necesitas?	Determina qué datos son necesarios para responder la pregunta.
¿Se da toda la información?	Determina si se dan todos los datos.
¿Se da información que no usarás?	Determina qué datos, si los hay, no son necesarios para resolver el problema.

Haz un PLAN

¿Alguna vez has resuelto un problema semejante?	Piensa en otros problemas como este que hayas resuelto bien.
¿Qué estrategia o estrategias puedes usar?	Determina una estrategia que puedas usar y cómo la usarás.

RESUELVE

Sigue tu plan.	Muestra los pasos de tu solución. Escribe tu respuesta como un enunciado completo.

REPASA

¿Has respondido la pregunta?	Asegúrate de haber respondido lo que te pide la pregunta.
¿Es razonable tu respuesta?	Tu respuesta debe ser razonable en el contexto del problema.
¿Hay otra estrategia que puedas usar?	Resolver el problema con otra estrategia es una buena manera de comprobar tu trabajo.
¿Aprendiste algo al resolver este problema que pueda ayudarte a resolver problemas semejantes en el futuro?	Trata de recordar los problemas que has resuelto y las estrategias que usaste para resolverlos.

Cómo usar el plan de resolución de problemas

Durante las vacaciones de verano, Nicolás visitará primero a su primo y luego a su abuela. Estará fuera 5 semanas y 2 días, y estará 9 días más con su primo que con su abuela. ¿Cuánto tiempo se quedará con cada uno?

COMPRENDE el problema

Identifica la información importante.

- Las visitas de Nicolás durarán en total 5 semanas y 2 días.
- Estará 9 días más con su primo que con su abuela.

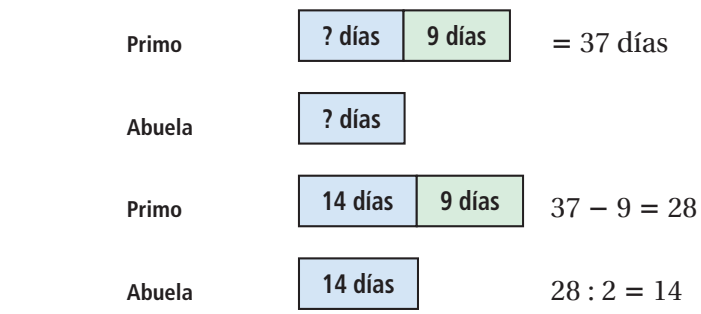
La respuesta será el tiempo que se quedará con cada uno.

Haz un PLAN

Puedes dibujar un diagrama para mostrar cuánto tiempo se quedará Nicolás de visita. Usa recuadros para el tiempo de cada visita. La longitud de cada recuadro representará el tiempo de cada visita.

RESUELVE

Razona: Hay 7 días en una semana, por lo tanto, 5 semanas y 2 días son en total 37 días. Tu diagrama podría ser como el siguiente:



Por lo tanto, Nicolás se quedará con su primo 23 días y con su abuela 14 días.

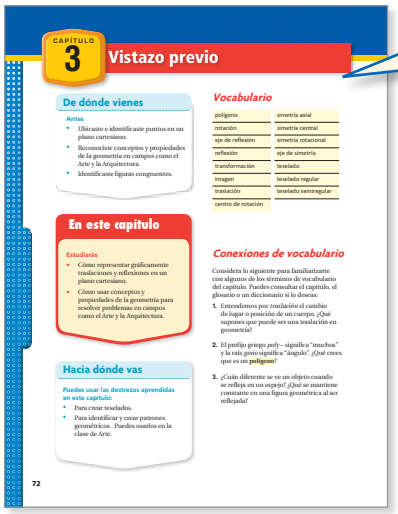
REPASA

Veintitrés días es 9 días más que 14. El total de las dos visitas es 23 + 14, o 37 días, que es lo mismo que 5 semanas y 2 días. Esta solución concuerda con la descripción del viaje de Nicolás que se da en el problema.

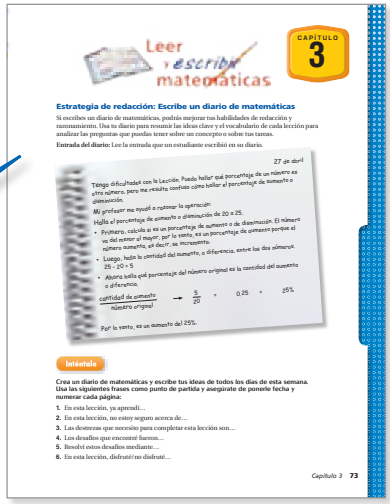
Cómo usar tu libro

Este libro contiene muchos apartados diseñados para ayudarte a aprender y estudiar matemáticas.

Aprende

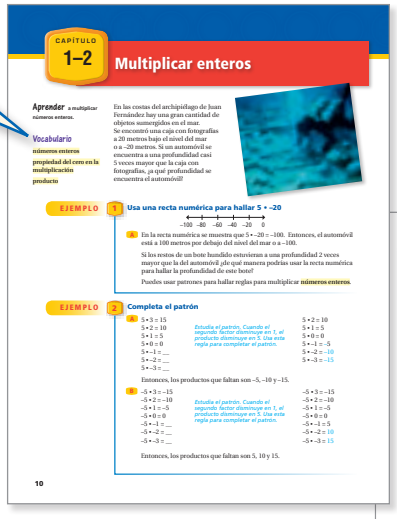


Antes de comenzar un capítulo, lee el **Vistazo previo** para comprender los conceptos que se enseñan en el capítulo.

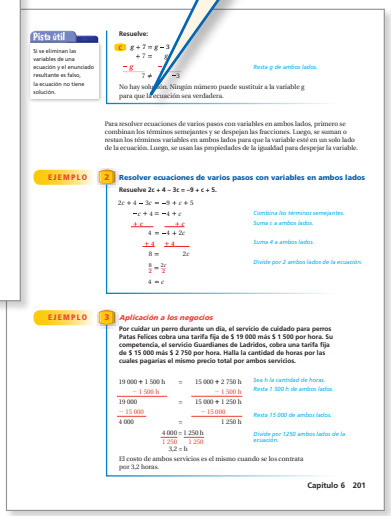


Repasa **Leer y escribir matemáticas** para aprender sobre las estrategias de lectura, escritura y estudio.

Da un vistazo previo a los términos nuevos de **Vocabulario** que aparecen al principio de todas las lecciones.

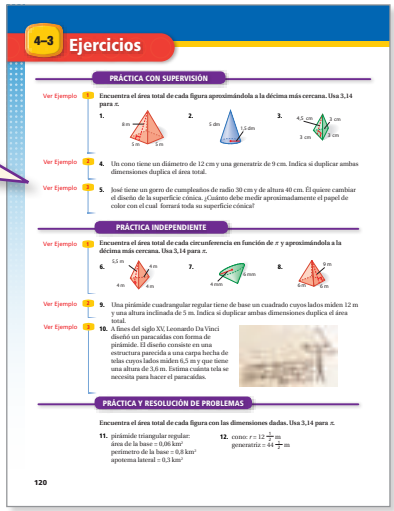


Estudia los **Ejemplos** para aprender las nuevas ideas y destrezas matemáticas. Los ejemplos incluyen soluciones paso a paso.



Practica

Repasa los ejemplos de la lección para resolver los ejercicios de **Práctica con supervisión** y **Práctica independiente**.



4–3 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1 Encuentra el área total de cada figura aproximándola a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

1. 2. 3.

Ver Ejemplo 2 4. Un cono tiene un diámetro de 12 cm y una generatriz de 9 cm. Indica si duplicar ambas dimensiones duplica el área total.

Ver Ejemplo 3 5. José tiene un gorro de cumpleaños de radio 30 cm y de altura 40 cm. Él quiere cambiar el diseño de la superficie cónica. ¿Cuánto debe medir aproximadamente el papel de color con el cual forrará toda su superficie cónica?

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1 Encuentra el área total de cada circunferencia en función de π y aproximándola a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

6. 7. 8.

Ver Ejemplo 2 9. Una pirámide cuadrangular regular tiene de base un cuadrado cuyos lados miden 12 m y una altura inclinada de 5 m. Indica si duplicar ambas dimensiones duplica el área total.

Ver Ejemplo 3 10. A fines del siglo XV, Leonardo Da Vinci diseñó un paracaídas con forma de pirámide. El diseño consiste en una estructura parecida a una carpa hecha de telas cuyos lados miden 6,5 m y que tiene una altura de 3,6 m. Estima cuánta tela se necesita para hacer el paracaídas.

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

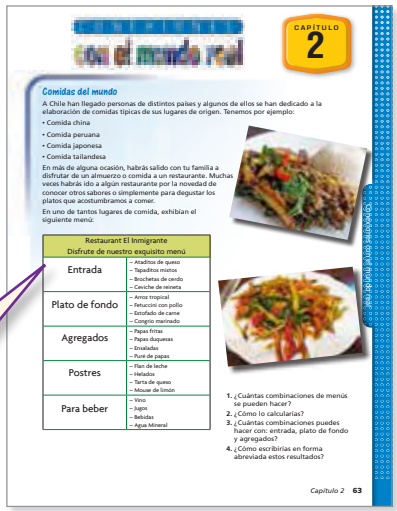
Encuentra el área total de cada figura con las dimensiones dadas. Usa 3,14 para π.

11. pirámide triangular regular: área de la base = 0,86 km²; perímetro de la base = 0,8 km²; apotema lateral = 0,3 km²

12. cono: $r = 12\frac{1}{2}$ m; generatriz = $44\frac{1}{4}$ m

120

Completa las **Conexiones con el mundo real** para practicar las destrezas del capítulo en un contexto del mundo real.



CAPÍTULO 2

Conexiones con el mundo real

Comidas del mundo

A Chile han llegado personas de distintos países y algunos de ellos se han dedicado a la elaboración de comidas típicas de sus lugares de origen. Tenemos por ejemplo:

- Comida china
- Comida peruana
- Comida japonesa
- Comida tailandesa

En más de alguna ocasión, habrás salido con tu familia a disfrutar de un almuerzo o comida a un restaurante. Muchas veces habrás ido a algún restaurante por la novedad de conocer otros sabores o simplemente para degustar los platos que acostumbramos a comer.

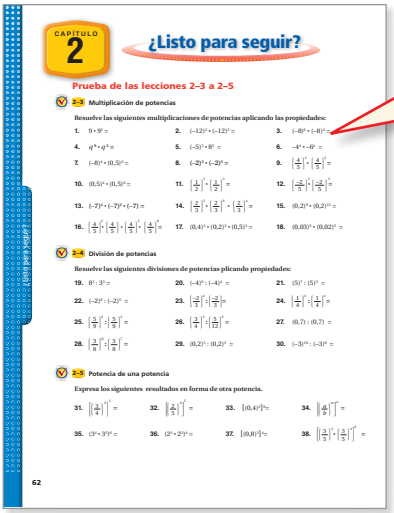
En uno de tantos lugares de comida, exhibían el siguiente menú:

Restaurant El Inmigrante Disfrute de nuestro exquisito menú	
Entrada	– Aladitos de queso – Tapaditos mixtos – Brochetas de cerdo – Ceviche de reineta
Plato de fondo	– Arroz tropical – Retuerzo con pollo – Estofado de carne – Congrio marinado
Agregados	– Papas fritas – Papas duquesas – Ensaladas – Puré de papas
Postres	– Flan de leche – Helados – Tarta de queso – Mouse de limón
Para beber	– Vino – Jugos – Bebidas – Agua Mineral

1. ¿Cuántas combinaciones de menús se pueden hacer?
2. ¿Cómo lo calcularías?
3. ¿Cuántas combinaciones puedes hacer con: entrada, plato de fondo y agregados?
4. ¿Cómo escribirías en forma abreviada estos resultados?

Capítulo 2 63

Repasa



CAPÍTULO 2 ¿Listo para seguir?

Prueba de las lecciones 2–3 a 2–5

2–3 Multiplicación de potencias

Resuelve las siguientes multiplicaciones de potencias aplicando las propiedades:

1. $9 \cdot 9^2 =$ 2. $(-12)^3 \cdot (-12)^2 =$ 3. $(-8)^6 \cdot (-8)^2 =$
4. $q^9 \cdot q^{13} =$ 5. $(-5)^3 \cdot 8^3 =$ 6. $-4^4 \cdot -6^6 =$
7. $(-8)^2 \cdot (0,5)^2 =$ 8. $(-2)^3 \cdot (-2)^3 =$ 9. $\left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$
10. $(0,5)^3 \cdot (0,5)^2 =$ 11. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$ 12. $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 =$
13. $(-7)^4 \cdot (-7)^4 \cdot (-7) =$ 14. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$ 15. $(0,2)^{14} \cdot (0,2)^{10} =$
16. $\left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 =$ 17. $(0,4)^3 \cdot (0,2)^3 \cdot (0,5)^3 =$ 18. $(0,03)^3 \cdot (0,02)^3 =$

2–4 División de potencias

Resuelve las siguientes divisiones de potencias plicando propiedades:

19. $8^3 : 3^3 =$ 20. $(-4)^6 : (-4)^4 =$ 21. $(5)^7 : (5)^4 =$
22. $(-2)^6 : (-2)^3 =$ 23. $\left(\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$ 24. $\left(\frac{1}{4}\right)^7 : \left(\frac{1}{4}\right)^3 =$
25. $\left(\frac{3}{5}\right)^7 : \left(\frac{3}{5}\right)^4 =$ 26. $\left(\frac{3}{4}\right)^7 : \left(\frac{3}{12}\right)^7 =$ 27. $(0,7) : (0,7) =$
28. $\left(\frac{3}{8}\right)^5 : \left(\frac{3}{8}\right)^5 =$ 29. $(0,2)^2 : (0,2)^2 =$ 30. $(-3)^{16} : (-3)^8 =$

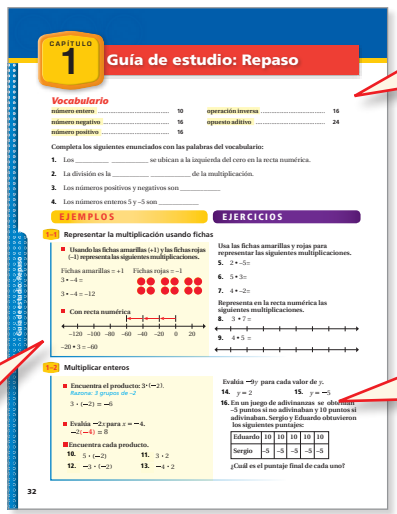
2–5 Potencia de una potencia

Expresa los siguientes resultados en forma de otra potencia.

31. $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]^3 =$ 32. $\left[\left(\frac{4}{5}\right)^3\right]^3 =$ 33. $[(0,4)^2]^{2n} =$ 34. $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^n =$
35. $(3^4 \cdot 3^5)^2 =$ 36. $(2^6 \cdot 2^3)^2 =$ 37. $[(0,8)^3]^{2n} =$ 38. $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n\right]^n =$

62

Cuando termines cada sección, pon a prueba tus conocimientos con los **Problemas de práctica** antes de seguir adelante.



CAPÍTULO 1 Guía de estudio: Repaso

Vocabulario

número entero 10
número negativo 16
número positivo 16
operación inversa 16
opuesto aditivo 24

Completa los siguientes enunciados con las palabras del vocabulario:

1. Los _____ se ubican a la izquierda del cero en la recta numérica.
2. La división es la _____ de la multiplicación.
3. Los números positivos y negativos son _____.
4. Los números enteros 5 y –5 son _____.

EJEMPLOS EJERCICIOS

1–1 Representar la multiplicación usando fichas

1–2 Multiplicar enteros

32

Estudia y repasa el **Vocabulario** del capítulo entero.

Repasa los **Ejemplos** importantes de cada lección del capítulo.

Ponte a prueba con los **Problemas de práctica**.

CAPÍTULO

1

Operaciones con números enteros

1–1 Representar la multiplicación

1–2 Multiplicar enteros

1–3 Dividir enteros

1–4 Más de multiplicar y dividir enteros

1–5 Operaciones con enteros

En el mundo real

Puedes usar la multiplicación para representar cantidades iguales que se repiten. Estas cantidades pueden ser positivas o negativas. De la misma forma puedes utilizar la división.

Enfoque del capítulo

- Representar la multiplicación con fichas y en la recta numérica
- Dividir números enteros
- Realizar operatoria con números enteros

¿Estás listo?

Vocabulario

Elige el término de la lista que complete mejor cada enunciado:

1. Repartir en partes iguales es _____ .

2. La _____ es una _____ reiterada.

3. El _____ es el resultado de la multiplicación.

4. El _____ es el resultado de la división.

producto
suma
multiplicación
dividir
cociente

Resuelve los ejercicios para practicar las destrezas que usarás en este capítulo

Encuentra el valor de la expresión:

5. $2 \cdot (4 + 3) \cdot 6 =$

6. $1 + (2 + 5) + 7 =$

7. $7 - (2 - 1) - 5 =$

8. $5 \cdot (1 + 6) \cdot 3 =$

9. $14 - (2 \cdot 5) + 2 =$

10. $(6 - 4) \cdot (5 - 3) =$

11. $20 - 6 + (2 \cdot 5) =$

12. $(5 + 2) \cdot 3 - 9 =$

13. $5 \cdot (1 + 8) \cdot 3 =$

14. $6 - (7 - 5) - 1 =$

15. $25 - (3 \cdot 7) + 4 =$

16. $18 - 12 + (4 \cdot 8) =$

Práctica de operaciones

Multiplica:

17. $5 \cdot 6$

18. $7 \cdot 9$

19. $8 \cdot 4$

20. $11 \cdot 8$

21. $12 \cdot 3$

22. $11 \cdot 12$

23. $12 \cdot 12$

24. $8 \cdot 8$

25. $9 \cdot 9$

26. $2 \cdot 8$

27. $7 \cdot 6$

28. $4 \cdot 5$

Divide:

29. $25 : 5$

30. $21 : 3$

31. $32 : 8$

32. $40 : 5$

33. $49 : 7$

34. $36 : 6$

35. $16 : 8$

36. $30 : 6$

37. $24 : 4$

38. $96 : 8$

39. $121 : 11$

40. $90 : 10$

CAPÍTULO 1

Vistazo previo

De dónde vienes

Antes

- Representaste gráficamente en una recta numérica los números enteros.
- Sumaste y restaste números enteros.
- Aprendiste el significado del valor absoluto de un número.

En este capítulo

Estudiarás

- Cómo representar una multiplicación de números enteros en la recta numérica.
- Cómo multiplicar y dividir números positivos y negativos.
- Cómo resolver ejercicios combinados con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, respetando la prioridad de las operaciones.

Hacia dónde vas

Puedes usar las destrezas aprendidas en este capítulo

- Para desarrollar ejercicios matemáticos de mayor complejidad como las ecuaciones.
- Para ser aplicadas en las ciencias, en la contabilidad y en otras disciplinas.

Vocabulario

número positivo
número negativo
números enteros
propiedad conmutativa de la multiplicación
propiedad del cero en la multiplicación
producto
cociente
operación inversa
multiplicación
división
resultado
patrón numérico
opuesto aditivo

Conexiones de vocabulario

Considera lo siguiente para familiarizarte con algunos de los términos de vocabulario del capítulo. Puedes consultar el capítulo o un diccionario si lo deseas:

1. Los **números enteros** están formados por los **números positivos, los números negativos y el cero**.

2. La **propiedad conmutativa de la multiplicación** establece que aunque se cambie el orden de los factores, el producto es el mismo.

3. La **propiedad del cero en la multiplicación** establece que, cuando se multiplica por cero, el producto es cero.

Leer y escribir matemáticas

CAPÍTULO 1

Estrategia de redacción:

Escribe una justificación convincente

Una justificación o explicación convincente debe incluir:

- El problema, expresado con tus propias palabras.
- Una respuesta breve.
- Pruebas que apoyen la respuesta.
- Un enunciado de resumen.

Ejemplo

Escríbelo

Explica cómo hallar los siguientes tres enteros en el patrón $-43, -40, -37, -34, \ldots$.

Paso 1 Identifica el objetivo.

Explica cómo encontrar los siguientes tres enteros en el patrón: $-43, -40, -37, -34, \ldots$.

Paso 2 Da una respuesta breve.

A medida que el patrón continúa, el valor de los enteros aumenta. Encuentra cuánto aumenta cada entero en relación con el anterior. Luego, suma esa cantidad al último entero del patrón. Sigue este paso dos veces más para obtener los siguientes tres enteros del patrón.

Paso 3 Da pruebas para apoyar tu respuesta.

$-43 \quad -40 \quad -37 \quad -34 \quad \square \quad \square \quad \square$

$+3 \quad +3 \quad +3 \quad +3 \quad +3 \quad +3$

$-34 + 3 = -31 \quad -31 + 3 = -28 \quad -28 + 3 = -25$

Los siguientes tres números son -31, -28 y -25.

Encuentra cuánto aumenta cada entero en relación con el anterior.

El patrón consiste en sumar 3 a cada entero para obtener el siguiente entero.

Paso 4 Resume tu justificación.

Para encontrar los siguientes tres enteros en el patrón $-43, -40, -37, -34, \ldots$, encuentra la cantidad que debes sumar a cada entero para obtener el siguiente entero del patrón.

Inténtalo

Escribe una justificación convincente usando el método anterior.

1. Explica cómo hallar los siguientes tres enteros en el patrón 0, –2, –4, –6,....

2. Explica cómo hallar el séptimo entero en el patrón –18, –13, –8, –3,....

CAPÍTULO 1–1

Representar la multiplicación

Aprender a representar la multiplicación con material concreto y en la recta numérica.

Vocabulario

producto

La multiplicación se puede pensar como la suma repetida de un número.

$2 \bullet 4 = 4 + 4 = 8$ *"dos veces cuatro" o bien*

$4 \bullet 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$ *"cuatro veces dos"*

$3 \bullet (-2) = (-2) + (-2) + (-2) = -6$ *"tres veces menos dos"*

EJEMPLO 1 Multiplicar enteros usando fichas de colores

A Cada ficha amarilla representa +1 y cada ficha roja representa –1.

Usa fichas amarillas para representar el **producto** de $2 \bullet 4$.

2 grupos de 4

$2 \bullet 4 = 8$

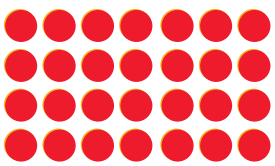
B Usa las fichas rojas para representar el producto de $-2 \bullet 4$.

Usando la propiedad conmutativa puedes escribir $-2 \bullet 4$ como $4 \bullet -2$.

4 grupos de –2.

$-2 \bullet 4 = 4 \bullet -2 = -8$

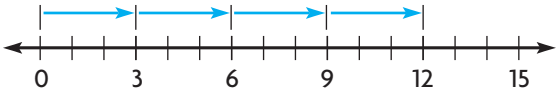
C Escribe la multiplicación que representan las fichas.



$-7 \bullet 4 = 4 \bullet -7 = -28$

EJEMPLO 2 Multiplicar enteros usando la recta numérica

A Encuentra el producto de $4 \cdot 3$.



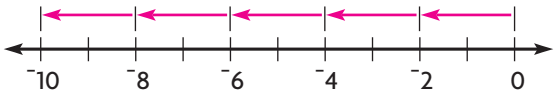
Comienza en 0.
Suma 3 cuatro veces.

La recta numérica muestra que

$4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$

Entonces, $4 \cdot 3 = 12$

B Encuentra el producto de $5 \cdot -2$.



Comienza en 0.
Suma –2 cinco veces.

La recta numérica muestra que

$5 \cdot -2 = -2 + -2 + -2 + -2 + -2 = -10.$

Entonces, $5 \cdot -2 = -10$

EJEMPLO 3 Aplicación a las finanzas

A La mamá de Martina tiene una deuda de 4 cuotas de $ 8 350 más una multa de $ 2 500 por la demora. ¿Cómo podemos calcular y escribir la deuda de la mamá de Martina?

$4 \cdot (-8\,350) + -2\,500 = -33\,400 - 2\,500 = -35\,900.$

La deuda es de $ 35 900 y se escribe como –35 900.

Razonar y comentar

1. **Haz una lista** de por lo menos 6 ejemplos diferentes de multiplicación que tengan como producto 48. Usa tanto números positivos como negativos.
2. **Explica** por qué una deuda se puede representar con un número negativo.

1–1 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

Usa fichas de colores para representar cada multiplicación y calcula el producto.

1. $5 \cdot (-8)$ **2.** $(-4) \cdot 3$ **3.** $4 \cdot 5$ **4.** $8 \cdot (-2)$

Ver Ejemplo 2

Usa la recta numérica para representar cada multiplicación y calcula el producto.

5. $3 \cdot 4$ **6.** $4 \cdot (-4)$ **7.** $5 \cdot 2$ **8.** $5 \cdot (-2)$

Ver Ejemplo 3

9. Un escalador hizo un descenso a una cueva subterránea, bajó 23 metros y se detuvo. Para llegar al fondo de la cueva bajó 4 veces la misma distancia. ¿Cuál es la profundidad de la cueva?

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

Usa fichas de colores para representar cada multiplicación y calcula el producto.

10. $2 \cdot 3$ **11.** $3 \cdot (-5)$ **12.** $(-4) \cdot 2$ **13.** $2 \cdot 7$

Ver Ejemplo 2

Usa la recta numérica para representar cada multiplicación y calcula el producto.

14. $3 \cdot 6$ **15.** $(-2) \cdot 6$ **16.** $3 \cdot (-3)$ **17.** $(-6) \cdot 4$

Ver Ejemplo 3

18. Esteban efectuó seis transferencias bancarias por un monto de $ 4 620 cada una desde su cuenta de ahorro. ¿Cuánto dinero transfirió Esteban? Representa la situación con números enteros.

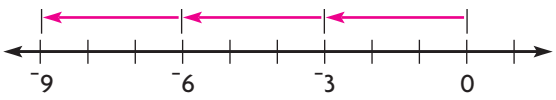
PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Usa fichas para hallar el producto.

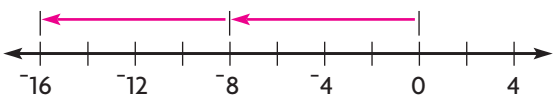
19. $2 \cdot -5$ **20.** $2 \cdot 3$ **21.** $3 \cdot -6$

22. $-3 \cdot 5$ **23.** $-6 \cdot 2$

Usa la recta numérica para hallar el producto.

24. 

3 • –3

25. 

2 • –8

Halla el producto.

26. –4 • 6 **27.** 7 • –1 **28.** 3 • 9 **29.** –5 • 3 **30.** 4 • –5

31. 6 • –5 **32.** –2 • 7 **33.** 3 • 8 **34.** 4 • –4 **35.** 5 • –1

Resuelve.

36. Samuel usa 4 grupos de 4 fichas rojas para representar una expresión de multiplicación. ¿Cuál es el valor de la expresión?

37. Ricardo usa fichas para representar 5 • 5. Hazlo tú también. ¿Cuál es el producto de 5 • 5?

38. ESCRIBE **Explica** cómo se usa una recta numérica para hallar 6 • –3.

Repaso

39. ¿Qué expresiones tienen como resultado –20?

I) –2 • 10 II) 40 : 2 III) –5 • 4 IV) –4 • 2 – 12

(A) solo I (B) I y III (C) I, III y IV (D) I, II, III, IV

40. ¿Qué expresión tiene un valor mayor que –4 • 5?

I) 6 • –6 II) –10 • 8 III) 3 • –7 IV) 3 • –4

(A) solo I (B) I y III (C) solo IV (D) II y III

Representa cada multiplicación en la recta numérica:

41. 5 • 8 **42.** –4 • 8 **43.** 6 • –9 **44.** 2 • 8

Encuentra la diferencia:

45. 3 – (–2) = **46.** – 5 – 6 = **47.** 6 – 8 = **48.** 2 – (–7) =

CAPÍTULO
1–2 Multiplicar enteros

Aprender a multiplicar números enteros.

Vocabulario

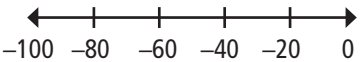
números enteros

propiedad del cero en la multiplicación

producto

En las costas del archipiélago de Juan Fernández hay una gran cantidad de objetos sumergidos en el mar. Se encontró una caja con fotografías a 20 metros bajo el nivel del mar o a –20 metros. Si un automóvil se encuentra a una profundidad casi 5 veces mayor que la caja con fotografías, ¿a qué profundidad se encuentra el automóvil?

EJEMPLO 1 Usa una recta numérica para hallar 5 • –20



A En la recta numérica se muestra que 5 • –20 = –100. Entonces, el automóvil está a 100 metros por debajo del nivel del mar o a –100.

Si los restos de un bote hundido estuvieran a una profundidad 2 veces mayor que la del automóvil ¿de qué manera podrías usar la recta numérica para hallar la profundidad de este bote?

Puedes usar patrones para hallar reglas para multiplicar **números enteros**.

EJEMPLO 2 Completa el patrón

A

5 • 3 = 15
5 • 2 = 10
5 • 1 = 5
5 • 0 = 0
5 • –1 = __
5 • –2 = __
5 • –3 = __

Estudia el patrón. Cuando el segundo factor disminuye en 1, el producto disminuye en 5. Usa esta regla para completar el patrón.

5 • 2 = 10
5 • 1 = 5
5 • 0 = 0
5 • –1 = –5
5 • –2 = –10
5 • –3 = –15

Entonces, los productos que faltan son –5, –10 y –15.

B

–5 • 3 = –15
–5 • 2 = –10
–5 • 1 = –5
–5 • 0 = 0
–5 • –1 = __
–5 • –2 = __
–5 • –3 = __

Estudia el patrón. Cuando el segundo factor disminuye en 1, el producto disminuye en 5. Usa esta regla para completar el patrón.

–5 • 3 = –15
–5 • 2 = –10
–5 • 1 = –5
–5 • 0 = 0
–5 • –1 = 5
–5 • –2 = 10
–5 • –3 = 15

Entonces, los productos que faltan son 5, 10 y 15.

Reglas para los productos de enteros

Los ejemplos 2 A y 2 B conducen a las siguientes reglas.

El **producto** de dos enteros que tienen signos iguales es positivo.

$5 \cdot 6 = 30$ $\quad -4 \cdot -3 = 12$

El producto de dos enteros que tienen signos diferentes es negativo.

$2 \cdot -3 = -7$ $\quad -7 \cdot 4 = -28$

La propiedad del cero de la multiplicación se aplica a los enteros. Entonces, el producto de un entero y 0 es 0.

Isla Robinson Crusoe en archipiélago de Juan Fernández, azotada por el tsunami el 27 de febrero de 2010.

EJEMPLO 3 Multiplicar aplicando la regla

A $-3 \cdot -9 = __$

$-3 \cdot -9 = 27$

Entonces, $-3 \cdot -9 = 27$.

Multiplica explicando la regla. El signo del producto es positivo porque los signos de los enteros son iguales.

B Un buzo está 4 m debajo de la superficie del agua. Un vehículo submarino está a una profundidad 6 veces mayor que la del buzo. ¿A qué profundidad está el vehículo submarino?

Halla $6 \cdot -4$.

$6 \cdot -4 = __$

$6 \cdot -4 = -24$

Multiplica aplicando la regla. El signo del producto es negativo porque los signos de los enteros son diferentes.

Entonces, el vehículo submarino está 24 m debajo del nivel del mar. Puedes calcular mentalmente los factores que faltan.

C **Calcula mentalmente para encontrar el valor de *y*.**

$-7 \cdot y = -84$

El producto es negativo. El producto de dos enteros que tienen signos diferentes es negativo.

Como el primer factor es negativo, el segundo factor debe ser positivo. Entonces, el valor de y es 12.

Razonar y comentar

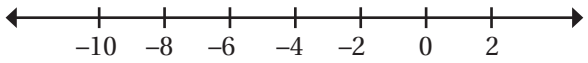
1. **Explica** cómo se puede determinar el signo de un producto cuando se multiplican dos enteros.
2. **Comenta** con tus compañeros cuáles son los patrones más fáciles de construir.

1-2 Ejercicios

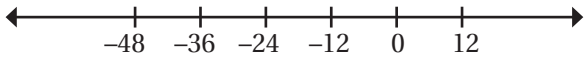
PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

1. Usa la recta numérica para hallar $4 \cdot -2$.



2. Usa la recta numérica para hallar $3 \cdot -12$.



Ver Ejemplo 2

Indica si el signo del producto es positivo o negativo.

3. $-3 \cdot -6$ **4.** $-5 \cdot 4$ **5.** $8 \cdot 18$ **6.** $13 \cdot -9$ **7.** $-17 \cdot -4$

Ver Ejemplo 3

Encuentra el producto.

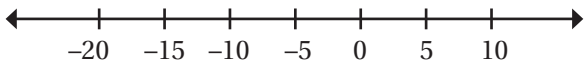
8. $9 \cdot 0$ **9.** $6 \cdot -13$ **10.** $-5 \cdot 9$ **11.** $-7 \cdot -83$ **12.** $-2 \cdot 57$

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

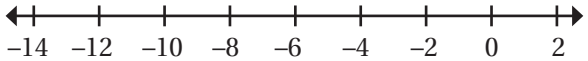
Ver Ejemplo 1

Usa la recta numérica para encontrar el resultado de los siguientes productos.

13. $3 \cdot -5$



14. $5 \cdot -2$



Ver Ejemplo 2

Indica si el signo del producto es positivo o negativo.

15. $-8 \cdot -24$ **16.** $5 \cdot -2$ **17.** $-7 \cdot 4$ **18.** $5 \cdot 11$ **19.** $-68 \cdot 12$

Ver Ejemplo 3

Encuentra el producto.

20. $-8 \cdot 12$ **21.** $0 \cdot -5$ **22.** $42 \cdot -6$ **23.** $-4 \cdot -10$ **24.** $-1 \cdot 11$

Haz cálculos mentales para hallar el valor desconocido.

25. $4 \cdot z = 12$ **26.** $-5 \cdot n = -35$ **27.** $8 \cdot s = -40$ **28.** $12 \cdot b = 48$

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Indica si el signo del producto es positivo o negativo.

29. $9 \cdot -54$ **30.** $-4 \cdot -7$ **31.** $75 \cdot -3$ **32.** $-8 \cdot 6$ **33.** $-2 \cdot -9$

Encuentra el producto.

34. $-3 \cdot 7$ **35.** $84 \cdot -6$ **36.** $-37 \cdot -3$ **37.** $4 \cdot -95$ **38.** $66 \cdot -7$

39. $-12 \cdot 4$ **40.** $40 \cdot -5$ **41.** $-15 \cdot -3$ **42.** $88 \cdot -8$ **43.** $-4 \cdot -12$

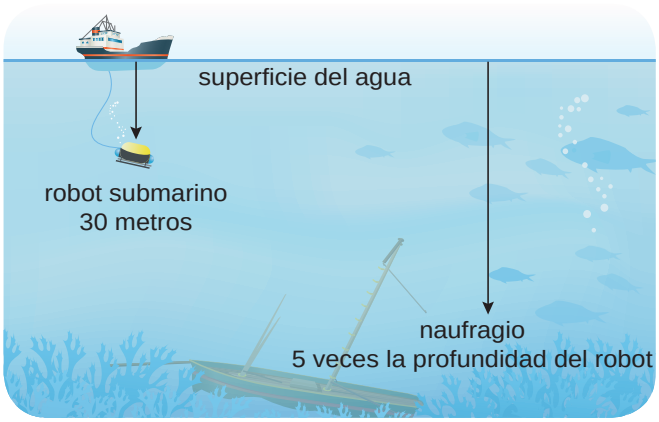
Haz cálculos mentales para hallar el valor desconocido.

44. $-6 \cdot t = -30$ **45.** $-7 \cdot y = 56$ **46.** $2 \cdot z = -20$ **47.** $-3 \cdot a = 0$

48. $-5 \cdot s = -40$ **49.** $5 \cdot r = -60$ **50.** $-9 \cdot p = 27$ **51.** $-4 \cdot t = 36$

52. Un robot submarino está a 30 metros bajo la superficie del agua. Los restos de un naufragio están a una profundidad 5 veces mayor que la del robot. ¿A cuántos metros más de profundidad se encuentran los restos del naufragio que el robot?

53. Plantea un problema Vuelve a leer el Problema 52. Escribe un problema similar y resuélvelo.



54. Horacio usó la tabla de la derecha para hallar un patrón y escribir una regla para hallar el signo del producto de tres o más enteros negativos.

a) ¿Qué signo tiene el producto de 3, 5 o 7 enteros negativos? ¿Y de 4, 6 u 8 enteros negativos?

b) ¿Qué indica esto acerca del producto de un número par de enteros negativos? ¿Qué indica acerca del producto de un número impar de enteros negativos?

$^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 = {}^{-}8$
$^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 = 16$
$^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 = {}^{-}32$
$^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 = 64$
$^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 = {}^{-}128$
$^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{-}2 = 256$

55. Razonamiento El producto de cuatro enteros es negativo. ¿Cuántos de estos enteros son negativos?

56. Escribe ¿Cuál es la pregunta? La respuesta es el producto –36.

Repaso

57. La expresión (–6) + (–6) + (–6) + (–6) es igual a:

(A) 24 (B) 4 • (–6) (C) 36 (D) (–4) • (–6)

58. La división (256) : 8 tiene como cociente:

(A) 32 (B) 42 (C) 23 (D) 24

Indica el signo (positivo o negativo) del producto de:

59. (–7) • 5 **60.** (–12) • (–36) **61.** 15 • 7 **62.** 15 • (–9)

Calcula el producto o el cociente según corresponda:

63. (756) : 9 = **64.** 27 • (–12) **65.** (54) : (6) = **66.** (–139) • (–27)

CAPÍTULO 1

¿Listo para seguir?

Prueba de las lecciones 1–1 a 1–2

1–1 Representar la multiplicación

Usando las fichas amarillas (+1) y las rojas (–1) representa:

1. $3 \cdot 5 = 15$ **2.** $2 \cdot -3 = -6$ **3.** $-5 \cdot 4 = -20$

4. $2 \cdot 7 = 14$ **5.** $3 \cdot -4 = -12$ **6.** $6 \cdot -3 = -18$

7. $5 \cdot -2 = -10$ **8.** $2 \cdot -4 = -8$ **9.** $7 \cdot 4 = 28$

Usa la recta numérica para hallar el producto de:

10. $5 \cdot 2 =$ **11.** $-3 \cdot 5 =$ **12.** $2 \cdot 6 =$

13. $2 \cdot -6 =$ **14.** $4 \cdot -3 =$ **15.** $3 \cdot -2 =$

16. $3 \cdot -5 =$ **17.** $7 \cdot -2 =$ **18.** $6 \cdot -3 =$

1–2 Multiplicar enteros

Usa la regla para los productos de enteros y completa:

19. $24 \cdot 5 =$ **20.** $-7 \cdot 15 =$ **21.** $-12 \cdot -11 =$ **22.** $14 \cdot -6 =$

23. $24 \cdot 35 =$ **24.** $47 \cdot -86 =$ **25.** $-72 \cdot 38 =$ **26.** $15 \cdot 45 =$

27. $-41 \cdot -28 =$ **28.** $49 \cdot -18 =$ **29.** $345 \cdot -7 =$ **30.** $-583 \cdot -8 =$

31. $-240 \cdot 30 =$ **32.** $-2 \cdot -5 \cdot -8 =$ **33.** $-7 \cdot 8 \cdot -3 =$ **34.** $6 \cdot -5 \cdot 3 =$

35. $-32 \cdot 8 \cdot 5 =$ **36.** $-24 \cdot 9 =$ **37.** $-39 \cdot -8 \cdot -7 =$ **38.** $-89 \cdot -15 \cdot -4 =$

Completa con la palabra que falta para obtener la regla del producto de números enteros:

39. El producto de dos enteros de _____ signo es positivo.

40. El producto de dos enteros de _____ signo es negativo.

41. Si el producto de tres enteros es positivo, entonces, las combinaciones de números positivos y negativos pueden ser:

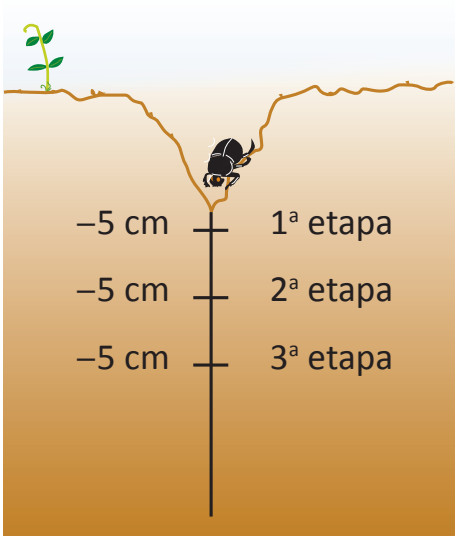
_____ • _____ • _____ = + o _____ • _____ • _____ = +

Enfoque en resolución de problemas

Comprende el problema

- Si escribes un problema con tus propias palabras o realizas un dibujo representando la situación, puedes comprenderlo mejor. Tal vez debas leerlo lentamente y anotar los datos en el dibujo o leerlo más de una vez para escribirlo con tus palabras.

Ejemplo:
Un escarabajo cava en la tierra para depositar sus huevos un hoyo de 5 cm. Se detiene a descansar durante 12 minutos y continúa el mismo trabajo en tres etapas. ¿Cuánto mide de profundidad el hoyo que hizo? Usa números enteros para resolver y entregar la respuesta a este problema.



En el dibujo se muestra cada etapa del trabajo del escarabajo y es fácil escribir la operación matemática:

$-5 \cdot 3 = -15$

Respuesta
El escarabajo cavó 15 cm en la tierra.

Escribe con tus propias palabras o dibuja la situación

1) Un buzo desciende 2 metros cada 5 segundos y asciende 2 metros cada 8 segundos. Si quiere sacar un objeto que se encuentra a 18 metros de profundidad, ¿cuánto se demora en retirarlo del mar?

2) José pierde $ 100 por cada dos horas que no asiste al trabajo. ¿Cuánto dinero ha perdido al término de una jornada de 8 horas?

Expresa tu respuesta con un número entero

3) Juan deposita $ 25 000 en su cuenta de ahorro, luego saca $ 8 000 y le regala a su hermana la mitad del dinero que le queda en el banco. Juan puede ahorrar $ 500 diarios. ¿Cuántos días se demora en volver a tener los $ 25 000 en su cuenta?

CAPÍTULO 1–3

Dividir enteros

Aprender a dividir enteros.

Vocabulario

operación inversa
multiplicación
división
resultado
número entero
número negativo
número positivo

Javiera tiene 63 dulces para repartir a sus 7 compañeros del grupo. ¿Cuántos dulces recibe cada niño?

Para resolver este problema, Javiera pensó: tengo 63 dulces y 7 compañeros, ¿qué número multiplicado por 7 da como **resultado** 63? Ese número es el 9, por lo tanto cada compañero debe recibir 9 dulces.

La **multiplicación** y la **división** son **operaciónes inversas**. Para resolver un problema de división, piensa en el problema relacionado de multiplicación.

63 : 7 = __ *Piensa: ¿qué número multiplicado por 7 es igual a 63?*

7 • 9 = 63, entonces 63 : 7 = 9.

Para resolver una división con **números enteros positivos** y **negativos**, relaciónala con la multiplicación.

Si el dividendo es un número negativo y el divisor es un número positivo o viceversa, resulta:

27 : 3 = _____

Piensa en la multiplicación relacionada,

9 • 3 = –27, entonces –27 : 3 = –9

Si el dividendo y el divisor son números negativos, resulta:

–18 :–6 = ____

Piensa en la multiplicación relacionada,

6 • 3 = –18, entonces –18 : –6 = 3

Las siguientes reglas se aplican a la división con números enteros.

El cociente de dos enteros que tienen signos iguales es positivo.

El cociente de dos números enteros que tienen signos diferentes es negativo.

EJEMPLO 1 Encuentra el cociente

A –219 : –3
–219 : –3 = 73

Divide como si se tratara de números enteros. El cociente es positivo porque los signos de los enteros son iguales.

B –154 : 11
–154 : 11 = –14

Divide como si se tratara de números enteros. El cociente es negativo porque los signos de los enteros son diferentes.

• ¿Es positivo o negativo el cociente de 108 : –9? ¿Es positivo o negativo el cociente de –108 : –9? **Explica.**

• ¿Cuál es la diferencia entre las reglas para el signo del cociente de dos enteros y las reglas para el signo del producto de dos enteros?

EJEMPLO 2 Resolver problemas de ganancia o pérdida

A En la tabla se muestran las ganancias y las pérdidas mensuales que registró Carolina cuando trabajó barriendo hojas en otoño e invierno. ¿Cuál es la ganancia o pérdida mensual promedio?

Ganancias y pérdidas mensuales						
Mes	**Mar**	**Abril**	**Mayo**	**Jun**	**Jul**	**Agos**
Ganancia o pérdida	–$ 1 200	–$ 1 000	–$ 500	$ 700	–$ 900	$ 500

$–1\,200 + –1\,000 + –500 + 700 + –900 + 500 = –2\,400$ *Halla la suma.*

$–2\,400 : 6 = –400$ *Divide entre el número de meses.*

Entonces, como el cociente es negativo, hay una pérdida mensual promedio de $ 400

- ¿Qué pasaría si Carolina hubiera tenido una ganancia de $ 2 000 en abril en lugar de una pérdida de $ 1 000? ¿Cuál sería la ganancia o la pérdida mensual promedio?

EJEMPLO 3 Resolver problemas de temperatura

A Carolina anotó la temperatura a cada hora durante una tormenta de nieve. ¿Cuál fue la temperatura promedio entre las 4 a.m. y las 7 a.m.?

Temperatura por hora				
Hora (a.m)	4:00	5:00	6:00	7:00
Temperatura (°C)	–9	–6	–2	1

$–9 + –6 + –2 + 1 = –16$ *Halla la suma.*

$–16 : 4 = –4$ *Divide entre el número de temperaturas.*

Entonces, la temperatura promedio fue –4 °C.

- ¿De qué manera puedes usar la multiplicación para comprobar la respuesta del ejemplo 3?
- ¿Qué pasaría si la suma de las temperaturas fuera 0 °C? ¿Cuál sería la temperatura promedio?

Razonar y comentar

1. **Explica** cómo se puede hallar el signo de un cociente en la división con enteros.

1–3 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

Usa las multiplicaciones para resolver las siguientes divisiones:

1. $-3 \cdot -6 = 18$,
Entonces $18 : -3 =$ __

2. $-10 \cdot 4 = -40$,
Entonces $-40 : -10 =$ __

3. $8 \cdot -5 = -40$,
Entonces $-40 : 8 =$ __

4. $-2 \cdot 0 = 0$,
Entonces $0 : -2 =$ __

Halla el cociente:

5. $32 : 4$ **6.** $-90 : -10$ **7.** $-72 : 8$ **8.** $49 : -7$ **9.** $-36 : -3$

10. $36 : -6$ **11.** $114 : 4$ **12.** $-225 : -5$ **13.** $-328 : 8$ **14.** $-190 : -2$

Ver Ejemplo 2

15. En su negocio de venta de helados, María tuvo una pérdida de $ 5 000 el primer mes. Durante los siguientes 3 meses, no obtuvo ganancias pero tampoco tuvo pérdidas. El quinto mes obtuvo una ganancia de $ 12 000. ¿Cuál es la ganancia o pérdida mensual promedio de María en esos 5 meses?

Ver Ejemplo 3

Usa la tabla:

Temperaturas promedio						
Mes	**May**	**Jun**	**Jul**	**Ago**	**Sept**	**Oct**
Temperatura (°C)	–1	–4	–12	–9	–18	–4

16. ¿Cuál es la temperatura promedio desde mayo hasta septiembre?

17. La temperatura promedio para el mes de julio es el doble de grados bajo cero que la temperatura promedio de otro pueblo cercano para el mes de agosto. ¿Cuál es la temperatura promedio de este pueblo para el mes de agosto?

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

Usa la multiplicación para resolver la división:

18. $-7 \cdot -9 = 63$
Entonces $63 : -7 =$ __

19. $8 \cdot 11 = 88$
Entonces $88 : 8 =$ __

20. $-3 \cdot -10 = 30$,
Entonces $30 : -3 =$ __

21. $8 \cdot 8 = 64$
Entonces $64 : 8 =$ __

Ver Ejemplo 2

22. En su tienda de ropa, Javiera tuvo una pérdida de $ 7 000 el primer mes. Durante los dos meses siguientes no hubo ni ganancias ni pérdidas. El cuarto mes obtuvo una ganancia de $ 120 000. ¿Cuál es la ganancia o pérdida mensual promedio de Javiera en estos cuatro meses?

Ver Ejemplo 3

Usa la información de la tabla para responder los ejercicios 23 y 24.

Temperaturas mínimas de una semana en la Antártica						
Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sáb	Dom
–10 °C	–8 °C	–3 °C	–9 °C	–12 °C	–8 °C	–12 °C

23. ¿Cuál fue la temperatura promedio en la semana?

24. La temperatura mínima promedio en Punta Arenas, esa misma semana, fue tres veces más alta. ¿Cuál fue la temperatura promedio en Punta Arenas esa semana?

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Halla el producto o el cociente según el caso:

25. $92 : -4$ **26.** $-75 : -5$ **27.** $64 : 8$

28. $20 : -4$ **29.** $96 : -3$ **30.** $0 : -3$

31. $-252 : 12$ **32.** $-12 \bullet -5$ **33.** $420 : -15$

34. $6 \bullet 40$ **35.** $644 : -14$ **36.** $144 : -3$

37. $-35 \bullet -1$ **38.** $-300 : 6$ **39.** $-75 \bullet 3$

40. $-819 : -13$ **41.** $585 : -13$ **42.** $-60 \bullet 90$

43. $24 \bullet -12$ **44.** $300 : -50$ **45.** $-980 : -14$

Haz cálculos mentales para hallar el valor de la variable:

46. $x : 4 = 7$ **47.** $-18 : n = -9$ **48.** $s : -5 = -12$

49. $-48 : b = 4$ **50.** $-40 : t = -8$ **51.** $y : -9 = 6$

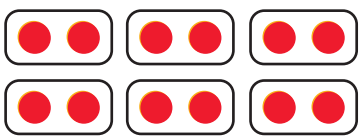
52. $C : 3 = -13$ **53.** $-60 : a = 10$ **54.** $-10 : a = 1$

55. $-45 : t = -5$ **56.** $y : -4 = 0$ **57.** $c : 3 = -15$

58. Plantea un problema Vuelve a leer el Problema 15. Escribe un problema nuevo cambiando las ganancias y las pérdidas de cada mes. Luego resuélvelo.

59. Razonamiento El dividendo, el divisor y el cociente de una división tienen el mismo signo. ¿Es positivo o negativo ese signo?

60. Las siguientes fichas representan una multiplicación. Escribe la multiplicación y dos divisiones relacionadas.



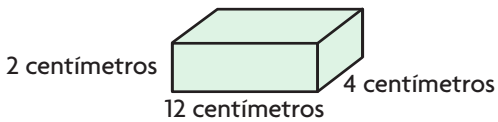
61. **Razonamiento** El cociente de –5 : 2 puede escribirse como –2 R –1. ¿Cuál es el cociente entre –10 : 7?

62. **Explica** De las siguientes divisiones, ¿cuál tiene el cociente mayor?
36 : –12 –36 : –12 –36 : 12

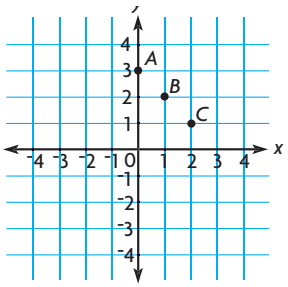
63. ESCRIBE **Explica** cómo puedes usar –24 • 5 = –120 para hallar –120 : –24.

Repaso

64. ¿Cuál es el volumen de este prisma rectangular?



65. ¿Qué par ordenado indica la ubicación del punto C?



66. ¿Cuál es el producto entre –14 y 6?

Hallar el cociente entre:

67. 125 : 5 = **68.** –48 : 6 = **69.** –35 : –7 =

Usa la multiplicación para encontrar el cociente

70. 312 : 6 = **71.** 425 : 5 = **72.** 234 : 9 =

73. ¿Cuál es el cociente entre –48 y –2?

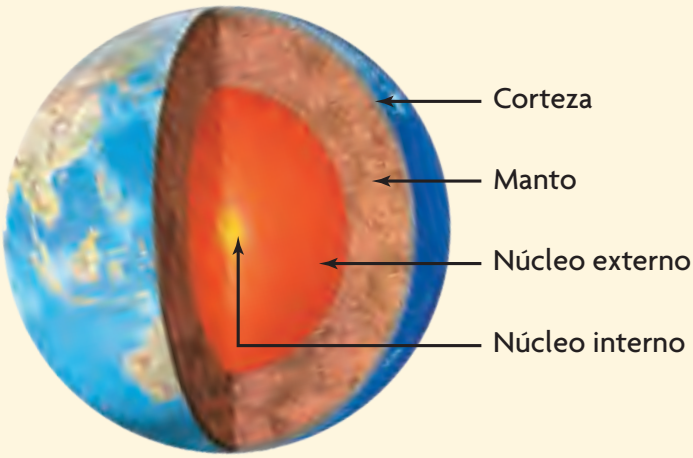
(A) –42 (B) –24 (C) 24 (D) 42

74. La temperatura mínima mensual promedio que se registró en una ciudad durante cuatro meses fue 3 °C, 2°C, 4°C y –5°C. ¿Cuál fue la temperatura mínima mensual promedio del cuatrimestre?

(A) –4°C (B) –1°C (C) 1°C (D) 4°C

CONEXIÓN con las Ciencias

La Tierra está compuesta por muchas capas. La capa externa es la litosfera que incluye la corteza y el manto superior. La base de la corteza se encuentra aproximadamente 40 km debajo de la superficie de la Tierra. La base del manto superior está aproximadamente 400 km debajo de la superficie de la Tierra. ¿Cuántas veces más abajo de la superficie de la Tierra está ubicada la base del manto superior en comparación con la base de la corteza?



$$400 : 40 = 10$$

Entonces, la base del manto superior está 10 veces más abajo de la superficie de la Tierra que la base de la corteza.

Corteza **Manto** **Núcleo externo** **Núcleo interno**

Resuelve

1. Hay dos clases de corteza, continental y oceánica. La base de la corteza continental está ubicada aproximadamente 40 km debajo de la superficie de la Tierra. Eso es casi cinco veces más abajo de la superficie de la Tierra que la base de la corteza oceánica. Aproximadamente, ¿cuánto más abajo de la superficie de la Tierra se encuentra la base de la corteza oceánica?

2. El núcleo interno de la Tierra está ubicado aproximadamente 6 400 km debajo de la superficie de la Tierra. La base de la corteza está ubicada alrededor de 40 km debajo de la superficie de la Tierra. Aproximadamente, ¿cuántas veces más abajo de la superficie de la Tierra se encuentra el núcleo interno en comparación con la base de la corteza?

CAPÍTULO 1–4

Más sobre multiplicar y dividir enteros

Puedes usar las reglas para multiplicar y dividir enteros para encontrar los signos que faltan en los enteros en enunciados de **multiplicación** y **división**.

Vocabulario

multiplicación

división

producto

cociente

Idea matemática

Primero resuelve todas las operaciones entre paréntesis usando las reglas para hallar productos y cocientes de enteros.

EJEMPLO 1 Encuentra el signo

A Encuentra todos los signos posibles para los factores que hacen que los enunciados de multiplicación sean verdaderos.

■7 • ■4 = –28 +7 • –4 = –28 –7 • +4 = –28

■5 • ■8 = 40 +5 • –8 = –40 –5 • +8 = 40

• ¿Qué sabes acerca de los signos de dos enteros cuyo **producto** es negativo?

B Encuentra todos los signos posibles para el dividendo y el divisor que hacen que los enunciados de división sean verdaderos.

■36 : ■4 = 9 +36 : +4 = 9 –36 : –4 = 9

■10 : ■2 = –5 +10 : –2 = –5 –10 : +2 = –5

• ¿Qué sabes acerca de los signos de dos enteros cuyo **cociente** es positivo?

EJEMPLO 2 Encuentra el cociente

Encuentra el valor de cada expresión.

A $-4 \bullet (-81 : 9)$

$-4 \bullet (-81 : 9)$ *Divide.*

$-4 \bullet -9$ *Multiplica.*

36

Entonces, $-4 \bullet (-81 : 9) = 36$.

B $64 : (-4 \bullet -8)$

$64 : (-4 \bullet -8)$ *Multiplica.*

$64 : -32$ *Divide.*

-2

Entonces, $64 : (-4 \bullet -8) = 2$.

Razonar y comentar

1. **Explica** cómo puedes decidir cuáles son los signos posibles para los factores de un producto.
2. **Explica** cómo se usan las reglas de la división con enteros para encontrar los signos que faltan para el dividendo y el cociente en ■56 : ■7 = 8.

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

Encuentra todos los signos posibles que hacen que los enunciados numéricos sean verdaderos:

1. ■3 • +6 18
–3 • ■6 = 18

2. ■30 : ■10 = –3
■30 : ■10 = –3

3. ■91 : ■13= –7
■91 : ■13= –7

4. ■6 • ■8 = 48
■6 • ■8 = 48

Ver Ejemplo 2

Encuentra el valor de la expresión:

5. –3 • (–63 : 7)

6. (–4 • –6) : 2

7. –81 : (–3 • –3)

8. 8 • (16 : –8)

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

Encuentra los signos posibles que hacen que el enunciado numérico sea verdadero:

9. ■3 • ■3 = –9
■6 • ■5 = 30

10. ■8 • ■7 = –56
■45 : ■9 = 5

11. ■64 : ■8 = –8
■12 : ■12 = 1

Ver Ejemplo 2

Encuentra el valor de la expresión:

12. –3 • (–56 : 8)

13. –18 : –3 • 9

14. –3 • (–24 : –6)

15. 72 : –9 • 4

16. 7 • (–55 : 5)

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Encuentra el valor de la expresión:

17. –18 : (2 • 9)

18. 4 • (–49 : 7)

19. –54 : –9 • 6

20. 1 • (–35 : 7)

21. –42 : (–1 • –6)

22. 25 • (–15 : 5)

23. –72 : 6 • –4

24. 12 • (–48 : 3)

25. –196 : (49 • –2)

26. 25 • (–65 : 5)

27. –225 : –15 • 6

Haz cálculos mentales para hallar el valor de la variable:

28. $2 \cdot z = -20$

29. $y : -9 = 6$

30. $-3 \cdot a = 0$

31. $-60 : b = 10$

32. $8 \cdot c = 32$

33. $d : -7 = 8$

34. $42 : r = 7$

35. $13 \cdot p = 0$

36. **Razonamiento** Nelson escribe un enunciado numérico usando cada uno de los siguientes enteros una sola vez: –6, –3, 24 y 48. ¿Qué enunciado numérico pudo haber escrito?

37. Belén usa dos multiplicaciones para comprobar la solución de –18 : __ = 9. ¿Cuáles son las multiplicaciones?

38. El ejercicio más difícil de una prueba de matemáticas consiste en resolver la ecuación 2 • (–25 : *y*) = –10. ¿Cuál es el valor de *y*?

Repaso

39. Marta dividió 11 kilos y 1/2 de ensalada de fruta entre 4 porciones iguales. ¿Qué fracción de un kilo representa cada porción?

40. ¿Cuánto es –17– 8?

41. ¿Cuál es el valor de –60 : (–5 • 2)?

(A) –24 (B) –6 (C) 6 (D) 24

CAPÍTULO

1–5 Operaciones con enteros

Aprender a resolver operaciones combinadas con enteros.

Vocabulario

patrón numérico

opuesto aditivo

En un periodo determinado, la bencina bajó $ 27 en noviembre y $ 9 en diciembre. A fines de febrero volvió a bajar $ 12. Pedro quiere saber cuánto varió el precio de la bencina en estos meses usando la expresión:
– 27 –9 + –12

Usa las reglas de los enteros para encontrar los valores de las operaciones.

EJEMPLO 1 Encuentra el valor de –27 – 9 + –12

A –27 – 9 + –12

–27 + –9 + –12 *Escribe –27 – 9 como una expresión de suma.*

–36 + –12 *Suma.*

–48

Entonces el precio de la bencina bajó $ 48.

Encuentra el valor de –24 : (–6 – 2)

B –24 : (–6 – 2) *Resuelve las operaciones que se encuentran entre paréntesis. Escríbelas como una expresión de suma.*

–24 : (–6 – 2) *Suma.*

–24 : –8 *Divide.*

3

EJEMPLO 2 Haz cálculos mentales para encontrar un valor posible de *y* que haga que (*y* – –5) : 2 sea igual a un entero positivo.

A (*y* – –5) : 2 *Escríbelo como una expresión de suma.*

y + 5 : 2 *Para obtener un entero positivo, el dividendo (y + 5) debe ser mayor que o igual a 2. También debe ser divisible entre 2.*

(–3 + 5) : 2 *Haz cálculos mentales. Prueba con y = –3. Luego suma.*

2 : 2 *Divide.*

1

Entonces, –3 es un valor posible para *y*.

Reemplaza *y* por –5, –1, 1 y 3. Luego halla el valor de cada expresión. Busca un patrón. ¿Qué indica esto sobre los valores de *y* que harán que la expresión sea igual a un entero positivo?

Un **patrón numérico** permite repetir las operaciones de suma, resta, multiplicación, división o una combinación de estas operaciones.

EJEMPLO 3 Halla una regla posible

A **Encuentra los dos números que siguen en el patrón. 1, –2, –5, –8, __, __**

Paso 1

Encuentra una regla posible.
Prueba a restar 3, porque 1 – 3 = –2.

–2 – 3 = –2 + (–3) = –5
–5 – 3 = –5 + (–3) = –8

Una regla posible es restar 3.

Paso 2

Usa la regla.

1 –2 –5 –8 –11 –14
–3 –3 –3 –3 –3

–8 – 3 = –8 + –3 = –11 –11 – 3 = –11 + –3 = –14

Entonces, –11 y –14 son los dos números que siguen en el patrón.

También puedes usar una regla para hallar los números que faltan en un patrón.

B Encuentra una regla posible. Luego halla los números que faltan en el patrón. 4, 8, 3, 6, 1, __, __, –6, –11

Paso 1

Encuentra una regla posible.
Observa el patrón. Los números aumentan y disminuyen, entonces prueba con dos operaciones.

Prueba a multiplicar por 2 y luego restar 5, porque:
4 • 2 = 8 y 8 – 5 = 3
3 • 2 = 6 y 6 – 5 = 1

Una regla posible es multiplicar por 2 y luego restar 5.

Paso 2
Usa la regla.

1 • 2 = 2 2 – 5 = 2 + –5 = –3

Comprueba los últimos números del patrón.

–3 • 2 = –6 –6 – 5 = –6 + –5 = –11

Entonces, los números que faltan en el patrón son 2 y –3.

Razonar y comentar

1. **Explica** cómo se puede hallar una regla posible para un patrón.
2. **Comenta** una estrategia para encontrar Z en:
$(-3 \bullet 5) - (18 : -6) + (Z : 4) = -18$

1–5 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

Determina el valor de la expresión:

1. 2– (–7) + 10
(2 + 7) + 10
9 + 10

2. (–12 – 3) : –5
(–12 + –3) : –5

3. –11 • (3 – 6)

Ver Ejemplo 2

Haz cálculos mentales para hallar un valor posible de x para que se cumpla:

4. $(x : -7) - 5 = -15$

5. $(-27 : x) \bullet 4 = -36$

6. $(-5 \bullet x) : 10 = 4$

Ver Ejemplo 3

Escribe una regla posible para cada patrón. Luego halla los números que faltan:

7. –7, –11, –15, –19, __, __

8. 1, –3, 9, –27, __, __, 729, –2 187

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

Determina el valor de la expresión:

9. (–9 – 6) : –5

10. (2 – –3) • 4

11. –12 + (9– (–5))

12. –4 • 6 + 14

Ver Ejemplo 2

Haz cálculos mentales para determinar el valor de la variable:

13. $(x \bullet 9) : 4 = 18$

14. $(x : 9) \bullet 7 = -28$

15. $(9 \bullet x) : -9 = 4$

16. $(48 : x) \bullet 3 = 24$

17. $(3 \bullet 8) : x = -4$

18. $(27 : 3) \bullet x = -9$

Ver Ejemplo 3

Escribe una regla posible para cada patrón. Luego halla los números que faltan:

19. –5, –7, –9, –11, __, __

20. 14, 5, –4, –13, __, __, –40

21. –2, 6, –18, 54, __, 486, __

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Determina el valor de la expresión.

22. (–10– (–10)) :2

23. (6 – (–7)) • 8

24. (–1) + 8 – (–6)

25. 8 • (–10 • 4)

26. (–18 – 2) : –4

27. (–7) + 13 – (–14)

28. 25 : (6 – 7)

29. 11 • (48 : –8)

Escribe una regla posible para cada patrón. Luego halla los números que faltan:

30. 6, –6, 6, –6, __, __, 6

31. –11, –6, –1, 4, __, 14, __

32. –1, –4, –16, –64, __, __, –4,096

33. Laguna del Carbón, provincia de Santa Cruz, Argentina, tiene una elevación de 105 metros por debajo del nivel del mar. La elevación de las Torres del Paine es 2 710 metros más alta que un punto que está el doble de metros por debajo del nivel del mar que la Laguna del Carbón. ¿Cuál es la elevación de las Torres del Paine?

34. La temperatura bajó 5°C el lunes, 8°C el martes y 12°C el miércoles. ¿Cuánto cambió la temperatura en esos tres días?

35. **Razonamiento** Escribe dos reglas diferentes que puedan usarse para hallar el número que sigue en el patrón. Luego halla el número.
–29, –18, –7, 4, __

36. **Plantea un problema** Vuelve a leer el Problema 34. Escribe un problema similar modificando los cambios en la temperatura diaria y la cantidad de días.

37. El precio del cobre aumentó 3 centavos durante 4 días y bajó 4 centavos de dólar durante 3 días. ¿En cuántos centavos de dólar cambió el precio del cobre en la semana?

38. **Explica** cómo se pueden hallar los dos enteros que siguen en el patrón. Luego encuentra los enteros.

–2, –5, –7, –12, –19, ____, ____.

Repaso

39. En 6 semanas, la tienda de sándwiches de Esteban perdió $ 96. ¿Cuánto perdió en promedio por semana?

40. Usa una regla para trazar dos líneas paralelas.

Calcula el valor de:

41. $3 - \{(-7 + 4) + (8 - 3) - 5\} =$

42. $- [- (-8 + 5) - \{ - 7 + (8 - 10)\} + 4] =$

43. $- [8 + (5 + 4) - \{ 2 (3 - 8) - 7 + 1] =$

44. En la clase de Pedro, 15 de 25 estudiantes viajaron fuera de la región donde viven. ¿Qué porcentaje de la clase corresponde a estos estudiantes?

45. ¿Cuál es el valor de $(-7 - (-11)) \bullet 5$?

Ⓐ –90 Ⓑ –20 Ⓒ 20 Ⓓ 90

CAPÍTULO 1

¿Listo para seguir?

Prueba de las lecciones 1–3 a 1–5

1–3 Dividir enteros

Halla el cociente:

1. 108 : –18 =

2. –200 : 8 =

3. –132 : –44

4. 182 : –26 =

5. –180 : 36 =

6. –475 : –5 =

7. –96 : 3 =

8. –186 : –6 =

9. 360 : –45 =

1–4 Multiplicar y dividir enteros

Halla el resultado:

10. –8 • –6 : 4 =

11. 9 • –7 : 21 =

12. 4 • 5 : –10 =

13. –5 • (–18 : 3) =

14. (48 : 4) • –2 =

15. 9 • (21 : –7) =

16. 24 • –63 : –42 =

17. –76 • 34 : 68 =

18. (125 : 5) • –31 =

1–5 Operaciones con enteros

Halla el resultado:

19. 2 – 5 • 7 =

20. –5 – (3 + 4 • –6) + 1 =

21. –18 : 6 – –7 • 6 + 9 =

22. –(2 – 5) – (3 – 6) + (–8 – 9) =

23. –2 • 5 – (–6 • 8) + 25 : –5 =

24. 75 : –15 + 6 –17 – (–28) : 2 =

25. 35 : –7 + 54 • –2 – 3 • 8 =

26. 12 • 3 – (15 • –4 – (–14) : 2 =

27. 18 • –3 + (17 – 4) : 13 + 15 =

28. Halla una regla posible. Luego halla los dos números que siguen en el patrón:

7, 2, –3, –8, –13, __, __

29. Halla una regla posible. Luego halla los dos números que siguen en el patrón:

1, 5, 13, 29, __, __

CONEXIONES con el mundo real

CAPÍTULO 1

Derrumbe de la mina San José

El derrumbe de la mina San José ocurrió el jueves 5 de agosto de 2010, dejando atrapados a 33 mineros a unos 720 metros de profundidad durante 70 días. El yacimiento está ubicado a 30 km al noroeste de la ciudad chilena de Copiapó.

1. ¿Qué número entero representa la profundidad a la que se encontraban los mineros?
2. Si la subida de los mineros mediante una cápsula duró un poco más de 15 minutos por cada uno, en promedio,¿cuánto demoró en total el ascenso de todos ellos? Escribe una expresión utilizando la multiplicación de números enteros.
3. Desde que la cápsula bajaba hasta que subía pasaban 40 minutos, en promedio. Si el rescate comenzó a las 23:36 del día 12 de octubre, ¿a qué hora finalizó la operación de rescate, sacando al último minero?
4. Considerando la distancia que tuvo que recorrer la cápsula de rescate y el tiempo que demoró en subir, calcula a qué velocidad se desplazó.
5. Investiga a qué velocidad se desplazan los ascensores en los edificios de altura. ¿Qué diferencia hay? ¿A cuántos pisos de un edificio equivale aproximadamente la profundidad a la que se encontraban los mineros?

¡Vamos a jugar!

Magia matemática

Puedes adivinar lo que están pensando tus amigos si aprendes a hacer que sus mentes "resuelvan" operaciones a tu manera. Por ejemplo, intenta este truco de magia matemática.

> Piensa en un número. Multiplícalo por 8, divídelo por 2, súmale 5 y luego réstale 4 multiplicado por el número original.

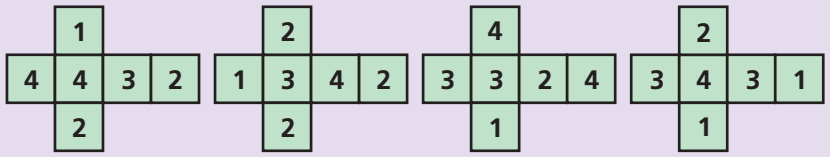
No importa el número que elijas, el resultado siempre será 5. Inténtalo con otro número y verás. Puedes usar tus conocimientos sobre variables para comprobarlo. Haz lo siguiente:

	Tú dices:	La persona piensa:	Expresiones matemáticas:
Paso 1:	Elige un número.	6 (por ejemplo)	n
Paso 2:	Multiplícalo por 8.	$8(6) = 48$	$8n$
Paso 3:	Divídelo entre 2.	$48 \div 2 = 24$	$8n \div 2 = 4n$
Paso 4:	Súmale 5.	$24 + 5 = 29$	$4n + 5$
Paso 5:	Réstale 4 multiplicado por el número original.	$29 - 4(6) = 29 - 24 = 5$	$4n + 5 - 4n = 5$

Inventa tu propio truco de magia matemática con cinco pasos como mínimo. Muestra un ejemplo usando números y variables. ¡Pruébalo con un amigo!

ACTIVIDAD GRUPAL Cubos locos

Este juego, llamado el Gran Tormento alrededor de 1900, se presentó nuevamente en la década de 1960 con el nombre de "Locura instantánea". Haz cuatro cubos con papel y cinta, y numera cada lado como se muestra.



El objetivo es alinear los cubos de modo que se vean los números 1, 2, 3 y 4 en la cara superior, la cara inferior, el frente y la parte trasera de la fila de cubos. Los números pueden estar en cualquier orden y no necesariamente deben mirar hacia el mismo lado.

Materiales

- hoja de papel decorativo (22 por 28 cm)
- regla
- lápiz
- tijeras
- pegamento
- marcadores

¡Está en la bolsa!

PROYECTO Armemos una libreta

Haz esta libreta para organizar ejemplos de expresiones algebraicas.

Instrucciones

1. Toma la hoja de papel de forma horizontal. Traza dos líneas verticales a 9,5 cm desde cada extremo de la hoja.

2. Dobla la hoja por la mitad horizontalmente. Luego córtala por la mitad por el doblez. **Figura A**

3. En una mitad de la hoja, recorta los rectángulos A y B. En la otra mitad, recorta los rectángulos C y D. **Figura B**

   Rectángulo A: 2 cm por 9,5 cm

   Rectángulo B: 3,8 cm por 9,5 cm

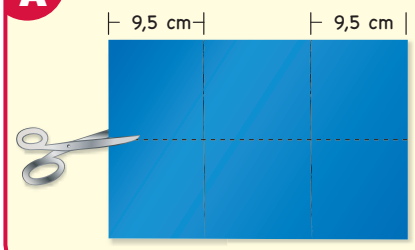
   Rectángulo C: 5,7 cm por 9,5 cm

   Rectángulo D: 7,5 cm por 9,5 cm

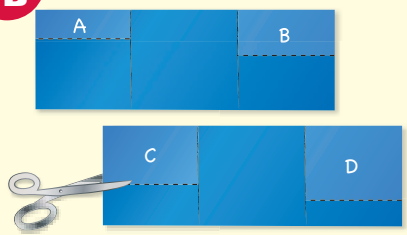
4. Coloca la pieza con los paneles rectangulares más altos sobre la pieza con los paneles rectangulares más cortos. Une las secciones del medio de las dos piezas con pegamento. **Figura C**

5. Pliega los cuatro paneles hacia el centro, comenzando con el más alto y siguiendo hasta el más corto.

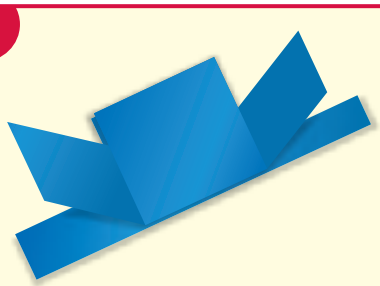
A



B

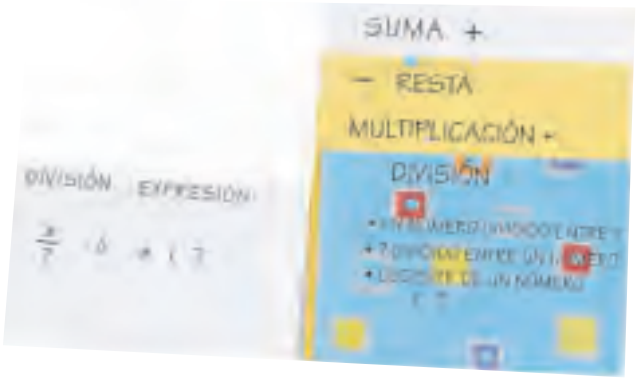


C



Tomar notas de matemáticas

Escribe "Suma", "Resta", "Multiplicación" y "División" en las solapas en la parte superior de cada panel. Usa el espacio debajo del nombre de cada operación para hacer una lista de ejemplos de expresiones en palabras, numéricas y algebraicas.



CAPÍTULO 1

Guía de estudio: Repaso

Vocabulario

número entero 10
número negativo 16
número positivo 16
operación inversa 16
opuesto aditivo 24

Completa los siguientes enunciados con las palabras del vocabulario:

1. Los _____ _____ se ubican a la izquierda del cero en la recta numérica.

2. La división es la _____ _____ de la multiplicación.

3. Los números positivos y negativos son _____

4. Los números enteros 5 y –5 son _____

EJEMPLOS

EJERCICIOS

1–1 Representar la multiplicación usando fichas

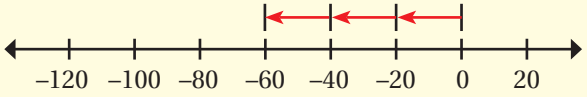
■ **Usando las fichas amarillas (+1) y las fichas rojas (–1) representa las siguientes multiplicaciones.**

Fichas amarillas = +1 Fichas rojas = –1

$3 \cdot -4 =$

$3 \cdot -4 = -12$

■ **Con recta numérica**



$-20 \cdot 3 = -60$

Usa las fichas amarillas y rojas para representar las siguientes multiplicaciones.

5. $2 \cdot -5 =$

6. $5 \cdot 3 =$

7. $4 \cdot -2 =$

Representa en la recta numérica las siguientes multiplicaciones.

8. $3 \cdot 7 =$

9. $4 \cdot 5 =$

1–2 Multiplicar enteros

■ **Encuentra el producto: $3 \cdot (-2)$.**
Razona: 3 grupos de –2

$3 \cdot (-2) = -6$

■ **Evalúa $-2x$ para $x = -4$.**

$-2(-4) = 8$

■ **Encuentra cada producto.**

10. $5 \cdot (-2)$ **11.** $3 \cdot 2$

12. $-3 \cdot (-2)$ **13.** $-4 \cdot 2$

Evalúa $-9y$ para cada valor de y.

14. $y = 2$ **15.** $y = -5$

16. En un juego de adivinanzas se obtenían –5 puntos si no adivinaban y 10 puntos si adivinaban. Sergio y Eduardo obtuvieron los siguientes puntajes:

Eduardo	10	10	10	10	10
Sergio	–5	–5	–5	–5	–5

¿Cuál es el puntaje final de cada uno?

EJEMPLOS

EJERCICIOS

1–3 Dividir enteros

■ **Encuentra el valor de la expresión:**

$-24 : 4$

Razona: $-6 \cdot 4 = -24$

$-24 : 4 = -6$

$36 : -6 =$

Razona: $-6 \cdot -6 = 36$

$36 : -6 = -6$

Encuentra el cociente:

17. $6 : (-2)$

18. $9 : 3$

19. $-14 : (-7)$

20. $-4 : 2$

21. $-60 : 12$

22. $54 : -6$

23. $-108 : 9$

24. $-72 : -8$

1–4 Más sobre multiplicar y dividir enteros

■ **Encuentra el signo de la expresión:**

$-3 \bullet (18 : -6) =$

$-3 \bullet -3 = 9$

$4 \bullet (-21 : 2)$

$4 \bullet -3 = -12$

Encuentra el signo de la expresión:

25. $24 : (3 \bullet -4) =$

26. $(6 \bullet 8) : -12 =$

27. $(54 : -3) \bullet -12 =$

28. $(-60 : 12) \bullet -5 =$

29. $-5 \bullet (54 : -9)$

30. $18 \bullet (-27 : -3) =$

1–5 Operaciones con enteros

■ **Encuentra el valor de la expresión:**

$-28 : (13 - 6) =$

$-28 : 7 = -4$

■ $(-36 + 24) \bullet (14 : 7)$

$(-12) \bullet (2)$

-24

Encuentra el valor de la expresión:

31. $50 + (3 \bullet -8) =$

32. $13 - (-14 \bullet 3) =$

33. $(4 \bullet 8) : (20 - 4) =$

34. $(-24 + 20) : (-40 - (-38)) =$

35. $(54 + 6) : (-7 - 3) =$

36. $(35 : 5) \bullet (-72 : 9) =$

37. $(24 : -6) \bullet (52 : -2) =$

38. $-12 \bullet (36 : -9) =$

CAPÍTULO 1

Prueba del capítulo

Identifica un número positivo o negativo que represente cada situación:

1. 30 °C bajo cero.

2. Un depósito bancario de $ 2 300.

3. Una pérdida de altura de 5 metros.

Dibuja fichas amarillas (+1) o rojas (–1) para representar las siguientes multiplicaciones:

4. $5 \cdot -6 =$ **5.** $3 \cdot 8 =$ **6.** $-2 \cdot 7 =$ **7.** $3 \cdot -5 =$ **8.** $2 \cdot 4 =$

Representa cada multiplicación en una recta numérica:

9. $2 \cdot 4 =$ **10.** $3 \cdot -8 =$ **11.** $3 \cdot -5 =$ **12.** $-2 \cdot 7 =$ **13.** $5 \cdot 6 =$

Encuentra los productos:

14. $10 \cdot -13 =$ **15.** $8 \cdot -22 =$ **16.** $-13 \cdot -17 =$ **17.** $20 \cdot 20 =$

18. $18 \cdot -4 =$ **19.** $7 \cdot 13 =$ **20.** $-43 \cdot -13 =$ **21.** $-21 \cdot 7 =$

Encuentra los cocientes:

22. $-48 : 6 =$ **23.** $63 : 7 =$ **24.** $-72 : 4 =$ **25.** $-24 : -3 =$

26. $36 : -4 =$ **27.** $35 : 5 =$ **28.** $48 : -3 =$ **29.** $64 : 8 =$

Encuentra el valor de cada expresión:

30. $(-15 \cdot 3) : 9 =$ **31.** $5 \cdot (125 : -25) =$ **32.** $(-200 \cdot -4) : 8 =$

33. $-2 \cdot (56 : -7) =$ **34.** $(7 \cdot 24) : -6 =$ **35.** $-4 \cdot (-81 : -3) =$

36. $(72 \cdot 4) : -9 =$ **37.** $3 \cdot (600 : 20) =$ **38.** $(7 - 40) \cdot (-37 - 3) =$

39. $-5 + (-12 \cdot -4) =$ **40.** $2 - (-4 \cdot -8) =$ **41.** $(20 : 5) \cdot 36$

42. $(37 \cdot 4) : -2$ **43.** $(-12 \cdot 5) + (54 : 9)$ **44.** $(18 : -6) \cdot 27 =$

45. $(90 : -3) : -6$ **46.** $-(-2 + 77) \cdot 5$

Evaluación acumulativa

CAPÍTULO 1

Capítulo 1

1. De las siguientes afirmaciones la única verdadera es:

A) Mientras más a la izquierda esté la representación de un número en la recta numérica, mayor es el número.
B) La adición de dos números de distinto signo da siempre un número negativo.
C) –5 más –7 es positivo porque "menos con menos da más".
D) Todas las alternativas son falsas.

2. Al resolver la división –91 : –7 se obtiene:

A) –14
B) 14
C) Esa división no tiene solución en $\mathbb{Z}$.
D) Ninguna de las anteriores.

3. La regla que usamos para multiplicar enteros establece:

A) Que hay que multiplicar los valores absolutos de los números.
B) Que si los números son de distinto signo el resultado es negativo.
C) Que para la división se ocupa la misma ley de los signos.
D) Que todas las alternativas son verdaderas.

4. Al resolver la sustracción –43 –23 se obtiene:

A) –66 **C)** 20
B) –20 **D)** 66

5. Si la regla es sumar 7 para llegar al próximo término, ¿cuáles son los enteros que faltan en este patrón?
–33, –26,_____, –12, –5, _____, 9

A) –19, –2 **C)** –19, 0
B) –17, 0 **D)** –19, 2

6. Calcula la suma entre el producto de 11 • –5 y –6 • –6.

7. Calcula la suma entre los dos siguientes productos: 11 • –5 y –6 • –8

8. Paula desea dividir 18 bolitas en partes iguales entre ella y 5 de sus amigos. ¿Cuántas bolitas le corresponden a cada persona?

9. Calcula el valor de 11 • –5 y –6 • –6

A) 97

B) –19

10. Haz un dibujo que represente la ubicación de un objeto a 5 metros bajo el nivel del mar.

11. El cociente entre –90 : (–6 • –5) es:

12. La diferencia entre (–4 • 8) y (12 • 3) es:

13. El producto entre –5 y (18 : –3) es:

14. El cociente entre (–225 : 5) y 9 es:

15. El valor de (–125 : 5) • (40 –10) es:

Responde verdadero (V) o falso(F)

16. _____ El producto de –12 • 6 es igual a –72.

17. _____ El resultado de la expresión 3 – (–15 + 12) es 6.

18. _____ El cociente de dos enteros que tienen signos diferentes es positivo.

CAPÍTULO

2 Potencias

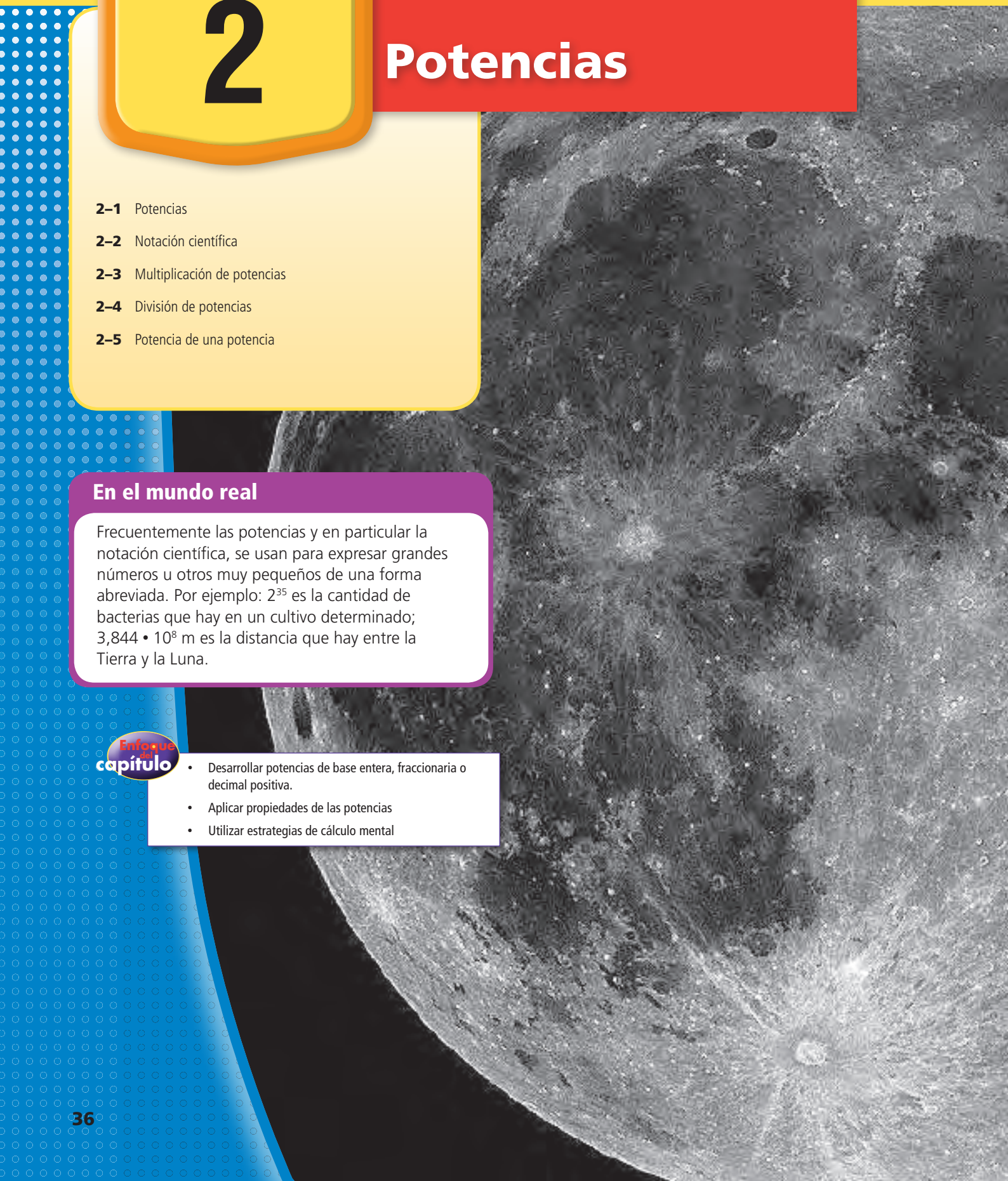
2–1 Potencias

2–2 Notación científica

2–3 Multiplicación de potencias

2–4 División de potencias

2–5 Potencia de una potencia



En el mundo real

Frecuentemente las potencias y en particular la notación científica, se usan para expresar grandes números u otros muy pequeños de una forma abreviada. Por ejemplo: 2^{35} es la cantidad de bacterias que hay en un cultivo determinado; $3{,}844 \cdot 10^8$ m es la distancia que hay entre la Tierra y la Luna.

Enfoque del capítulo

- Desarrollar potencias de base entera, fraccionaria o decimal positiva.
- Aplicar propiedades de las potencias
- Utilizar estrategias de cálculo mental

¿Estás listo?

Vocabulario

Elige el término de la lista que complete mejor cada enunciado:

1. La _____ es la forma abreviada de escribir la _____ de un número por sí mismo en forma reiterada.

2. La _____ indica cuál es el número que se debe multiplicar.

3. El _____ indica cuántas veces se debe multiplicar el número de la base.

4. Un _____ es el que se puede expresar como fracción.

base
potencia
número racional
exponente
valor de la potencia
multiplicación

Multiplicación reiterada

Expresa como potencias las siguientes multiplicaciones:

5. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$

6. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$

7. $8 \cdot 8 \cdot 8 =$

8. $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 =$

9. $9 \cdot 9 =$

10. $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$

Desarrollo de potencias

Desarrolla las siguientes potencias:

11. $2^5 =$

12. $3^4 =$

13. $5^5 =$

14. $0^3 =$

15. $6^4 =$

16. $5^5 =$

17. $4^6 =$

18. $3^6 =$

Valor de la potencia

Calcula el valor de cada potencia:

19. $3^3 =$

20. $2^4 =$

21. $5^3 =$

22. $4^3 =$

23. $7^3 =$

24. $2^5 =$

25. $3^4 =$

26. $5^4 =$

27. $2^6 =$

28. $3^2 =$

29. $3^5 =$

30. $4^4 =$

31. $9^3 =$

32. $2^7 =$

33. $8^3 =$

34 $16^2 =$

CAPÍTULO 2

Vistazo previo

De dónde vienes

Antes

- Usaste la multiplicación para resolver problemas con números naturales y enteros.
- Escribiste números grandes en forma estándar.
- Desarrollaste una potencia.

En este capítulo

Estudiarás

- Cómo multiplicar potencias usando propiedades.
- Cómo dividir potencias usando propiedades.
- Escribir números en notación científica.

Hacia dónde vas

Puedes usar las destrezas aprendidas en este capítulo

- Para expresar distancias entre objetos y tamaños de objetos en disciplinas científicas como Astronomía y Biología.
- Para resolver problemas en las clases de Matemáticas y Ciencias.

Vocabulario

potencias
base
exponente
notación científica
número racional
multiplicación de potencias
potencia de base 2

Conexiones de vocabulario

Considera lo siguiente para familiarizarte con algunos de los términos del vocabulario. Puedes consultar el capítulo o un diccionario si lo deseas:

1. El nombre **"notación científica"** se debe a que se usa en ciencias para escribir números muy grandes o números muy pequeños como el peso del ala de una libélula.

2. El término "racional" alude a fracción o parte de un todo. El nombre "**número racional**" es porque estos números se pueden escribir como una razón o división entre dos números enteros.

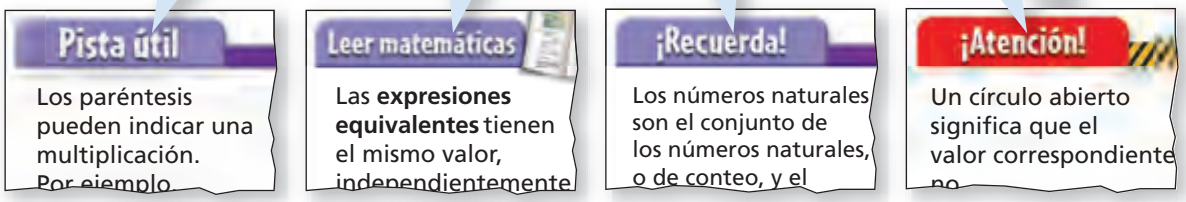
Leer y escribir matemáticas

CAPÍTULO 2

Estrategia de redacción: Usa tu libro para alcanzar el éxito

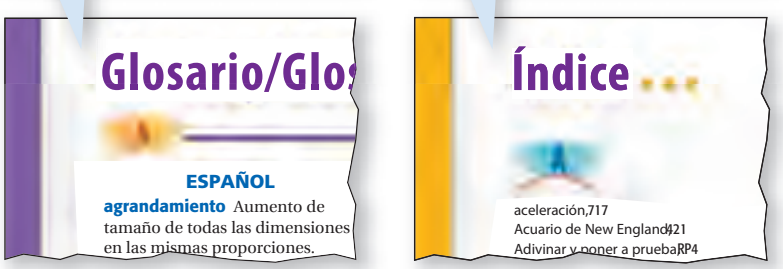
Comprender cómo está organizado tu libro de texto te ayudará a ubicar y usar información útil.

Al leer un problema de ejemplo, presta atención a las notas al margen, como *Pista útil, Leer matemáticas* y *¡Atención!* Estas notas te ayudarán a comprender conceptos y a evitar errores comunes.



El glosario se encuentra al final de tu libro de texto. Úsalo para buscar definiciones y ejemplos de palabras o propiedades que no te resultan familiares.

El índice se encuentra al final de tu libro de texto. Úsalo para buscar la página donde se enseña un concepto en particular.



Inténtalo

Puedes usar tu libro en las siguientes situaciones:

1. Usa el glosario para hallar las definiciones de *trazar una bisectriz y factores.*
2. Escribe una lista de las notas que aparecen al margen de *Leer matemáticas* para comprender el lenguaje matemático en forma correcta.
3. Escribe una lista por separado de las notas que aparecen al margen como *Pista útil, ¡Recuerda!* y *¡Atención!* para que te ayuden a comprender los conceptos
4. Usa el índice para hallar las páginas donde aparecen las palabras *potencias y notación científica.*

CAPÍTULO 2–1

Potencias

Aprender a representar números mediante exponentes.

Vocabulario

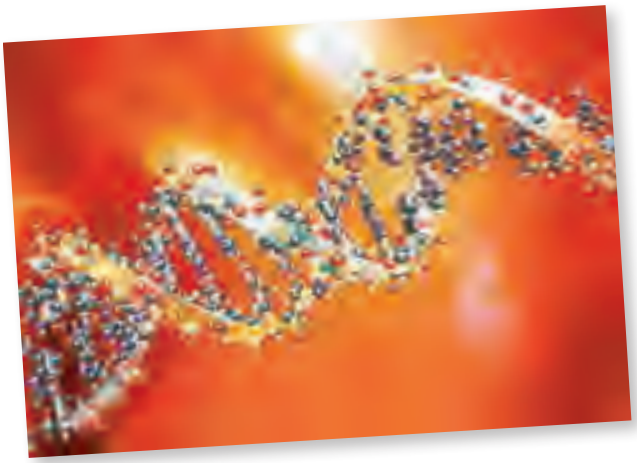
potencia

exponente

base

Una molécula de ADN se copia a sí misma al dividirse por la mitad. Cada mitad se convierte en una molécula idéntica a la original. Las moléculas continúan dividiéndose de modo que las dos primeras se vuelven cuatro, estas se vuelven ocho, y así sucesivamente.

Cada vez que el ADN se copia, la cantidad de moléculas se duplica. Después de cuatro copias, la cantidad de moléculas es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.



La estructura del ADN puede compararse con una escalera en caracol.

Esta multiplicación también se puede escribir como **potencia**, mediante una *base* y un *exponente*. El **exponente** indica cuántas veces debemos usar la **base** como factor.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

Exponente

Base

EJEMPLO 1 Hallar cada valor.

A 5^2

$5^2 = 5 \cdot 5$

$= 25$

Usa 5 como factor 2 veces.

B $(-2)^5$

$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

$= (-32)$

Usa (−2) como factor 5 veces.

C $(-2)^4$

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

$= 16$

Usa (−2) como factor 4 veces.

En los ejemplos B y C se usa la misma base, un número entero negativo. Observa que en B el exponente es impar y el valor de la potencia es negativo. En C el exponente es par y el valor de la potencia es positivo.

D 25^1

$25^1 = 25$

Cualquier número elevado a la primera potencia es igual a ese mismo número.

E 8^0

$8^0 = 1$

Cualquier número distinto de cero, elevado a cero es igual a 1.

Leer matemáticas

2^4 quiere decir "la cuarta potencia de 2" o "2 elevado a la cuarta potencia".

Cualquier número elevado a la potencia cero, excepto cero, es igual a 1.

$6^0 = 1$ $10^0 = 1$ $19^0 = 1$

Cero elevado a la potencia cero es *indefinido*, lo que significa que no existe.

Para expresar un número natural como potencia, se escribe como producto de factores iguales. Luego se escribe el producto usando la base y un exponente. Por ejemplo: $10\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$.

EJEMPLO 2 Expresar números naturales como potencias

Escribe cada número usando un exponente y la base dada:

A **49, base 7**

$49 = 7 \cdot 7$ *7 se usa como factor 2 veces.*

$= 7^2$

B **81, base 3**

$81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$= 34$

3 se usa como factor 4 veces

EJEMPLO 3 Aplicación a la Física

La escala de Richter mide la fuerza o magnitud de un terremoto. Cada categoría de la tabla es 10 veces más intensa que la categoría inmediatamente anterior. Por ejemplo, un terremoto grande es 10 veces más intenso que uno moderado. ¿Cuántas veces más intenso es un terremoto fuerte que uno moderado?

Fuerza de los terremotos (escala Richter)	
Categoría	**Magnitud**
Moderado	5,0 - 5,9
Fuerte	6,0 - 6,9
Mayor	7,0 - 7,9
Gran terremoto	8,0 - 9,9

Un terremoto con una magnitud de 6 es 10 veces más intenso que uno con una magnitud de 5.

Un terremoto con una magnitud de 7 es 10 veces más intenso que uno con una magnitud de 6.

Un terremoto con una magnitud de 8 es 10 veces más intenso que uno con una magnitud de 7.

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1\,000$$

Un gran terremoto tiene una magnitud 1 000 veces mayor que uno moderado.

CONEXIÓN con Ciencias Sociales

Alto Río y sus ausencias: Si existe un símbolo del drama del terremoto del 27F, ese es el edificio Alto Río, ubicado en la ciudad de Concepción. La construcción, inaugurada solo un año antes del terremoto, se desplomó hacia uno de sus lados. El accidente mató a 8 personas y dejó heridas a otras 70, y dio lugar a una desesperada operación de rescate que duró varios días.

Razonar y comentar

1. **Describe** la relación entre 3^5 y 3^6.
2. **Indica** qué potencia de 8 es igual a 2^6. Explica.
3. **Explica** por qué cualquier número elevado a la primera potencia es igual a ese mismo número.

2–1 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1 **Halla cada valor.**

1. 2^5 **2.** 3^3 **3.** 6^2 **4.** 9^1 **5.** 10^6

Ver Ejemplo 2 **Escribe cada número usando un exponente y la base dada.**

6. 25, base 5 **7.** 16, base 4 **8.** 27, base 3 **9.** 100, base 10

Ver Ejemplo 3 **10.** **Física** En la escala de Richter, un gran terremoto es 10 veces más intenso que uno mayor, y uno mayor es 10 veces más intenso que uno fuerte. ¿Cuántas veces más intenso es un gran terremoto que uno fuerte?

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1 **Halla cada valor.**

11. $(-11)^2$ **12.** 3^5 **13.** $(-8)^3$ **14.** 4^3 **15.** 3^4

16. 2^5 **17.** $(-5)^1$ **18.** 2^3 **19.** 5^3 **20.** 30^1

Ver Ejemplo 2 **Escribe cada número usando un exponente y la base dada.**

21. 81, base 9 **22.** 4, base 4 **23.** 64, base 4

24. 1, base 7 **25.** 32, base 2 **26.** 128, base 2

27. 1 600, base 40 **28.** 2 500, base 50 **29.** 100 000, base 10

Ver Ejemplo 3 **30.** En un juego, uno de los concursantes tenía un puntaje inicial de un punto. Triplicó su puntaje en cada turno durante cuatro turnos. Escribe como potencia su puntaje después de cuatro turnos. Luego halla el puntaje.

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Representa cada número con potencias de dos maneras distintas.

31. 81 **32.** 16 **33.** 64 **34.** 729 **35.** 625

Compara. Escribe <, > o =.

36. $(-4)^2 \square 7^0$ **37.** $2^3 \square 3^2$ **38.** $64 \square 4^3$ **39.** $8^3 \square 7^4$

40. $10\,000 \square 10^5$ **41.** $6^5 \square 3\,000$ **42.** $9^3 \square 3^6$ **43.** $(5)^4 \square 7^0$

44. Para calcular el volumen de un cubo, halla la tercera potencia de la longitud de una de sus aristas. ¿Cuál es el volumen de un cubo cuya arista mide 6 cm de largo?

45. **Patrones** Domingo decidió ahorrar $ 800 el primer día y triplicar cada día la cantidad que ahorra. ¿Cuánto ahorrará el séptimo día?

46. **Biología** Un cachorro de oso panda pesa un promedio de 4 kg al mes de nacer. ¿Cuántos kg podría pesar un panda de un año si su peso aumenta a la potencia de 5 en un año?

47. **Ciencias Sociales** Si la población de las ciudades de la tabla se duplica cada 10 años, ¿qué población tendrán estas ciudades en 2034?

Ciudad	Población Nº de habitantes
Aysén	89 986
Valparaíso	1 539 852

48. **Razonamiento crítico** Explica por qué $6^3 \neq 3^6$.

49. Amalia está haciendo una colcha de retazos con un patrón de anillos. En el anillo central, usa cuatro estrellas. En cada uno de los siguientes tres anillos, usa tres veces más estrellas que en el anillo anterior. ¿Cuántas estrellas usa en el cuarto anillo? Escribe la respuesta usando una potencia y halla su valor.

Ordena cada conjunto de números del menor al mayor.

50. $29, 2^3, 6^2, 16^0, 3^5$

51. $4^3, 33, 6^2, 5^3, 10^1$

52. $7^2, 2^4, 80, 10^2, 1^8$

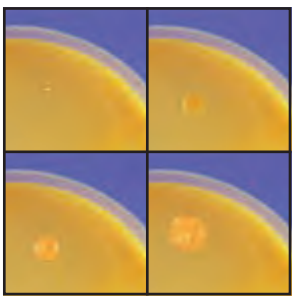
53. $2, 1^8, 3^4, 16^1, 0$

54. $5^2, 21, 11^2, 13^1, 1^9$

55. $2^5, 3^3, 9, 5^2, 8^1$

56. Dos semanas antes del cumpleaños de Javiera, sus padres le regalaron 1 peso. Tienen planeado duplicar la cantidad de pesos que recibe cada día hasta el día de su cumpleaños. Usa exponentes para escribir un patrón que represente la cantidad de pesos que Javiera recibirá los primeros 5 días. Luego usa el patrón para predecir cuántos pesos recibirá el día de su cumpleaños.

57. **Biología** Las células de ciertas clases de bacterias se dividen cada 30 minutos. Si el proceso empieza con una sola célula, ¿cuántas células habrá después de 1 hora? ¿Después de 2 horas? ¿ Después de 3 horas?



Las bacterias se dividen separándose en dos. Este proceso se llama fisión binaria.

58. **¿Dónde está el error?** Un estudiante escribió 64 como $8 \cdot 2$. ¿Qué error cometió el estudiante?

59. **Escríbelo** ¿Es 2^5 mayor o menor que 3^3? Explica tu respuesta.

60. **Desafío** ¿Cuál es la longitud de la arista de un cubo si su volumen es de 1 000 metros cúbicos?

Repaso

61. ¿Cuál es el valor de 4^6?

(A) 24 (B) 1,024 (C) 4,096 (D) 16,384

62. ¿Cuál de las siguientes opciones NO es igual a 64?

(A) 6^4 (B) 4^3 (C) 2^6 (D) 8^2

Calcula

63. $2^3 + 3^2$.

64. $15 + 27 + 5 + 3 + 11 + 16 + 7 + 4$

65. $2 + 6 + 5 + 7 + 100 + 1 + 75$

Identifica un posible patrón y úsalo para escribir los siguientes tres números:

66. 100, 91, 82, 73, 64, . . .

67. 17, 19, 22, 26, 31, . . .

68. 2, 6, 18, 54, 162, . . .

CAPÍTULO 2–2

Notación científica

Aprender a escribir usando notación científica.

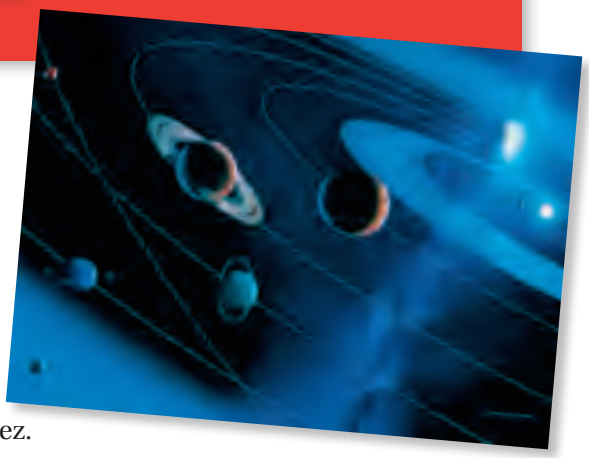
Vocabulario

notacion científica

La distancia de Venus al Sol es mayor que 100 000 000 de kilómetros. Puedes escribir este número como potencia de diez usando una base diez y un exponente.

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^8$

Potencia de diez



En la tabla se muestran varias potencias de diez.

Potencia de 10	Significado	Valor
10^1	10	10
10^2	10 • 10	100
10^3	10 • 10 • 10	1 000
10^4	10 • 10 • 10 • 10	10 000

Los planetas de nuestro Sistema Solar están separados por millones de kilómetros. Estas distancias, generalmente se escriben en **notación científica**.

Puedes hallar el producto de un número y una potencia de diez multiplicando o moviendo el punto decimal del número. Con potencias de diez con exponentes positivos, mueve el punto decimal hacia la derecha.

EJEMPLO 1 Multiplicar por potencias de diez

Multiplica $137 \cdot 10^3$.

¡Recuerda!

Un factor es un número que se multiplica por otro para obtener un producto.

A **Método 1: Desarrollar la potencia**

$137 \cdot 10^3 = 137 \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10)$ *Multiplica 10 por sí mismo 3 veces.*

$= 137 \cdot 1\,000$ *Multiplica.*

$= 137\,000$

B **Método 2: Usar el cálculo mental**

$137 \cdot 10^3 = 137\,000$

$= 137\,000$ 3 lugares

Mueve el punto decimal 3 lugares. (Necesitas agregar 3 ceros).

En **notación científica**, 17 900 000 se escribe como

EJEMPLO 2 Escribir números usando notación científica

Escribe 9 580 000 en notación científica.

$9\,580\,000 = 9\,580\,000$

Mueve el punto decimal para obtener un número entre 1 y 10.

$= 9{,}58 \cdot 10^6$

El exponente es igual a la cantidad de lugares que se mueve el punto decimal.

EJEMPLO 3 Escribir números en forma estándar

Plutón está aproximadamente a $5{,}9 \cdot 10^9$ kilómetros del Sol. Escribe esta distancia en forma estándar.

$5{,}9 \cdot 5^9 = 5\,900\,000\,000$

$= 5\,900\,000\,000$

Como el exponente es 9, mueve la coma decimal 9 lugares hacia la derecha.

Plutón está aproximadamente a 5 900 000 000 kilómetros del Sol.

EJEMPLO 4 Comparar números en notación científica

Mercurio está a $9{,}17 \cdot 10^7$ kilómetros de la Tierra. Júpiter está a $6{,}287 \cdot 10^8$ kilómetros de la Tierra. ¿Qué planeta está más cerca de la Tierra?

Para comparar números escritos en notación científica, compara primero los exponentes. Si los exponentes son iguales, compara la porción decimal de los números.

Mercurio: $9{,}17 \cdot 10^7$ km

Júpiter: $6{,}287 \cdot 10^8$ km

Observa que $7 < 8$. Por lo tanto, $9{,}17 \cdot 10^7 < 6{,}287 \cdot 10^8$.

Mercurio está más cerca de la Tierra que Júpiter.

Razonar y comentar

1. **Indica** si $15 \cdot 10^9$ está escrito en notación científica. Explica.
2. **Compara** $4 \cdot 10^3$ y $3 \cdot 10^4$. Explica cómo sabes cuál es mayor.

2-2 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

Multiplica.

1. $15 \cdot 10^2$ **2.** $12 \cdot 10^4$ **3.** $208 \cdot 10^3$ **4.** $113 \cdot 10^7$

Ver Ejemplo 2

Escribe cada número usando notación científica.

5. 3 600 000 **6.** 214 000 **7.** 8 000 000 000 **8.** 42 000

Ver Ejemplo 3

9. Química Una gota de agua contiene alrededor de $2{,}0 \cdot 10^{21}$ moléculas. Escribe este número en forma estándar.

Ver Ejemplo 4

10. Astronomía El diámetro de Neptuno es de $4{,}9528 \cdot 10^7$ metros. El diámetro de Marte es de $6{,}7868 \cdot 10^6$ metros. ¿Qué planeta tiene el diámetro más grande?

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

Multiplica.

11. $21 \cdot 10^2$ **12.** $8 \cdot 10^4$ **13.** $25 \cdot 10^5$ **14.** $40 \cdot 10^4$

15. $268 \cdot 10^3$ **16.** $550 \cdot 10^7$ **17.** $2\,115 \cdot 10^5$ **18.** $70\,030 \cdot 10^1$

Ver Ejemplo 2

Escribe cada número usando notación científica.

19. 428 000 **20.** 1 610 000 **21.** 3 000 000 000 **22.** 60 100

23. 52 000 **24.** $29{,}8 \cdot 10^7$ **25.** 8 900 000 **26.** $500 \cdot 10^3$

Ver Ejemplo 3

27. Historia Los antiguos egipcios martillaban el oro hasta formar láminas tan delgadas que se necesitaban $3{,}67 \cdot 10^5$ láminas para formar una pila de 2,5 centímetros de alto. Escribe la cantidad de láminas en forma estándar.

Ver Ejemplo 4

28. Astronomía Marte está a $7{,}83 \cdot 10^7$ kilómetros de la Tierra. Venus está a $4{,}14 \cdot 10^7$ kilómetros de la Tierra. ¿Qué planeta está más cerca de la Tierra?

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Encuentra el número o los números que faltan.

29. $24\,500 = 2{,}45 \cdot 10^{\square}$ **30.** $16\,800 = \square \cdot 10^4$ **31.** $\square = 3{,}40 \cdot 10^2$

32. $280\,000 = 2{,}8 \cdot 10^{\square}$ **33.** $5{,}4 \cdot 10^8 = \square$ **34.** $60\,000\,000 = \square \cdot 10^{\square}$

Indica si cada número está escrito en notación científica. Luego, ordena los números del menor al mayor.

35. $43{,}7 \cdot 10^6$ **36.** $1 \cdot 10^7$ **37.** $2{,}9 \cdot 10^7$ **38.** $305 \cdot 10^6$

39. Física En el vacío, la luz viaja a una velocidad de alrededor de trescientos mil kilómetros por segundo. Escribe esta velocidad usando notación científica.

CONEXIÓN con las Ciencias

40. Las rocas terrestres más antiguas se formaron durante el eón Arcaico. Calcula la duración de este eón. Escribe tu respuesta en notación científica.

41. Los dinosaurios vivieron durante la era Mesozoica. Calcula la duración de la era Mesozoica. Escribe tu respuesta en notación científica.

42. Los tropites eran animales marinos prehistóricos cuyos restos fósiles pueden usarse para calcular la fecha de las formaciones rocosas en las que se encuentran. Estos fósiles se conocen como *fósiles guía*. Los tropites vivieron entre $2{,}08 \cdot 10^8$ y $2{,}30 \cdot 10^8$ años atrás. ¿Durante qué periodo geológico vivieron?

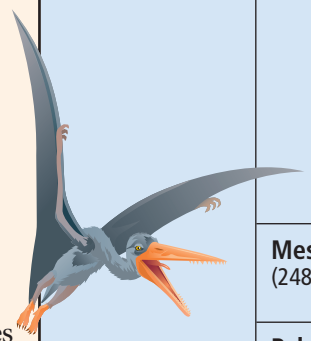
43. **Escríbelo** Explica por qué la notación científica es especialmente útil en las Ciencias.

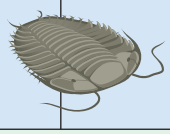
44. **Desafío** Nosotros vivimos en la época del Holoceno. Escribe la edad de esta época en notación científica.

Escala de tiempo geológico

Eón	Era	Periodo
Fanerozoico (540 maa*–presente)	**Cenozoica** (65 maa–presente)	**Cuaternario** (1,8 maa–presente) **Época del Holoceno** (11 000 años atrás–presente) **Época del Pleistoceno** (1,8 maa–11 000 años atrás) **Terciario** (65 maa–1,8 maa) **Época del Plioceno** (5,3 maa–1,8 maa) **Época del Mioceno** (23,8 maa–5,3 maa) **Época del Oligoceno** (33,7 maa–23,8 maa) **Época del Eoceno** (54,8 maa–33,7 maa) **Época del Paleoceno** (65 maa–54,8 maa)
	Mesozoica (248 maa–65 maa)	**Cretásico** (144 maa–65 maa) **Jurásico** (206 maa–144 maa) **Triásico** (248 maa–206 maa)
	Paleozoica (540 maa–248 maa)	**Pérmico** (290 maa–248 maa) **Pensilvánico** (323 maa–290 maa) **Mississíppico** (354 maa–323 maa) **Devónico** (417 maa–354 maa) **Silúrico** (443 maa–417 maa) **Ordovícico** (490 maa–443 maa) **Cámbrico** (540 maa–490 maa)
Proterozoico (2 500 maa–540 maa)		
Arcaico (3 800 maa–2 500 maa)		
Hadeano (4 600 maa–3 800 maa)		

*maa = millones de años atrás





Repaso

45. En su informe sobre los dinosaurios, Lucía escribió que el periodo Jurásico fue hace $1{,}75 \cdot 10^8$ años. Según el informe ¿hace cuántos años fue el periodo Jurásico?

Ⓐ 1 750 000 Ⓑ 17 500 000 Ⓒ 175 000 000 Ⓓ 17 500 000 000

46. ¿Cuál de las siguientes opciones es 2 430 000 en notación científica?

Ⓐ $243 \cdot 10^4$ Ⓑ $24{,}3 \cdot 10^5$ Ⓒ $2{,}43 \cdot 10^5$ Ⓓ $2{,}43 \cdot 10^6$

Identifica un posible patrón y úsalo para escribir los siguientes tres números.

47. 19, 16, 13, 10, ☐, ☐, ☐, . . .

48. 5, 15, 45, 135, ☐, ☐, ☐, . . .

Escribe cada número usando un exponente y la base dada:

49. 625, base 5

50. 512, base 8

51. 512, base 2

CAPÍTULO 2

¿Listo para seguir?

Prueba de las lecciones 2–1 y 2–2

2–1 Potencias

Halla cada valor:

1. 8^4 **2.** 7^3 **3.** 4^5 **4.** 6^2

5. El número de bacterias de una muestra se duplica a cada hora. ¿Cuántas células de bacterias habrá después de 8 horas si al comienzo hay una célula? Escribe tu respuesta usando potencia.

Calcula:

6. $8 - 12 : (9 - 3)$ **7.** $54 - 6\ \ 3 + 4^2$ **8.** $4 - 24 : 2^3$ **9.** $4(3 + 2)^2 - 9$

Calcula el valor de las siguientes potencias:

10. $4^4 =$ **11.** $(-7)^3 =$ **12.** $5^4 =$ **13.** $(-6)^4 =$

14. $(-8)^3 =$ **15.** $(-2)^{11} =$ **16.** $\left[\frac{-7}{8}\right]^3$ **17.** $(0{,}9)^2 =$

18. $\left[\frac{3}{4}\right]^4 =$ **19.** $(-14)^3$ **20.** -4^5 **21.** 3^3

2–2 Notación científica

Multiplica.

22. $358 \cdot (10)$ **23.** $358 \cdot (1000)$ **24.** $358 \cdot (100\,000)$

25. $456 \cdot 10^5$ **26.** $9{,}3 \cdot 10^2$ **27.** $0{,}36 \cdot 10^8$

28. $24 \cdot 10^3$ **29.** $20 \cdot 10^5$ **30.** $318 \cdot 10^3$

31. $2\,180 \cdot 10^4$ **32.** $2\,508 \cdot 10^5$ **33.** $5\,555 \cdot 10^6$

Escribe cada número en notación científica:

34. 8 400 000 **35.** 521 000 000 **36.** 29 000

37. 387 000 **38.** 2 056 000 **39.** 65 400 000

40. 1 560 **41.** 7 000 000 000 **42.** $206{,}7 \cdot 10^3$

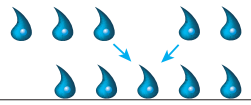
43. En mayo de 2005 la población mundial era de más de 6 446 000 000 personas ¡y aumentaba a una velocidad de 140 personas por minuto! Escribe esta población en forma de notación científica.

Enfoque en resolución de problemas

Resuelve

• Elige una operación: suma o resta

Para decidir si debes sumar o restar al resolver un problema, debes determinar qué acción se desarrolla en el problema. Si se trata de combinar o juntar números, debes sumar. Si se trata de quitar o de hallar qué tan alejados están dos números, debes restar.

Acción	Operación	Representación gráfica
Combinar o juntar	Suma	
Separar o quitar	Resta	
Comparar o hallar la diferencia	Resta	

Lee cada problema. Determina la acción que se desarrolla en cada uno. Elige una operación para resolver el problema y resuélvelo.

La mayoría de los huracanes que aparecen sobre el océano Atlántico, el mar Caribe o el golfo de México lo hacen entre junio y noviembre. Desde 1886, un huracán ha aparecido cada mes, excepto en abril.

Número de huracanes fuera de temporada desde 1886

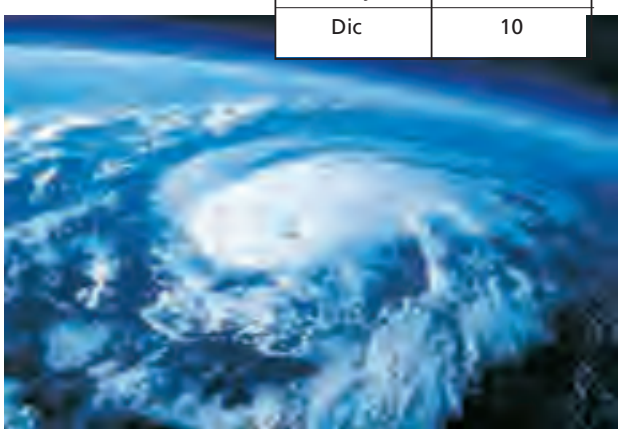
Mes	Número
Ene	1
Feb	1
Mar	1
May	14
Dic	10

Usa la tabla para resolver los problemas 1 y 2.

1. ¿Cuántos huracanes han aparecido fuera de temporada?

2. ¿Por cuántos sobrepasan los huracanes que aparecieron en mayo a los que aparecieron en diciembre?

3. Durante la temporada de huracanes del año 2000, recibieron nombre 14 tormentas. Ocho se convirtieron en huracanes y otras tres en huracanes mayores. ¿Cuántas de estas tormentas no se convirtieron en huracanes ni en huracanes mayores?



CAPÍTULO
2–3 Multiplicación de potencias

Aprender a multiplicar potencias.

Vocabulario

multiplicación de potencias

potencia de base 2

El profesor de matemáticas de Rocío le pide que multiplique $8 \cdot 4 \cdot 2$ y que exprese su resultado como potencia.

Observando esta **multiplicación**, Rocío descubre que cada factor se puede expresar como **potencia de base 2** y escribe:

$$\begin{array}{ccccccc} 8 & \cdot & 4 & \cdot & 2 & = & 64 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 2^3 & \cdot & 2^2 & \cdot & 2^1 & & \\ \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2} & \cdot & \underbrace{2 \cdot 2} & \cdot & \underbrace{2} & = & 2^{3+2+1} = 2^6 \end{array}$$

Rocío encontró una relación entre los exponentes cuando la potencia es de bases iguales ya que $64 = 2^6$

EJEMPLO 1 Multiplicar las potencias de igual base entera

A $3^3 \cdot 3^5 = 3^{3+5} = 3^8 = 6561$

B $(-2)^2 \cdot (-2)^4 = (-2)^6 = 64$

C $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^5 = -243$

Recuerda que el valor de una potencia de base negativa es positivo si el exponente es par y es negativo si el exponente es impar.

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-8)$

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

D $5^3 \cdot 5^2 = 5^{3+2} = 5^5$

Si el valor de la potencia es un número muy grande, usa la notación de potencia.

E $(-3)^7 \cdot (-3)^4 = (-3)^{11}$

En este caso también usa la notación de potencia.

EJEMPLO 2 Multiplicación de potencias de igual base fraccionaria o decimal positivo

A $\left[\frac{3}{4}\right]^2 \cdot \left[\frac{3}{4}\right]^3 = \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\right] \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\right] = \left[\frac{3}{4}\right]^5$

B $\left[\frac{15}{3}\right]^3 \cdot \left[\frac{15}{3}\right]^3 = \left[\frac{15}{3}\right]^6 = 5^6$

C $\left[\frac{-2}{5}\right]^3 \cdot \left[\frac{-2}{5}\right]^4 = \left[\frac{-2}{5}\right]^{3+4} = \left[\frac{-2}{5}\right]^7$

D $\left[\frac{-4}{5}\right]^2 \cdot \left[\frac{-4}{5}\right]^6 = \left[\frac{-4}{5}\right]^{2+6} = \left[\frac{4}{5}\right]^8$

E $(0{,}5)^2 \cdot (0{,}5)^3 = (0{,}5)^5 = 0{,}03125$

EJEMPLO 3 Multiplicación de potencias de igual exponente

A $3^2 \cdot 4^2 = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$

$(3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4) = (3 \cdot 4)^2$

Multiplica las bases y conserva el exponente.

B $(-2)^3 \cdot (4)^3 = (-2 \cdot 4)^3 = (-8)^3$

C $(-2)^5 \cdot (-3)^5 = (-2 \cdot -3) = 6^5$

D $\left[\frac{2}{5}\right]^3 \cdot \left[\frac{10}{8}\right]^3 = \left[\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{10}^{\cancel{2}^{1}}}{\cancel{8}_{4}}\right]^3 = \left[\frac{1}{2}\right]^3$

Razonar y comentar

1. Si a y b son números racionales y n, m son naturales, **escribe** una expresión general para:

   1. $a^m \cdot a^m =$

   (igual base)

   2. $a^n \cdot b^n =$

   (igual exponente)

2. **Comprueba** si la expresión general que escribiste para el ejercicio anterior se cumple si:

   $a = -3;\ b = 5;\ m = 4$ y $n = 3$

2–3 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

Multiplica potencias de igual base:

1. $(-2)^3 \cdot (-2)^4 =$ **2.** $6^2 \cdot 6^4 =$ **3.** $(-3)^4 \cdot (-3)^5 =$

4. $8^5 \cdot 8^7 =$ **5.** $12^4 \cdot 12^6$ **6.** $(-9)^5 \cdot (-9)^3 \cdot (-9)^4 =$

Ver Ejemplo 2

Multiplica potencias de igual base fraccionaria o decimal positivo:

7. $(0,2) \cdot (0,2)^7 =$ **8.** $\left[\frac{1}{3}\right]^4 \cdot \left[\frac{1}{3}\right]^3 =$ **9.** $\left[\frac{-3}{2}\right]^4 \cdot \left[\frac{-3}{2}\right]^5 =$

10. $(0,8)^6 \cdot (0,8)^3 \cdot (0,8)^5 =$ **11.** $\left[\frac{4}{7}\right]^8 \cdot \left[\frac{4}{7}\right]^5 =$ **12.** $(0,6)^2 \cdot (0,6)^4 \cdot (0,6)^3 =$

Ver Ejemplo 3

Multiplica potencias de igual exponente:

13. $4^3 \cdot 5^3 =$ **14.** $2^5 \cdot 8^5 =$ **15.** $(-3)^2 \cdot 5^2 =$

16. $(0,2)^4 \cdot \left[\frac{2}{3}\right]^4 =$ **17.** $(3)^3 \cdot (0,3)^3 \cdot (3,5)^3 =$ **18.** $(-7)^6 \cdot 8^6 \cdot 3^6 =$

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

Multiplica potencias de igual base:

19. $(-8)^{12} \cdot (-8)^{10} =$ **20.** $7^5 \cdot 7^{15} =$ **21.** $4^2 \cdot 4 \cdot 4^8 =$

22. $(-5)^3 \cdot (-5)^4 \cdot (-5)^5 =$ **23.** $7^5 \cdot 7^6 \cdot 7^2 =$ **24.** $(-2)^6 \cdot (-2) \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^4 =$

Ver Ejemplo 2

Multiplica potencias de igual base fraccionaria o decimal positivo:

25. $\left[\frac{2}{5}\right]^3 \cdot \left[\frac{2}{5}\right]^7 \cdot \left[\frac{2}{5}\right] =$ **26.** $\left[\frac{-3}{8}\right]^2 \cdot \left[\frac{-3}{8}\right]^8 =$ **27.** $(0,008)^5 \cdot (0,008)^3 =$

28. $(1,2)^2 \cdot (1,2)^3 \cdot (1,2)^5 =$ **29.** $(0,02)^4 \cdot (0,02) \cdot (0,02)^2 =$ **30.** $\left[\frac{1}{2}\right]^3 \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^6 \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^8 =$

Ver Ejemplo 3

Multiplica potencias de igual exponente:

31. $5^3 \cdot 2^3 \cdot (-4)^3 =$ **32.** $(0,2)^4 \cdot (0,3)^4 =$ **33.** $\left[\frac{1}{5}\right]^3 \left[\frac{5}{9}\right]^3$

34. $(0,5)^4 \cdot 8^4 =$ **35.** $(-2)^2 \cdot (-3)^2 \cdot \left[-\frac{1}{2}\right]^4 =$ **36.** $3^4 \cdot \left[\frac{4}{15}\right]^4 \cdot \left[\frac{5}{8}\right]^4 =$

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Escribe los siguientes productos como una sola potencia:

37. $7^5 \cdot 7^3 =$ **38.** $(-4)^2 \cdot (-4) \cdot (-4)^8 =$

39. $4^3 \cdot 9^3 =$ **40.** $(-2)^4 \cdot 10^4 =$

41. $\left[\frac{1}{3}\right]^6 \cdot \left[\frac{1}{6}\right]^4 =$ **42.** $0,5^2 \cdot 4^2 =$

43. $0,18^3 \cdot 0,18^3 =$ **44.** $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{16} =$

Encuentra el valor de x en cada caso:

45. $(5 \cdot 3)^x = 1$ **46.** $7^2 \cdot 7^x = 7^6$

47. $x \cdot x^5 = 64$ **48.** $\left[\frac{1}{5}\right]^2 \cdot \left[\frac{5}{3}\right]^2 \cdot \left[\frac{1}{3}\right]^5 \left[\frac{1}{3}\right]^x = \left[\frac{1}{3}\right]^{10}$

49. $x^2 \cdot 0,5^2 = 0,125^2$ **50.** $\left[\frac{2}{3}\right]^3 \cdot x^3 = \left[\frac{1}{3}\right]^3$

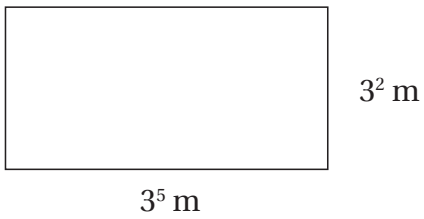
CONEXIÓN con Ciencias

Edificio temporal de oficinas se construye con fardos de papel reciclado en Essen, Alemania

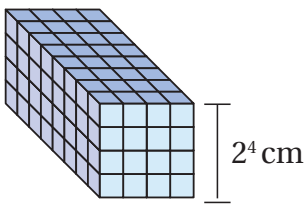
Diseñado por los arquitectos Ben y Daniel Dratz, este edificio de papel es un espacio de trabajo temporal de 190 m^2 compuesto por 550 fardos de papel reciclado comprimido, procedentes de los supermercados de la zona. Los hermanos ganaron un subsidio de la Zollverein School of Management and Design (ZSMD) para construir la estructura sobre el terreno de un antiguo complejo minero nombrado Patrimonio de la Humanidad por la UNESCO. A través de este prototipo, los arquitectos quisieron demostrar las posibilidades del papel reciclado como material de construcción.

Resuelve los siguientes problemas expresando el resultado como potencia:

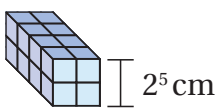
51. ¿Qué potencia representa la medida del área del terreno rectangular según la figura?



52. La figura representa un prisma de base rectangular dividido en cubos de igual dimensión. ¿Cuál es el volumen del prisma?



53. La figura representan una caja rectangular de 2^5 cm de alto que ha sido dividida en 16 cubos de igual dimensión. ¿Cuál es el volumen de cada cubo?



Repaso

54. Dada la igualdad $\left[\frac{1}{3}\right]^5 \cdot \left[\frac{3}{2}\right]^{\square} = \frac{1}{32}$.
¿Qué número debe ir en el recuadro para que se cumpla la igualdad?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

55. Si el largo de un rectángulo mide $0{,}3^5$ m y el ancho $(10/9)^5$ m.
¿Cuál es su área?

(A) 3^5 m^2 (B) 3^{10} m^2 (C) $\left[\frac{1}{3}\right]^5$ m^2 (D) $\left[\frac{1}{3}\right]^{10}$ m^2

Calcula cada multiplicación

56. $3 \cdot (-8) =$ **57.** $18 \cdot 24 =$ **58.** $-5 \cdot -13 =$ **59.** $-8 \cdot 25 =$

Calcula el valor

60. $3 \cdot 2(5 - 8) + 5 \cdot (-3) =$

61. $-[8 - 5 - 4 + (-8 - 7) - (5 + 9)]$

CAPÍTULO
2–4 División de potencias

Aprender a dividir potencias de igual base o igual exponente.

Vocabulario

potencia

base

exponentes

Una piscina para saltos ornamentales con forma de prisma recto rectangular tiene una capacidad de 3^6 m^3 de agua. Si se sabe que la superficie del fondo mide 3^4 m^2, ¿qué profundidad tiene la piscina?

Volumen = Área de la base • altura (o profundidad)

$$\text{Profundidad} = \frac{\text{Volumen}}{\text{área de la base}}$$

$$\text{La profundidad} = \frac{3^6}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 3 \cdot 3 = 3^2$$

Observa que $3^6 : 3^4 = 3^{6-4} = 3^2$

Entonces la profundidad es de 9 m.

Leer matemáticas

Lee "3^2" como tres al cuadrado y "3^3" como tres al cubo.

En general se cumplirá que:

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Para dividir **potencias** de igual base, se conserva la **base** y se restan los **exponentes**.

EJEMPLO 1 División de potencias de igual base

A $13^5 : 13^3 = 13^{5-3} = 13^2$

B $(-15)^7 : (-15)^3 = (-15)^4$

C $\left(\frac{3}{5}\right)^9 : \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^5$

D $\left(\frac{-2}{7}\right)^8 : \left(\frac{-2}{7}\right)^6 = \left(\frac{-2}{7}\right)^2$

E $(0{,}7)^{16} : (0{,}7)^{12} = (0{,}7)^4$

F $(0{,}5)^9 : (0{,}5)^4 = (0{,}5)^5$

EJEMPLO 2 División de potencias de igual exponente

A $8^5 : 2^5 = \frac{8^5}{2^5} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{8}{2} \cdot \frac{8}{2} \cdot \frac{8}{2} \cdot \frac{8}{2} \cdot \frac{8}{2} = \left[\frac{8}{2}\right]^5 = 4^5$

B $(0{,}21)^4 : (0{,}7)^4 = \frac{(0{,}21)^4}{(0{,}7)^4} = \left[\frac{0{,}21}{0{,}7}\right]^4 = (0{,}3)^4$

En general $a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left[\frac{a}{b}\right]^n$

Para dividir potencias de igual exponente se dividen las bases y se conserva el exponente.

C $(-14)^6 : (-7)^6 = ((-14) : (-7))^6 = 2^6$

D $(-24)^3 : 6^3 = ((-24) : 6)^3 = (-4)^3$

EJEMPLO 3 La unidad como división de potencias

A $1 = \frac{3^5}{3^5} = 3^{5-5} = 3^0 \longrightarrow 1 = 3^0$

B $1 = \frac{8^3}{8^3} = 8^{3-3} = 8^0 \longrightarrow 1 = 8^0$

C $1 = \frac{(0{,}6)^7}{(0{,}6)^7} = (0{,}6)^{7-7} = (0{,}6)^0 \longrightarrow 1 = (0{,}6)^0$

D $1 = \frac{(-5)^8}{(-5)^8} = (-5)^0 \longrightarrow 1 = (-5)^0$

En general: $1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{(n-n)} = a^0 = 1, a \neq 0$

Todo número distinto de cero elevado a cero es igual a 1.

Razonar y comentar

1. **Explica** cómo resuelves $9^2 : 3^2 + 8^0$.
2. **Compara** cómo resuelves $8 : 2$, 8^2 y 2^8.
3. **Muestra** cómo resuelves con tus compañeros $5^4 = 25^2$.

2–4 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

Encuentra el valor de:

1. $17^8 : 17^6 =$ **2.** $113^{23} : 113^{23} =$ **3.** $\left[\frac{1}{2}\right]^3 : \left[\frac{1}{2}\right]^2 =$

Ver Ejemplo 2

Encuentra el valor de:

4. $21^3 : 7^3 =$ **5.** $51^4 : 17^4 =$ **6.** $\left[\frac{-2}{4}\right]^3 : \left[\frac{8}{21}\right]^3 =$

7. $(-2)^3 : 5^3 =$ **8.** $18^5 : 6^5 =$ **9.** $(-48)^5 : (6)^5 =$

Ver Ejemplo 3

Escribe una división de potencias

10. $125^0 =$ **11.** $\left[\frac{35}{7}\right]^0 =$ **12.** $(-42)^0 =$

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

Encuentra el valor de las siguientes expresiones:

13. $\left[\frac{2}{3}\right]^{12} : \left[\frac{2}{3}\right]^{10} =$ **14.** $(0{,}84)^{21} : (0{,}84)^{15} =$ **15.** $\left[\frac{-8}{5}\right]^8 : \left[\frac{-8}{5}\right]^7 =$

16. $(2{,}3)^7 : (2{,}3)^4 =$ **17.** $(125)^8 : (125)^8 =$ **18.** $(2{,}3)^7 : (2{,}3)^4 =$

Ver Ejemplo 2

Encuentra el valor de las siguientes expresiones:

19. $\left[\frac{3}{8}\right]^2 : \left[\frac{9}{16}\right]^2 =$ **20.** $\left[\frac{5}{7}\right]^3 : \left[\frac{-25}{28}\right]^3 =$ **21.** $\left[\frac{2}{3}\right]^5 : \left[\frac{10}{3}\right]^5 =$

22. $60^3 : 12^3 =$ **23.** $112^2 : (-16)^2 =$ **24.** $96^4 : 16^4 =$

Ver Ejemplo 3

Escribe como división de potencias:

25. 1 **26.** $(-34)^0$ **27.** 127^0 **28.** $\left[\frac{-4}{5}\right]^0$

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Escribe las siguientes divisiones como una sola potencia:

29. $32^3 : 4^3 =$ **30.** $5^6 : 5 =$

31. $0{,}8^{12} : 0{,}8^7 =$ **32.** $0{,}2^4 : 200^4 =$

33. $0{,}5^4 : \left[\frac{1}{2}\right]^2 =$ **34.** $\left[\frac{-2}{7}\right]^3 : \left[\frac{-4}{14}\right]^3 =$

35. $(-144)^5 : 12^5 =$ **36.** $0{,}06^4 : 0{,}06^2 =$

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Encuentra el valor de x en cada caso:

37. $2^x : 2^3 = 32$

38. $0{,}4^2 : x^2 = 100$

39. $0{,}05^4 : 0{,}05^x = 0{,}000125$

40. $x^2 : 5^2 = 625$

41. $\left[\frac{1}{2}\right]^8 : \left[\frac{1}{2}\right]^x = \left[\frac{1}{2}\right]^4$

42. $3^x : 3^5 = 3^2$

Simplifica si es posible. Escribe el producto o el cociente como una potencia:

43. $\frac{4^7}{4^3}$

44. $\frac{10^{18}}{10^9}$

45. $x^3 \cdot x^7$

46. $2 \cdot 2^4$

47. $\frac{y^8}{y^8}$

Resuelve los siguientes problemas, expresando el resultado como potencia:

48. **Medición** El ancho de un terreno mide 7^3 m y su superficie mide 7^8 m^2. ¿Cuánto mide el largo del terreno?

49. **Embalaje** ¿Cuántos cubos de arista de 3 cm caben en una caja cúbica de 27 cm de arista?

50. Se producirán 40^4 litros de un líquido que se vaciarán en botellas de 2^4 litros cada una. ¿Cuántas botellas se necesitan?

51. **¿Dónde está el error?** Un estudiante dijo que $\frac{3^9}{9^5}$ es igual a $\frac{1}{3}$. ¿Qué error cometió el estudiante?

52. **Escríbelo** ¿Por qué restas los exponentes cuando divides potencias de igual base?

53. **Desafío** Si se eleva un número a 11 y se divide por el mismo número elevado a 8, su cociente es 64, ¿cuál es el número?

Repaso

54. El valor de la expresión "menos tres elevado a cinco más ocho elevado a tres, menos siete multiplicado por nueve" es:

(A) 206 (B) 306 (C) –343 (D) 570

55. Utiliza potencias para resolver:

$$\frac{4^3 \cdot 125 \cdot 60^3 \cdot 27}{60^2} =$$

56. Calcula el valor de $5 - \{-6 - [-2 - (2 - 3 \cdot 5) - 1] + 7\} =$

57. **Calcula** $-4 \cdot 3 : 2 + 28 : 4 \cdot 2 + 27 : 3 =$

CAPÍTULO

2–5 Potencia de una potencia

Aprender a calcular en forma rápida la potencia de una potencia.

En capítulos anteriores aprendiste que una potencia es la multiplicación reiterada de un número. Pero el número, a su vez puede ser otra potencia, por ejemplo:

$$5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2$$

Si esta multiplicación se escribe como potencia, resulta:

$$5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = (5^2)^4$$

Pero, ¿cómo se encuentra el valor de esta potencia? Joaquín pudo encontrar una solución.

Joaquín jugaba con un cubo rubik cuya arista mide 4 cm y quiso calcular su volumen.

Joaquín multiplicó $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$, pero pensó que $4 = 2^2$, por lo tanto, podía escribir el cálculo así:

$$\begin{array}{ccccccccc} 4 & \cdot & 4 & \cdot & 4 & = & 64 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 2^2 & \cdot & 2^2 & \cdot & 2^2 & = & (2^2)^3 \\ \swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & \\ 2 \cdot 2 & \cdot & 2 \cdot 2 & \cdot & 2 \cdot 2 & = & 2^6 \end{array}$$

Y concluyó que: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 = (2^2)^3 = 2^6$

Si observas la escritura en potencias: $2^{2 \cdot 3} = 2^6$ es decir $\left(2^2\right)^3 = 2^6$

En general: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Para resolver la potencia de una potencia, se conserva la base y se multiplican los exponentes.

EJEMPLO 1 Potencia de una potencia de base positiva

Calcula:

$(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$

$(3^5)^7 = 3^{5 \cdot 7} = 3^{35}$

$(2^4)^5 = 2^{4 \cdot 5} = 2^{20}$

$[(14)^3]^0 = 14^{3 \cdot 0} = 14^0 = 1$

EJEMPLO 2 Potencia de una potencia de base negativa

Calcula:

A $\left[(-7)^5\right]^6 = (-7)^{5\cdot 6} = (-7)^{30}$

B $[(-2)^3]^9 = (-2)^{3\cdot 9} = (-2)^{27}$

> **¡Recuerda!**
>
> Recuerda que el valor de las potencias de base negativa y exponente par es siempre positivo, por lo tanto $(-7)^{30} = 7^{30}$

Cuando se calculan potencias de base negativa, esta se debe escribir entre paréntesis, de lo contrario la potencia será negativa. Por ejemplo:

$$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$$

Si -4 se escribe sin paréntesis, la potencia será:

$$-4^2 = -4 \cdot 4 = -16$$

EJEMPLO 3 Potencia de una potencia de base fraccionaria o decimal positiva

Calcula:

A $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^8 = \left(\frac{2}{3}\right)^{4\cdot 8} = \left(\frac{2}{3}\right)^{32}$

B $\left[\left(-\frac{7}{2}\right)^3\right]^5 = \left(-\frac{2}{7}\right)^{15}$

C $(0{,}8^5)^4 = 0{,}8^{20}$

D $[(0{,}5)^7]^9 = (0{,}5)^{7\cdot 9} = (0{,}5)^{63}$

> **¡Recuerda!**
>
> Que $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}, \quad b \neq 0$!

Razonar y comentar

1. **Explica** cómo reconoces cuando una potencia es igual a la unidad.
2. **Indica** el número que debe completar la igualdad $(0{,}5\square)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$
3. **Escribe** 1 000 como $2^x \cdot 2^y \cdot 5^z$, es decir, encontrar x, y, z.
4. **Anota** dos formas de expresar 4^5 como producto de potencias.

2–5 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

Calcula:

1. $(5^4)^3 =$
2. $(8^3)^2 =$
3. $\left(35^3\right)^5 =$
4. $\left(18^7\right)^8 =$

Ver Ejemplo 2

Calcula:

5. $\left[\left(-24\right)^3\right]^4 =$
6. $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^5\right]^6 =$
7. $\left[(0,2)^4\right]^2 =$

Ver Ejemplo 3

Calcula:

8. $\left[\left(-\frac{8}{9}\right)^0\right]^5 =$
9. $\left[(2,04)^3\right]^2 =$
10. $\left[\left(\frac{1}{9}\right)^2\right]^4 =$

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

Calcula:

$\left(8^3\right)^3 =$ $\left(7^2\right)^4 =$ $\left(9^3\right)^5 =$ $\left(12^5\right)^9 =$

Ver Ejemplo 2

Calcula:

15. $\left[\left(-5\right)^2\right]^4 =$
16. $\left[(0,2)^4\right]^3 =$
17. $\left[\left(-\frac{4}{7}\right)^6\right]^{12} =$

Ver Ejemplo 3

Calcula:

18. $\left[\left(\frac{2}{9}\right)^3\right]^4 =$
19. $\left[(0,7)^5\right]^2 =$
20. $\left[(3,4)^3\right]^3 =$

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Aplica la propiedad potencia de una potencia y encuentra el valor de:

21. $\left[\left(-8\right)^2\right]^3 =$
22. $\left[\left(0,3\right)^0\right]^5 =$
23. $\left(\frac{6^2}{36}\right)^4 =$
24. $\left(\frac{2^3}{5^2}\right)^6 =$
25. $\left[\left(3^3\right)^2\right]^4 =$
26. $\left[\left(0,5^2\right)^{13}\right]^0 =$
27. $\left[\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^5\right]^1 =$
28. $\left[(1,5)^2\right]^2 =$
29. $(-y^2)^6 =$

Encuentra el valor de x en cada caso para que se cumpla la igualdad:

30. $\left(0{,}01^2\right)^2 = \left[\frac{1}{100}\right]^x$ **31.** $\left(2^7\right)^x = 2^{14}$ **32.** $\left(5^2 \cdot 2^2\right) = 10^x$

33. $\left(x^3\right)^3 = 8^3$ **34.** $\left[0{,}5^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]^3 = 0{,}5^x$ **35.** $\left(3^3\right)^2 = \left(3^x\right)^3$

36. Si a y b son números enteros positivos, ¿Cuál es el valor de la expresión $\left[-(a+b)^0\right]^3$?

37. **Varios pasos** ¿Cuál es el volumen de una caja cuyas dimensiones son 2^6 cm de ancho, 4^4 cm de largo y 8^3 cm de alto? Expresa la respuesta en una potencia.

38. Queremos guardar un lienzo de publicidad que mide 8 m de lado en una caja cuadrada de 2 m de lado. ¿En cuántas partes iguales hay que doblar el lienzo para que quepa en la caja, sin arrugas y sin espacios libres?

Repaso

39. Un mural cuadrado mide 9^4 cm^2 de área ¿Cuál de las siguientes no puede ser la medida del lado?

(A) 9^2 cm (B) 81 cm (C) 243 cm (D) 3^4 cm

40. Una hoja de papel cuadrado se ha doblado 2^3 veces. Si el cuadrado que se obtiene tiene una superficie de 2^4 cm^2 ¿cuál es la superficie del papel antes de ser doblado?

Encuentra el producto:

41. $(-68) \cdot 24 =$ **42.** $(-128) \cdot (-24) =$ **43.** $142 \cdot 89 =$ **44.** $75 \cdot (-75) =$

45. $72 \cdot 72 =$ **46.** $16 \cdot 16 =$ **47.** $13 \cdot 13 =$ **48.** $24 \cdot 24 =$

Calcula.

49. $((-4)^5)^3 =$ **50.** $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]^2 =$ **51.** $((7)^3)^4 =$ **52.** $((0{,}3)^4)^5 =$

Encuentra el valor de:

53. $-4 + 6 \cdot (-2) - (-8) \cdot 7 =$ **54.** $-7 + [-2 \cdot (3 - 4 \cdot 2) - 1] =$ **55.** $3 - \{-[-(-8)]\} =$

56. $-75 : \{-9 - [7 - (-12)] + 3\} + 4 - 2 =$ **57.** $75 : (-15) + 6 - 17 - (-28) : 2 =$

58. Calcula y explica la diferencia que existe entre $((-2)^2)^3$ y $(-2^2)^3$.

CAPÍTULO 2

¿Listo para seguir?

Prueba de las lecciones 2–3 a 2–5

2–3 Multiplicación de potencias

Resuelve las siguientes multiplicaciones de potencias aplicando las propiedades:

1. $9 \cdot 9^3 =$

2. $(-12)^2 \cdot (-12)^2 =$

3. $(-8)^6 \cdot (-8)^4 =$

4. $q^9 \cdot q^3 =$

5. $(-5)^3 \cdot 8^2 =$

6. $-4^4 \cdot -6^4 =$

7. $(-8)^4 \cdot (0{,}5)^6 =$

8. $(-2)^5 \cdot (-2)^5 =$

9. $\left[\frac{4}{5}\right]^3 \cdot \left[\frac{4}{5}\right]^5 =$

10. $(0{,}5)^4 \cdot (0{,}5)^6 =$

11. $\left[\frac{1}{2}\right]^3 \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^3 =$

12. $\left[\frac{-2}{5}\right]^3 \cdot \left[\frac{-2}{5}\right]^3 =$

13. $(-7)^4 \cdot (-7)^2 \cdot (-7) =$

14. $\left[\frac{2}{3}\right]^5 \cdot \left[\frac{2}{3}\right]^8 \cdot \left[\frac{2}{3}\right]^4 =$

15. $(0{,}2)^9 \cdot (0{,}2)^{12} =$

16. $\left[\frac{4}{5}\right]^2 \cdot \left[\frac{4}{5}\right] \cdot \left[\frac{4}{5}\right]^3 \cdot \left[\frac{4}{5}\right]^8 =$

17. $(0{,}4)^3 \cdot (0{,}2)^3 \cdot (0{,}5)^3 =$

18. $(0{,}03)^5 \cdot (0{,}02)^5 =$

2–4 División de potencias

Resuelve las siguientes divisiones de potencias plicando propiedades:

19. $8^3 : 3^3 =$

20. $(-4)^9 : (-4)^4 =$

21. $(5)^7 : (5)^3 =$

22. $(-2)^8 : (-2)^5 =$

23. $\left[\frac{-2}{3}\right]^4 : \left[\frac{-2}{3}\right] =$

24. $\left[\frac{1}{4}\right]^4 : \left[\frac{1}{4}\right]^4 =$

25. $\left[\frac{5}{9}\right]^4 : \left[\frac{5}{9}\right]^2 =$

26. $\left[\frac{3}{4}\right]^2 : \left[\frac{5}{12}\right]^2 =$

27. $(0{,}7) : (0{,}7) =$

28. $\left[\frac{3}{8}\right]^{15} : \left[\frac{3}{8}\right]^7 =$

29. $(0{,}2)^3 : (0{,}2)^3 =$

30. $(-3)^{10} : (-3)^8 =$

2–5 Potencia de una potencia

Expresa los siguientes resultados en forma de otra potencia.

31. $\left[\left[\frac{3}{4}\right]^2\right]^3 =$

32. $\left[\left[\frac{2}{5}\right]^4\right]^5 =$

33. $[(0{,}4)^2]^0 =$

34. $\left[\left[\frac{a}{b}\right]^m\right]^n =$

35. $(3^4 \cdot 3^5)^6 =$

36. $(2^5 \cdot 2^3)^4 =$

37. $[(0{,}8)^2]^4 =$

38. $\left[\left[\frac{3}{5}\right]^2 \cdot \left[\frac{3}{5}\right]^4\right]^0 =$

CONEXIONES con el mundo real

CAPÍTULO 2

Comidas del mundo

A Chile han llegado personas de distintos países y algunos de ellos se han dedicado a la elaboración de comidas típicas de sus lugares de origen. Tenemos por ejemplo:

- Comida china
- Comida peruana
- Comida japonesa
- Comida tailandesa

En más de alguna ocasión, habrás salido con tu familia a disfrutar de un almuerzo o comida a un restaurante. Muchas veces habrás ido a algún restaurante por la novedad de conocer otros sabores o simplemente para degustar los platos que acostumbramos a comer.

En uno de tantos lugares de comida, exhibían el siguiente menú:

Restaurant El Inmigrante Disfrute de nuestro exquisito menú	
Entrada	– Ataditos de queso – Tapaditos mixtos – Brochetas de cerdo – Ceviche de reineta
Plato de fondo	– Arroz tropical – Fetuccini con pollo – Estofado de carne – Congrio marinado
Agregados	– Papas fritas – Papas duquesas – Ensaladas – Puré de papas
Postres	– Flan de leche – Helados – Tarta de queso – Mouse de limón
Para beber	– Vino – Jugos – Bebidas – Agua Mineral

1. ¿Cuántas combinaciones de menús se pueden hacer?
2. ¿Cómo lo calcularías?
3. ¿Cuántas combinaciones puedes hacer con: entrada, plato de fondo y agregados?
4. ¿Cómo escribirías en forma abreviada estos resultados?

¡Vamos a jugar!

Los palíndromos

Un *palíndromo* es una palabra, frase o número que se lee igual hacia delante que hacia atrás.

Ejemplos:

Ave Eva Amor a Roma 3710173

Con este truco, puedes convertir casi cualquier número en un palíndromo.

Piensa en cualquier número.
Suma el número al revés.

$$\begin{array}{r} 283 \\ +\ 382 \\ \hline 665 \end{array}$$

Con esa suma, repite el paso anterior. Repite hasta que la suma final sea un palíndromo.

$$\begin{array}{r} 665 \\ +\ 566 \\ \hline 1\,231 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\,321 \\ +1\,321 \\ \hline 2\,552 \end{array}$$

Solo se necesitan tres pasos para crear un palíndromo comenzando con el número 283. ¿Qué pasa si comienzas con el número 196? ¿Crees que conseguirás un palíndromo si comienzas con el 196? Un hombre comenzó con 196 y repitió los pasos hasta que obtuvo un número de 70 928 dígitos, ¡y todavía no había formado un palíndromo!

ACTIVIDAD GRUPAL El gato de las potencias

El objetivo de este juego es formar un trío de potencias equivalentes usando cambios de base.

Dibuja una cuadrícula para jugar al gato

Por turnos, cada jugador escribe una potencia distinta en uno de los campos de la cuadrícula. En los turnos posteriores cada jugador debe escribir una potencia equivalente con la que inició el juego. Gana el primero que logre formar un trío vertical, horizontal o diagonal.

¡Está en la bolsa!

Materiales

- caja de DVD de plástico
- cartón de colores
- marcadores
- tijeras
- barra de pegamento
- sobre para tarjetas
- tarjetas
- clip mariposa
- clip grande

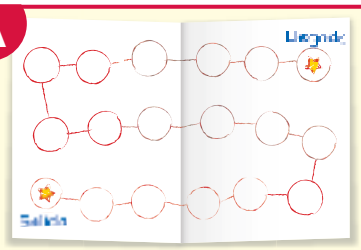
PROYECTO La rueda matemática

Haz un juego con una caja de DVD vacía para repasar los conceptos de este capítulo.

Instrucciones

1. Recorta un trozo de cartón que puedas doblar a la mitad y acomodar dentro de la caja de DVD. Extiende el cartón dentro de la caja y dibuja el camino de casilleros de un juego de mesa. No olvides incluir una salida y una llegada. **Figura A**
2. Cierra el tablero y decora su frente. Luego, pega allí el sobre donde colocarás las tarjetas. **Figura B**
3. En las tarjetas, escribe problemas que puedan resolverse aplicando los conceptos de matemáticas de este capítulo. Coloca las tarjetas en el sobre.
4. Recorta un trozo de cartón que se corresponda con el otro lado de la caja de DVD. En la parte de arriba pega las instrucciones del juego; en la parte de abajo, haz una rueda giratoria del tamaño de un DVD. Coloca el clip mariposa en el centro de la rueda y luego sujeta un clip al cierre. **Figura C**

A



B

C

Matemática en acción

Juega con un compañero usando botones o monedas. Túrnense para hacer girar la rueda. Para poder avanzar, deberán resolver los problemas correctamente.

CAPÍTULO 2

Guía de estudio: Repaso

Vocabulario

base 40
exponente 40
potencia 40
notación científica 44
potencia de base 2 50

Completa los siguientes enunciados con las palabras del vocabulario:

1. Una potencia consta de un(a) _____ elevado(a) a un(a) _____
2. El/la _____ es una forma abreviada de escribir números extremadamente grandes o pequeños.
3. Para multiplicar_____ de igual____ y distinto exponente, se conserva la ____ y se suman los exponentes.
4. La _____ _____ se usa para expresar números muy grandes o números muy pequeños en forma abreviada.

EJEMPLOS

EJERCICIOS

2–1 Potencias

■ **Escribe usando potencias:**

$4 \cdot 4 \cdot 4$

Indica cuántas veces se usa el 4 como factor.

4^3

■ **Desarrolla la potencia:**

$(-2)^3$

$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

Halla el producto de tres (−2).

-8

Escribe usando potencias.

5. $7 \cdot 7 \cdot 7$
6. $(-3) \cdot (-3)$
7. $k \cdot k \cdot k \cdot k$
8. -9
9. $(-2) \cdot (-2) \cdot d \cdot d$
10. $3n \cdot 3n \cdot 3n$
11. $6 \cdot x \cdot x$
12. $10\,000$

Desarrolla la potencia:

13. 5^4
14. (-2^5)
15. $(-1)^9$
16. 2^8
17. $(-3)^1$
18. 4^3
19. $(-3)^3$
20. $(-5)^2$
21. 15^1
22. 6^4
23. 10^5
24. (-2^7)

EJEMPLOS

EJERCICIOS

2–2 Notación científica

■ **Desarrolla la potencia de 10 y multiplica:**
$3{,}58 \cdot 10^4$

$3{,}58 \cdot 10000$

$35\,800$

■ **Escribe usando notación científica.**
$62\,500 = 6{,}25 \cdot 10^4$

Desarrolla la potencia de 10 y multiplica:

25. $1{,}62 \cdot 10^3$ **26.** $9{,}1 \cdot 10^5$

27. $2{,}345 \cdot 10^6$ **28.** $8{,}002 \cdot 10^5$

Escribe usando notación científica:

29. 56 800 000 000 **30.** 73 000 000

31. 200 000 **32.** 480 000 000

2–3 Multiplicación con potencias

■ **Escribe el producto como una potencia:**
$2^5 \cdot 2^3$
2^{5+3}
2^8

■ $4^3 \cdot 3^3$
$(4 \cdot 3)^3$
12^3

Escribe el producto como una potencia:

33. $3^2 \cdot 6^2 =$ **34.** $5^5 \cdot 18^5 =$

35. $5^6 \cdot 5^4 =$ **36.** $9^5 \cdot 9^{10} =$

37. $8^4 \cdot 5^4 =$ **38.** $7^3 \cdot 14^3 =$

39. $3^4 \cdot 9^4 =$ **40.** $2^2 \cdot 15^2$

2–4 División de potencias

■ **Escribe el cociente como una potencia:**

$\frac{10^5}{10^3} = 10^{5-3} = 10^2$

$\frac{10^3}{5^3} = \left(\frac{10}{5}\right)^3 = 2^3$

Escribe el cociente como una potencia:

41. $\left(\frac{15}{3}\right)^5 =$ **42.** $4^5 : 4^4 =$

43. $(20 : 4)^3 =$ **44.** $18^3 : 6^3 =$

45. $8^8 : 8^5 =$ **46.** $7^3 : 7^2 =$

47. $4^5 : 4^5 =$ **48.** $2^8 : 2^4 =$

2–5 Potencia de una potencia

■ **Expresa los siguientes resultados en forma de otra potencia:**
$(7^4)^6 =$

$7^{4 \cdot 6} =$

7^{24}

Expresa los siguientes resultados en forma de otra potencia:

49. $(8^5)^7 =$ **50.** $(-2^3)^6 =$

51. $[(-5)^5]^7 =$ **52.** $(-3^2)^5 =$

53. $(12^6)^2 =$ **54.** $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^2 =$

55. $(3^8)^5 =$ **56.** $(-4^2)^7 =$

Prueba del capítulo

CAPÍTULO 2

Escribe cada expresión usando potencias:

1. $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

2. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

3. $\left[\frac{1}{3}\right] \cdot \left[\frac{1}{3}\right] \cdot \left[\frac{1}{3}\right]$

4. $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$

Encuentra el valor de:

5. $10^0 =$

6. $11^1 =$

7. $2^7 =$

8. $3^4 =$

9. $8^3 =$

10. $5^4 =$

Expresa los siguientes resultados en forma de otra potencia.

11. $\frac{3^6}{3^3} =$

12. $7^9 \cdot 7^2 =$

13. $(5^{10})^6 =$

14. $\frac{11^7}{11^7} =$

15. $27^3 \cdot 27^{18} =$

16. $(52^7)^3 =$

17. $13^0 \cdot 13^9 =$

18. $\frac{8^{12}}{8^7} =$

19. $2^3 : 5^3 =$

20. $16^5 : 2^5 =$

21. $18^8 : 18^4 =$

22. $15^4 : 3^4 =$

Desarrolla la potencia de 10 y encuentra el producto:

23. $2{,}7 \cdot 10^{12}$

24. $3{,}53 \cdot 10^2$

25. $4{,}257 \cdot 10^5$

26. $9{,}87 \cdot 10^{10}$

27. $4{,}8 \cdot 10^8$

28. $6{,}09 \cdot 10^3$

29. $8{,}1 \cdot 10^6$

30. $3{,}5 \cdot 10^4$

Escribe cada número en forma estándar:

31. $3{,}08 \cdot 10^5$

32. $1\,472 \cdot 10^6$

33. $2\,973 \cdot 10^4$

Escribe cada número usando notación científica:

34. 16 900

35. 39 000 000

36. 180 500

37. 45 000

38. Una bolsa de granos de cacao pesa aproximadamente 60 kilos. ¿Cuánto pesarían 1 000 bolsas de granos de cacao? Escribe tu respuesta usando notación científica.

Escribe cada número en notación científica

39. $521{,}7 \cdot 100\,000$

40. 16 900

41. 3 190 000

42. $516 \cdot 10\,000$

43. $16{,}82 \cdot 100$

44. 19 000 000 000

45. 1 980 000 000

46. 3 800 000

47. 124 500 000

Evaluación acumulativa

CAPÍTULO 2

Capítulos 1 – 2

1. ¿Cuál es el valor de 3^4?

(A) 7 (C) 81

(B) 12 (D) 96

2. En un estadio de fútbol hay 58 000 asientos. ¿Cuál de las siguientes es la forma correcta de escribir 58 000 en notación científica?

(A) $580 \cdot 10^2$ (C) $5{,}8 \cdot 10^4$

(B) $58 \cdot 10^3$ (D) $0{,}58 \cdot 10^5$

3. ¿Cuál es el producto de 24 y –8?

(A) –182 (C) –192

(B) –216 (D) 228

4. ¿Qué expresión NO equivale a $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

(A) 3^6 (C) 18

(B) 9^3 (D) 729

5. Un número elevado a 8 dividido entre el mismo número elevado a 4 es 16. ¿Cuál es ese número?

(A) 2 (C) 6

(B) 4 (D) 8

6. ¿Qué expresión equivale a 81?

2^9 (C) $\left(\frac{1}{3}\right)^{24}$

3^4 (D) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

7. Dados $a = -2$, $b = 4$ y $c = -1$. El valor de $a \cdot b - c$ es:

(A) –7 (C) +9

(B) –8 (D) +10

8. El resultado de $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 2^0$ es

(A) 2^6 (C) 2^5

(B) 48 (D) 128

9. El valor de: $(-2)^0 + (-2) + (-2)^2 + (-2)^3$ es

(A) –11 (C) –5

(B) 11 (D) 15

10. Carolina compró 3 ramos de margaritas y 4 ramos de claveles. En cada ramo hay 6 margaritas y 10 claveles. ¿Cuántas flores tiene Carolina en total?

11. Samuel tiene 10 cajas con juegos de computadora. En cada caja caben 13 juegos. ¿Cuántos juegos tiene Samuel?

12. ¿Qué exponente hace que el enunciado $3^? = 27^2$ sea verdadero?

13. El área de un cuadrado es 169 metros cuadrados. ¿Cuál es la longitud en metros de un lado?

14. Encuentra el valor de:

$$\frac{(-3)^4 \cdot (-2)^8 \cdot (-15)^3}{(-4)^2 \cdot (-3) \cdot (5)}$$

15. Escribe como una potencia.

$$\frac{\left[\frac{3}{2}\right]^4 \cdot \left[\frac{2}{9}\right]^4 \cdot 5^2}{(0{,}2)^3 \cdot (0{,}5)^3}$$

Josefa dice que el ejercicio es muy largo pues debe desarrollar cada multiplicación y división aplicando las propiedades.

16. Una bolsa de porotos negros pesa 210 gramos.

a. ¿Cuánto pesan 10 000 bolsas de porotos negros? Escribe tu respuesta en forma estándar.

b. Escribe los números 210 y 10 000 usando notación científica.

c. Explica cómo usar las reglas de los exponentes para escribir el peso de 10 000 bolsas de porotos negros usando notación científica.

17. Una bola cae a un hoyo de 2 metros de profundidad. ¿A qué profundidad se encuentra una cañería que está 5 veces más profunda que la bola? Escribe en números enteros.

Responde verdadero (V) o falso (F).

18. ___ Todo número elevado a la primera potencia es igual a ese mismo número.

19. ___ El número 27 000 000 expresado en notación científica es $27 \cdot 105$.

20. ___ Al dividir una potencia de igual base y distintos exponentes , se conserva la base y se suman los exponentes.

CAPÍTULO

3

Transformaciones isométricas y teselaciones

3–1 Transformaciones isométricas

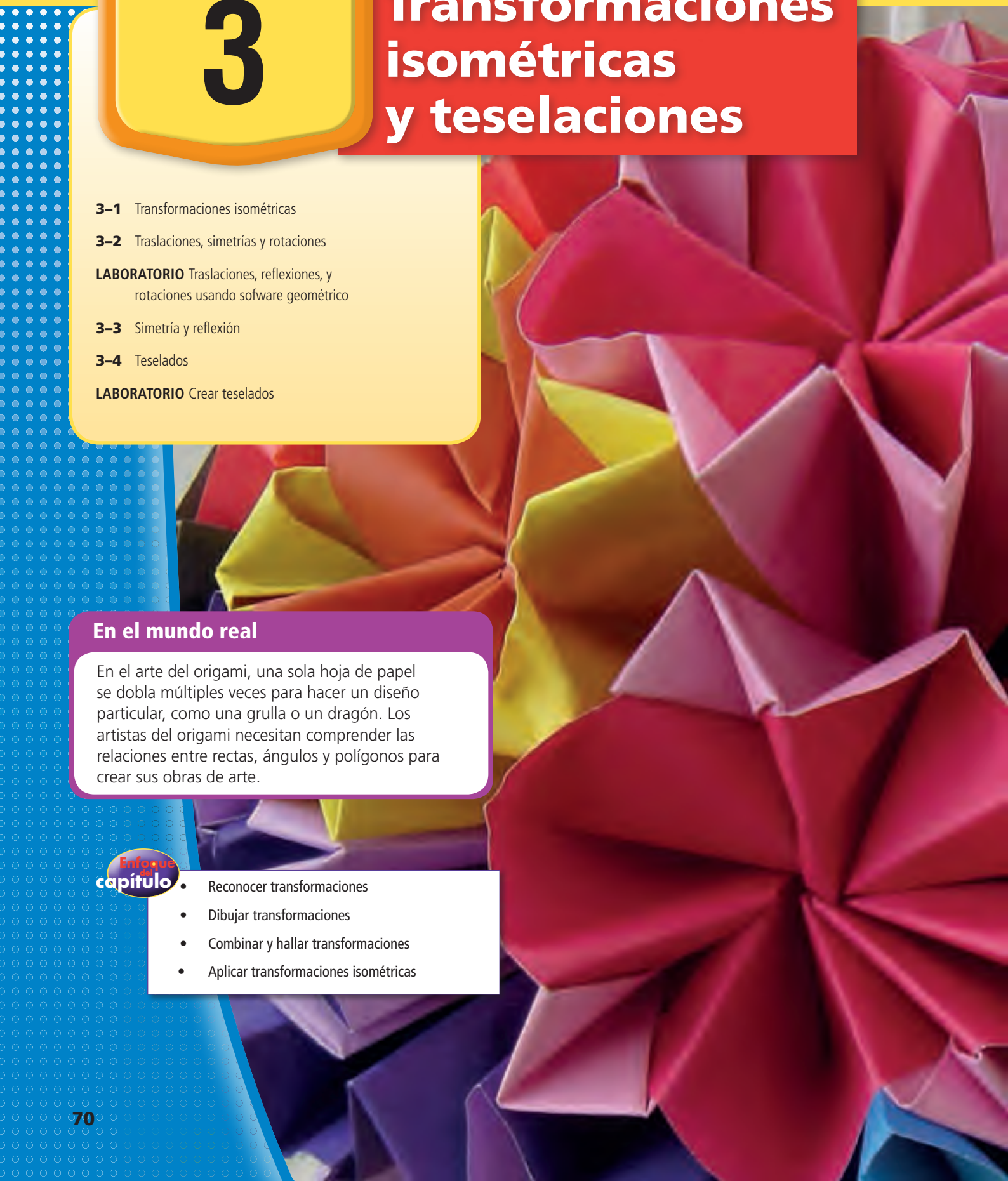
3–2 Traslaciones, simetrías y rotaciones

LABORATORIO Traslaciones, reflexiones, y rotaciones usando sofware geométrico

3–3 Simetría y reflexión

3–4 Teselados

LABORATORIO Crear teselados



En el mundo real

En el arte del origami, una sola hoja de papel se dobla múltiples veces para hacer un diseño particular, como una grulla o un dragón. Los artistas del origami necesitan comprender las relaciones entre rectas, ángulos y polígonos para crear sus obras de arte.

Enfoque del capítulo

- Reconocer transformaciones
- Dibujar transformaciones
- Combinar y hallar transformaciones
- Aplicar transformaciones isométricas

¿Estás listo?

Vocabulario

Elige el término de la lista que complete mejor cada enunciado:

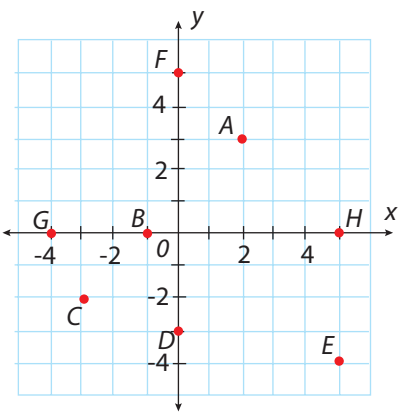
1. En el/la _____(4, –3), 4 es el/la _____ y –3 es el/la _____ .
2. Los/Las _____ dividen el/la _____ en cuatro secciones.
3. El punto (0,0) se llama _____ .
4. El punto (0, –3) está en el/la _____, mientras que el punto (–2, 0)está en el/la _____.

coordenada x
coordenada y
eje x
eje y
ejes de coordenadas
origen
par ordenado
plano cartesiano

Resuelve los ejercicios para practicar las destrezas que usarás en este capítulo.

Pares ordenados

Escribe las coordenadas de los puntos indicados:



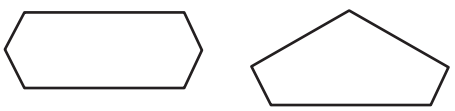
5. punto *A*
6. punto *B*
7. punto *C*
8. punto *D*
9. punto *E*
10. punto *F*
11. punto *G*
12. punto *H*

Comparación de figuras geométricas

Indica en qué elementos se parecen y en qué se diferencian las siguientes figuras geométricas.

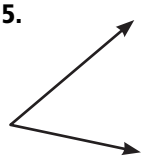
13.

14.

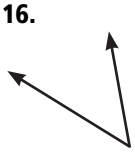


Mide los siguientes ángulos con un transportador.

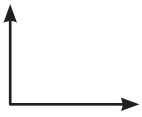
15.



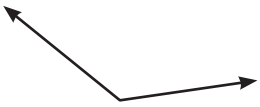
16.



17.



18.



CAPÍTULO 3

Vistazo previo

De dónde vienes

Antes

- Ubicaste e identificaste puntos en un plano cartesiano.
- Reconociste conceptos y propiedades de la geometría en campos como el Arte y la Arquitectura.
- Identificaste figuras congruentes.

En este capítulo

Estudiarás

- Cómo representar gráficamente traslaciones y reflexiones en un plano cartesiano.
- Cómo usar conceptos y propiedades de la geometría para resolver problemas en campos como el Arte y la Arquitectura.

Hacia dónde vas

Puedes usar las destrezas aprendidas en este capítulo:

- Para crear teselados.
- Para identificar y crear patrones geométricos . Puedes usarlos en la clase de Arte.

Vocabulario

polígono	simetría axial
rotación	simetría central
eje de reflexión	simetría rotacional
reflexión	eje de simetría
transformación	teselado
imagen	teselado regular
traslación	teselado semiregular
centro de rotación	

Conexiones de vocabulario

Considera lo siguiente para familiarizarte con algunos de los términos de vocabulario del capítulo. Puedes consultar el capítulo, el glosario o un diccionario si lo deseas:

1. Entendemos por *traslación* el cambio de lugar o posición de un cuerpo. ¿Qué supones que puede ser una traslación en geometría?

2. El prefijo griego *poly–* significa "muchos" y la raíz *gono* significa "ángulo". ¿Qué crees que es un **polígono**?

3. ¿Cuán diferente se ve un objeto cuando se refleja en un espejo? ¿Qué se mantiene constante en una figura geométrica al ser reflejada?

Leer y escribir matemáticas

CAPÍTULO 3

Estrategia de redacción: Escribe un diario de matemáticas

Si escribes un diario de matemáticas, podrás mejorar tus habilidades de redacción y razonamiento. Usa tu diario para resumir las ideas clave y el vocabulario de cada lección para analizar las preguntas que puedas tener sobre un concepto o sobre tus tareas.

Entrada del diario: Lee la entrada que un estudiante escribió en su diario.

27 de abril

Tengo dificultades con la Lección. Puedo hallar qué porcentaje de un número es otro número, pero me resulta confuso cómo hallar el porcentaje de aumento o disminución.

Mi profesor me ayudó a razonar la operación:

Halla el porcentaje de aumento o disminución de 20 a 25.

- Primero, calcula si es un porcentaje de aumento o de disminución. El número va del menor al mayor, por lo tanto, es un porcentaje de aumento porque el número aumenta, es decir, se incrementa.
- Luego, halla la cantidad del aumento, o diferencia, entre los dos números. $25 - 20 = 5$
- Ahora halla qué porcentaje del número original es la cantidad del aumento o diferencia.

$$\frac{\text{cantidad de aumento}}{\text{número original}} \rightarrow \frac{5}{20} = 0.25 = 25\%$$

Por lo tanto, es un aumento del 25%.

Inténtalo

Crea un diario de matemáticas y escribe tus ideas de todos los días de esta semana. Usa las siguientes frases como punto de partida y asegúrate de ponerle fecha y numerar cada página:

1. En esta lección, ya aprendí…
2. En esta lección, no estoy seguro acerca de…
3. Las destrezas que necesito para completar esta lección son…
4. Los desafíos que encontré fueron…
5. Resolví estos desafíos mediante…
6. En esta lección, disfruté/no disfruté…

CAPÍTULO 3–1

Transformaciones isométricas

Aprender a usar traslaciones, reflexiones y rotaciones para transformar figuras geométricas.

Vocabulario

transformación

traslación

rotación

reflexión

eje de reflexión

Una **transformación** isométrica mueve una figura sin cambiar su tamaño ni su forma. Por lo tanto, la figura original y la figura transformada siempre son congruentes.

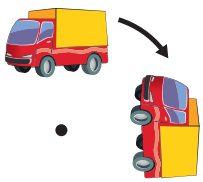
Las ilustraciones del camión muestran tres transformaciones: una traslación, una rotación y una reflexión. Observa que el camión transformado no cambia de tamaño ni de forma.

Traslación

Una **traslación** es el movimiento de una figura sobre una línea recta donde no cambia su forma ni su tamaño.

En una traslación, solo cambia la ubicación de la figura.

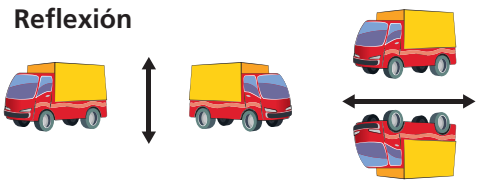
Rotación



Una **rotación** es el movimiento de una figura alrededor de un punto. Un punto de rotación puede estar dentro o fuera de una figura.

Una rotación puede cambiar la ubicación y la posición de una figura.

Reflexión



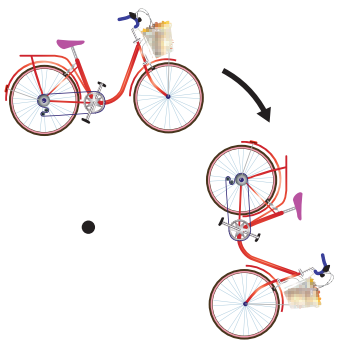
Cuando una figura se invierte sobre una línea y se crea una imagen de espejo, se produce una **reflexión**. La línea sobre la que se invierte la figura se llama **eje de reflexión**.

Una reflexión cambia la ubicación y la posición de la figura.

EJEMPLO 1 Identificar transformaciones

Indica si en cada caso hay traslación, rotación o reflexión:

A

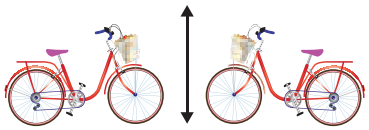


La figura se mueve alrededor de un punto.

Es una rotación.

Indica si en cada caso hay traslación, rotación o reflexión:

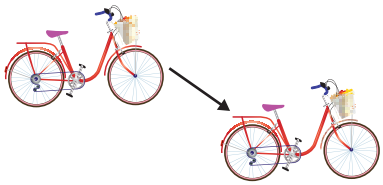
B



La figura se invierte sobre una línea.

Es una reflexión.

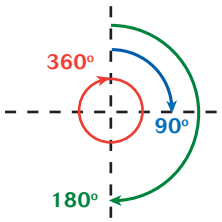
C



La figura se mueve sobre una línea.

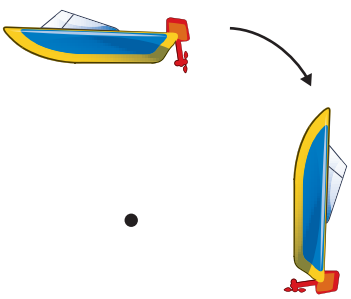
Es una traslación.

Un giro completo es una rotación de 360°. Por lo tanto $\frac{1}{4}$ de giro son 90° y $\frac{1}{2}$ giro son 180°.



EJEMPLO 2 Realizar transformaciones

Dibuja cada transformación:



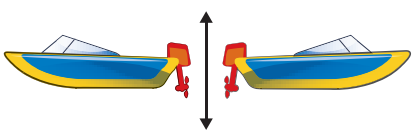
Dibuja una rotación de 90° en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del punto que se muestra.

Traza la figura y el punto de rotación.

Coloca el lápiz sobre el punto de rotación.

Gira la figura 90° en el sentido de las manecillas del reloj.

Dibuja la figura en su nueva ubicación.



Dibuja una reflexión horizontal.

Traza la figura y el eje de reflexión.

Dobla por el eje de reflexión.

Dibuja la figura en su nueva ubicación.

Razonar y comentar

1. **Da ejemplos** de reflexiones que ocurran en el mundo real.
2. **Identifica** una figura que al rotarse quede sobre sí misma.

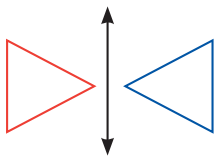
3–1 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

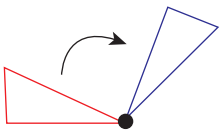
Ver Ejemplo 1

Indica si en cada caso hay una traslación, rotación o reflexión.

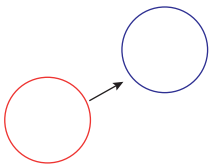
1.



2.



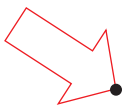
3.



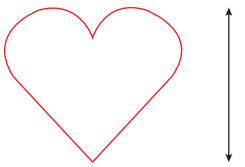
Ver Ejemplo 2

Dibuja cada transformación.

4. Dibuja una rotación de 180° en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del punto que se muestra.



5. Dibuja una reflexión horizontal sobre la línea.

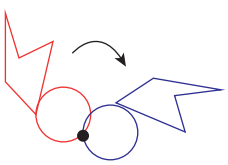


PRÁCTICA INDEPENDIENTE

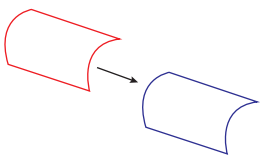
Ver Ejemplo 1

Indica si en cada caso hay traslación, rotación o reflexión.

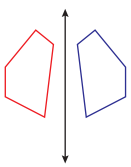
6.



7.



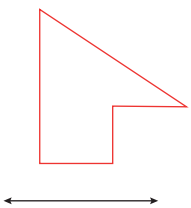
8.



Ver Ejemplo 2

Dibuja cada transformación.

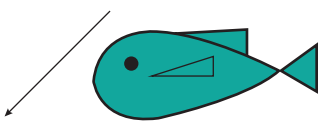
9. Dibuja una reflexión vertical sobre la línea.



10. Dibuja una rotación de 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del punto.

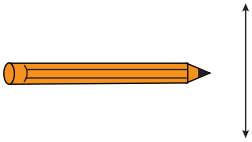
11. Dibuja una traslación.

12. Dibuja una traslación.

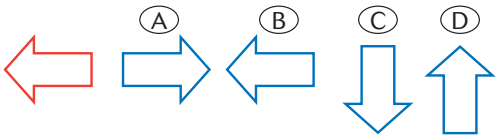


13. Dibuja una rotación de 90° en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del punto.

14. Dibuja cada reflexión horizontal sobre la línea.



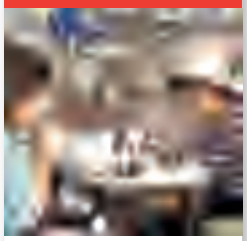
15. ¿Cuál es la reflexión horizontal de esta flecha roja?



16. ¿Qué letras mayúsculas del alfabeto pueden reflejarse horizontalmente sin dejar de verse iguales? ¿Cuáles pueden reflejarse verticalmente sin dejar de verse iguales?

CONEXIÓN

Pasatiempos



En el juego de ajedrez, cada jugador tiene 318 979 564 000 posibilidades de hacer los primeros cuatro movimientos.

Usa el tablero de ajedrez para resolver los ejercicios del 17 al 20.

17. **Pasatiempos** El ajedrez es un juego de destreza que se juega con un tablero de 64 cuadrados. Cada pieza se mueve de modo diferente.
Copia la esquina inferior izquierda del tablero de ajedrez. Luego, muestra el movimiento del caballo indicado en una traslación de dos cuadrados hacia adelante y uno hacia la derecha.

Caballo Rey Peón

18. Si se traza una línea vertical en la mitad del tablero de ajedrez con sus piezas ordenadas en la partida:

a. ¿Se produce una reflexión?

b. ¿Qué piezas hay que ordenar o sacar para que se produzca una reflexión?

19. **Escríbelo** Dibuja una de las piezas de ajedrez. Luego, dibuja una traslación, una rotación y una reflexión de esa pieza. Describe cada transformación.

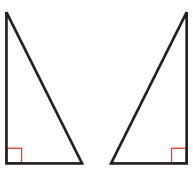
20. Dibuja una pieza de ajedrez con una rotación de 90° en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del vértice de un cuadrado del tablero y luego con una reflexión horizontal.

Repaso

21. ¿Cómo se llama el movimiento de una figura alrededor de un punto?

(A) Traslación (B) Teselado (C) Reflexión (D) Rotación

22. Indica si la figura muestra una rotación, una traslación o una reflexión. Explica.



Escribe cada frase como una expresión numérica o algebraica:

23. 19 por 3

24. el cociente de g dividido en 6

25. la suma de 5 y 9

Escribe cada decimal como fracción o número mixto:

26. 0,9 **27.** 6,71 **28.** 0,20 **29.** 2,88 **30.** 0,55

CAPÍTULO 3–2

Traslaciones, simetrías y rotaciones

Aprender a transformar figuras planas usando traslaciones, rotaciones y reflexiones.

Vocabulario

transformación

imagen

traslación

reflexión

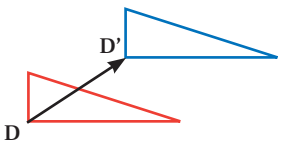
rotación

centro de rotación

Cuando estás en un juego de un parque de diversiones, experimentas una *transformación*. Una **transformación** es un cambio en la posición o el tamaño de una figura. La rueda de la fortuna y el carrusel son *rotaciones*. Los juegos en caída libre y los toboganes acuáticos son *traslaciones*.

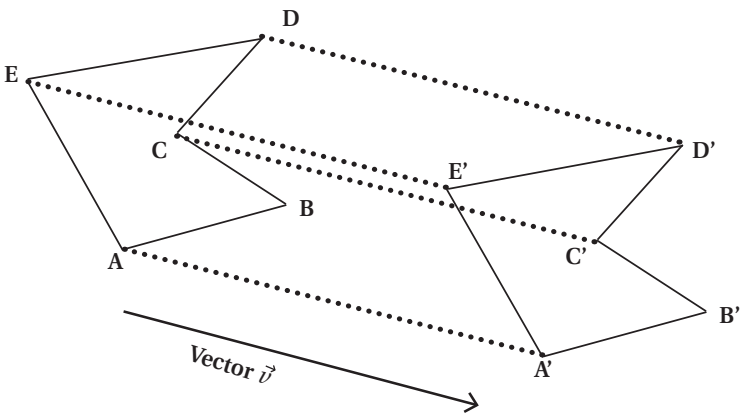
Las traslaciones, rotaciones y reflexiones son tipos de transformaciones. La figura resultante, o **imagen**, de una traslación, rotación o reflexión es congruente con la figura original.

Una **traslación** es una transformación isométrica que desplaza todos los puntos de una figura según un vector determinado, $\vec{v}$. Este vector de traslación señala la dirección (horizontal, vertical u oblicua), el sentido (derecha, izquierda, arriba y abajo) y la magnitud del desplazamiento, es decir, cuánto se desplazó la figura en una unidad de medida.



EJEMPLO 1 **Trasladar el polígono ABCDE respecto del vector $\vec{v}$, usando regla y compás**

- Con una regla, traza paralelas al vector $\vec{v}$ desde cada vértice del polígono.
- Apoya el compás en el inicio del vector y ábrelo cubriendo su largo.
- Apoya el compás en el vértice A y copia la medida sobre la línea. Este punto corresponde a la imagen del vértice.
- Haz lo mismo con cada uno de los vértices y luego une todas las imágenes de los vértices y tendrás la misma figura ubicada en otro lugar.



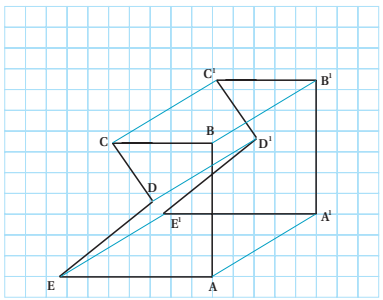
Leer matemáticas

A′ se lee: "A prima".
El punto A′ es la imagen del punto A.
La flecha describe la transformación.
A → A′ se lee "el punto A va al punto A prima".

EJEMPLO 2 Realizar traslaciones en un papel cuadriculado

Cada punto está determinado por un par ordenado. Se da otro par ordenado que indicará el movimiento.

- Si el par ordenado que indica el movimiento es (5,3), significa que desde cualquiera de los vértices, debes contar 5 lugares hacia la derecha y luego 3 lugares hacia arriba (sentido positivo).
- En ese punto marcas la imagen del vértice donde iniciaste.
- Repites lo mismo con todos los vértices.
- Luego unes los puntos que representan las imágenes de cada vértice y tendrás la misma figura que ha sido trasladada de lugar.
- Si el par ordenado es (5,–3), significa que desde cualquiera de los vértices, debes contar 5 lugares hacia la derecha y luego 3 lugares hacia abajo (sentido negativo), así con todos los vértices.



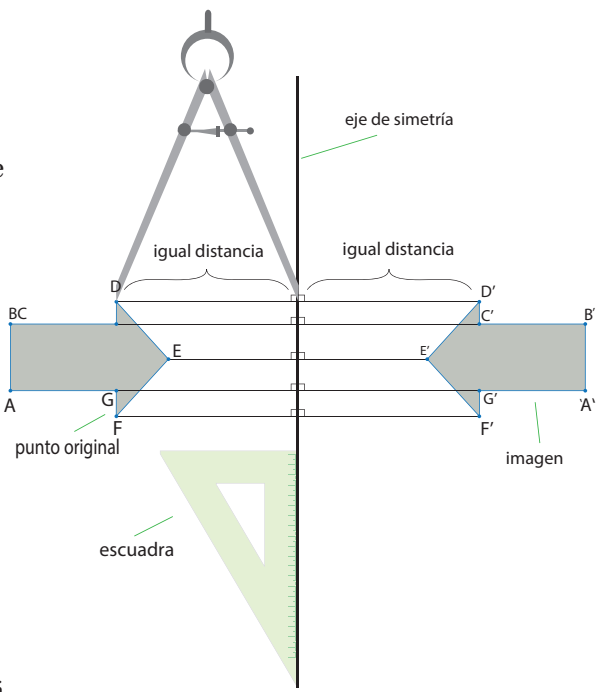
Esta imagen representa una traslación considerando los siguientes datos:
$T_1 = (5,3)$

La **reflexión** es una transformación isométrica en la cual a cada punto de una figura original se le asocia otro punto, llamado imagen. El punto y su imagen están a igual distancia de una recta llamada eje de simetría. A esta reflexión la llamaremos simetría axial.

EJEMPLO 3 Realizar una reflexión con regla y compás con respecto a un eje de simetría

Realiza una reflexión con regla y compás.

- Desde cada vértice del polígono ABCDEFG se ha trazado una línea perpendicular al eje de simetría usando la escuadra.
- Para trazar la perpendicular desplazamos la escuadra por uno de sus catetos a través del eje de simetría (ver dibujo) hasta cada uno de los vértices y trazamos la perpendicular hasta más allá del eje de simetría.
- Luego con el compás, desde el punto de intersección entre el eje de simetría y la perpendicular, medimos la distancia hasta el punto original (ver dibujo).
- Con esa misma abertura del compás aplicamos la medida en la línea que quedó a la derecha del eje de simetría.
- El punto que se marca es la imagen del punto original.
- Se repite lo mismo con todos los puntos.
- Se unen todos los puntos obtenidos y aparecerá la figura original como si estuviera frente a un espejo.



Una **rotación** es una transformación isométrica en la que todos los puntos de la figura original se mueven respecto de un punto fijo que recibe el nombre de **centro de rotación**. Los puntos también se mueven girando en un determinado ángulo llamado **ángulo de rotación**.

Vamos a tener presente que la rotación puede tener:

- Sentido positivo: es el sentido contrario a las manecillas del reloj, llamado también, antihorario.
- Sentido negativo: es el de las manecillas del reloj, es decir en el sentido horario.

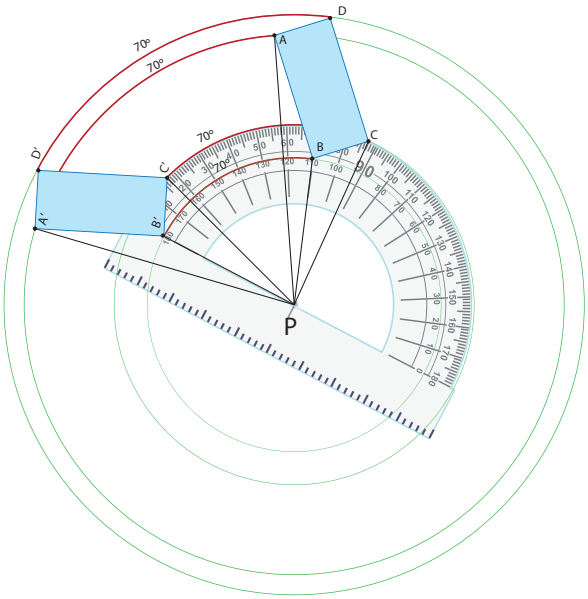
EJEMPLO 4

Realizar una rotación con regla, compás y transportador

Rotación en torno a un punto exterior a la figura.

- Une el vértice A con el centro de rotación P.
- Apoyando el compás en el punto P y con radio PA traza una circunferencia.
- Marca con el transportador los grados en que debes hacer la rotación (70°), R(P,70°), hasta la circunferencia. Este punto es la imagen de A que se denota por A'.
- Se repite la misma actividad con los demás vértices del polígono.
- Se unen todos los puntos de las imágenes y obtenemos la figura del polígono ABCD que ha rotado 70° en sentido positivo.
- La figura mantiene todos sus lados y ángulos de igual medida, solo ha cambiado de posición.

Esta rotación se realizó en sentido positivo o sentido antihorario. La imagen del polígono se ubica a la izquierda del original, de lo contrario se dice que la rotación es en sentido negativo o sentido horario.



Razonar y comentar

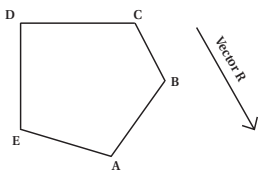
1. Cuántas unidades y hacia dónde se traslada un punto según el vector (–3,2).
2. En cuál de las transformaciones isométricas la figura se invierte.

3–2 Ejercicios

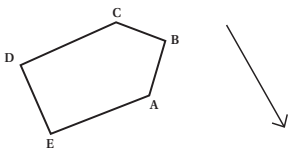
PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo **1** **Realiza la traslación del polígono ABCDE respecto del vector R usando regla y compás.**

1.

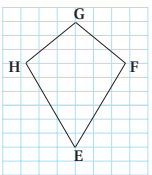


2.

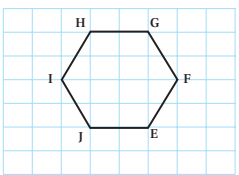


Ver Ejemplo **2** **Realiza la siguiente traslación del polígono EFGH.**

3. $T_2 = (5, -3)$

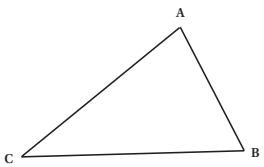


4. T (2, –1)

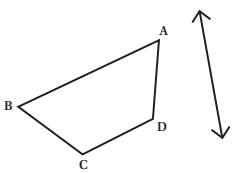


Ver Ejemplo **3** **Realiza la reflexión del polígono usando escuadra y compás.**

5.

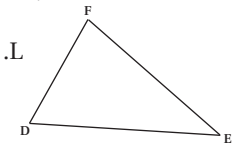


6.

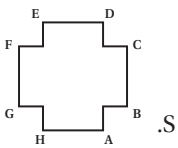


Ver Ejemplo **4** **Realizar una rotación en torno al punto y en los grados que se indica.**

7. R (L, –80°)



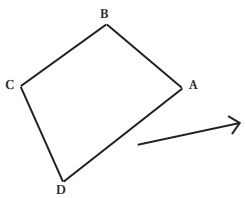
8. R (S, 50°)



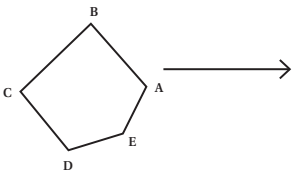
PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo **1** **Realiza la traslación del polígono ABCDE respecto del vector R usando regla y compás.**

9.



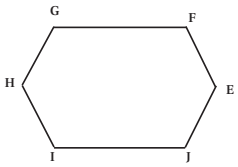
10.



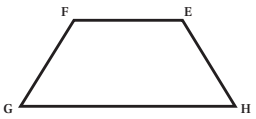
PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo **2** **Realiza la siguiente traslación del polígono EFGH.**

11.

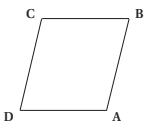


12. T (–3, 4)

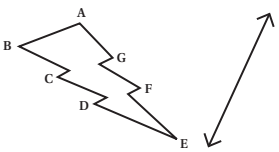


Ver Ejemplo **3** **Realiza la reflexión del polígono usando escuadra y compás.**

13. T (3, –5)

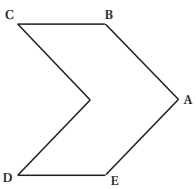


14.

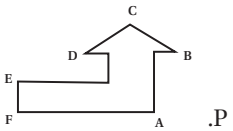


Ver Ejemplo **4** **Realizar una rotación en torno al punto y en los grados que se indica.**

15.



16. R(P, 30º)



PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

17. Crea un polígono de 5 lados y realiza una rotación de 45°en sentido horario.

18. Dibuja un triángulo isósceles y realiza una traslación T(3, –1).

19. **Desafío** Dibuja un triángulo rectángulo de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm y realiza una traslación T(–3, 5). Aplica a esta imagen una reflexión con respecto a un eje paralelo a uno de sus lados. Aplica a esta segunda imagen una rotación en sentido antihorario en 60°.

a. ¿Qué sucedió con la forma de esta figura?

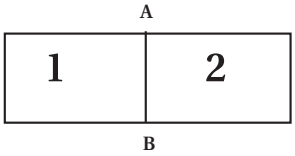
b. ¿Qué sucedió con el tamaño de la figura?

Compara tu trabajo con el de tus compañeros. ¿Todos obtuvieron la misma imagen final? Comenta.

Repaso

20. De estos 2 rectángulos podemos decir lo siguiente:
I.– La figura 1 se ha rotado en 180°, obteniéndose la figura 2.
II.– La figura 1 se ha trasladado, obteniéndose la figura 2.
III.– La figura 1 se ha reflejado con respecto al eje AB, obteniéndose la figura 2.

(A) Solo I (B) II y III (C) I y III (D) Solo II



Laboratorio de TECNOLOGÍA

3–2

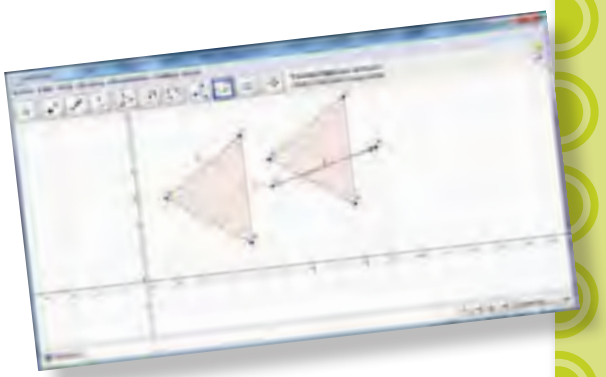
Traslaciones, reflexiones y rotaciones usando software geométrico

Para usar con la lección 3–2

Para la siguiente actividad usarás el software "Geogebra", se puede descargar desde: http://www.geogebra.org

1 Actividad

Traslación de un triángulo.



1. **Haz *clic* en el botón derecho y selecciona *Ejes*. Presiona nuevamente el botón derecho y selecciona *Cuadrícula*.**
2. **En la barra de herramientas del software, selecciona *Polígono*. Luego, dibuja un triángulo en la cuadrícula haciendo tres *clic* en distintos puntos y un cuarto *clic* sobre el primer punto que dibujaste para cerrar el triángulo.**
3. **Selecciona *Vector entre dos puntos* en la barra de herramientas. Haz dos *clic* en distintos puntos para dibujar el vector de traslación en la cuadrícula con la magnitud y sentido que quieras.**
4. **Selecciona en la barra de herramientas *Trasladar objeto por un vector*. Haz *clic* sobre el triángulo y luego, sobre el vector; el triángulo aparecerá trasladado.**
5. **Selecciona *Distancia* o *Longitud* y haz *clic* sobre cada uno de los triángulos.**
6. **Selecciona *Área* y haz *clic* sobre cada uno de los triángulos.**

2 Razonar y comentar

7. **¿Cuánto miden el perímetro y área de la figura inicial y de la imagen?, ¿cómo se relacionan?**
8. **¿Ocurrirá lo mismo en cualquier traslación de figuras?**

3 Inténtalo

9. **En una nueva pestaña de Geogebra, dibuja otro polígono (que no sea un triángulo). Realiza nuevamente los pasos anteriores y responde las preguntas 1 y 2.**
10. **Investiga cómo realizar una reflexión y una rotación con este software.**

CAPÍTULO 3

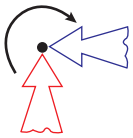
¿Listo para seguir?

Prueba de las lecciones 3–1 a 3–2

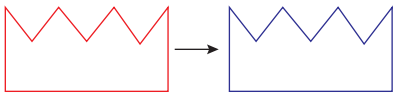
3–1 Transformaciones isométricas

Indica si en cada caso hay traslación, rotación o reflexión.

1.

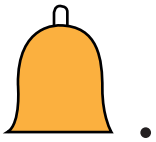


2.



Dibuja cada transformación.

3. Dibuja una rotación de 180° en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del punto.

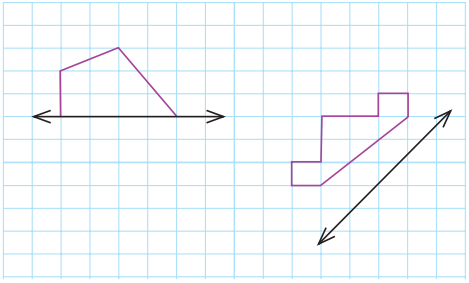


4. Dibuja una traslación.

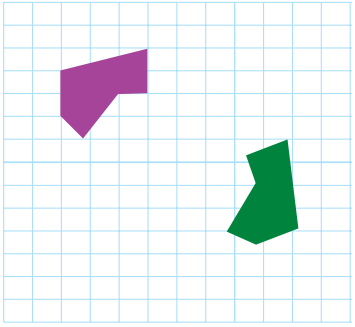
3–2 Traslaciones, simetrías y rotaciones

Representa gráficamente cada transformación.

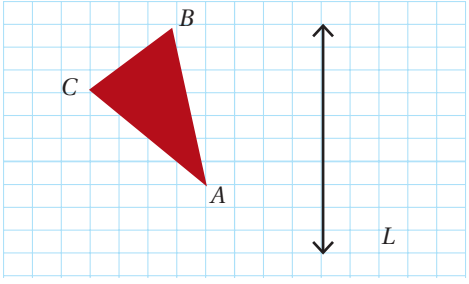
4. Completa las figuras para que sean simétricas respecto al eje dado:



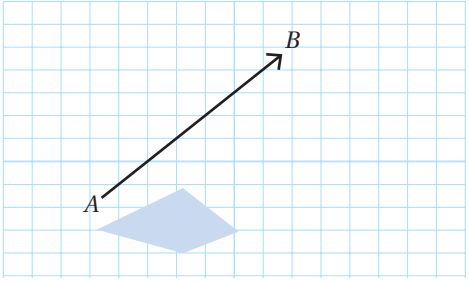
5. Encuentra el eje de simetría, de modo que una de las figuras sea la imagen reflejada de la otra.



6. Encuentra la imagen del ΔABC reflejada con respecto al eje L.



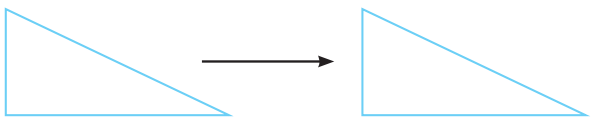
7. Traslada la figura según el vector indicado.



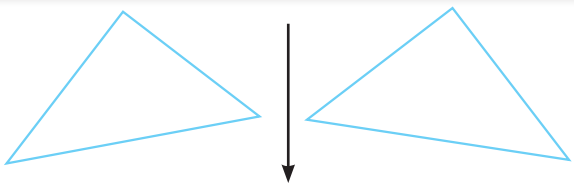
Enfoque en resolución de problemas

Identifica la transformación que debes realizar

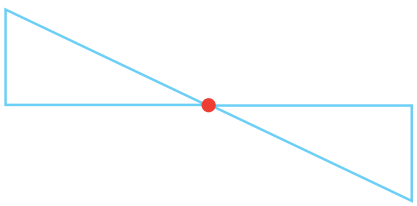
- Aprende a usar los instrumentos como regla, escuadra y compás para medir y trasladar o copiar medidas nuevas, y así encontrar figuras.
- Recuerda que una traslación es un deslizamiento en línea recta vertical, horizontal oblicua, y su movimiento se indica con una flecha.



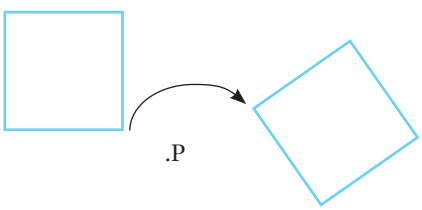
1 Una simetría axial se encuentra plegando la figura por su eje de simetría.



2 Una simetría de rotación se realiza con un giro en torno a un punto o centro de rotación de tal forma que la figura coincida consigo misma.

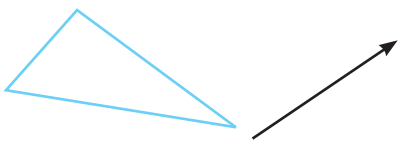


3 Una rotación es un giro en torno a un punto tantos grados como se indique. Se indica con una flecha.

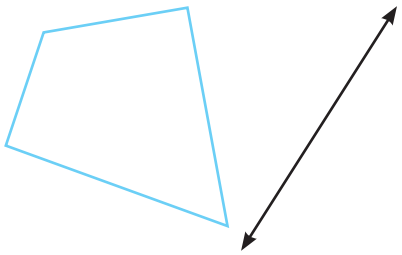


Realiza la transformación que corresponda y compruébala tal como se indica.

1. Realiza una traslación usando solo el compás y algún elemento no graduado que te permita trazar una línea recta según la flecha. Mide con una regla la distancia en que se movió cada vértice y compárala con la medida de la flecha. Comenta.



2. Realiza la simetría axial de la figura. Pliega el papel por el eje de simetría. Comenta.



CAPÍTULO

3–3 Simetría y reflexión

Aprender a identificar la simetría de figuras.

Vocabulario

simetría axial

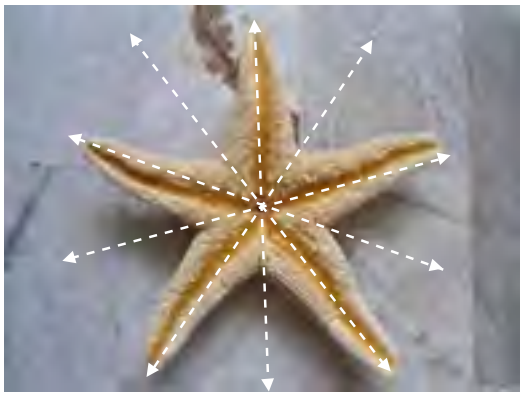
eje de simetría

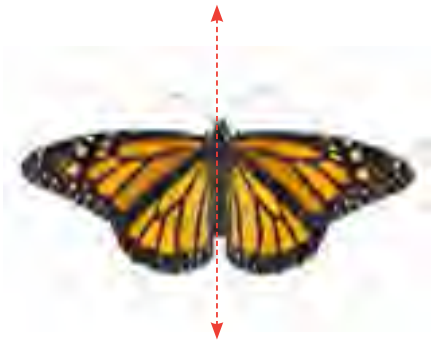
simetría de rotación

simetría central

La naturaleza ofrece muchos ejemplos hermosos de *simetría*, tales como las alas de una mariposa o los pétalos de una flor. Los objetos simétricos tienen partes congruentes.

Una figura tiene **simetría axial** si podemos trazar una línea a través de ella y, como resultado, las dos mitades forman entre sí una imagen de espejo. Esa línea se llama **eje de simetría.**





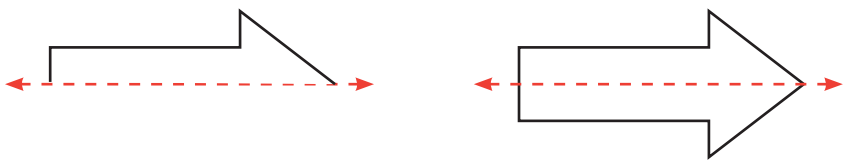
EJEMPLO 1 Dibujar figuras con simetría axial

Completa cada figura. La línea punteada es el eje de simetría.

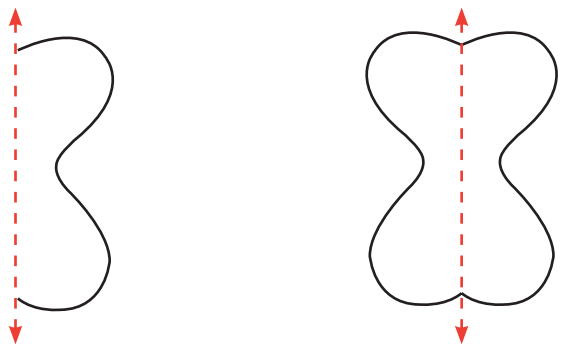
Pista útil

Si pliegas una figura por su eje de simetría, las dos mitades coincidirán exactamente.

A



B

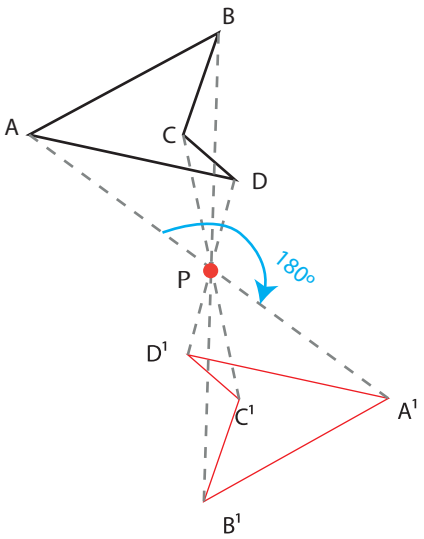


Una figura tiene **simetría de rotación** si podemos rotarla alrededor de un punto de forma tal que coincida consigo misma. Ese punto es el centro de rotación y la cantidad de grados que rota debe ser menor que una vuelta completa, o 360°.

Si la simetría de rotación se realiza en 180° se llama **simetría central** o simetría con respecto a un punto P dado.

Simetría de rotación de orden 7 significa que la figura coincide consigo misma 7 veces dentro de una vuelta completa.

Simetría de rotación de orden 7.

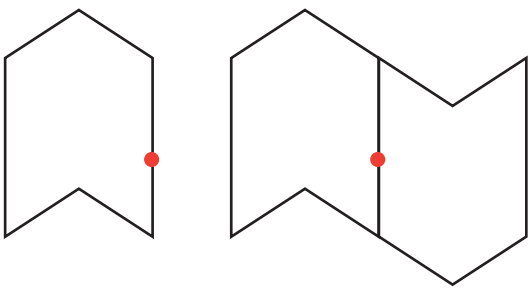


Simetría central con respecto a P

EJEMPLO 2 Dibujar figuras con simetría de rotación

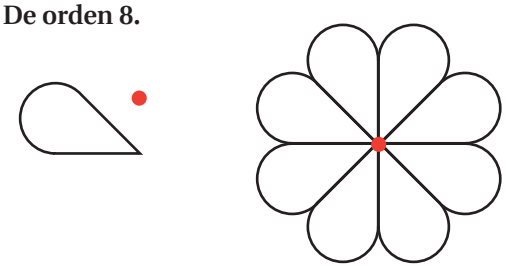
Completa cada figura. El punto es el centro de rotación.

A **De orden 2.**



La figura coincide consigo misma 2 veces cada vuelta completa.

B **De orden 8.**



La figura coincide consigo misma 8 veces cada vuelta completa.

Razonar y comentar

1. **Explica** qué significa que una figura sea simétrica.
2. **Indica** qué letras del alfabeto tienen simetría axial.
3. **Indica** qué letras del alfabeto tienen simetría de rotación.

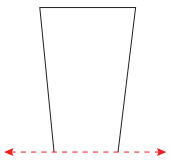
3–3 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

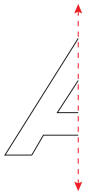
Ver Ejemplo 1

Completa cada figura. La línea punteada es el eje de simetría.

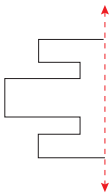
1.



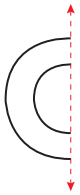
2.



3.



4.

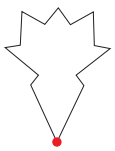


Ver Ejemplo 2

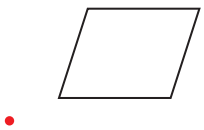
Completa cada figura. El punto es el centro de rotación.

5. de orden 4

6. de orden 6



7. en 180°

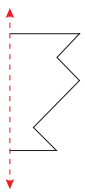


PRÁCTICA INDEPENDIENTE

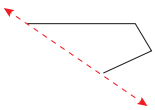
Ver Ejemplo 1

Completa cada figura. La línea punteada es el eje de simetría.

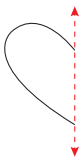
8.



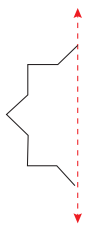
9.



10.



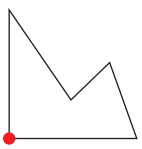
11.



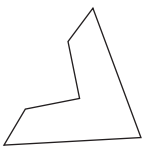
Ver Ejemplo 2

Completa cada figura. El punto es el centro de rotación.

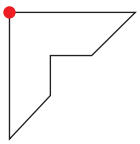
12. de orden 4



13. en 180°



14. de orden 2



PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Dibuja un ejemplo de una figura con cada tipo de simetría:

15. simetría axial y de rotación

16. sin simetría

¿Cuántos ejes de simetría tienen las siguientes figuras?

17. cuadrado

18. rectángulo

19. triángulo equilátero

20. triángulo isósceles

CONEXIÓN con Ciencias Sociales

En Japón, las sombrillas y los kimonos que exhiben el emblema familiar se usan en ocasiones solemnes.

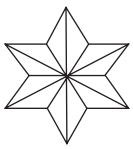
Halla un contraejemplo que refute cada conjetura:

21. Cualquier figura que tenga simetría axial tiene también simetría de rotación.

22. Todos los pentágonos tienen simetría axial.

23. Ciencias Sociales Los emblemas familiares llamados *ka–mon* se usan en Japón desde hace muchos siglos. Copia cada emblema a continuación. Describe la simetría y dibuja los ejes de simetría o el centro de rotación.

a.



Kage Asa no ha

b.

Maru ni shichiyo

c.

Nito Nami

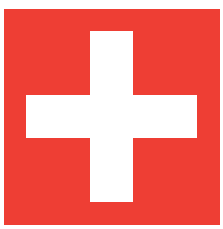
24. Razonamiento crítico Explica cuánto rotas cada parte para completar una figura con simetría de rotación de orden n.

25. Escribe un problema Las banderas de señales se cuelgan de las líneas de aparejo de los barcos. Escribe un problema sobre los tipos de simetría de las banderas.

26. ¿Dónde está el error? Un estudiante afirma que todos los trapecios tienen simetría axial. ¿Qué error cometió? Da ejemplos que apoyen su respuesta.

27. Escríbelo Describe cómo podrías usar una reflexión para crear una figura con simetría axial.

28. Desafío La bandera de Suiza tiene 180° de simetría de rotación. Identifica por lo menos otros tres países que tengan banderas con 180° de simetría de rotación.



Repaso

29. Dibuja una figura que tenga simetría axial y de rotación.

30. ¿Qué figura tiene 90° de simetría de rotación?

(A) pentágono regular
(B) cuadrado
(C) hexágono regular
(D) heptágono regular

Encuentra el valor para cada unidad:

31. 20 plátanos a $ 4 400

32. 496 kilómetros en 16 horas

33. 20 gramos a $3 200

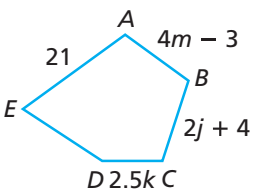
En la figura, ABCDE = PQRST.

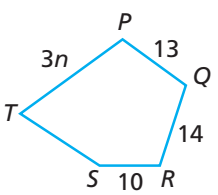
34. Halla j.

35. Halla k.

36. Halla m.

37. Halla n.





CAPÍTULO 3–4

Teselados

Aprender a crear teselados.

Vocabulario

teselado

teselado regular

teselado semiregular

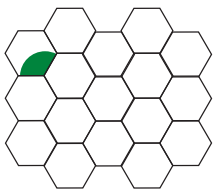
Se pueden crear diseños fascinantes mediante la repetición de una figura o de un grupo de figuras. Estos diseños se usan con frecuencia en arte y arquitectura.

Un diseño repetido de figuras planas que cubre por completo un plano sin dejar espacios ni superposiciones se llama **teselado**.

En un teselado regular, un polígono regular se repite hasta llenar un plano. Las medidas de los ángulos de cada vértice deben sumar 360°; por lo tanto, existen solo tres **teselados regulares**.

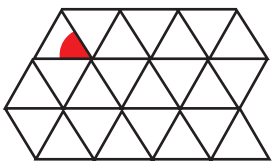
Un polígono regular o irregular formará un teselado si la suma de las medidas de sus ángulos interiores es un factor o un múltiplo de 360° (triángulos 180°, cuadriláteros 360°).
Cuando se construye usando combinaciones de polígonos regulares decimos que construimos un **teselado semiregular**. Esto será posible si los polígonos que se juntan en un vértice tienen ángulos interiores que suman 360°.

Hexágonos regulares



$3 \cdot 120° = 360°$

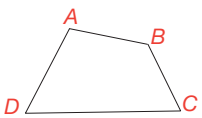
Triángulos equiláteros

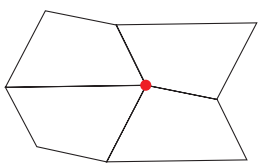


$6 \cdot 60° = 360°$

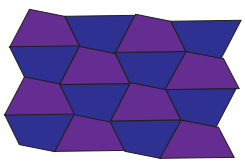
EJEMPLO 1 Construir un teselado

Construye un teselado con el cuadrilátero ABCD.





Debe de haber una copia de cada ángulo del cuadrilátero ABCD en cada vértice.



EJEMPLO 2 Construir un teselado transformando un polígono

Usa rotaciones para crear una variación del teselado del Ejemplo 1:

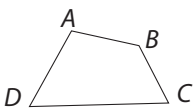
Paso 1: Halla el punto medio de un lado.

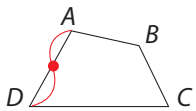
Paso 2: Dibuja una nueva arista para la mitad del lado.

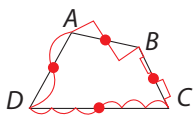
Paso 3: Rota la nueva arista alrededor del punto medio para formar la arista de la otra mitad del lado.

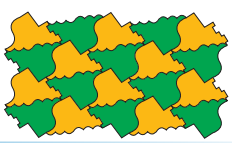
Paso 4: Repite los pasos anteriores con los demás lados.

Paso 5: Usa la figura para formar un teselado.









Razonar y comentar

1. **Indica** si es posible realizar una teselación con dos figuras geométricas distintas. Da ejemplos de figuras curvas que se puedan usar para teselar.

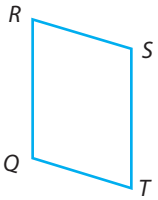
3–4 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

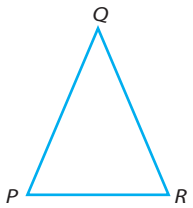
Ver Ejemplo 1

Construye un teselado con cada polígono:

1.



2.



Ver Ejemplo 2

3. Usa rotaciones para crear una variación del teselado del ejercicio 1.

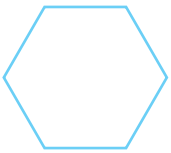
PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

Construye un teselado con las figuras:

4.

5.



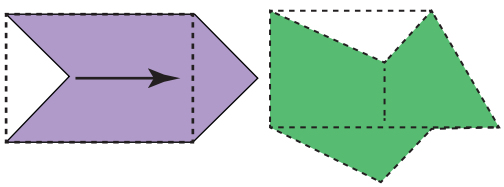
Ver Ejemplo 2

6. Usa rotaciones para crear una variación del teselado del ejercicio 5.

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

7. ¿Se formará un teselado si se quita una parte de un lado de un rectángulo y se la traslada al lado opuesto? Fundamenta tu respuesta.

8. ¿Se formará un teselado si se quita una parte de un lado de un trapecio y se la traslada al lado opuesto? Fundamenta tu respuesta.



9. **Razonamiento crítico** Explica por qué no puedes crear un teselado usando un pentágono regular.

Repaso

10. Con cuál de los siguientes polígonos se puede realizar una teselación:

Ⓐ pentágono Ⓑ hexágono Ⓒ octógono Ⓓ heptágono

11. Encuentra el valor de $4 - [-3 \cdot (4 - 5) + 3 \cdot (7 + 2)] - 1$

Calcula y escribe el resultado como una potencia:

12. $3^5 \cdot 3^8 =$

13. $(-7)^3 \cdot (5)^3$

14. $[(-2)^3]^5$

Laboratorio de

PRÁCTICA

3–4

Crear teselados

Para usar con la lección 3–4

Se llama *teselado* a un arreglo de una o más figuras repetidas que cubren completamente un plano sin dejar huecos ni superponerse. Puedes hacer tus propios teselados con papel, tijeras y cinta adhesiva.

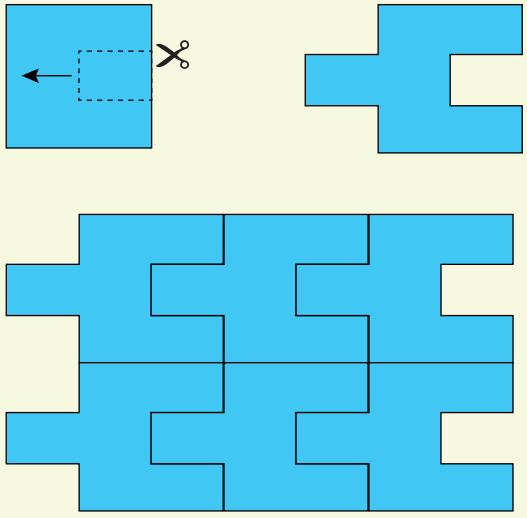
Actividad

1 Comienza con un cuadrado.

Usa tijeras para recortar una figura de un lado del cuadrado.

Traslada la forma que recortaste del lado opuesto del cuadrado y une las dos piezas con cinta adhesiva.

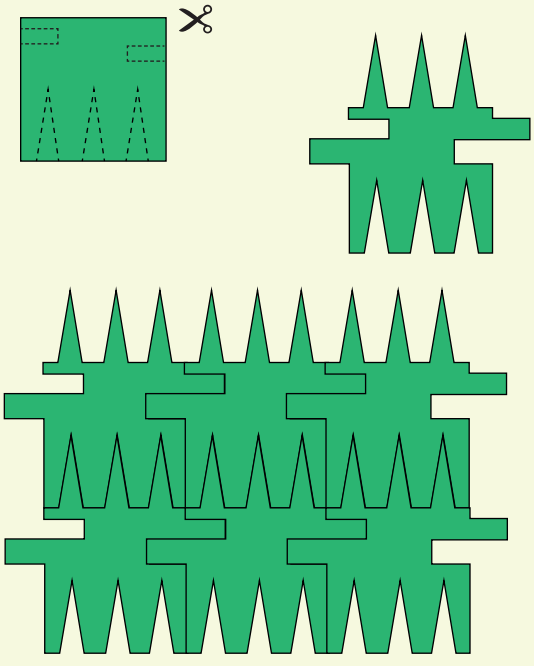
Dibuja la nueva figura para formar por lo menos dos filas de un teselado. Tendrás que trasladar, rotar o reflejar la figura.



2 Comienza de nuevo con un cuadrado.

Usa unas tijeras para recortar unas figuras y colócalas en los lados opuestos del cuadrado.

Dibuja la nueva figura para formar por lo menos dos filas de un teselado. Tendrás que trasladar, rotar o reflejar la figura.



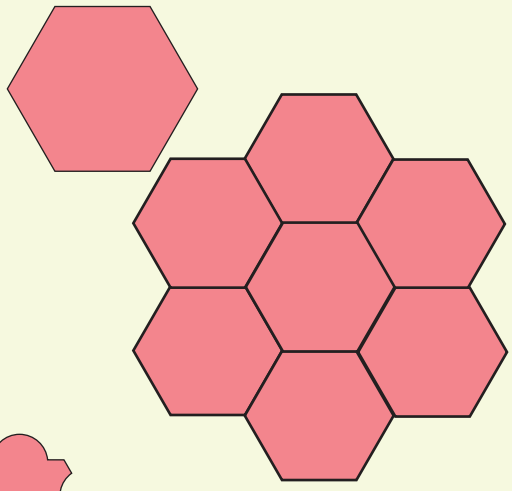
Puedes usar otros polígonos para teselados.

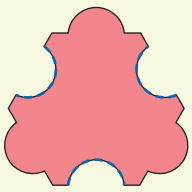
Haz la prueba con un hexágono.

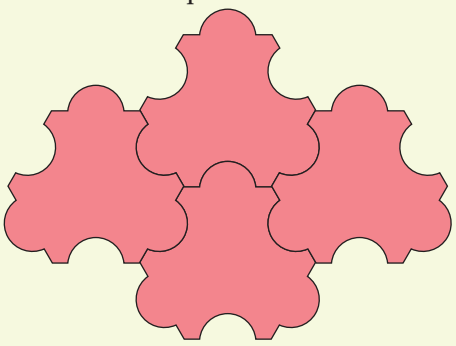
Usa unas tijeras para recortar una figura en un lado del hexágono. Traslada la figura al lado opuesto del hexágono.

Intenta repetir estos pasos en otros lados del hexágono.

Dibuja la nueva figura para formar teselado. Tendrás que trasladar, rotar o reflejar la figura.







Razonar y comentar

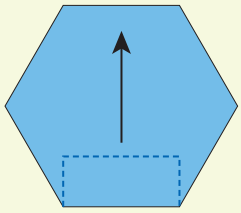
1. Indica si puedes hacer un teselado con círculos.

2. Indica si cualquier polígono puede formar teselados.

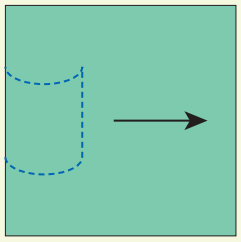
Inténtalo

Construye cada figura como se describe. Luego, forma dos filas de un teselado.

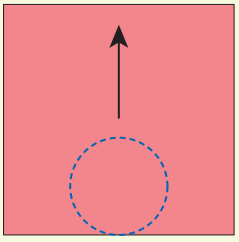
1.



2.

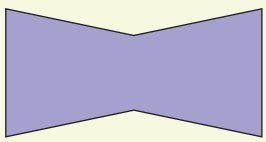


3.



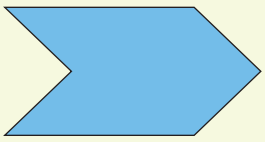
Indica si puede usarse cada una de las siguientes figuras para formar un teselado.

4.



5.

6.



7. Recorta un polígono y cámbialo recortando una parte de un lado. Traslada la parte recortada al lado opuesto. ¿Puede tu figura formar un teselado? Haz un dibujo en el que muestres tu respuesta.

CAPÍTULO 3

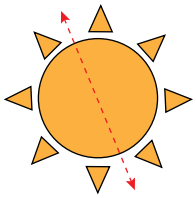
¿Listo para seguir?

Prueba de las lecciones 3–3 a 3–4

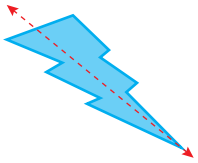
3–3 Simetría o reflexión

Determina si cada línea entrecortada parece un eje de simetría. Luego, indica si la figura tiene simetría de rotación.

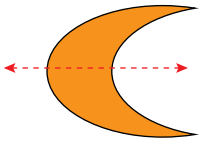
1.



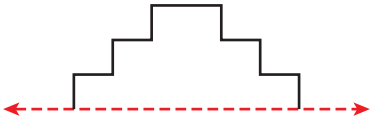
2.



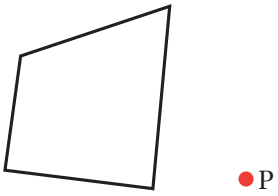
3.



4. Completa la figura. La línea entrecortada es el eje de simetría.

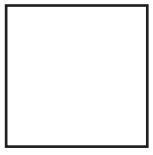


5. Realiza la simetría con respecto al punto P.

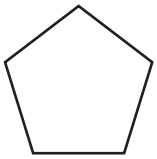


3–4 Teselados

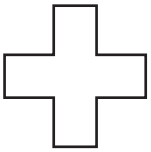
6. Decide con cuál de las siguientes figuras puedes teselar un plano. Explica por qué.



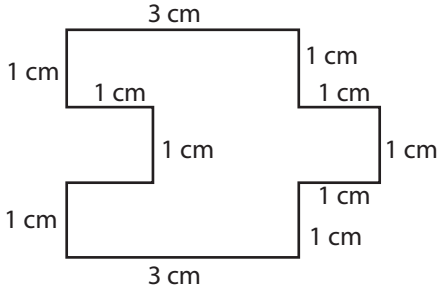
Cuadrado



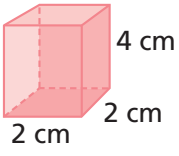
Pentágono regular

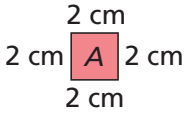


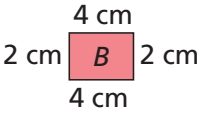
Cruz de la Bandera Suiza

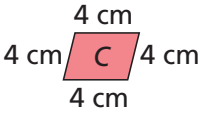


7. Marcos necesita una tapa para su caja. ¿Qué tapa debe comprar?









CONEXIONES con el mundo real

CAPÍTULO 3

La Alhambra

La Alhambra es una ciudad amurallada construida en lo alto de un cerro por los árabes que habitaron la península ibérica en el siglo XIV. Se encuentra en la ciudad de Granada, en Andalucía, al sur de España. La construcción principal de la Alhambra era el palacio real, residencia del califa, la máxima autoridad gobernante de la ciudad. Además contaba con otros servicios, como mezquitas, talleres, escuelas, etc. Es una de las mayores manifestaciones del arte musulmán de la época, que se caracterizaba por una decoración basada en la simetría axial y las teselaciones. Un ejemplo de ello es el Patio de los Leones.

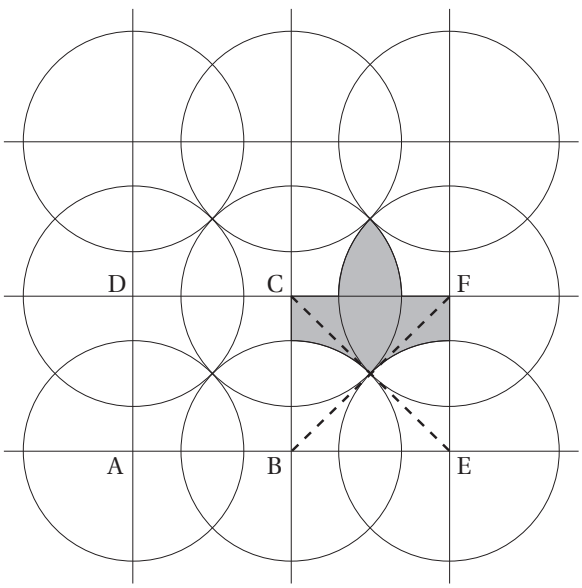
Patio de Los Leones

Es uno de los patio interiores del palacio real. Tiene una planta ligeramente trapezoidal, rodeada por una galería con 124 columnas de mármol blanco agrupadas en conjuntos de dos, tres y cuatro columnas. En el centro hay una fuente rodeada por 12 leones ubicados de manera simétrica.

Teselación en un muro interior.
Patio de Los Leones La Alhambra

Como has podido leer en este texto, los árabes andalusíes que habitaban en la España medieval sentían gran admiración por la geometría, la simetría y las traslaciones, admiración que plasmaban en edificios y otras manifestaciones artísticas. A continuación te mostraremos cómo realizar un mosaico similar a los que decoran los muros de la Alhambra:

1. Dibuja un cuadrado ABCD .
2. Dibuja otro cuadrado BCEF simétrico al anterior respecto del lado BC.
3. Traza las diagonales de ambos cuadrados.
4. Dibuja seis circunferencias con centro en A, B, C, D, E, F y radio igual a la mitad de la diagonal.
5. Dibuja los cuatro arcos y los cuatro segmentos que conforman el avión. Pinta la figura.
6. Puedes repetir la figura cuantas veces quieras, dibujando cuadrados simétricos a los anteriores, alrededor de los ya dibujados.



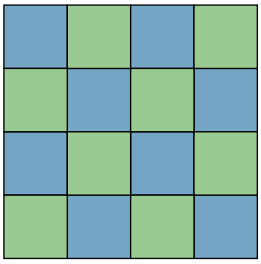
Crea tu propio puzle.

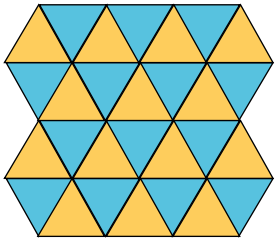
Cuando ya seas un experto, dibuja este mosaico sobre una fotografía o dibujo, pégalo sobre un cartón y recórtalo.

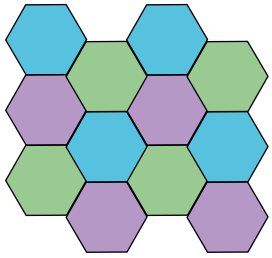
¡Vamos a jugar!

Colorear teselados

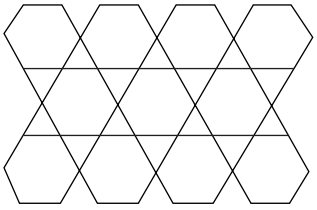
Dos de los tres teselados regulares (triángulos y cuadrados) se pueden colorear con dos colores de forma tal que no queden polígonos del mismo color con aristas en común. Para el tercer teselado (hexágonos), se necesitan tres colores.

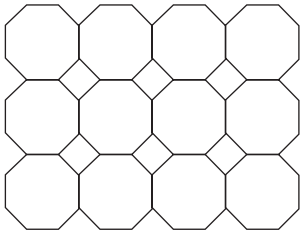


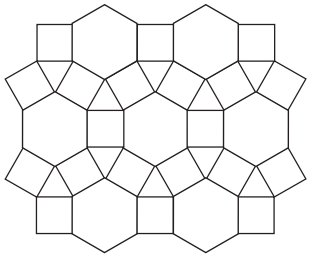




1. Determina si cada teselado se puede colorear con dos colores. De lo contrario, indica la mínima cantidad de colores necesarios.







2. Intenta escribir una regla acerca de qué teselados se pueden colorear con dos colores.

ACTIVIDAD GRUPAL Rummy de polígonos

El objetivo es crear figuras geométricas.

Materiales: mazo de cartas con propiedades de las figuras geométricas.

Cómo se juega: se reparte el mazo en igual número de cartas.

Los jugadores deben dibujar un polígono que coincida por lo menos con tres de las cartas que tiene en su mano.

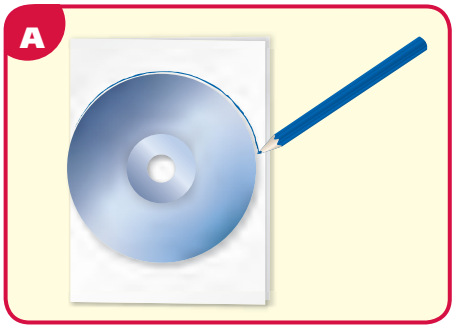
Gana el que dibuja la mayor cantidad de polígonos con más cartas.

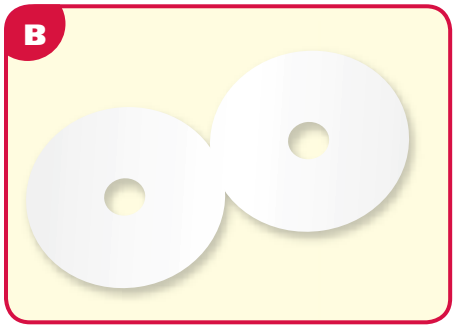
PROYECTO

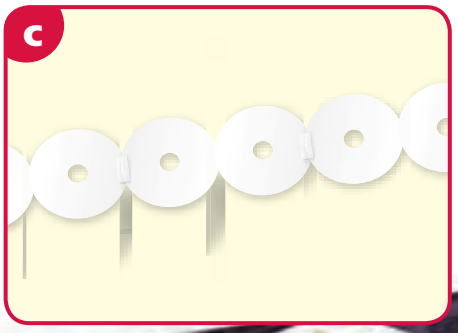
Proyecto CD de geometría

Haz tu propio CD para registrar datos importantes sobre geometría plana.

1. Pliega una hoja de papel por la mitad. Coloca un CD sobre el papel y haz que toque el borde plegado. Traza una línea alrededor del CD. **Figura A**
2. Recorta el papel con la forma del CD, cuidando de dejar el borde plegado intacto. De esta forma quedarán dos CD de papel unidos. Haz un orificio en el centro de cada CD de papel. **Figura B**
3. Repite los pasos 1 y 2 con las otras dos hojas.
4. Une con cinta adhesiva los extremos de todos los CD de papel hasta formar una cadena de seis CD. **Figura C**
5. Pliega los CD de papel en forma de acordeón para armar un anotador. Escribe el número y nombre del capítulo en el primer CD. Guarda el anotador de CD en un estuche vacío de CD.







Tomar notas de matemáticas

Usa las páginas en blanco del anotador de CD para tomar notas sobre el capítulo. Asegúrate de incluir definiciones y problemas de muestra que te servirán para repasar los conceptos esenciales de la geometría plana.

3 Guía de estudio: Repaso

Vocabulario

transformación	74	imagen	78
traslación	74	eje de simetría	86
reflexión	74	simetría axial	86
rotación	74	simetría de rotación	86
centro de rotación	78	teselados	90

Completa los siguientes enunciados con las palabras del vocabulario:

1. El punto fijo en torno al que rota una figura se llama _____.
2. Cuando se realiza una rotación, la figura sufre una _____ .
3. La _____ es el movimiento de una figura en línea recta.
4. Cubrir un plano, sin dejar espacios libres, con figuras que tienen ciertas características es un _____

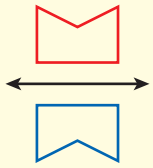
EJEMPLOS

EJERCICIOS

3–1 Transformaciones isométricas

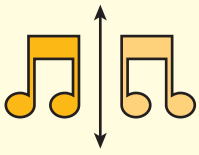
- **Indica si la transformación es una traslación, una rotación o una reflexión.**

  La transformación es una reflexión.



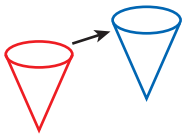
- **Dibuja la transformación.**

  Dibuja una reflexión horizontal.



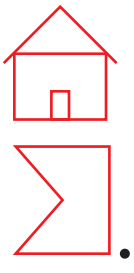
Indica si la transformación es una traslación, una rotación o una reflexión.

5.



Dibuja cada transformación.

6. Dibuja una traslación.
7. Dibuja una rotación de 90° en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del punto.



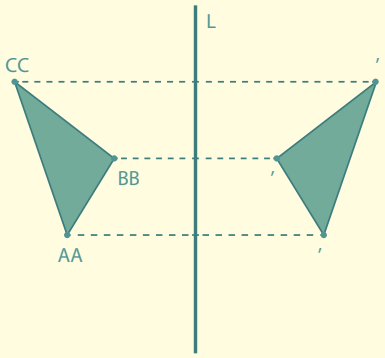
EJEMPLOS

EJERCICIOS

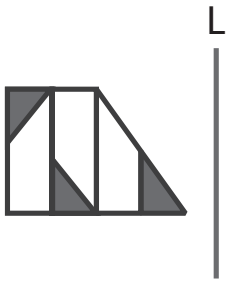
3–2 Traslaciones, simetrías y rotaciones

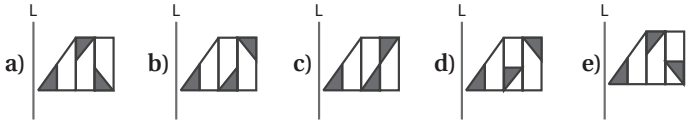
■ **Observamos en el dibujo la reflexión del triángulo ABC respecto del eje de simetría L.**

La distancia de C y C´ respecto del eje de simetría, es la misma. Lo mismo sucede con A y A´ ,B y B´ .



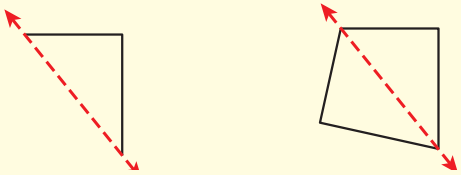
8. **¿Cuál de las siguientes opciones representa una simetría (reflexión) de la figura, respecto a la recta L?**



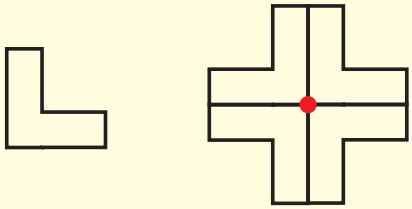


3–3 Simetría o reflexión

■ **Completa la figura. La línea punteada es el eje de simetría.**



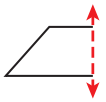
■ **Completa la figura. El punto es el centro de rotación.**



Completa la figura. La línea punteada es el eje de simetría.

9.

10.



Completa la figura. El punto es el centro de rotación.

11. En 90º

12. Simetría con respecto al eje

EJEMPLOS

EJERCICIOS

3–4 Teselados

■ **Determina qué transformación isométrica se utilizó para teselar cada uno de los siguientes embaldosados:**

a.

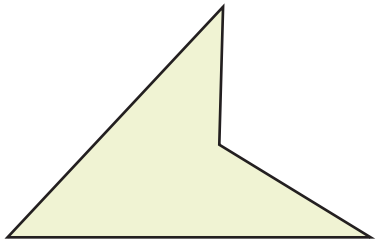
b.

c.

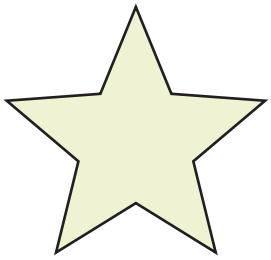
La simple observación y análisis de embaldosados nos permite comprobar que estos se construyen sobre la base de transformaciones isométricas. En este caso la letra A corresponde a una traslación, la letra B a una rotación y la letra C a una simetría o traslación o rotación.

13. Indica con cuál de las siguientes figuras es posible cubrir completamente el plano.

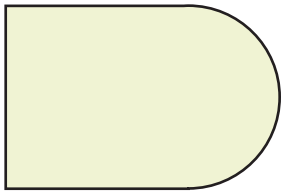
a.



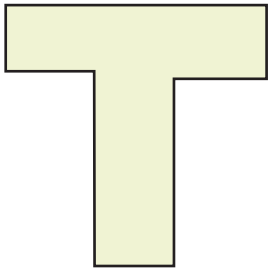
b.



c.



d.



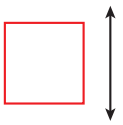
Repaso

Prueba del capítulo

CAPÍTULO 3

Dibuja cada transformación:

1. Reflexión sobre la línea.

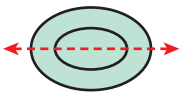


2. Rotación de 270° en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del punto.

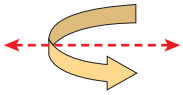
3. Traslación de 3 cm hacia la derecha.

Determina si cada línea punteada parece un eje de simetría. Luego, indica si la figura tiene simetría con respecto al eje.

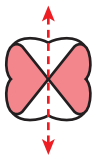
4.



5.

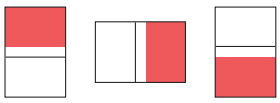


6.

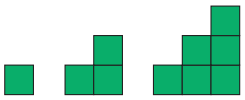


Identifica un posible patrón y úsalo para dibujar la figura que sigue:

7.

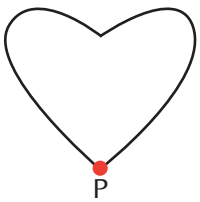


8.

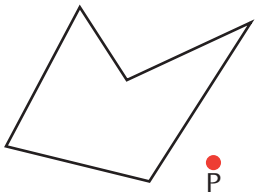


Realiza una rotación en 180° entorno a P:

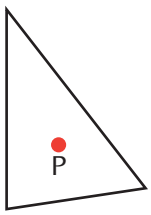
9.



10.

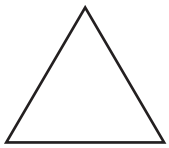


11.



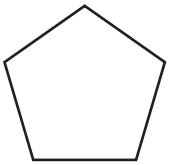
12. **Indica con cuál (o cuáles) de las siguientes figuras se puede teselar:**

a.



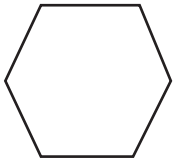
triángulo equilátero

b.



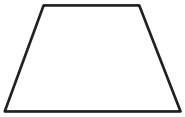
pentágono regular

c.



hexágono regular

d.



trapecio isósceles

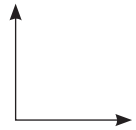
13. **En una hoja tamaño carta realiza una teselación con una o 2 de las figuras anteriores.**

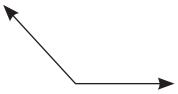
CAPÍTULO 3

Evaluación acumulativa

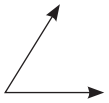
Capítulos 1 – 3

1. ¿Cuál de las siguientes opciones es un ejemplo de ángulo obtuso?

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ

Ⓓ 

2. Claudio acomoda sillas plegables en filas para una ceremonia. Las ubica de manera que haya 18 sillas por fila. Si tiene 200 sillas en total y coloca todas las sillas que puede en las filas, ¿cuántas sillas le sobran?

Ⓐ 2 Ⓒ 11

Ⓑ 8 Ⓓ 16

3. Dos ángulos son complementarios. Si la medida de un ángulo es de 36°, ¿cuánto mide el segundo ángulo?

Ⓐ 36° Ⓒ 64°

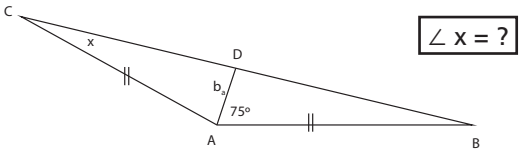
Ⓑ 54° Ⓓ 144°

4. Una bandeja de huevos contiene 30 unidades. Un pastelero compró 18 bandejas de huevos. Son 7 bandejas más que las que compró la semana pasada. ¿Cuántos huevos compró la semana pasada?

Ⓐ 210 Ⓒ 540

Ⓑ 330 Ⓓ 750

5. Dado el triángulo obstusángulo, ¿cuánto mide el ángulo *x* en grados?



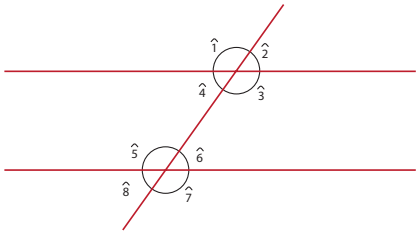
Ⓐ 30° Ⓒ 52,5°

Ⓑ 15° Ⓓ Faltan datos

6. En la figura de abajo, ¿cuál de los siguientes pares de ángulos NO son ángulos adyacentes?

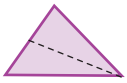
Ⓐ 1 y 2 Ⓒ 1 y 3

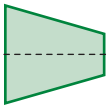
Ⓑ 5 y 8 Ⓓ 6 y 7



7. ¿En cuál de las siguientes opciones la recta punteada no es un eje de simetría?

Ⓐ

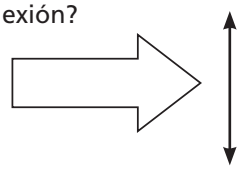
Ⓑ 

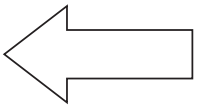
Ⓒ 

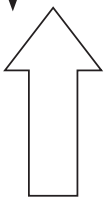
Ⓓ

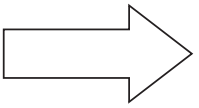
Ⓔ

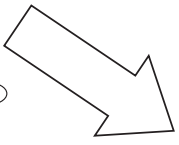
8. La flecha se refleja sobre la línea negra. ¿En cuál de las siguientes opciones se muestra correctamente la flecha después de la reflexión?



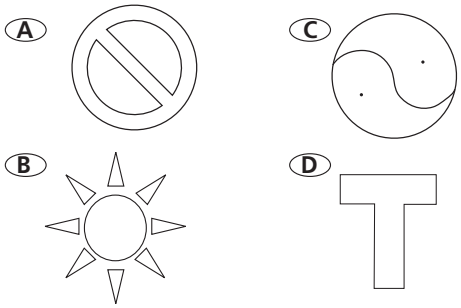
Ⓐ 

Ⓒ 

Ⓑ 

Ⓓ 

9. ¿Qué figura NO tiene simetría central?



10. ¿Cuál es el nombre que mejor describe la figura de abajo?

Ⓐ Rombo
Ⓒ Cuadrado
Ⓑ Rectángulo
Ⓓ Paralelogramo

¡UN CONSEJO! **Haz un dibujo para resolver problemas con figuras planas. Asegúrate de rotular tus dibujos con exactitud.**

11. ¿Cuál es el exponente cuando escribes el número 23 000 000 en notación científica?

12. Margarita da clases particulares a Ana después del horario escolar. Cobra $ 7 000 por hora. Si Ana le paga $ 84 000; ¿cuántas horas de clase dio Margarita?

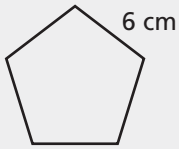
13. ¿Cuál es el valor de la expresión $32 \cdot (2 + 3 \cdot 4) - 5$?

14. Expresa como potencia el producto de:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 =$$

15. Un edificio de 4 pisos tiene 4 departamentos por piso y cada departamento tiene 4 habitaciones y cada habitación tiene 4 ventanas. ¿Cuántas ventanas hay en total en el edificio? Escríbelo como potencia.

16. Identifica la figura:



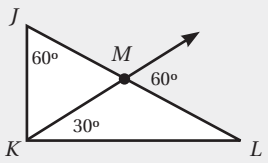
Dibuja una figura que sea congruente con ésta. Aplicando una rotación en 180°.

17. En la tabla se muestran las diez distancias que un atleta trotó.

25 km	18 km	32 km	12 km	9 km
10 km	15 km	21 km	18 km	6 km

a. ¿Cuál es la distancia media o promedio que trotó este atleta? Explica cómo hallaste la respuesta.

18. El triángulo JKL es rectángulo.



a. ¿Cuánto mide el ángulo KLM?

19. Un estudiante dibuja un trapecio en una cuadrícula de coordenadas. Las coordenadas son A (3,1), B (2,2), C (2,3) y D (3,4).

a. Marca estos puntos en una cuadrícula y únelos.

b. Dibuja una recta que pase por los puntos A y D. Refleja el trapecio sobre esa recta, rotula los puntos del nuevo trapecio y da las nuevas coordenadas.

c. ¿Qué nueva figura plana se crea? ¿Esta nueva figura tiene simetría axial? Explica tu respuesta.

Responde verdadero (V) o (F).

20. _____ Un giro completo es una rotación de 360°.

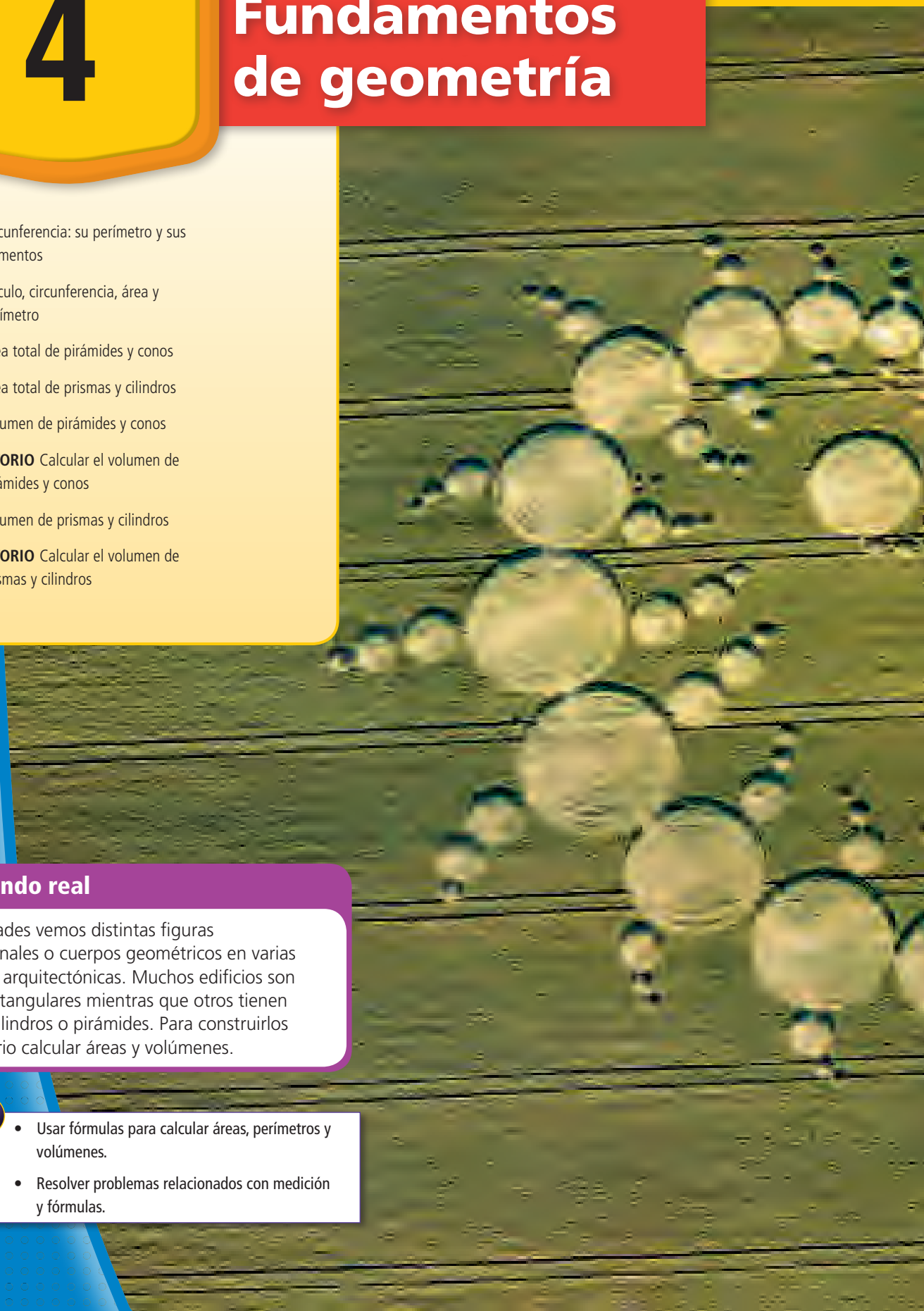
21. _____ Una casa tiene 4 piezas, con 4 ventanas, con 4 lámparas, con 4 camas, con 4 almohadas. Representado usando potencias es 4^6.

22. _____ El valor de la expresión $25 \cdot (5 + 3 \cdot 2) - 5$ es 260.

CAPÍTULO

4

Fundamentos de geometría



4–1 Circunferencia: su perímetro y sus elementos

4–2 Círculo, circunferencia, área y perímetro

4–3 Área total de pirámides y conos

4–4 Área total de prismas y cilindros

4–5 Volumen de pirámides y conos

LABORATORIO Calcular el volumen de pirámides y conos

4–6 Volumen de prismas y cilindros

LABORATORIO Calcular el volumen de prismas y cilindros

En el mundo real

En las ciudades vemos distintas figuras tridimensionales o cuerpos geométricos en varias estructuras arquitectónicas. Muchos edificios son prismas rectangulares mientras que otros tienen forma de cilindros o pirámides. Para construirlos fue necesario calcular áreas y volúmenes.

Enfoque del capítulo

- Usar fórmulas para calcular áreas, perímetros y volúmenes.
- Resolver problemas relacionados con medición y fórmulas.

¿Estás listo?

Vocabulario

Elige el término de la lista que complete mejor cada enunciado:

polígono
cuerpo geométrico
área o superficie
cuadrilátero

1. El _____ es la medida de la porción del plano que se encuentra dentro de una figura plana y cerrada.
2. Una figura cerrada, formada por la unión de segmentos se llama _____.
3. Un _____ es un polígono de cuatro lados.
4. En un _____ se puede medir el largo, el ancho y el alto.

Verifica si los siguientes tríos corresponden a las medidas de un triángulo rectángulo

5. 9 cm; 12 cm; 15 cm
6. 3 m; 4 m; 5 m
7. 3 m; 6 m; 9 m
8. 8 cm; 6 cm; 14 cm
9. 5 cm; 12 cm; 13 cm
10. 8 m; 15 m; 17 m
11. 4 m; 10 m; 25 m
12. 8 cm; 14 cm; 15 cm

Escribe el producto simplificando cuando sea posible

13. $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 =$
14. $3{,}2 \cdot 5{,}6 =$
15. $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 =$
16. $\frac{22}{7} \cdot 21 =$
17. $\frac{22}{7} \cdot \frac{7}{3} =$
18. $0{,}5 \cdot 14 + \frac{3}{2} \cdot 7 =$
19. $\frac{2}{15} \cdot 0{,}75 \cdot 10 =$
20. $2 \cdot 3{,}5 + 2 \cdot 1{,}5 =$
21. $\frac{5}{2} \cdot 0{,}4 \cdot \frac{3}{6} \cdot 2 =$
22. $4{,}5 \cdot 1{,}2 =$
23. $32 \cdot 0{,}5 =$
24. $\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{21}{2} =$

Escribe la equivalencia que corresponda

25. $6\ m^2 =$ _____ cm^2
26. $2{,}4\ cm^3 =$ _____ m^3
27. $3{,}8\ cm^2 =$ _____ m^2

CAPÍTULO 4

Vistazo previo

De dónde vienes

Antes

- Aprendiste cómo trasladar, reflejar y rotar una figura.
- Aprendiste a teselar.

En este capítulo

Estudiarás

- Cómo calcular el perímetro de una circunferencia.
- Cómo calcular el área de un círculo.
- Cómo definir un lugar geométrico.
- Cómo reconocer cilindros y conos.
- Cómo calcular el área y el volumen de los cuerpos geométricos.

Hacia dónde vas

Puedes usar las destrezas aprendidas en este capítulo:

- Para calcular la capacidad de cualquier cuerpo geométrico o recipiente que se asocie con alguno de ellos.
- Para calcular la cantidad de material que necesitas en alguna obra concreta que quieras realizar.

Vocabulario

lugar geométrico	perímetro
círculo	radio
circunferencia	cuerda
cono	diámetro
cilindro	arco
generatriz	tangente
apotema lateral	secante
pirámide	área
prisma	centro de la circunferencia
cara	
superficie	

Conexiones de vocabulario

Considera lo siguiente para familiarizarte con algunos de los términos de vocabulario del capítulo. Puedes consultar el capítulo, el glosario o un diccionario si lo deseas:

1. Cada vez que tengas un conjunto de puntos que cumplan una condición definida, lo llamarás **lugar geométrico**.

2. Cuando tengas una condición y debas encontrar el conjunto de puntos que la satisface, recuerda considerar varias posibilidades. A veces se obtiene mas de una figura.

Leer y escribir matemáticas

CAPÍTULO 4

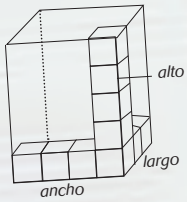
Estrategias para lograr un buen vocabulario matemático

Hacer un diario de matemáticas puede ayudarte a mejorar tus destrezas de razonamiento y a entender cada concepto que pueda resultar confuso.

Escribir este diario te ayudará a reflexionar sobre lo que has aprendido en clases y a repasar el significado de lo más importante.

Podrás recurrir a él como "ayuda–memoria" para relacionar y medir tus conocimientos.

El volumen de un prisma se calcula multiplicando las medidas de sus tres dimensiones (alto, largo y ancho). La unidad principal es el m^3. Los submúltiplos son cm^3 y el mm^3

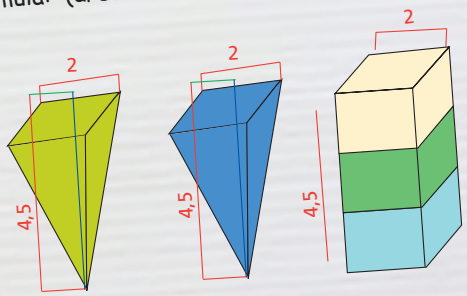


El volumen de una pirámide es un tercio del volumen de un prisma, con igual base e igual altura. Es decir es el producto de la base por la altura, dividido por tres.

Por ejemplo:

La base es cuadrada y mide 2 cm de lado, entonces el área la base es 4 cm^2 y la altura es 4,5 cm; por lo tanto el volumen de la pirámide de base cuadrada es $(4 \cdot 4{,}5) : 3 = 6\ cm^3$

Fórmula: (área de la base por la altura) $V = ab \cdot h$



Inténtalo

Comienza tu diario matemático. Usa las siguientes ideas para comenzar:

1. Trabaja en tu computador. Esto te permitirá ordenar los conceptos por abecedario, tema o fecha.
2. Ingresa la fecha cada cada vez que escribas.
3. Escribe un comentario o ejemplo del concepto que estás ingresando.
4. También es útil relacionar el concepto con alguna imagen.

CAPÍTULO

4–1 Circunferencia: su perímetro y sus elementos

Aprender a identificar los elementos de una circunferencia.

Vocabulario

- circunferencia
- centro de la circunferencia
- lugar geométrico
- radio
- cuerda
- diámetro
- arco
- tangente
- secante

La primera rueda Ferris, construida en 1983 para la Feria Mundial de Chicago, podía cargar hasta 2 160 personas. George Ferris se basó en la idea de una *circunferencia* al tomar como modelo una rueda de bicicleta para su diseño.

Una **circunferencia** es el conjunto de los puntos P en un plano, que están a la misma distancia r, de un punto dado O, llamado **centro de la circunferencia.**

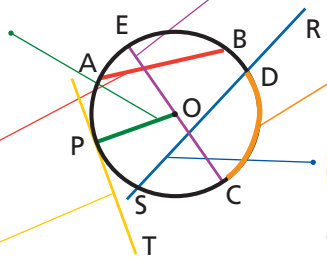
$C(O,r) = \{ P, \text{ tal que } d(OP) = r\}$

En geometría, a un conjunto de puntos que cumplen con una condición determinada se le llama **lugar geométrico**. La circunferencia es un lugar geométrico.

En una circunferencia se identifican distintos elementos: **radio, diámetro, arco, cuerda, secante y tangente.**

Radio
segmento de recta cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto de ella. Se designa como $\overline{OP} = r$

Diámetro
segmento de recta que pasa por el centro de la circunferencia y cuyos extremos están en la circunferencia.



Arco
parte de la circunferencia y se designa como $\overset{\frown}{DC}$.

Cuerda
segmento de recta cuyos extremos son puntos de la circunferencia y se designa como $\overline{AB}$.

Secante
una recta que se intersecta con la circunferencia en dos puntos de ella y se designa como $\overline{SR}$.

Tangente
recta que intersecta a la circunferencia en un solo punto P. La recta tangente y el radio OP forman un ángulo de 90°, es decir se intersectan en forma perpendicular. La recta tangente se designa por T.

Una circunferencia se identifica por su centro y su radio. Por ejemplo si una circunferencia tiene centro O y un radio r, esta se denota: C(O,r)

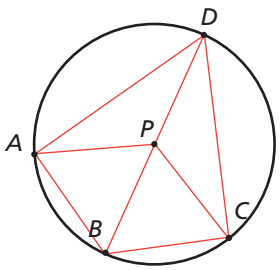
EJEMPLO 1 Identificar los elementos de la circunferencia

Identifica los elementos de la circunferencia.

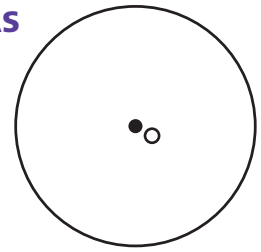
A **radios**
$\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD}$

B **diámetro**
$\overline{BD}$

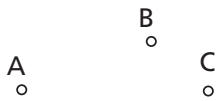
C **cuerdas**
$\overline{AD}, \overline{DC}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{BD}$



EJEMPLO 2 **APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**



Cómo dibujar una circunferencia que pase por los puntos A, B y C.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMA

1 Comprende el problema

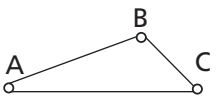
Haz una lista con la **información importante**:

Qué información es necesaria para responder:

- ¿qué figura podemos formar al unir los tres puntos con segmentos?
- ¿cómo determinar el centro de la circunferencia?
- ¿qué instrumentos geométricos se deben utilizar para construir la circunferencia que pase por los tres puntos dados?

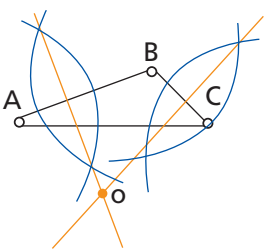
2 Haz un plan

Trazar los tres segmentos con regla y determinar las simetrales (mediatrices), de dos de los lados del triángulo, usando el compás. Con solo dos simetrales, determinaremos la intersección llamada punto O.



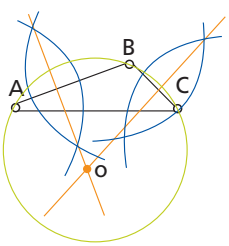
3 Resuelve

Con el compás marca el centro en el punto O, trazar la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C.



4 Repasa

Con tres puntos dados no colineales, se puede determinar un triángulo, uniendo sus segmentos. Las simetrales son rectas perpendiculares que pasan por el punto medio del segmento. En todo triángulo se puede circunscribir una circunferencia cuyo centro es el circuncentro. Este punto llamado circuncentro se obtiene al intersectar las simetrales del triángulo.



Razonar y comentar

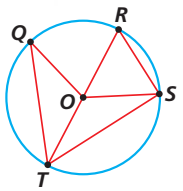
1. **Explica** por qué un diámetro es una cuerda pero un radio no lo es.
2. **Comenta** con tus compañeros, qué tipo de triángulo se forma si el centro de la circunferencia circunscrita es el punto medio del segmento AC (Ver ejemplo 2).

4–1 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

Identifica los elementos de la circunferencia:

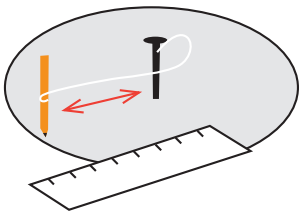


1. radios
2. diámetros
3. cuerdas

Ver Ejemplo 2

4. **¿Cómo construir una circunferencia sin uso del compás?** En primer lugar se requiere tener una pitilla (o lana o cordel delgado) y un chinche (o alfiler o clavo pequeño). En segundo lugar, se determina un punto O a partir del cual se trazará la circunferencia, dibujando un punto en una hoja en blanco o en una cartulina. A dicho punto se le identificará con el nombre de centro de la circunferencia.

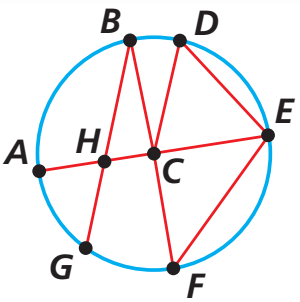
   En un extremo del cordel o pitilla debe amarrarse la punta del alfiler o chinche y se clavará en el punto dibujado como centro. En el otro extremo se amarra un lápiz. La distancia ó extensión del cordel o pitilla corresponderá al radio de la circunferencia que trazaremos haciendo girar el lápiz hasta que se dibuje claramente, en la cartulina o papel, la circunferencia.



PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

Identifica las partes de la circunferencia escribiendo los trazos o segmentos con las letras correspondientes :



5. radios
6. diámetros
7. cuerdas

Ver Ejemplo 2

8. Construir una circunferencia sin uso del compás, con un radio de 10 cm, usando una pitilla o un cordel.

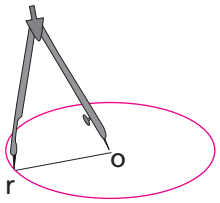
PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

9. Usando un compás, dibuja una circunferencia de radio 6 cm y con una regla, dibuja el diámetro. ¿Cuánto mide su diámetro?

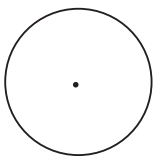
10. Usando un compás, dibuja una circunferencia de diámetro 8 cm.

11. Usando un compás dibuja una circunferencia de radio 5 cm. ¿Cómo construir un triángulo equilátero inscrito en ella?

Recuerda que en un polígono inscrito en una circunferencia tiene sus vértices dentro de en la circunferencia.



12. **Escribe un problema** Observa varios objetos circulares, como tapas, tarros, discos o platos y escribe una situación usando los conceptos de radio o diámetro y preséntala a tu curso.

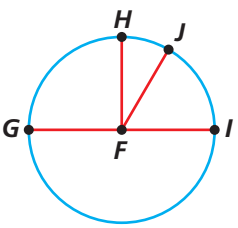


13. **Desafío** Dada esta circunferencia, dibuja un cuadrado inscrito en ella.

14. Un empresario quiere abrir una tienda que se encuentre a la misma distancia de tres ciudades cercanas. Construye un dibujo que muestre dónde debería estar ubicada esta tienda con respecto a las 3 ciudades.

Repaso

Usa la figura para resolver los ejercicios 14 y 15.



15. ¿Qué enunciado acerca de la figura NO es verdadero?

A. *GI* es un diámetro de la circunferencia.

B. *GI* es igual a dos radios.

C. *HF* es una cuerda.

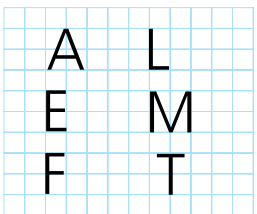
D. *JH* es un arco.

16. Si el diámetro *GI* mide 7 cm ¿cuánto mide el segmento *FJ*?

Estima.

17. 28% de 150 **18.** 21% de 90 **19.** 2% de 55 **20.** 53% de 72

Usa las letras de la derecha:



21. Marca con una X las letras que tienen segmentos paralelos.

22. Encierra en un círculo las letras que tienen segmentos perpendiculares.

CAPÍTULO 4–2

Círculo, circunferencia, área y perímetro

Aprender a encontrar el área de un círculo y el perímetro de la circunferencia.

Vocabulario

circunferencia
círculo
diámetro
perímetro
radio

Muchos juegos de los parques de diversiones hacen girar al pasajero a toda velocidad por un trayecto circular. Cada vuelta alrededor del círculo completa una **circunferencia**.

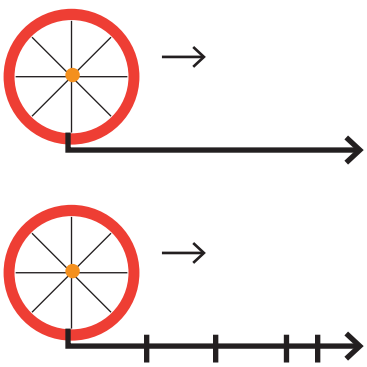
Un **círculo** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo, llamado centro, es menor a una distancia constante, llamada **radio**.

Es decir, es la región del plano delimitada por una circunferencia.

Carrusel de sillas voladoras.

¿Cómo calcular el perímetro de una circunferencia?

Haz una marca en el borde de un objeto circular (tapa, rueda, etc.) y después haz que coincida esta marca con una marca en la mesa o en el piso, trazando una línea recta. Luego, haz rodar el objeto circular hasta que la marca del objeto toque el piso o mesa nuevamente. Marca con un punto sobre la línea y mide con una huincha o regla el recorrido del objeto circular. De esta forma has calculado el **perímetro** o la longitud del objeto circular.



Posteriormente mide el diámetro del objeto con una regla o huincha y comprueba cuántas veces cabe el **diámetro** en la longitud o recorrido del objeto circular. Comprobarás que corresponde a 3 veces y una fracción, de $\frac{1}{7}$ aproximadamente.

RECUERDA

- Pi (π) es un número irracional que se suele aproximar a los números racionales 3,14 y $\frac{22}{7}$

Este número se llama Pi, cuyo símbolo es π y en forma estimada corresponde a 3,14159…

Entonces el perímetro de la circunferencia se obtiene con la fórmula $\frac{P}{d} = \pi$.

Luego es $P = d\,\pi$ y como el $d = 2r$ o también puede ser $P = 2\,\pi\,r$.

EJEMPLO 1 Encuentra el perímetro de la circunferencia

Encontrar el perímetro de cada circunferencia en función de π y aproxímalo a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

A **circunferencia con un radio de 4 cm**

$P = 2\pi r$

$= 2\pi\,(4)$

$= 8\pi$ cm $\approx 25{,}1$ cm

B **circunferencia con un diámetro de 4,5 m**

$P = \pi d$

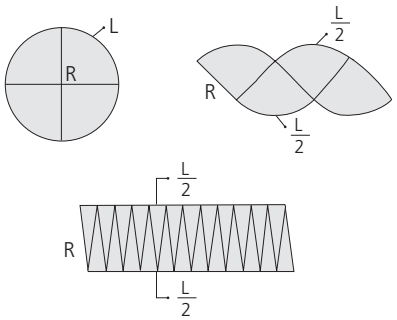
$= \pi\,(4{,}5)$

$= 4{,}5\,\pi$ m $\approx 14{,}1$ m

Observa que al dividir el círculo en 4 partes iguales y unirlas por sus radios, obtenemos una figura curva cuyo largo es la mitad del perímetro de la circunferencia ($\frac{L}{2}$) y su ancho es igual a su radio (R).

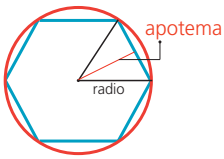
Entre más particiones de este círculo, se observa una figura parecida a un "rectángulo" de largo πr (la mitad de la longitud o perímetro de la circunferencia) y de altura el radio R.

Entonces el área estimada de este "rectángulo" es $A = \pi r \cdot r = \pi r^2$



EJEMPLO 2 Encontrar el área de un círculo

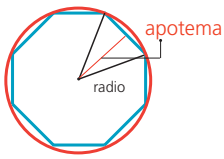
En la medida que aumenta la cantidad de lados que tiene el polígono inscrito en la circunferencia, más se acerca a la superficie del círculo.



El área de cada triángulo del polígono es $\frac{b \cdot h}{2}$

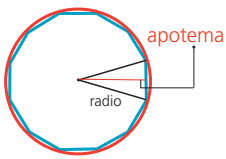
Si el polígono tiene n lados, entonces su área es:

$\frac{b \cdot h}{2} \cdot n = \frac{n \cdot b \cdot h}{2}$



Luego, entre más lados tiene el polígono se aproxima al perímetro de la circunferencia y la apotema se aproxima al radio de la circunferencia.

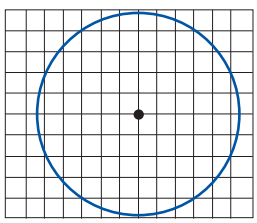
Así obtendremos la fórmula del área del círculo en forma aproximada:



$\frac{n \cdot b \cdot h}{2} = \frac{2\pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$

EJEMPLO 3 Estimar el área y el perímetro, si la cuadrícula es de un centímetro por lado.

En forma aproximada el diámetro es 11 cm y el número pi se considera como 3,1.



Entonces el perímetro es:

$d \cdot \pi = 11 \cdot 3{,}1 = 34{,}1\ cm^2$ *aproximado.*

El área es:

$\pi \cdot r^2 = 3{,}1 \cdot 5{,}5^2 = 93{,}775\ cm^2$ *aproximadamente.*

EJEMPLO 4 Aplicación a la Física

El radio de un carrusel de sillas voladoras es de 2,9 m. Si una persona está en el juego durante 18 revoluciones completas, ¿cuánto recorre la persona? Usa $\frac{22}{7}$ para π.

$P = 2\pi r = 2\pi(2{,}9) = \pi 5{,}8$ *Encuentra el perímetro de la circunferencia.*

$\approx 58\left(\frac{22}{7}\right) \approx \frac{1\,276}{7}$

La distancia recorrida es la circunferencia del carrusel por la cantidad de revoluciones, o aproximadamente $\frac{1\,27{,}6}{7} \cdot 18 = \frac{22\,96{,}8}{7} \approx 328{,}11$ m.

Razonar y comentar

1. **Escribe la fórmula** para calcular el área de un círculo en función del diámetro d.

4–2 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

Encuentra el perímetro de cada circunferencia en función de π aproximándolo a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

1. circunferencia con un diámetro de 6 cm

2. circunferencia con un radio de 3,2 m

Ver Ejemplo 2

Encuentra el área de cada círculo en función de π aproximándolo a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

3. círculo con un radio 4,1 cm

4. círculo con un diámetro de 15 cm

Ver Ejemplo 3

5. Representa gráficamente un círculo con centro (–2, 1) que pase por el punto (–4,1). Encuentra el área en función de π y aproxímalo a la décima cercana. Usa 3,14 para π.

Ver Ejemplo 4

6. Una rueda tiene un diámetro de 3,5 cm. ¿Qué distancia recorre aproximadamente si completa 20 revoluciones? Usa $\frac{22}{7}$ para π.

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

Encuentra el perímetro de cada circunferencia en función de π y aproxímalo a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

7. circunferencia con un radio de 9 cm

8. circunferencia con un diámetro de 6,3 m

Ver Ejemplo 2

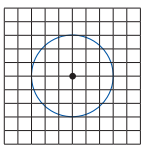
Encuentra el área de cada círculo en función de π y aproxímalo a la décima cercana. Usa 3,14 para π.

9. círculo con un diámetro de 32 cm

10. círculo con un radio 2,5 m

Ver Ejemplo 3

11. Calcula en forma aproximada la cantidad de cuadraditos de un centímetro de lado que están encerrados por la circunferencia. ¿Cuántos cm^2 son?



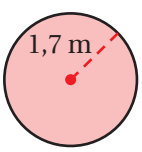
Ver Ejemplo 4

12. Si el diámetro de una rueda es 5 cm, ¿cuántos metros recorre aproximadamente la rueda si completa 134 vueltas? Usa $\frac{22}{7}$ para π. (Pista: 1 m = 100 cm).

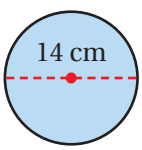
PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Encuentra el perímetro de cada circunferencia y el área de cada círculo aproximándolos a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

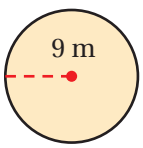
13.



14.



15.



Encuentra el radio de cada circunferencia según la medida dada:

16. $P = 26\pi$ m

17. $P = 12{,}8\pi$ cm

18. $P = 15\pi$ m

19. $A = 36\pi$ cm^2

20. $A = 289\pi$ cm^2

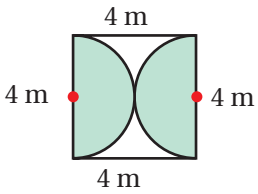
21. $A = 136{,}89\pi$ m^2

CONEXIÓN Entretenimiento

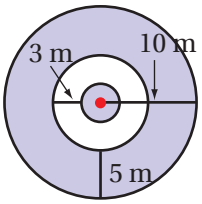
En el parque de diversiones Fantasilandia está el Kamikaze, una máquina que cuenta con dos péndulos donde hay 2 carros para 32 personas, y que tiene una altura de 17 metros. Los carros sujetos a un soporte central comienzan a girar, alcanzando cada vez más velocidad hasta lograr realizar giros completos (360°).

Encuentra el área sombreada y aproxímala a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

22.



23.



24. Si el Kamikaze de Fantasilandia tiene una altura de 17 metros y los ejes miden aproximadamente 12 metros, cuando los carros logran dar un giro completo, ¿cuántos metros recorre cada carro?

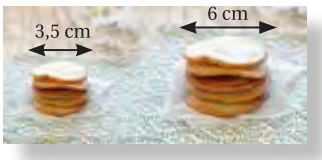
25. El radio de una pista de carreras circulares es de 10 metros. Si un atleta da 3 vueltas completas, ¿cuántos metros recorre? Usa el valor de π como 3,14.

26. Una cafetería sirve galletas de tamaño pequeño y de tamaño grande.

a. ¿Cuál es el área de una galleta pequeña aproximada a la décima más cercana?

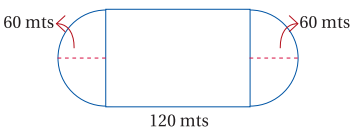
b. ¿Cuál es el área de una galleta grande aproximada a la décima más cercana?

c. Si 6 galletas pequeñas cuestan lo mismo que 3 galletas grandes, ¿qué conviene comprar?



27. **¿Dónde está el error?** María dijo que si el diámetro de una circunferencia es un número natural, entonces su perímetro es siempre un número racional. ¿Cuál es el error?

28. **Desafío** Explica cómo encontrarías el área de la figura compuesta que se muestra. Luego calcula el área.



29. Calcula el perímetro de una semicircunferencia de 5 cm de diámetro, usando pi= 3,14.

Repaso

30. Una jardinera circular tiene un radio de 22 cm. ¿Cuánto mide el perímetro de la jardinera aproximado a la décima más cercana?

(A) 69,1 cm (B) 103,7 cm (C) 138,2 cm (D) 1 519,8 cm

31. La primera rueda de la fortuna se construyó para la Feria Mundial en EE. UU. en 1893. Tenía un diámetro de 75 m. Encuentra el perímetro de la rueda de la fortuna. Usa 3,14 para π.

Encuentra la medida del ángulo que falta para cada triángulo:

32. 70°, 80°, x° **33.** 120°, 10°, x° **34.** 50°, 20°, x° **35.** 100°, 15°, x°

CAPÍTULO

4

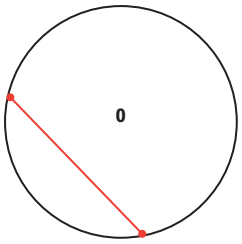
¿Listo para seguir?

Prueba de las lecciones 4–1 y 4–2

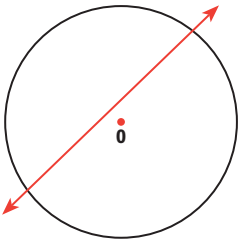
4–1 Circunferencia, su perímetro y sus elementos

Identifica cada elemento en las circunferencias siguientes:

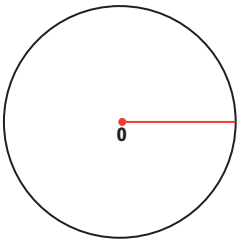
1.



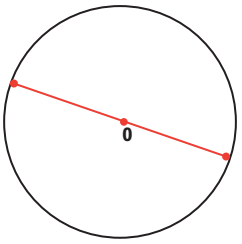
2.



3.



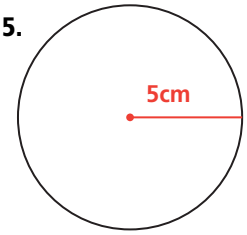
4.



Define cada uno de los elementos identificados.

Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras

5.



6.

4–2 Círculo, circunferencia, área y perímetro

Encuentra el área y el perímetro de cada círculo y circunferencia en función de π y aproxímalo a la décima más cercana:

Usa 3,14 para π.

7. radio = 19 cm

8. diámetro = 4,3 cm

9. radio = $7\frac{1}{2}$ cm

10. Si el perímetro de una circunferencia es de 27,9 cm, ¿ cuál es su radio? Usar el valor de pi= 3,1.

11. Si el área de un círculo es aproximadamente 27,9 cm cuadrados, ¿cuánto mide su radio? Usar el valor de pi= 3,1.

12. Calcular el área de un semicírculo, si su radio es de 2 cm.

13. Si el diámetro de una circunferencia es de 15 cm ¿cuánto mide su radio?

Enfoque en resolución de problemas

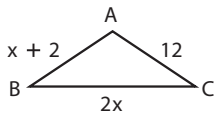
Repasa

• Prioriza y ordena la información

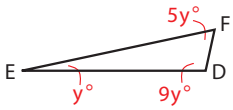
Cuando creas haber resuelto un problema, piensa otra vez. Tal vez tu respuesta no sea realmente la solución del problema. Por ejemplo, quizás resuelvas una ecuación para encontrar el valor de una variable, pero para Encuentra la respuesta que el problema plantea, tal vez sea necesario sustituir el valor de la variable en una expresión.

Escribe y resuelve una ecuación para cada uno de los siguientes casos. Comprueba si el valor de la variable es la respuesta a la pregunta. Si no es así, da la respuesta a la pregunta.

1 El triángulo ABC es isósceles. Encuentra su perímetro.

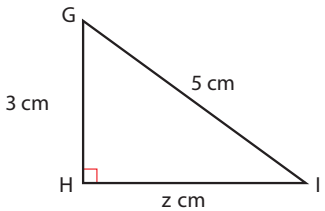


2 Encuentra la medida del ángulo más pequeño del triángulo DEF.

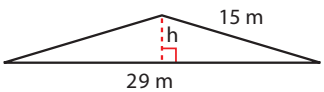


3 Encuentra la medida del ángulo más grande del triángulo DEF.

4 Encuentra el área del triángulo rectángulo GHI.



5 Un frontón es un espacio triangular con estatuas ubicadas en el frente de un edificio. Estas son las medidas aproximadas de un frontón triangular isósceles. Encuentra el área del frontón.



CAPÍTULO 4–3

Área total de pirámides y conos

Aprender a encontrar el área total de pirámides y conos.

Vocabulario

apotema lateral

generatriz

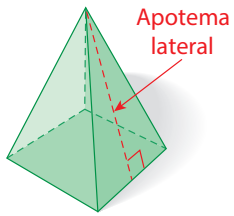
pirámide regular

cono regular

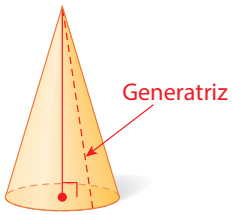
La **apotema lateral** de una pirámide o la **generatriz** de un cono se miden a lo largo de su superficie lateral como se muestra en el dibujo.

La base de una **pirámide regular** es un polígono regular y todas sus caras laterales son congruentes.

En un **cono regular**, una recta perpendicular a la base trazada a través del extremo superior del cono pasa por el centro de la base.

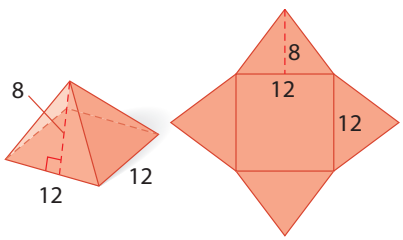
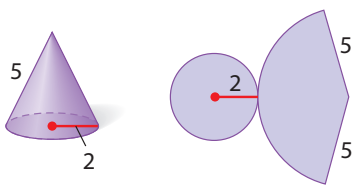


Pirámide regular



Cono regular

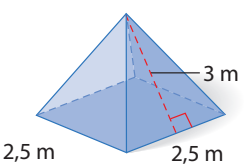
ÁREA TOTAL DE PIRÁMIDES Y CONOS

En palabras	Con números	Fórmula
Pirámide: El área total A de una pirámide regular es el área de la base B más el área lateral L. El área lateral es la mitad del perímetro de la base P por la apotema lateral ℓ.	 $A = (12 \cdot 12) + \frac{1}{2}(48)(8) = 336$ unidades^2	$A = B + L$ o $A = B + \frac{1}{2}P\ell$
Cono: El área total A de un cono regular es el área de la base B más el área lateral L. El área lateral es la mitad de la circunferencia de la base $2\pi r$ por la generatriz ℓ.	 $A = \pi(2^2) + \pi(2)(5) = 14\pi \approx 43{,}98$ unidades^2	$A = B + L$ o $A = \pi r^2 + \pi r\ell$

EJEMPLO 1 Encontrar el área total

Encuentra el área total de cada figura aproximada a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

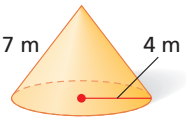
A



$$A = B + \frac{1}{2}P\ell$$
$$= (2{,}5 \cdot 2{,}5) + \frac{1}{2}(10)(3)$$
$$= 21{,}25 \text{ m}^2$$

Encuentra el área total de cada figura aproximada a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

B



$$A = \pi r^2 + \pi r\ell$$
$$= \pi(4)^2 + \pi(4)(7)$$
$$= 44\pi \approx 138{,}2 \text{ m}^2$$

EJEMPLO 2 Explorar los efectos de dimensiones que cambian

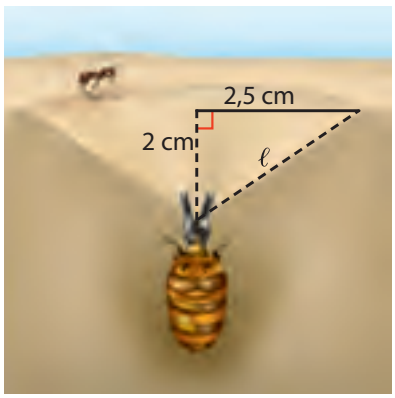
Un cono tiene un diámetro de 6 cm y una generatriz de 9 cm. Explica si duplicar la generatriz tiene el mismo efecto en el área total que duplicar el radio. Usa 3,14 para π.

Dimensiones originales	Duplicar la generatriz	Duplicar el radio
$A = \pi r^2 + \pi r\ell$	$A = \pi r^2 + \pi r(2\ell)$	$A = \pi(2r)^2 + \pi(2r)\ell$
$= \pi(3)^2 + \pi(3)(9)$	$= \pi(3)^2 + \pi(3)(18)$	$= \pi(6)^2 + \pi(6)(9)$
$= 36\pi \text{ cm}^2 \approx 113 \text{ cm}^2$	$= 63\pi \text{ cm}^2 \approx 197{,}8 \text{ cm}^2$	$= 90\pi \text{ cm}^2 \approx 282{,}6 \text{ cm}^2$

No tiene el mismo efecto. Duplicar el radio aumenta el área total más que duplicar la generatriz.

EJEMPLO 3 Aplicación a la Biología

El hoyo que cava una hormiga es un cono invertido con las dimensiones que se muestran. ¿Cuál es el área total lateral del hoyo?



La generatriz, el radio y la profundidad del hoyo forman un triángulo rectángulo.

$a^2 + b^2 = c^2$ *Teorema de Pitágoras.*

$(2{,}5)^2 + 2^2 = \ell^2$

$10{,}25 = \ell^2$

$\ell \approx 3{,}2$

$L = \pi r\ell$ *Área total lateral.*

$= \pi(2{,}5)(3{,}2) \approx 25{,}1 \text{ cm}^2$

Razonar y comentar

1. **Compara** la fórmula para encontrar el área total de una pirámide con la fórmula para encontrar el área total de un cono.
2. **Explica** cómo encontrarías la apotema de una pirámide cuadrangular cuya arista de base mide 6 cm de longitud y tiene una altura de 4 cm.

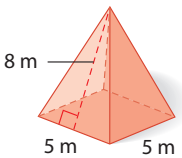
4–3 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

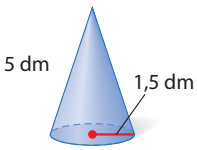
Ver Ejemplo 1

Encuentra el área total de cada figura aproximándola a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

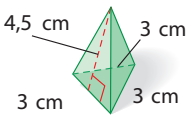
1.



2.



3.



Ver Ejemplo 2

4. Un cono tiene un diámetro de 12 cm y una generatriz de 9 cm. Indica si duplicar ambas dimensiones duplica el área total.

Ver Ejemplo 3

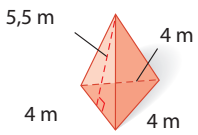
5. José tiene un gorro de cumpleaños de radio 30 cm y de altura 40 cm. Él quiere cambiar el diseño de la superficie cónica. ¿Cuánto debe medir aproximadamente el papel de color con el cual forrará toda su superficie cónica?

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

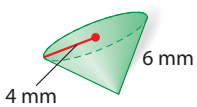
Ver Ejemplo 1

Encuentra el área total de cada circunferencia en función de π y aproximándola a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

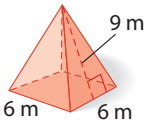
6.



7.



8.



Ver Ejemplo 2

9. Una pirámide cuadrangular regular tiene de base un cuadrado cuyos lados miden 12 m y una altura inclinada de 5 m. Indica si duplicar ambas dimensiones duplica el área total.

Ver Ejemplo 3

10. A fines del siglo XV, Leonardo Da Vinci diseñó un paracaídas con forma de pirámide. El diseño consiste en una estructura parecida a una carpa hecha de telas cuyos lados miden 6,5 m y que tiene una altura de 3,6 m. Estima cuánta tela se necesita para hacer el paracaídas.

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Encuentra el área total de cada figura con las dimensiones dadas. Usa 3,14 para π.

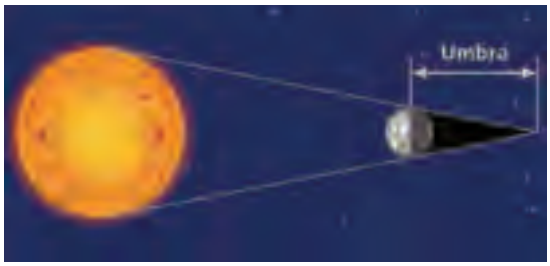
11. pirámide triangular regular:
área de la base = 0,06 km^2
perímetro de la base = 0,8 km^2
apotema lateral = 0,3 km^2

12. cono: $r = 12\frac{1}{2}$ m
generatriz = $44\frac{1}{2}$ m

CONEXIÓN con Ciencias

Pirámide ubicada en la piscina más grande del mundo en el centro de vacaciones San Alfonso del Mar. Se encuentra en Algarrobo, playa de la V región.

13. **Astronomía** Cuando la Luna está entre el Sol y la Tierra, arroja una sombra cónica llamada umbra. Si la sombra mide 3 444 km de diámetro y 419 970 km a lo largo del borde, ¿cuál es el área total lateral de la umbra?



14. **Ciencias** La pirámide de San Alfonso del Mar de Algarrobo, Chile mide aproximadamente 15 metros de altura y los lados de su base cuadrada tienen una longitud de 30 metros cada uno. ¿Cuál es el área total lateral de la pirámide aproximadamente?

15. En la tabla se muestran las dimensiones de tres pirámides cuadrangulares.

a. Completa la tabla.

b. ¿Qué pirámide tiene la menor área total lateral? ¿Cuánto mide el área total lateral?

Dimensiones de las pirámides de Giza (m)

Pirámide	Altura	Apotema lateral	Lado de la base
Keops		186	230
Kefrén	143	179	214
Micerinos	65		105

16. Un cono de helado tiene un diámetro de 4 cm y una generatriz de 11 cm. Inventa y resuelve un problema sobre el cono de helado.

17. Se conocen las dimensiones de la altura y de la base de un cono. Explica cómo encontrar la generatriz.

18. **Desafío** Se cree que la pirámide más antigua es la pirámide escalonada del rey Zoser, construida alrededor del 2650 a.C. en Saqqara, Egipto. La base es un rectángulo que mide (aproximadamente) 109 m por 125 m y la altura de la pirámide es de 62 m (aproximadamente). Encuentra el área total lateral aproximada de la pirámide.

Repaso

19. Encuentra el área total de una pirámide triangular cuya de base tiene un área de 12 metros cuadrados, un perímetro de base 24 metros y un apotema de 8 metros.

Ⓐ 72 m^2 Ⓑ 108 m^2 Ⓒ 204 m^2 Ⓓ 2 304 m^2

20. ¿Cuál es el área total lateral de un cono con un diámetro de 12 centímetros y una generatriz de 6 centímetros? Usa 3,14 para π.

Resuelve:

21. $-4 \cdot (6 - 8)$ **22.** $3 \cdot (-5 - 4)$ **23.** $-2 \cdot (4 - 9)$ **24.** $-6 \cdot (8 - 9)$

Encuentra el área total de cada pirámide de base cuadrada si:

25. el perímetro de la base es 16 m y el apotema lateral es 5 m.

26. el área basal es 64 m y el apotema lateral es 6 m.

CAPÍTULO 4–4

Área total de prismas y cilindros

Aprender a encontrar el área total de prismas y cilindros.

Vocabulario

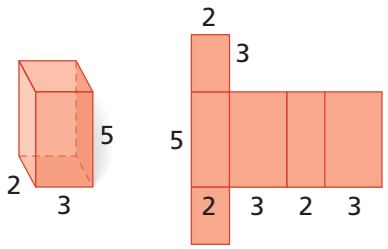
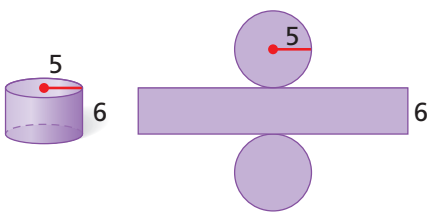
área total

cara lateral

Una *imagen anamórfica* es una figura distorsionada que se vuelve reconocible al reflejarla en un espejo cilíndrico.

El área total es la suma de las áreas de todas las superficies de una figura. Las **caras laterales** de un prisma son paralelogramos que unen las bases. El **área** total de un cilindro es la superficie curva.

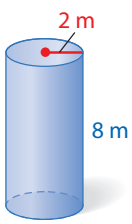
ÁREA TOTAL DE PRISMAS Y CILINDROS

En palabras	Con números	Fórmula
Prismas: El área total A de un prisma es el doble del área de la base B más el área lateral L. El área lateral es el perímetro de la base P por la altura h.	 $A = 2(3 \cdot 2) + (10)(5) = 62$ unidades^2	$A = 2B + L$ o $A = 2B + Ph$
Cilindro: El área total A de un cilindro es el doble del área de la base B más el área lateral L. El área lateral es la circunferencia de la base $2\pi r$ por la altura h.	 $A = 2\pi(5^2) + 2\pi(5)(6) \approx 345{,}4$ unidades^2	$A = 2B + L$ o $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

EJEMPLO 1 Encontrar el área total

Encuentra el área total de cada figura aproximándola a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

A



$A = 2\pi r2 + 2\pi rh$

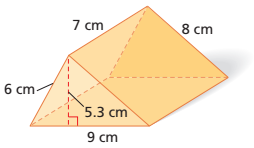
$= 2\pi(2^2) + 2\pi(2)(8)$

$\approx 40\pi \text{ m}^2$

$\approx 125{,}6 \text{ m}^2$

Encuentra el área total de cada figura aproximándola a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

B



$$A = 2B + Ph$$
$$= 2\left(\tfrac{1}{2} \cdot 9 \cdot 5{,}3\right) + (23)(7)$$
$$\approx 208{,}7 \text{ cm}^2$$

EJEMPLO 2 Explorar los efectos de dimensiones que cambian

Un cilindro tiene un diámetro de 10 cm y una altura de 4 cm. Explica si duplicar la altura tiene el mismo efecto en el área total que duplicar el radio.

Dimensiones originales	Duplicar la altura	Duplicar el radio
$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ $= 2\pi(5)^2 + 2\pi(5)(4)$ $= 90\pi \text{ cm}^2 \approx 282{,}6 \text{ cm}^2$	$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ $= 2\pi(5)^2 + 2\pi(5)(8)$ $= 130\pi \text{ cm}^2 \approx 408{,}2 \text{ cm}^2$	$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ $= 2\pi(10)^2 + 2\pi(10)(4)$ $= 280\pi \text{ cm}^2 \approx 879{,}2 \text{ cm}^2$

No tiene el mismo efecto. Duplicar el radio aumenta el área total más que duplicar la altura.

EJEMPLO 3 Aplicación al Arte

Un sitio web anuncia que puede convertir una foto en una figura anamórfica. Para reflejar la imagen, debes cubrir con material reflectante un cilindro de 49 mm de diámetro y 107 mm de altura. Estima la cantidad de material reflectante que necesitas.

El diámetro del cilindro mide aproximadamente 50 mm y la altura es aproximadamente 100 mm.

$$L = 2\pi r h$$
$$= 2\,\pi\,(25)\,(100)$$
$$\approx 15{,}700$$

Solo debe cubrirse la superficie lateral.

diámetro ≈ 50 mm; por lo tanto, r ≈ 25 mm

Razonar y comentar

1. **Explica** cuál es la diferencia entre encontrar el área total de un vaso cilíndrico y encontrar el área total de un cilindro.
2. **Compara** la cantidad de pintura que se necesita para pintar un cubo cuyos lados miden 1 m y la cantidad de pintura que se necesita para pintar un cubo cuyos lados miden 2 m.

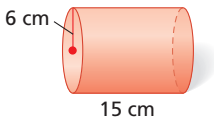
4–4 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

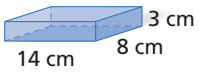
Ver Ejemplo 1

Encuentra el área total de cada figura aproximándola a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

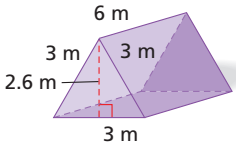
1.



2.



3.



Ver Ejemplo 2

4. Un prisma rectangular mide 3 cm por 4 cm por 7 cm. Explica si duplicar todas las dimensiones duplicaría el área total.

Ver Ejemplo 3

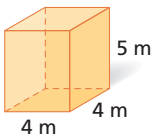
5. Teresita cubre una lata con papel adhesivo, sin cubrir las caras superior e inferior. La lata mide 8 cm de alto y tiene un radio de 2 cm. Estima la cantidad de papel adhesivo que necesita para cubrir la lata.

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

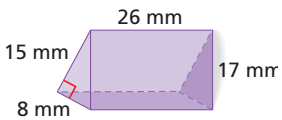
Ver Ejemplo 1

Encuentra el área total de cada figura aproximándola a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

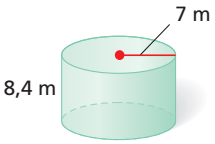
6.



7.



8.



Ver Ejemplo 2

9. Un cilindro tiene un diámetro de 4 cm y una altura de 9 cm. Explica si reducir el diámetro a la mitad tendría el mismo efecto en el área total que reducir la altura a la mitad.

Ver Ejemplo 3

10. Francisco envuelve un regalo. La caja mide 6,2 cm por 9,9 cm por 5,1 cm. Estima la cantidad de papel de regalo que Francisco necesita.

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

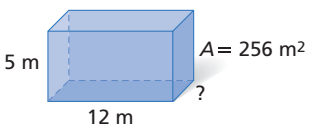
Encuentra el área total de cada figura con las dimensiones dadas aproximándola a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

11. cilindro: d = 30 mm, h = 49 mm

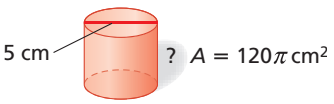
12. prisma rectangular: $5\frac{1}{4}$ cm por 8 cm por 12 cm

Encuentra la dimensión que falta en cada figura con el área total dada:

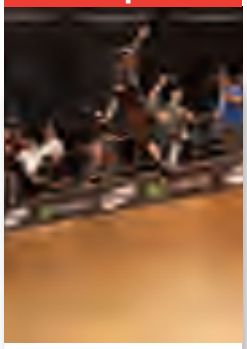
13.



14.



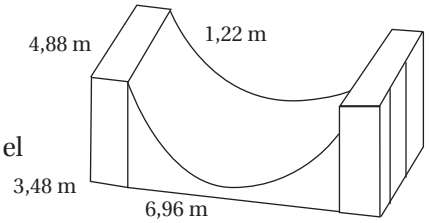
CONEXIÓN con Deportes



El 24 de marzo de 2013, el famoso profesional Tony Hawks realizó en el Movistar Arena, junto a otros Skater's pro, el Jump Festival en Chile para el que trajeron desde EE. UU. una rampa de más de 4 metros de altura.

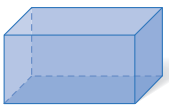
15. **Varios pasos** Joaquín construye peceras rectangulares de vidrio con tapa. Las peceras miden 13 dm por 6 dm por 8 dm. El vidrio cuesta $ 0,08 por decímetro cuadrado. ¿Cuánto costará el vidrio necesario para hacer hacer una pecera?

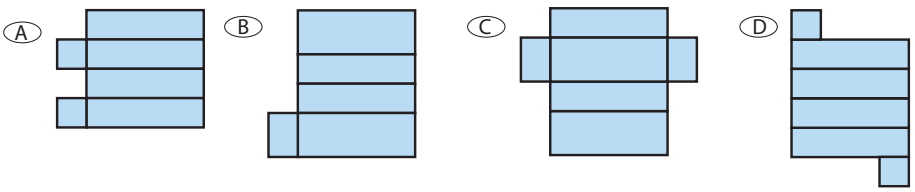
16. En la pista de skateboard de media pipa, los competidores se deslizan hacia delante y hacia atrás sobre una pista con forma de cilindro cortado a la mitad longitudinalmente. ¿Cuál es el área total de esta pista de media pipa?



17. **Varios pasos** Olivia pinta la tapa y los cuatro lados de un baúl que mide 50 cm de largo por 35 cm de profundidad por 30 cm de altura. Un galón de pintura cubre aproximadamente 4 800 centímetros cuadrados. Olivia quiere comprar por lo menos un 15% más de pintura, teniendo en cuenta el desperdicio y los retoques. ¿Cuántos cuartos de litro de pintura necesita?

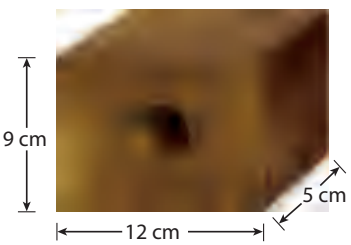
18. **Elige una estrategia** ¿Cuál de las siguientes plantillas se puede plegar para formar la figura tridimensional dada?





19. **Escríbelo** Describe el efecto en el área total de un prisma cuadrado cuando se duplica la longitud de uno de sus lados.

20. **Desafío** Un bloque de madera rectangular que mide 12 cm por 9 cm por 5 cm tiene un orificio que atraviesa su centro cuyo diámetro mide 4 cm. ¿Cuál es el área total del bloque de madera?



Repaso

21. Encuentra el área total de un cilindro con un radio de 5 cm y una altura de 3 cm. Usa 3,14 para π.

(A) 125,6 cm^2 (B) 150,72cm^2 (C) 172,7 cm^2 (D) 251,2 cm^2

22. Un prisma rectangular mide 2 metros por 4 metros por 18 metros. Encuentra el área total del prisma en metros cuadrados.

Suma o resta:

23. –0,4 + 0,7 **24.** 1,35 – 5,6 **25.** –0,01 – 0,25 **26.** –0,65 + (–1,12)

Encuentra el volumen de cada prisma rectangular:

27. lado de la base = 4 cm
h = 6 cm

28. área de la base = 3 cm^2
h = 14 cm

29. lado de la base = 8 cm
h = 1,8 cm

CAPÍTULO 4–5

Volumen de pirámides y conos

Aprender a encontrar el volumen de pirámides y conos.

Vocabulario

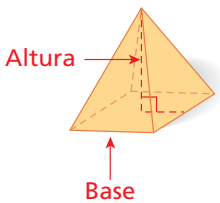
pirámide rectangular

pirámide triangular

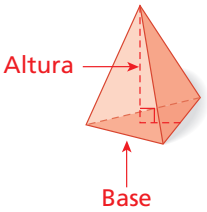
cono

Parte del edificio del Salón de la Fama del Rock and Roll de Cleveland, Ohio, EE. UU., es una pirámide de vidrio. Todo el edificio fue diseñado por el arquitecto I. M. Pei y tiene una superficie aproximada de 13 935 m².

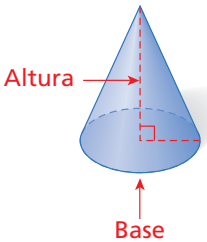
Pirámide rectangular



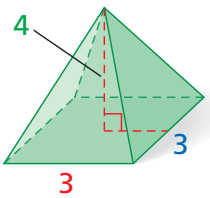
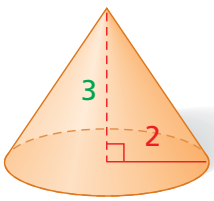
Pirámide triangular



Cono



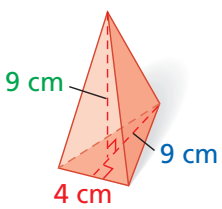
VOLUMEN DE PIRÁMIDES Y CONOS

En palabras	Con números	Fórmula
Pirámide: El volumen V de una pirámide es un tercio del área de la base B por la altura h.	 $B = 3(3)$ $= 9$ unidades^2 $V = \frac{1}{3}(9)(4)$ $= 12$ unidades^3	$V = \frac{1}{3}Bh$
Cono: El volumen V de un cono es un tercio del área de la base circular B por la altura h.	 $B = \pi(2^2)$ $= 4\pi$ unidades^2 $V = \frac{1}{3}(4\pi)(3)$ $= 4\pi$ $\approx 12{,}6$ unidades^3	$V = \frac{1}{3}Bh$ o $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

EJEMPLO 1 **Encontrar el volumen de pirámides y conos**

Encuentra el volumen de las figuras. Usa 3,14 para π.

A



$B = \frac{1}{2}(4 \cdot 9) = 18$ cm^2

$V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 9$ $\qquad V = \frac{1}{3}Bh$

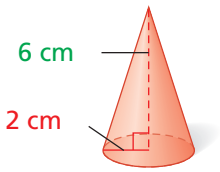
$V = 54$ cm^3

¡Atención!

La *b* minúscula se usa para representar la longitud de la base de una figura bidimensional. La *B* mayúscula se usa para representar el área de la base de un cuerpo geométrico.

Encuentra el volumen de las figuras. Usa 3,14 para π.

B

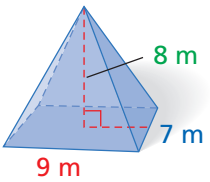


$B = \pi(2^2) = 4\pi \text{ cm}^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot 6$ $\quad V = \frac{1}{3}Bh$

$V = 8\pi \approx 25{,}1 \text{ cm}^3$ $\quad$ *Usa 3,14 para π.*

C



$B = 9 \cdot 7 = 63 \text{ cm}^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot 63 \cdot 8$ $\quad V = \frac{1}{3}Bh$

$V = 168 \text{ cm}^3$

EJEMPLO 2 Explorar los efectos de dimensiones que cambian

Un cono tiene un radio de 3 m y una altura de 10 m. Explica si duplicar la altura tendría el mismo efecto sobre el volumen del cono que duplicar el radio.

Dimensiones originales	Duplicar la altura	Duplicar el radio
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 (2h)$	$V = \frac{1}{3}\pi (2r)^2 h$
$= \frac{1}{3}\pi(3^2)(10)$	$= \frac{1}{3}\pi(3^2)(2 \cdot 10)$	$= \frac{1}{3}\pi(2 \cdot 3)^2(10)$
$\approx 94{,}2 \text{ m}^3$	$\approx 188{,}4 \text{ m}^3$	$\approx 376{,}8 \text{ m}^3$

Cuando se duplica la altura del cono, se duplica el volumen. Cuando se duplica el radio, el volumen aumenta 4 veces con respecto al volumen original.

EJEMPLO 3 Usar una calculadora para encontrar el volumen

Algunas señales de tráfico tienen forma de cono. Usa una calculadora para encontrar el volumen de una señal de tráfico aproximado a la centésima más cercana si el radio de la base mide 5 cm y la altura mide 24 cm.

Usa el botón π de tu calculadora para encontrar el área de la base:

$B = \pi r^2$

Luego, con el área de la base todavía en la pantalla, encuentra el volumen del cono:

$V = \frac{1}{3}Bh$

El volumen de la señal de tráfico es aproximadamente 628,32 cm^3.

Razonar y comentar

1. **Describe** dos o más formas en las que se pueden modificar las dimensiones de una pirámide rectangular para duplicar su volumen.
2. **Usa un modelo** para comparar el volumen de un cubo con lados de 1 m con una pirámide que tiene 1 m de altura y una base cuadrada de 1 m de lado.

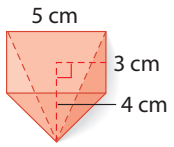
4–5 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

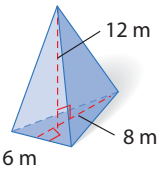
Ver Ejemplo 1

Encuentra el volumen de cada figura aproximado a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

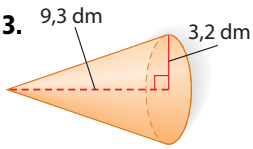
1.



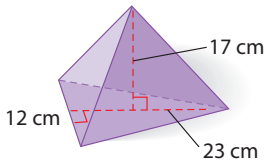
2.



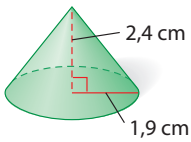
3.



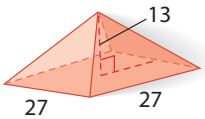
4.



5.



6.



Ver Ejemplo 2

7. Una pirámide cuadrangular mide 6 m de altura y los lados de la base miden 2 m cada uno. Explica si duplicar la altura duplicaría el volumen de la pirámide.

Ver Ejemplo 3

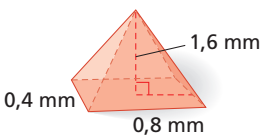
8. Rosario hizo un cono de papel para colocar un regalo para un amigo. El cono de papel tenía 17 cm de altura y un diámetro de 6 cm. Usa una calculadora para encontrar el volumen del cono a la centésima más cercana.

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

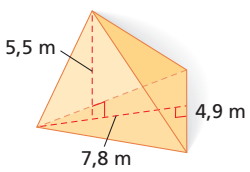
Ver Ejemplo 1

Encuentra el volumen de cada figura aproximado a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

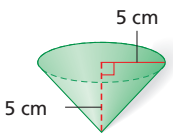
9.



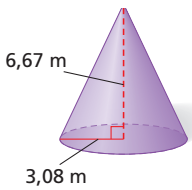
10.



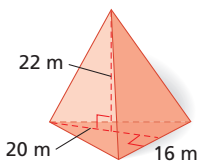
11.



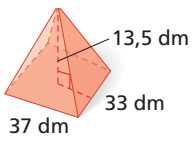
12.



13.



14.



Ver Ejemplo 2

15. Una pirámide triangular mide 12 m de altura. La base triangular mide 12 m de altura y 12 m de ancho. Explica si duplicar la altura de la base duplicaría el volumen de la pirámide.

Ver Ejemplo 3

16. Antonio hizo pequeños conos de masa para una fiesta de cumpleaños. Cada cono medía 3 decímetros de altura y tenía un radio de ¾ de decímetro. Usa una calculadora para encontrar el volumen del cono aproximándolo a la centésima más cercana (1dm=10cm).

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Encuentra la medida que falta aproximándola a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

17. cono:
radio = 4 m
altura = ▢
volumen = 100,5 m^3

18. cilindro:
radio = ▢
altura = 2,5 m
volumen = 70,65 m^3

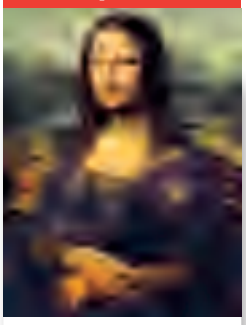
19. pirámide triangular:
altura de la base = ▢
ancho de la base = 8 cm
altura = 6 cm
volumen = 88 cm^3

20. pirámide rectangular:
longitud de la base = 3 cm
ancho de la base = ▢
altura = 7 cm
volumen = 42 cm^3

21. **Estimación** Los conos de colores vienen en diversos tamaños. Aproxima el volumen en centímetros cúbicos de un cono de color con una altura de 2 dm y un diámetro de 10 dm usando 3 en lugar de π.

22. La Gran Pirámide de Giza, en Egipto, es una pirámide cuadrangular. Tiene una altura de 146 m y su base tiene lados que miden 230 m. Encuentra el volumen de la pirámide.

CONEXIÓN con Arquitectura



La Mona Lisa de Leonardo Da Vinci es tal vez la pintura más famosa del mundo. Se exhibe en el Museo del Louvre en París, Francia.

23. **Arquitectura** La pirámide ubicada en la entrada del Museo del Louvre de París tiene una altura de 22 m y una base cuadrada cuyos lados miden 34 m de largo. ¿Cuál es el volumen de la pirámide?

24. **¿Dónde está el error?** Un estudiante dice que la fórmula para encontrar el volumen de un cilindro es igual a la fórmula para encontrar el volumen de una pirámide. ¿Qué error cometió el estudiante?

25. **Escríbelo** ¿Cómo se vería afectado el volumen de un cono si duplicas la altura? ¿Y si duplicas el radio? Usa el modelo para explicarlo.

26. **Desafío** El diámetro de un cono es x cm, la altura es 18 cm y el volumen es 96π cm^3. ¿Cuál es el valor de x?

Repaso

27. Una pirámide tiene una base rectangular que mide 12 centímetros por 9 centímetros. La altura es de 15 centímetros. ¿Cuál es el volumen de la pirámide?

(A) 540 cm^3 (B) 405 cm^3 (C) 315 cm^3 (D) 270 cm^3

28. Un cono tiene un diámetro de 12 centímetros y una altura de 9 centímetros. Usando 3,14 para π, encuentra el volumen del cono aproximándolo a la décima más cercana.

(A) 1 356,5 cm^3 (B) 339,1 cm^3 (C) 118,3 cm^3 (D) 56,5 cm^3

29. Supongamos que un cono tiene volumen de 104,7 centímetros cúbicos y un radio de 5 centímetros. Encuentra la altura del cono al centímetro más cercano. Usa 3,14 para π.

Resuelve:

30. $9 + t = 18$ **31.** $t - 2 = 6$ **32.** $10 + t = 32$ **33.** $t + 7 = 7$

Laboratorio de PRÁCTICA 4–5

Encontrar el volumen de pirámides y conos

Para usar con la lección 4–5

Puedes usar contenedores para explorar la relación que hay entre el volumen de las pirámides y los prismas y la relación que hay entre el volumen de los conos y los cilindros.

Actividad 1

Busca o construye un prisma hueco y una pirámide hueca que tengan bases y alturas congruentes.

a. Llena la pirámide con granos de maíz. Asegúrate de que los granos llenen la pirámide hasta el borde y luego vierte los granos en el prisma.

b. Repite el paso y llena el prisma hasta el borde. Anota la cantidad de pirámides completas que hacen falta para llenar el prisma.

Razonar y comentar

1. ¿Cuántas pirámides completas hicieron falta para llenar un prisma con base y altura congruentes?

2. Usa una fracción para expresar la relación entre el volumen de una pirámide y el volumen de un prisma con base y altura congruentes.

3. Si el volumen de un prisma es Bh, escribe una regla para encontrar el volumen de una pirámide (con igual base y altura).

Inténtalo

1. Usa la regla que has escrito en la sección *Razonar y comentar* para encontrar el volumen de otra pirámide con la misma área de base. Comprueba tu regla siguiendo los pasos de la actividad 1. Revisa tu regla si es necesario.

2. El volumen de una pirámide es de 31 cm^3. ¿Cuál es el volumen de un prisma con igual área de base y altura? Explica tu razonamiento.

3. El volumen de un prisma es de 27 cm^3. ¿Cuál es el volumen de una pirámide con igual área de base y altura? Explica tu razonamiento.

4. Un farol de vidrio lleno de aceite tiene la forma de una pirámide cuadrangular. Cada lado de la base mide 5 centímetros de largo y el farol mide 11 centímetros de altura. ¿Cuál es el volumen del farol?

Actividad 2

Busca o construye un cilindro hueco y un cono hueco que tengan bases y alturas congruentes.

a. Llena el cono con granos de maíz. Asegúrate de que los granos llenen el cono hasta el borde y luego viértelos en el cilindro.

b. Repite el paso a hasta llenar el cilindro hasta el borde. Anota la cantidad de conos completos que hacen falta para llenar el cilindro.

Razonar y comentar

1. ¿Cuántos conos completos hicieron falta para llenar un cilindro con base y altura congruentes?

2. Usa una fracción para expresar la relación entre el volumen de un cono y el volumen de un cilindro con base y altura congruentes.

3. Si el volumen de un cilindro es Bh o $\pi r^2 h$, escribe una regla para encontrar el volumen de un cono.

Inténtalo

1. Usa la regla que has elaborado en el ejercicio 3 del apartado *Razonar y comentar* para encontrar el volumen de otro cono. Comprueba tu regla siguiendo los pasos de la actividad 2. Revisa tu regla si fuera necesario.

2. El volumen de un cono es 3,7 m^3. ¿Cuál es el volumen de un cilindro con igual base y altura? Explica tu razonamiento.

3. El volumen de un cilindro es 228 cm^3. ¿Cuál es el volumen de un cono con igual base y altura? Explica tu razonamiento.

4. Iván usa un cono de plástico para construir un castillo de arena. El cono tiene un diámetro de 10 cm y una altura de 18 cm. ¿Cuál es el volumen del cono?

5. Anita tiene dos conos de papel. El primero tiene un radio de 20 cm y una altura de 30 cm. El segundo tiene la misma base pero el doble de altura. Anita dice que el volumen del segundo cono es el doble del primero. ¿Está en lo cierto? Explica tu razonamiento.

CAPÍTULO 4–6

Volumen de prismas y cilindros

La circunferencia del tambor Taiko que se muestra en la foto, es aproximadamente la mitad de la del tambor más grande del mundo.

Aprender a calcular el volumen de prismas y cilindros.

Vocabulario

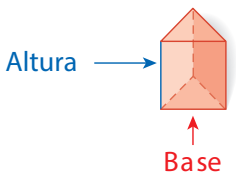
cilindro

prisma

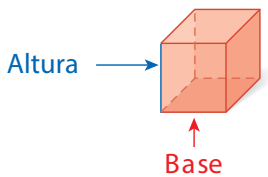
El tambor más grande del mundo mide 4,8 metros de diámetro y 4,95 metros de profundidad. Fue construido por la empresa Asano Taiko en Japón. Puedes usar estas medidas para calcular el volumen aproximado del tambor, que es casi un cilindro.

Recuerda que un **cilindro** es una figura tridimensional que tiene dos bases circulares congruentes y un **prisma** es una figura tridimensional que recibe su nombre según la forma de sus bases. Las dos bases son polígonos congruentes. Todas las otras caras son paralelogramos.

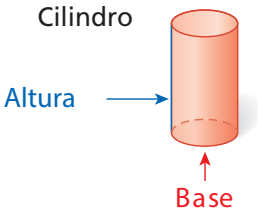
Prisma triangular



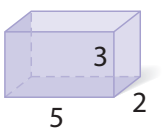
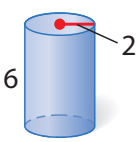
Prisma rectangular



Cilindro



VOLUMEN TOTAL DE PRISMAS Y CILINDROS

En palabras	Con números	Fórmula
Prisma: El volumen V de un prisma es el área de la base B por la altura h.	 $B = 2(5)$ $= 10$ unidades^2 $V = (10)(3)$ $= 30$ unidades^3	$V = Bh$
Cilindro: El volumen V de un cilindro es el área de la base B por la altura h.	 $B = \pi(2^2)$ $= 4\pi$ unidades^2 $V = (4\pi)(6) = 24\pi$ $\approx 75{,}4$ unidades^3	$V = Bh$ $V = \pi r^2 h$

EJEMPLO 1 **Encontrar el volumen de prismas y cilindros**

Encuentra el volumen de cada figura aproximándolo a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

A Un prisma rectangular con una base de 2 m por 5 m y una altura de 7 m.

$B = 2 \cdot 5 = 10$ m^2 *Área de la base.*

$V = Bh$

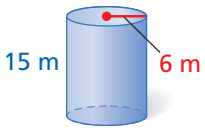
$= 10 \cdot 7 = 70$ m^3 *Volumen del prisma.*

¡Recuerda!

El área se mide en *unidades cuadradas.* El volumen se mide en *unidades cúbicas.*

Calcula el volumen de cada figura aproximándolo a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

B



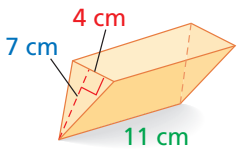
$B = \pi(6^2) = 36\pi \text{ m}^2$ *Área de la base.*

$V = Bh$ *Volumen de un cilindro.*

$= 36\pi \cdot 15$

$= 540\pi \approx 1695{,}6 \text{ m}^3$

C



$B = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 = 14 \text{ cm}^2$ *Área de la base.*

$V = Bh$ *Volumen de un prisma.*

$= 14 \cdot 11$

$= 154 \text{ cm}^3$

La fórmula para encontrar el volumen de un prisma rectangular se puede escribir como $V = \ell ah$, donde ℓ es la longitud, a es el ancho y h es la altura.

EJEMPLO 2 Explorar los efectos de dimensiones que cambian

A **Una caja grande de fósforos mide 6 cm por 2 cm por 9 cm. Explica si duplicando la longitud, el ancho o la altura se duplica la cantidad de fósforos que puede contener.**

Dimensiones originales	Duplicar la longitud	Duplicar el ancho	Duplicar la altura
$V = \ell ah$ $= 6 \cdot 2 \cdot 9$ $= 108 \text{ cm}^3$	$V = (2\ell)ah$ $= 12 \cdot 2 \cdot 9$ $= 216 \text{ cm}^3$	$V = \ell(2a)h$ $= 6 \cdot 4 \cdot 9$ $= 216 \text{ cm}^3$	$V = \ell a(2h)$ $= 6 \cdot 2 \cdot 18$ $= 216 \text{ cm}^3$

La caja original tiene un volumen de 108 cm^3. Podrías duplicar el volumen a 216 cm^3 duplicando cualquiera de las dimensiones. Por lo tanto, si duplicas la longitud, el ancho o la altura de la caja, se puede duplicar la cantidad de fósforos que contiene.

B **Una lata de bebida tiene un radio de 2,5 dm y una altura de 4 dm. Explica si duplicar la altura de la lata tendría el mismo efecto en el volumen que duplicar el radio.**

Dimensiones originales	Duplicar la altura	Duplicar el radio
$V = \pi r^2 h$ $= 2{,}5^2\pi \cdot 4$ $= 25\pi \text{ dm}^3$	$V = \pi r^2(2h)$ $= 2{,}5^2\pi \cdot 8$ $= 50\pi \text{ dm}^3$	$V = \pi(2r)^2 h$ $= 5^2\pi \cdot 4$ $= 100\pi \text{ dm}^3$

Si duplicas la altura, duplicas el volumen. Si duplicas el radio, aumentas cuatro veces el volumen original.

EJEMPLO 3 Aplicación a la Música

La empresa Asano Taiko de Japón construyó el tambor más grande del mundo en el año 2000. El diámetro del tambor es de 4,8 metros y la altura es de 4,95 metros. Estima el volumen del tambor. (Ver página 132).

$d = 4{,}8 \approx 5$

$h = 4{,}95 \approx 5$

$r = \frac{d}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

$V = (\pi r^2)h$

$= (3)(2{,}5)^2 \cdot 5$ *Volumen de un cilindro.*

$= (3)(6{,}25)(5)$ *Usa 3,14 para π.*

$= 18{,}75 \cdot 5$

$= 93{,}75$

≈ 94

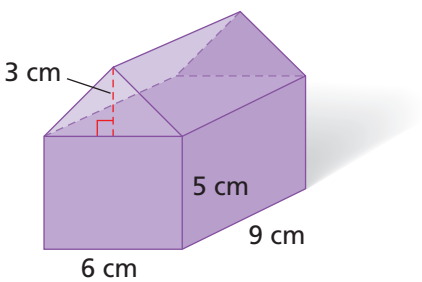
El volumen del tambor es aproximadamente 94 m^3.

Para calcular el volumen de una figura tridimensional compuesta, encuentra el volumen de cada parte y suma los volúmenes.

EJEMPLO 4 Encontrar el volumen de figuras compuestas

Encuentra el volumen de la figura:

Volumen de la figura = Volumen del prisma rectangular + Volumen del prisma triangular



$V = (6)(9)(5) + \frac{1}{2}(6)(3)(9)$

$= 270 + 81$

$= 351 \text{ cm}^3$

El volumen es de 351 cm^3.

EJEMPLO 5 **Calcular el volumen de prismas y cilindros**

Explorar los cambios de las dimensiones manteniendo el volumen constante:

Una fábrica de mermeladas necesita un envase con forma de prisma rectangular cuyo volumen sea 60 cm^3. Se presentaron tres proyectos con las siguientes dimensiones:

Envase 1	Envase 2	Envase 3
Largo = 3 cm	Largo = 6 cm	Largo = 3 cm
Ancho = 4 cm	Ancho = 2 cm	Ancho = 10 cm
Altura = 5 cm	Altura = 5 cm	Altura = 2 cm
$V_1 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60\ cm^3$	$V_2 = 6 \cdot 2 \cdot 5 = 60\ cm^3$	$V_3 = 3 \cdot 10 \cdot 2 = 60\ cm^3$

Todos los envases tienen el mismo volumen = 60 cm^3.

En general, es posible encontrar prismas de distintas dimensiones y que su volumen sea el mismo. También se pueden encontrar cilindros de distintas dimensiones y que su volumen sea el mismo.

Razonar y comentar

1. **Usa modelos** para mostrar que dos prismas rectangulares pueden tener diferentes alturas pero el mismo volumen.
2. **Aplica** tus resultados del ejemplo 2 para hacer una conjetura sobre el cambio de las dimensiones en un prisma triangular.
3. **Usa un modelo** para describir qué sucede con el volumen de un cilindro cuando se triplica el diámetro de la base.

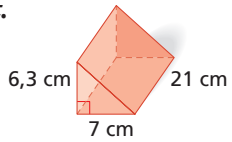
4–6 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

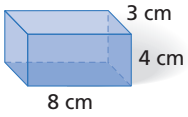
Ver Ejemplo 1

Calcula el volumen de cada figura aproximándola a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

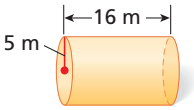
1.



2.



3.



Ver Ejemplo 2

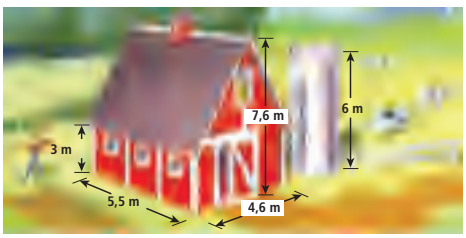
4. Un recipiente cilíndrico tiene un radio de 3 dm y una altura de 6 dm. Explica si triplicar el radio triplicaría el volumen del recipiente.

Ver Ejemplo 3

5. Se ha diseñado una caja cilíndrica para proteger una trompeta. Estima el volumen de la caja que tiene un diametro de 33,5 cm y una altura 60 cm.

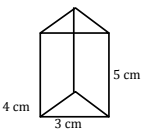
Ver Ejemplo 4

6. Encuentra el volumen del granero.



Ver Ejemplo 5

7. Calcula el volumen del prisma triangular y encuentra las medidas de otro que tenga el mismo volumen.

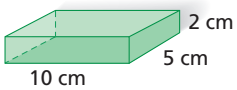


PRÁCTICA INDEPENDIENTE

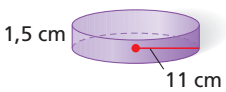
Ver Ejemplo 1

Calcula el volumen de cada figura a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

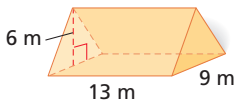
8.



9.



10.



Ver Ejemplo 2

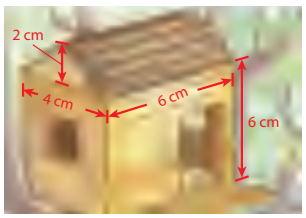
11. Un estuche mide 7 cm por 5 cm, por 8 cm. Explica si al aumentar la altura 4 veces, de 8 cm a 32 cm aumentaría el volumen 4 veces.

Ver Ejemplo 3

12. Una caja de música mide 5,1 cm por 3,2 cm por 4,2 cm. Estima el volumen de la caja de música.

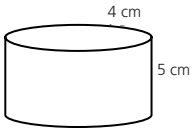
Ver Ejemplo 4

13. Encuentra el volumen de la casa del dibujo.



Ver Ejemplo 5

14. Calcula el volumen del cilindro y encuentra las medidas de otro que tenga el mismo volumen. Considera $\pi = 3,14$



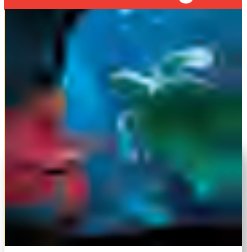
PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

15. Cuando Joaquín estaba en el campamento, su padre le envió una caja con víveres. La caja medía 102 cm por 199 cm por 42 cm.

a. Estima el volumen de la caja.

b. ¿Cuáles serían las medidas de una caja con el doble de volumen?

CONEXIÓN **Con Biología**



A través de las 52 ventanas del Tanque Oceánico Gigante de Boston, los visitantes pueden ver 3 000 corales y esponjas, además de grandes tiburones, tortugas marinas, barracudas, anguilas morenas y cientos de peces tropicales.

16. En un campo donde se cultiva trigo, necesitan almacenar la producción de la temporada. Para ello necesitan construir un silo que contenga 80 metros cúbicos. ¿Qué dimensiones sugieres?

17. **Biología** El Tanque Oceánico Gigante de forma cilíndrica que se encuentra en el Acuario de New England, Boston EE. UU., tiene un volumen de 200 000 galones.

a. Un galón de agua equivale a 4 545 cm^3. ¿Cuántos centímetros cúbicos de agua hay en el Tanque Oceánico Gigante?

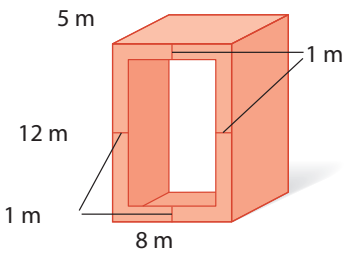
b. Usa la respuesta del apartado **a** como el volumen. El tanque tiene una profundidad de 732 cm. Encuentra el radio en cm del Tanque Oceánico Gigante.

18. **Biología** En un espacio de 0,08 m^3 pueden vivir hasta 60 000 abejas. En una colmena de observación rectangular que mide 0,6 m de largo por 0,9 m de altura hay aproximadamente 360 000 abejas. ¿Cuál es el ancho mínimo posible de la colmena de observación?

19. **¿Dónde está el error?** Un estudiante leyó este enunciado en un libro: "El volumen de un prisma triangular con una altura de 15 cm y un área de base de 20 cm es 300 cm^3". Corrige el error del enunciado.

20. **Escríbelo** Explica por qué 1 decímetro cúbico equivale a 1 000 centímetros cubicos.

21. **Desafío** Una sección de 5 metros de un bloque hueco mide 12 metros de alto y 8 metros de ancho en su borde externo. El bloque tiene un grosor de 1 metro. Encuentra el volumen del bloque sin el interior hueco.



Repaso

22. El cilindro A tiene un radio de 6 centímetros y una altura de 14 centímetros. El cilindro B tiene un radio que mide la mitad del cilindro A. ¿Cuál es el volumen del cilindro B? Usa 3,14 para π y redondea a la décima más cercana.

(A) 393,5 cm^3 (B) 395,6 cm^3 (C) 422,3 cm^3 (D) 791,3 cm^3

23. Un prisma rectangular mide 2 metros por 4 metros por 18 metros. Encuentra el área total del prisma en metros cuadrados:

(A) 424 m^3 (B) 689 m^3 (C) 2 756 m^3 (D) 5 512 cm^3

24. Hallar el área de un trapecio rectángulo de 12 metros de altura y diagonales de 15 y 20 metros de longitud.

25. Encuentra la altura de un rectángulo con un perímetro de 14 cm y una longitud de 3 cm. ¿Cuál es el área del rectángulo?

Laboratorio de PRÁCTICA 4–6

Calcular el volumen de prismas y cilindros

Para usar con la lección 4–6

Puedes usar objetos concretos como modelos para explorar el volumen de prismas rectangulares y cilindros.

Actividad 1

Usa cinco prismas rectangulares de distintos tamaños, por ejemplo, cajas vacías.

Objeto	
Área de la base	
Altura	
Volumen	

a. Cubre la parte inferior de cada prisma con cubos para encontrar el área de la base del prisma. Anota la información en una tabla.

b. Llena el prisma con cubos. Encuentra la altura. Luego, cuenta los cubos para encontrar el volumen del prisma. Anota la información en la tabla.

Actividad 2

Usa cinco cilindros de distintos tamaños, por ejemplo, latas vacías.

a. Mide el radio de cada base circular y calcula el área. Anota la información en una tabla.

b. Mide la altura de cada cilindro. Anota la información en una tabla.

c. Llena cada cilindro con granos de maíz.

d. Usa una taza para medir cuánto maíz cupo en el cilindro.

e. Encuentra el volumen aproximado de cada cilindro. 1 taza = 250 cm^3. Anota la información en una tabla.

Razonar y comentar

1. ¿Qué observas sobre la relación entre la base, la altura y el volumen de los prismas rectangulares? ¿Y de los cilindros?

2. Haz una conjetura sobre cómo encontrar el volumen de cualquier prisma rectangular o cilindro.

Inténtalo

1. Usa tu conjetura para encontrar el volumen de otro prisma rectangular. Comprueba tu conjetura siguiendo los pasos de la actividad 1. Revisa tu conjetura si es necesario.

2. Usa tu conjetura para encontrar el volumen de otro cilindro. Comprueba tu conjetura siguiendo los pasos de la actividad 2. Revisa tu conjetura si es necesario.

Actividad 3

Compara el volumen de un prisma y de un cilindro.

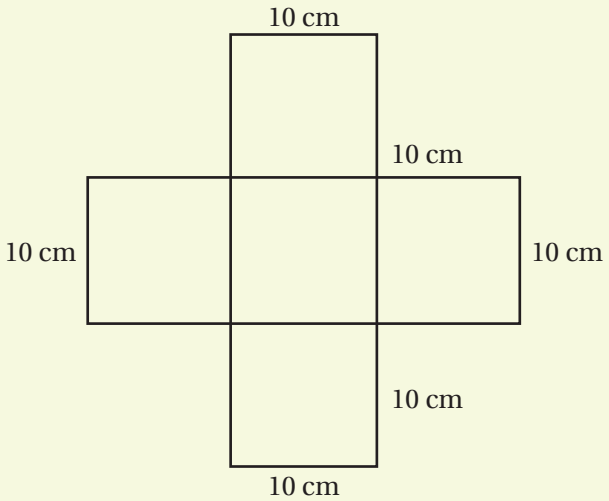
Arma un cubo de 10 cm de arista según el modelo.

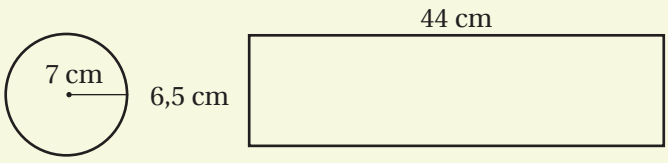
a. Usa un vaso medidor que tenga al menos un litro de capacidad, un pliego de cartón forrado y cinta adhesiva gruesa
Dibuja la red del cubo (sin tapa) de arista 10 cm sobre el cartón forrado según el modelo.

b. Recórtalo y ármalo sellando cada arista con cinta adhesiva gruesa.

c. De la misma forma arma un cilindro según el modelo y las medidas dadas. Séllalo también con cinta adhesiva gruesa.

d. Llena el cubo con agua y vacíala en el cilindro, tratando de no perder líquido, y luego vierta en el vaso medidor.





Razonar y comentar

1. ¿Cuánta agua del cubo se puede verter en el cilindro?

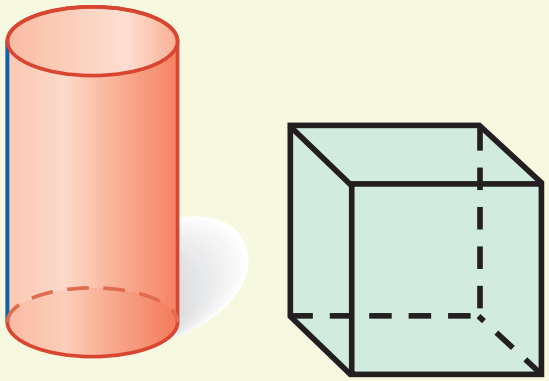
2. ¿Cuál fue la medida en el vaso? Exprésala en centímetros cúbicos y en litros.

3. Calcula el volumen del cubo y del cilindro utilizando las medidas que se usaron para su construcción.

Inténtalo

1. ¿Qué sucede con el volumen si se duplica la altura del cilindro?

2. ¿Qué medida deberá tener la arista del cubo para que el volumen sea el doble?



CAPÍTULO

4

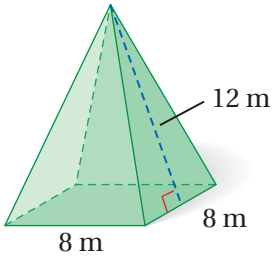
¿Listo para seguir?

Prueba de las lecciones 4–3 a 4–6

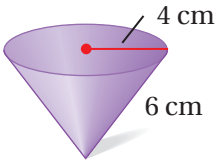
4–3 Área total de pirámides y conos

Encuentra el área total de cada figura. Usa 3,14 para π.

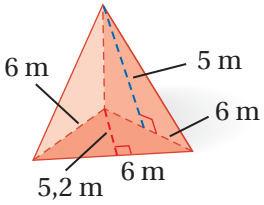
1.



2.



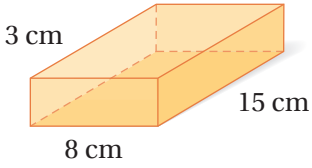
3.



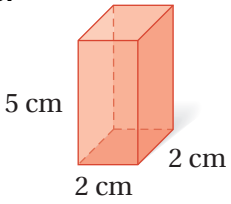
4–4 Área total de prismas y cilindros

Encuentra el área total de cada figura, redondeada a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

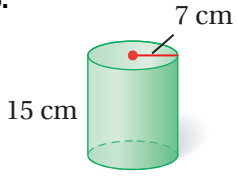
4.



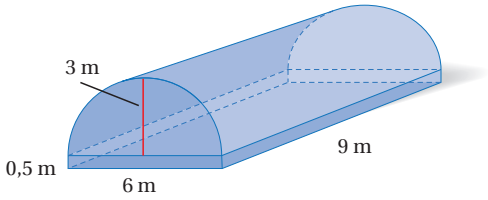
5.



6.



7. ¿Cuál es el área total de la figura compuesta? Usa 3,14 para π. Redondea tu respuesta a la décima más cercana.



8. Calcula el área total de un prisma rectangular cuyas dimensiones son: 5 cm 8 cm y 15 cm.

4–5 Volumen de pirámides y conos

9. Calcula el área de la etiqueta de un cono de helados cuya altura es 4 cm y el volumen es 36 π cm^3.

10. Calcula el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado 6 cm y altura 4 cm

4–6 Volumen de prismas y cilindros

11. Calcula el volumen de un prisma pentagonal que tiene 54 cm^2 de área basal y 15 cm de altura.

12. Calcula el volumen que hay entre un cilindro de radio 4 cm y altura 8 cm que está inscrito en el prisma correspondiente.

CONEXIONES con el mundo real

CAPÍTULO 4

Tortas decoradas

En Chile ha surgido un nuevo negocio en el rubro de la pastelería; las tortas decorativas. Si bien este comenzó con las tortas de matrimonio, en la actualidad se ofrece una inmensa variedad de diseños para cumpleaños, bautizos, aniversarios, baby shower, fiestas de fin de año y también de temas especiales. Cada una puede estar formada por varios pisos y con distintas formas geométricas como prismas, cilindros, pirámides y otros.

1. Un fabricante de tortas decorativas está preparando un diseño con forma de cilindro y dos pisos de 18 cm de altura cada uno. ¿Cuál será el volumen de la torta si el piso más grande tiene un diámetro de 40 cm y el más pequeño un diámetro de 28 cm?

2. Otro pastelero realizará una torta con forma de prisma rectangular que mide 54 cm de largo, 35 cm de ancho, 15 cm de alto y lo cubrirá con una capa de fondant. ¿Cuántos centímetros cuadrados de fondant necesitará para cubrir esta torta?

3. El fabricante de tortas quiere hacer una más grande que el pastelero y para ello hará una de dos pisos donde el más pequeño tendrá las medidas de la torta que hizo el pastelero y el piso más grande tendrá el doble de las medidas anteriores. ¿Cuál será la superficie de esta torta?

4. ¿Cuál será su volumen? ¿Cuáles serán las medidas del piso más grande?

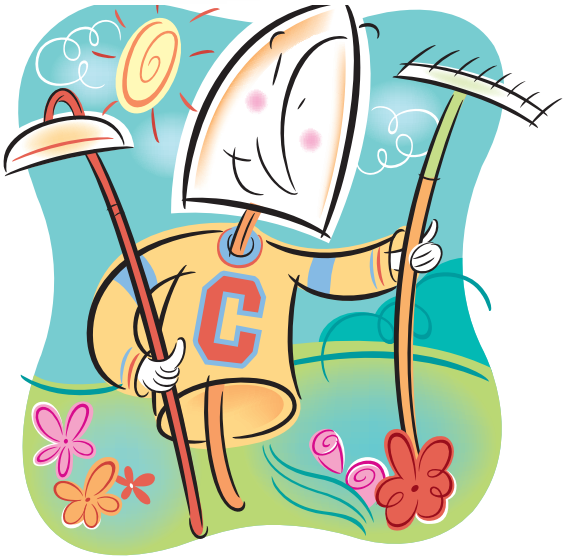
5. ¿Cuál es la diferencia de volumen entre el piso más grande y el más pequeño?

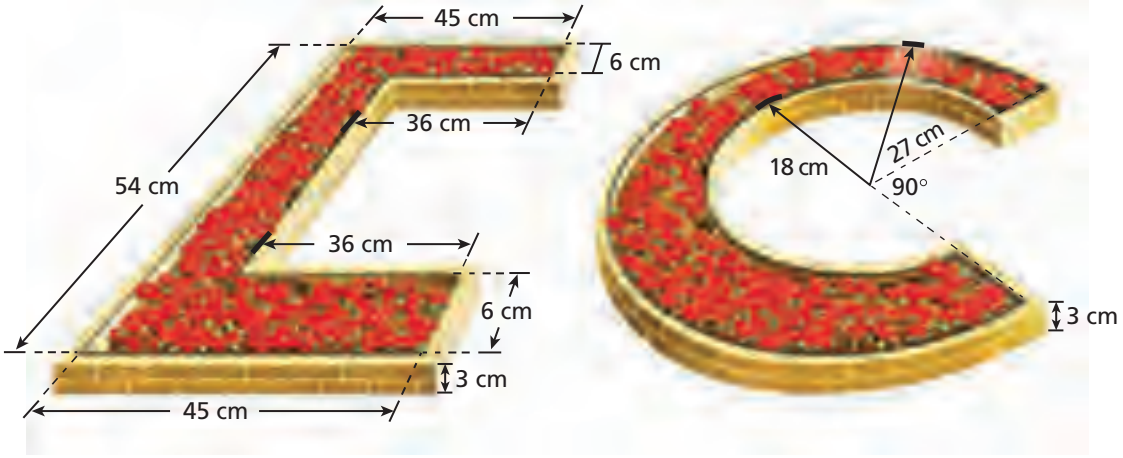
6. Para adornar esta torta, le pidieron que pusiera sobre ella un gorro de cumpleaños comestible, con forma de cono y sólido que mide 10 cm de diámetro y 12 cm de altura. ¿Cuánto aumenta el volumen de la torta?

¡Vamos a jugar!

Mentes en flor

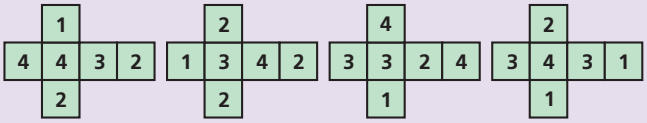
Los estudiantes del Club de Agricultura de la escuela Curepto diseñan una jardinera para el frente de la escuela. La jardinera tendrá forma de C. Después de considerar los dos diseños que se muestran, los estudiantes decidieron construir la jardinera que requiriera menos cantidad de turba. ¿Qué diseño eligieron los estudiantes? (Pista: Encuentra el volumen de cada jardinera).





ACTIVIDAD GRUPAL Cubos mágicos

Para este acertijo debes armar los cuatro cubos mágicos que aparecen a continuación. Cada lado de los cuatro cubos lleva impreso el número 1, 2, 3 ó 4. El objetivo del juego es apilar los cubos de modo que los números de cada lado sumen 10. No se puede repetir ningún número en cada lado.



¡Está en la bolsa!

Materiales

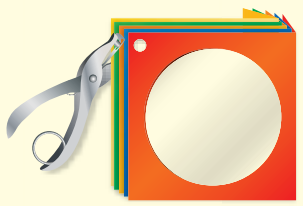
- 5 sobres para CD
- perforadora
- cordón
- 5 hojas de papel blanco
- CD
- tijeras
- marcadores

PROYECTO **CD 3–D**

Haz un conjunto de folletos circulares que puedas guardar en sobres para CD.

1. Coloca los sobres para CD de manera que la solapa de los sobres quede del lado de atrás, a lo largo del extremo derecho. Haz un agujero con la perforadora en el ángulo superior izquierdo. **Figura A**
2. Introduce un cordón a través del agujero, une los extremos del cordón con un nudo y recorta los extremos sobrantes. **Figura B**
3. Dobla una hoja de papel blanco tamaño carta por la mitad. Coloca el CD en la hoja plegada de manera que toque el extremo doblado y dibuja el contorno del CD. **Figura C**
4. Recorta la forma circular que trazaste, asegurándote de que las dos mitades de la hoja se mantengan unidas. **Figura D**
5. Repite el procedimiento con las hojas de papel restantes hasta hacer un total de 5 folletos.

A



B

C

D

Tomar notas de matemáticas

Usa cada folleto para tomar notas sobre una lección del capítulo. Asegúrate de anotar el vocabulario, las fórmulas y los problemas de ejemplo más importantes.

4 Guía de estudio: Repaso

Vocabulario

arco 108
circunferencia 108
cuerda 108
diámetro 108
lugar geométrico 108
radio 108
círculo 112
apotema lateral 118
cono 118
generatriz 118
pirámide 118
área total 122
cara lateral 122
pirámide rectangular 126
cilindro 132
prisma 132

Completa los siguientes enunciados con las palabras del vocabulario:

1. Un (a) _____ tiene dos bases circulares paralelas y congruentes unidas por una superficie curva.

2. La suma de las áreas de las superficies de una figura tridimensional se llama _____.

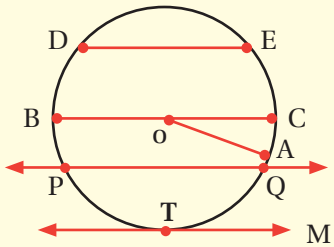
3. Un (a) _____ es una figura tridimensional cuyas caras son todas polígonos.

4. Un (a) _____ tiene una base circular y una superficie curva.

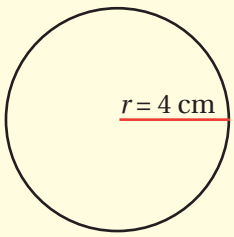
EJEMPLOS — EJERCICIOS

4–1 Circunferencia, su perímetro y sus elementos

■ **Identifica los elementos de la circunferencia:**



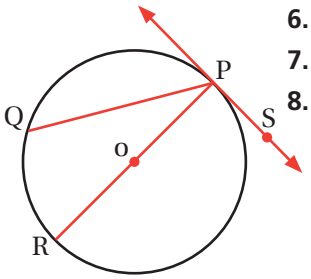
$\overline{DE}$ cuerda
$\overline{OA}$ radio
$\overline{BC}$ diámetro
T tangente
$\overline{EC}$ arco
$\overline{PQ}$ secante



El perímetro de la circunferencia es:

$P = 2 \cdot \pi \cdot r$
$P = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4$
$P = 25{,}12$ cm

Dada la circunferencia y sus elementos, completa con el nombre que corresponde:



5. *PS* _____
6. *OP* _____
7. *QP* _____
8. *RP* _____

9. Si el radio mide 8 cm, ¿cuánto mide el perímetro de la circunferencia?

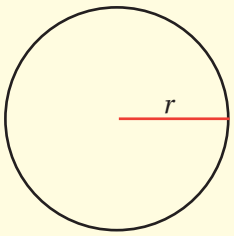
10. Si el perímetro de una circunferencia es 43,96 cm, ¿cuánto mide su radio?

EJEMPLOS

EJERCICIOS

4–2 Círculo, circunferencia, área y perímetro

■ **Calcula el área del círculo de radio 6 cm.**



$á = \pi \cdot r^2$
$á = 3{,}14 \cdot 6^2$
$á = 3{,}14 \cdot 36$
$á = 113{,}36 \text{ cm}^2$

■ **Calcula el perímetro de la circunferencia.**

$P = 2 \cdot \pi \cdot r$
$P = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6$
$P = 37{,}68 \text{ cm}$

11. Calcula el área de un círculo cuyo radio es 1,6 cm.

12. Calcula el perímetro de la circunferencia de radio 9 cm.

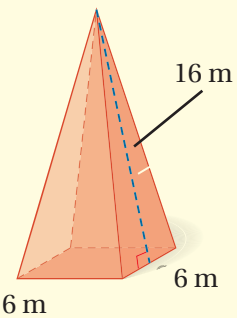
13. Si un círculo tiene un área de 19,625 m², ¿cuál es su radio?

14. Si el perímetro de una circunferencia es 200,96 cm, ¿cuál es su radio?

4–3 Área total de pirámides y conos

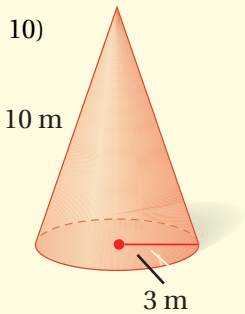
■ **Encuentra el área total de la pirámide.**

$A = B + \frac{1}{2}P\ell$
$A = \ell a + \frac{1}{2}P\ell$
$A = (6)(6) + \frac{1}{2}(24)(15)$
El área total es de 216 m².



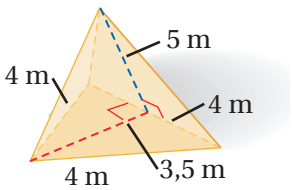
■ **Encuentra el área total de la pirámide. Usa 3,14 para π.**

$A = \pi r^2 + \pi r\ell$
$A \approx (3{,}14 \cdot 3^2) + (3{,}14 \cdot 3 \cdot 10)$
$A \approx 28{,}26 + 94{,}2$
El área total es de aproximadamente 122,46 m².

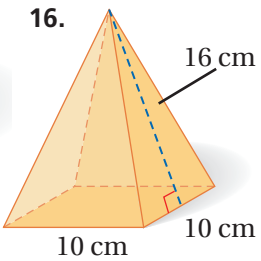


Encuentra el área total de cada pirámide.

15.

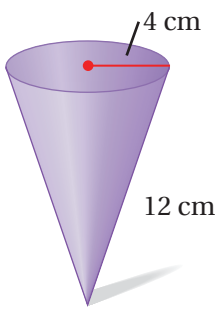


16.

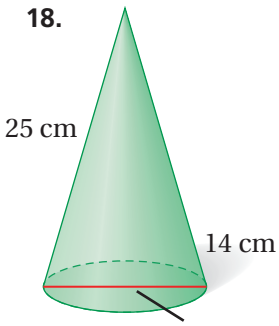


Encuentra el área total de cada cono. Usa 3,14 para π.

17.



18.



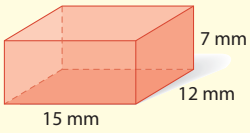
19. Un vaso de papel en forma de cono tiene una altura inclinada de 10 cm y un diámetro de 8 cm. ¿Cuánto papel se necesita para hacer el vaso? Usa 3,14 para π.

EJEMPLOS

EJERCICIOS

4–4 Área total de prismas y cilindros

■ **Encuentra el área total del prisma rectangular.**



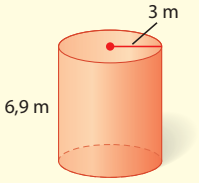
$A = 2Bh + Ph$

$A = 2(12)(15) + (54)(7)$

$A = 738$

El área total es de 738 m².

■ **Encuentra el área total del cilindro redondeada a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.**



$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

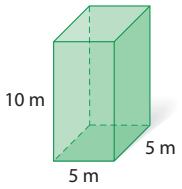
$A \approx (2 \cdot 3{,}14 \cdot 3^2) + (2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 6{,}9)$

$A \approx 186\,516$

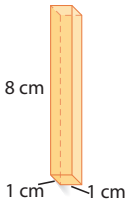
El área total es de aproximadamente 186,5 m².

Encuentra el área total de cada prisma rectangular.

20.

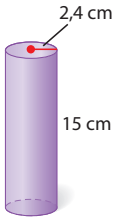


21.

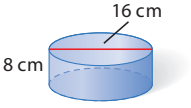


Encuentra el área total de cada cilindro redondeada a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

22.



23.



4–5 Volumen de pirámides y conos

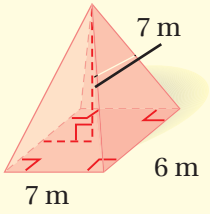
■ **Encuentra el volumen de la pirámide.**

$V = \frac{1}{3}Bh$

$V = \frac{1}{3} \cdot (5 \cdot 6) \cdot 7$

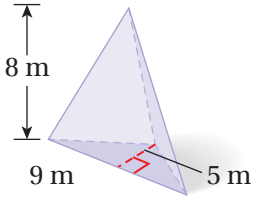
$V = 70$

El volumen es 70 m³.

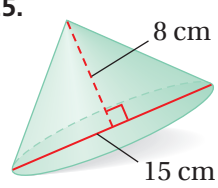


Encuentra el volumen de cada figura redondeada a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

24.



25.



4–6 Volumen de prismas y cilindros

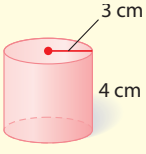
■ **Encuentra el volumen del cilindro, redondeado a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.**

$V = \pi r^2 h$

$V \approx 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 4$

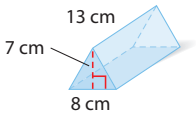
$V \approx 113{,}04$

El volumen del prisma es aproximadamente de 113,04 cm³.

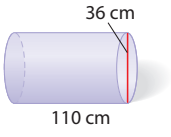


Encuentra el volumen de cada figura redondeada a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

26.



27.

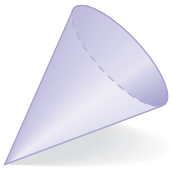


Prueba del capítulo

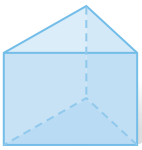
CAPÍTULO 4

Escribe el nombre de cada figura de tres dimensiones:

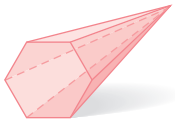
1.



2.

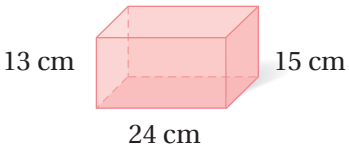


3.

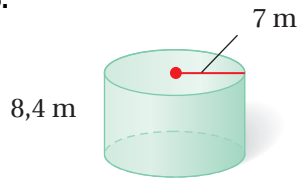


Encuentra el volumen de cada figura redondeado a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

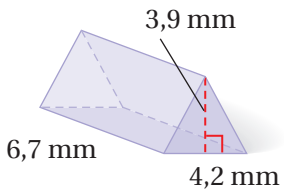
4.



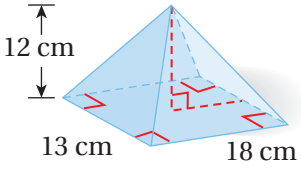
5.



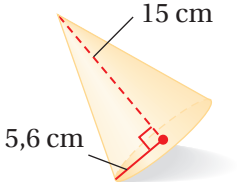
6.



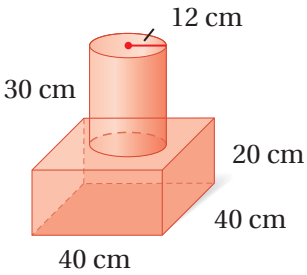
7.



8.

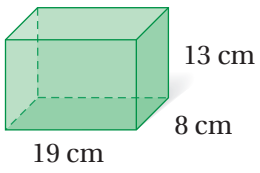


9.

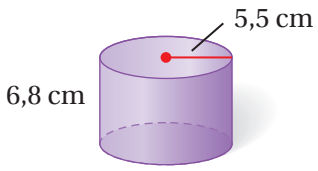


Encuentra el área total de cada figura redondeada a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.

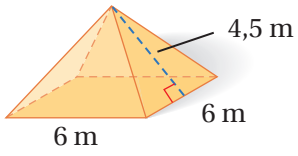
10.



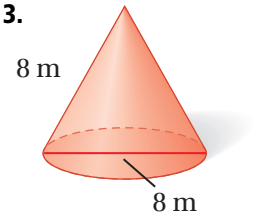
11.



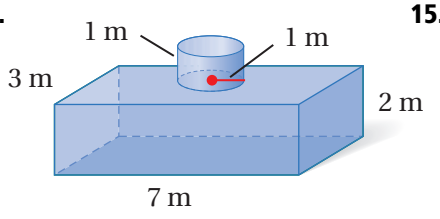
12.



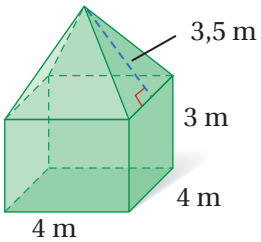
13.



14.



15.



16. El volumen de un cubo es de 35 mm^3. ¿Cuál es el volumen de un cubo semejante cuyos lados son 9 veces la medida del original?

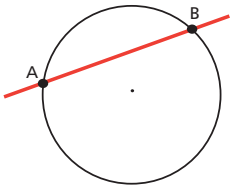
¿Listo para seguir?

CAPÍTULO 4

Evaluación acumulativa

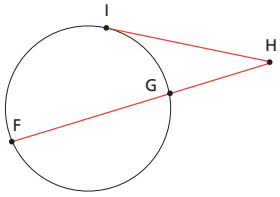
Capítulos 1 – 4

1. Observa la figura, que corresponde a una circunferencia de centro O y de radio r. ¿Cómo se llama en segmento $\overline{AB}$?



(A) cuerda
(B) secante
(C) diámetro
(D) radio

2. En la figura, que corresponde a una circunferencia, el ángulo dibujado está formado por:



(A) cuerda
(B) secante
(C) diámetro
(D) radio

3. El perímetro de una circunferencia de radio 10 cm es: (usar $\pi = 3{,}1$)

(A) 31 cm
(B) 62 cm
(C) 31 cm^2
(D) 62 cm^2

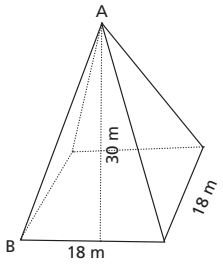
4. El área de un círculo de radio 10 cm es: (usar $\pi = 3{,}1$)

(A) 310 cm^2
(B) 100 cm^2
(C) 62 cm^2
(D) 31 cm^2

5. ¿Para qué radio positivo *r* el perímetro de una circunferencia es igual al área de un círculo?

(A) $r = 1$
(B) $r = 2$
(C) $r = 3$
(D) $r = 4$

6. Observa la pirámide de base cuadrada dibujada. Su área basal es:

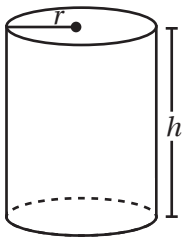


(A) 18 m^2
(B) 36 m^2
(C) 324 m^2
(D) 270 m^2

7. Según el dibujo anterior de la pirámide de base cuadrada, ¿cuánto mide la superficie de una de las caras laterales?

(A) 18 m^2
(B) 36 m^2
(C) 324 m^2
(D) 270 m^2

8. El perímetro de la circunferencia dada mide 6 m. ¿Qué información adicional se necesita para Encontrar el volumen del cilindro?



(A) el diámetro
(B) la altura
(C) el área de la base
(D) el radio

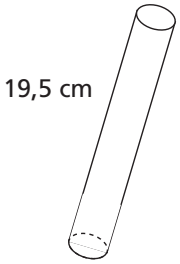
9. La bombilla tiene diámetro de 0,6 cm. ¿Cuál es su área total redondeada a la décima más cercana? Usa 3,14 para π.

(A) 11,7 cm^2

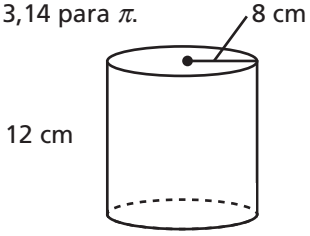
(B) 5,5 cm^2

(C) 37,7 cm^2

(D) 36,7 cm^2



10. Encuentra el volumen del cilindro, redondeado a la décima más cercana. Usa 3,14 para π.



(A) 602,9 cm^3 (B) 1 205,8 cm^3

(C) 3 215,4 cm^3 (D) 2 411,5 cm^3

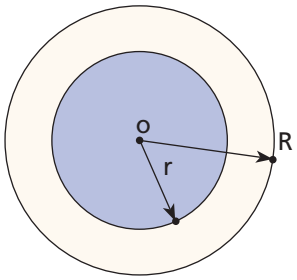
¡UN CONSEJO! **Asegúrate de usar las unidades de medida correctas en tus respuestas. El área se mide en unidades cuadradas y el volumen en unidades cúbicas.**

11. Para una caja rectangular, donde la base mide el triple que la altura y su área basal es igual a 108 m^2, calcula:

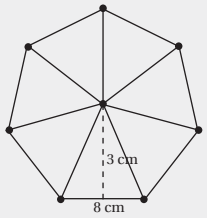
(A) el perímetro de la base

(B) el volumen de la caja

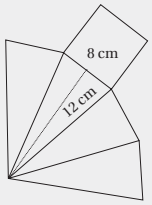
12. **Área de la corona circular.** Es el área de la región delimitada por las dos circunferencias concéntricas. Se calcula hallando la diferencia entre el área del círculo mayor, de radio R, y la del círculo menor, de radio r. Si el R = 8 cm y r = 4 cm ¿cuánto mide la superficie de la corona?



13. Calcula el área y el perímetro del polígono de 7 lados.



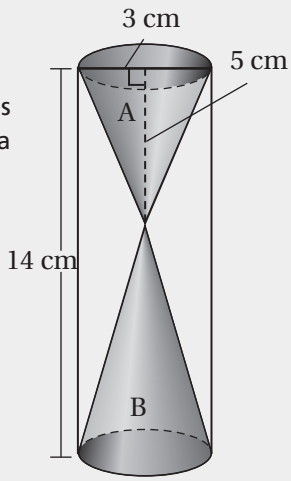
14. Calcula el área total de la figura.



15. Un poliedro tiene dos bases cuadradas paralelas con aristas de 9 m de largo y una altura de 9 m. Identifica la figura y encuentra su volumen. Muestra tu trabajo.

16. ¿Cuál es la longitud de la base de un paralelogramo que mide 8 cm de altura y tiene un área de 56 cm^2?

17. Usa la figura para resolver los siguientes problemas. Redondea tus respuestas a la centésima más cercana si es necesario. Usa 3,14 para π.



a. ¿Qué figuras tridimensionales forman la escultura?

b. ¿Cuál es el volumen combinado de las figuras A y B? Muestra tu trabajo.

c. ¿Cuál es el volumen del espacio que rodea las figuras A y B? Muestra tu trabajo y explica tu respuesta.

Responde verdadero (V) o falso (F)

18. _____ El radio y una cuerda son algunos elementos de la circunferencia.

19. _____ Una circunferencia de radio 3,5 cm tiene un perímetro de 34,5086 cm.

20. _____ El volumen de una pirámide de base 7 cm y altura 6 cm es 42 cm^3.

CAPÍTULO

5 Datos y azar

5–1 Muestras y encuestas

5–2 Tabla de frecuencias y media aritmética con datos agrupados en intervalos

5–3 Moda para datos agrupados

LABORATORIO Construir una tabla de frecuencias con datos agrupados

5–4 Métodos de conteo y espacios muestrales

5–5 Probabilidad experimental

5–6 Probabilidad teórica

LABORATORIO Simulaciones

Enfoque del capítulo

- Calcular media aritmética y moda para datos agrupados en intervalos
- Reconocer y calcular probabilidades

En el mundo real

Los biólogos suelen tomar muestras al azar de los animales silvestres, por ejemplo, los leones marinos, para hacer estimaciones sobre el crecimiento de la población o sobre enfermedades contagiosas que puedan afectar al grupo. En ocasiones también se usa la probabilidad para determinar qué posibilidades hay de que se salve una especie en peligro de extinción.

¿Estás listo?

Vocabulario

Elige el término de la lista que complete mejor cada enunciado:

círculo
escala
frecuencia
intervalo
segmento de recta

1. El conjunto de puntos que están entre dos puntos dados y son subconjuntos de una recta se llama _____.
2. Un(a) _____es la cantidad de espacio métrico contenido entre dos valores marcados en el/la _____ de una gráfica.
3. La cantidad de veces que aparece un elemento es su _____.

Tablas de distribución de frecuencias

Haciendo un estudio acerca de las edades de un grupo de jóvenes, se recogieron los siguientes datos: 22 – 24 – 28 – 26 – 26 – 20 – 22 – 24 – 24 – 20 – 24 – 26 – 28 – 22 – 26 – 20 – 20 – 22 – 24 – 20

4. Construye una tabla de distribución de frecuencias.
5. Calcula la media aritmética de las edades.

Interpretar tablas de distribución de frecuencias

Se consultó en las oficinas de un edificio por el número de sillas que había en cada una.
Con los resultados se realizó la siguiente tabla, que debes utilizar para responder las preguntas 6, 7 y 8.

N° de sillas	N° de oficinas
5	6
6	11
7	8
8	6

6. ¿Cuál es el promedio de sillas por oficina?
7. ¿Cuántas oficinas tienen menor cantidad de sillas?
8. ¿Cuántas sillas hay en la mayor cantidad de oficinas?
9. En una encuesta se consultó a 600 personas respecto a su preferencia sobre cuatro marcas de vehículos, siendo las frecuencias relativas 0,15; 0,25; 0,35 y 0,25 ¿Cuántas personas se inclinaron por el vehículo menos elegido?

Usa los datos de la tabla para resolver los ejercicios 10 y 11.

Velocidades máximas de algunos vehículos (km/h)	
Vehículo	**Velocidad (km/h)**
Skate	25
Scooter	50
Monociclo	20
Bicicleta	30

10. ¿Qué vehículo es el más rápido?
11. ¿Qué vehículo es más rápido: un monociclo o una bicicleta?

CAPÍTULO 5

Vistazo previo

De dónde vienes

Antes

- Usaste una representación apropiada para presentar datos.
- Resolviste problemas mediante la recopilación, organización y presentación de datos.
- Encontraste probabilidades experimentales.

En este capítulo

Estudiarás

- cómo calcular la media aritmética y la moda para datos agrupados en intervalos.
- cómo hacer inferencias y escribir justificaciones convincentes basadas en el análisis de datos.
- cómo encontrar probabilidades experimentales y teóricas.

Hacia dónde vas

Puedes usar las destrezas aprendidas en este capítulo:

- Para analizar las tendencias y tomar decisiones sobre negocios y comercialización.
- Para fortalecer un argumento persuasivo presentado datos y tendencias en presentaciones visuales.
- Para determinar el efecto de las probabilidades en los juegos en los que participas.

Vocabulario

media aritmética	Muestra
moda	Muestra sistemática
tabla de frecuencia	Muestra auto - seleccionada
experimento	Muestra aleatoria
probabilidad experimental	Frecuencia
probabilidad teórica	Frecuencia acumulada
suceso	Rango
Variable continua	Intervalo modal
Variable discreta	Límite inferior
Datos agrupados	Marca de clase
Frecuencia relativa	Probabilidad
Frecuencia relativa acumulada	Igualmente probable
Población	Justo

Conexiones de vocabulario

Considera lo siguiente para familiarizarte con algunos de los términos de vocabulario del capítulo. Puedes consultar el capítulo, el glosario o un diccionario si lo deseas:

1. La *frecuencia* es la medida de cuán a menudo ocurre un suceso o la cantidad de objetos semejantes en un grupo. ¿Qué se muestra en una **tabla de frecuencia**?

2. Un *experimento* es una acción que se realiza para encontrar algo que desconoces. ¿Por qué puede decirse que lanzar una moneda a cara o cruz, lanzar los dados o hacer girar una flecha giratoria son **experimentos**?

3. Un *suceso* está formado por varios resultados o, a veces, por un solo resultado. Por ejemplo, en un juego de mesa, sacar un número par al lanzar un dado y escoger una tarjeta de desafío puede considerarse un suceso. ¿Qué otro **suceso** puede ocurrir cuando participas en un juego de mesa?

Leer y escribir matemáticas

CAPÍTULO 5

Estrategia de lectura: Lee y comprende problemas

Para comprender mejor un problema en palabras, léelo una vez para ver qué concepto se repasa en él. Luego, vuelve a leer el problema lentamente y con atención para identificar qué se te pide que hagas. Mientras lees, resalta la información clave. Cuando debas resolver un problema de varios pasos, divide el problema en partes y luego haz un plan para resolverlo.

1. **Arquitectura** La torre de un edificio es una pirámide cuadrangular de 1 m^2 de base y una altura de 4,57 m. ¿Cuántos metros cúbicos de concreto se usaron par hacer la pirámide?

Paso	Pregunta	Respuesta
Paso 1	¿Qué concepto se repasa?	• Encontrar el volumen de una pirámide.
Paso 2	¿Qué se te pide que hagas?	• Encontrar el número de metros cúbicos de concreto que se usaron para hacer la torre.
Paso 3	¿Cuál es la información clave necesaria para resolver el problema?	• La torre es una pirámide cuadrangular. • La base de la pirámide tiene un área de 1 metro cuadrado. • La altura de la pirámide es de 4,57 metros.
Paso 4	¿Cuál es mi plan para resolver este problema de varios pasos?	• Usar la fórmula para encontrar el volumen de una pirámide: $V = \frac{1}{3}Bh$. • Sustituir los valores del área de la base y la altura en la fórmula. • Encontrar V.

Inténtalo

Para cada problema, completa los pasos del método de cuatro pasos que se describe arriba:

2. ¿Cuál de las siguientes figuras tiene un mayor volumen: una pirámide cuadrangular con una altura de 15 m y una base cuyos lados miden 3 m o un cubo cuyos lados miden 4 m?

3. Realiza una encuesta a tus compañeros de curso para saber cuál es su deporte favorito y construye una tabla de frecuencias con los datos recogidos.

CAPÍTULO

5–1 Muestras y encuestas

Aprender a reconocer la importancia de tomar muestras al azar en experimentos para inferir sobre las características de poblaciones.

Vocabulario

población
muestra aleatoria
variable continua
variable discreta
datos agrupados

Población es un conjunto o grupo de cosas, personas o situaciones, que tienen alguna característica común que permite agruparlas. Una población puede ser finita o infinita según los elementos que la forman. Por ejemplo, el conjunto de los estudiantes que asisten al colegio en Chile es una población finita. El conjunto de los resultados del lanzamiento de un dado en forma sucesiva puede ser infinita.

El estudio de la población completa con fines estadísticos puede resultar a veces imposible, poco rentable o poco práctico. En esos casos se estudia una muestra.

La muestra más representativa se obtiene en forma aleatoria, es decir, cada miembro de la población tiene las mismas posibilidades de ser seleccionado. Se denomina **muestra aleatoria.**

EJEMPLO 1 Identificar una muestra aleatoria

Los organizadores de una carrera desean saber con qué frecuencia entrenan los participantes. Para los siguientes casos, identifica si se trata de una muestra aleatoria o no.

A **Los organizadores reparten en la línea de llegada una encuesta escrita, para los atletas que deseen completarla.**
Esta no es una muestra aleatoria, probablemente la completarán solo algunos de los participantes: cada miembro elige completar o no la encuesta.

B **Los organizadores eligen al azar uno de los diez primeros nombres de una lista ordenada alfabéticamente. Luego, seleccionan uno de cada diez.**
Esta no es una muestra aleatoria: solo se elige el primer nombre al azar y los siguientes se eligen usando un patrón.

C **Los organizadores entrevistan a un grupo de 50 atletas a medida que llegan a la carrera**
Esta no es una muestra aleatoria, ya que se ha seleccionado a los miembros de la población a los que era más fácil acceder.

D **Los organizadores ingresan los números con que participa cada atleta en una tómbola y sacan al azar una cantidad proporcional al total de participantes.**
Esta es una muestra aleatoria porque cada uno de los atletas tiene las mismas posibilidades de ser elegido.

Se llama variable al fenómeno que se quiere estudiar y se distinguen dos tipos: **variable continua**, que es aquella que puede tomar cualquier valor entre dos valores dados y **variable discreta,** que es la que solo puede tomar valores enteros.

EJEMPLO 2 Comparar muestras

Alrededor del 36% de los hogares de Chile tiene un perro como mascota. Óscar hace una encuesta y usa una muestra aleatoria de hogares de dos ciudades. Compara las muestras con el porcentaje nacional.

Hogares con perros		
Muestra	**Cantidad de hogares con perros**	**Cantidad de hogares sin perros**
Ciudad A	11	9
Ciudad B	7	13

Para cada muestra, encuentra el porcentaje de hogares que tiene perros:

Ciudad A: $\frac{\text{cantidad de hogares con perros}}{\text{cantidad total de hogares}} = \frac{11}{(11+9)} = \frac{11}{20} = 0{,}55 = 55\%$

Ciudad B: $\frac{\text{cantidad de hogares con perros}}{\text{cantidad total de hogares}} = \frac{7}{(7+13)} = \frac{7}{20} = 0{,}35 = 35\%$

Los datos sugieren que la cantidad de hogares con perros en la ciudad B está cerca del porcentaje nacional, pero el porcentaje de hogares con perros en la ciudad A es mayor que el porcentaje nacional.

EJEMPLO 3 Identificar variables discretas o continuas

A **Número de personas que integran un grupo familiar** es una variable discreta ya que las personas que forman un grupo familiar se pueden contar de uno en uno.

B **Longitud media de los tornillos producidos por una máquina** es una variable continua ya que las medidas pueden variar en forma continua.

EJEMPLO 4 Cómo formar intervalos

Se necesita organizar esta información en una tabla con datos agrupados. Los datos son: 17, 17, 19, 19, 31, 21, 18, 27, 21, 22, 24, 19, 25, 24, 24, 23, 20, 29, 21, 19.

Paso 1: Determinar el nº de intervalos. La muestra tiene 20 datos, entonces calcula $\sqrt{20} = 4{,}47213\ldots \approx 5$

Paso 2: : Determinar el ancho de cada intervalo. Debes saber cuál es el mayor y el menor valor de los datos registrados para saber cómo vas a distribuir los valores en los intervalos. Así: $31 - 17 = 14$

Paso 3: El ancho de cada intervalo (ai) se calcula dividiendo $14 : 5 = 2{,}333\ldots$. El ancho se debe ajustar aproximando al entero superior más cercano, ai = 3. Entonces, ahora se tienen $3 \cdot 5 = 15$ valores para repartir. Entonces, los intervalos son:

[17 – 20[[20 – 23[[23 – 26[[26 – 29[[29 – 32]

Razonar y comentar

1. **Describe** una situación en la que se encueste a toda la población.
2. **Indica** cómo elegirías al azar a cinco estudiantes de tu curso.

5–1 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

Identifica cada muestra como aleatoria o no aleatoria.

Una senadora desea saber si los votantes de su región apoyan una nueva ley de impuestos. De las siguientes muestras, ¿cuál es una muestra aleatoria?

1. Un miembro de su equipo elige al azar 500 nombres del registro electoral de su región.
2. Un miembro de su equipo publica una encuesta en el sitio web de la senadora.

Ver Ejemplo 2

3. Aproximadamente el 12% de los adultos en Chile visita un zoológico al año. Maite realiza una encuesta aleatoria de adultos en dos ciudades de su región. **Compara las muestras con el porcentaje nacional.**

Visitas al zoológico el año pasado		
Muestra	Sí	No
Ciudad A	3	22
Ciudad B	10	15

Ver Ejemplo 3

Identifica si son variables discretas o continuas.

4. Cantidad de profesores por colegio en una comuna determinada.
5. Estatura de los niños de 8º básico.
6. Número de personas que visitan un mall el fin de semana.
7. Velocidad a la que transitan los buses interurbanos.
8. Horas que un niño está frente a un videojuego durante una semana.

Ver Ejemplo 4

Formar intervalos.

9. En un grupo de 50 alumnos de Educación Media, se registraron los siguientes puntajes en una prueba. Organiza los datos agrupándolos en intervalos.
61, 70, 77, 82, 63, 75, 83, 62, 67, 83, 67, 80, 77, 85, 83, 76, 83, 67, 78, 76, 72, 80,83, 72, 84, 71, 77, 82, 79, 83, 66, 88, 68, 74, 84, 75, 73, 75, 83, 84, 87, 64, 83, 72, 87, 77, 63, 72, 84, 78.

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

Identifica cada muestra como aleatoria o no aleatoria.

La bibliotecaria de una escuela desea saber con qué frecuencia los estudiantes usan mensajes de texto en la escuela. Identifica cada clase de método de muestreo.

10. La bibliotecaria elige al azar 20 nombres de la lista de todos los estudiantes de la escuela.
11. La bibliotecaria encuesta a 40 estudiantes que están en la biblioteca durante la hora del almuerzo.

Ver Ejemplo 2

Compara las muestras con el promedio nacional.

12. Chile es el tercer país en el mundo que más horas dedica a las redes sociales. En promedio está 6,3 horas a la semana conectado a internet y $\frac{1}{3}$ de ellas se dedica a las redes sociales. Laura hace una encuesta al azar de 20 personas en dos ciudades.

Uso de Internet (horas por semana)	
Ciudad A	11, 8, 7, 2, 9, 4, 2, 0, 7, 2, 8, 20, 4, 5, 8, 6, 3, 0, 2, 10
Ciudad B	3, 12, 4, 0, 5, 7, 3, 0, 2, 4, 10, 5, 2, 2, 9, 6, 2, 2, 5, 11

Ver Ejemplo 3

Identifica si son variables discretas o continuas.

13. Duración de una ampolleta en horas.

14. Marcas de salto alto en los juegos olímpicos.

15. Número de goles en un campeonato mundial de futbol.

16. Cantidad de pasteles que produce una pastelería en un mes.

17. Tiempo de espera por un transporte público de Transantiago en minutos.

Ver Ejemplo 4

Formar intervalos.

18. En una oficina se registró el uso de internet de 40 personas en horas por semana y los datos son los siguientes:

11, 8, 7, 2, 9, 4, 2, 0, 7, 2, 8, 20, 4, 5, 8, 6, 3, 0, 2, 10, 3, 12, 4, 0, 5, 7, 3, 0, 2, 4, 10, 5, 2, 2, 9, 6, 2, 2, 5, 11.

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

19. En la Panadería BB se aplican dos encuestas para determinar la satisfacción del cliente.

Durante tres días, la panadera Sofía encuesta a un cliente de cada diez que entran en la panadería. El 64% está satisfecho con la calidad del producto.

La panadera Martina encuesta a los primeros 30 clientes que entran a la panadería durante una mañana. El 95% está satisfecho con la calidad del producto. Determina qué muestra representará mejor a toda la población. Justifica tu respuesta.

20. **Escríbelo** Describe cómo podrías elegir una muestra al azar de los clientes que visitan una tienda de música durante una semana.

21. **Conexión con la Geología** Ingresa a la página del Servicio Sismológico de la Universidad de Chile y registra la actividad sísmica de los dos últimos días. Construye intervalos para organizar los datos.

Repaso

22. Agrupa en intervalos los siguinetes datos: 58, 61, 53, 54, 53, 48, 45, 48, 50, 53, 49, 57, 55, 49, 45, 47, 60, 59, 57, 58.

23. ¿A partir de qué cantidad de datos discretos es conveniente agruparlos en intervalos? Justifica tu respuesta.

Usa una recta numérica para hallar cada suma.

24. $-6 + 11$ **25.** $-31 + (-31)$ **26.** $-8 + 14$

Multiplica. Escribe el producto como potencia.

27. $3^6 \cdot 3^7$ **28.** $7^2 \cdot 7^4$ **29.** $12^4 \cdot 12^4$ **30.** $x^3 \cdot x^5$

CAPÍTULO 5–2

Tabla de frecuencias y media aritmética

Aprender a organizar e interpretar datos en tablas de frecuencias.

Vocabulario

tabla de frecuencias

frecuencia acumulada

frecuencia relativa

frecuencia acumulada

frecuencia relativa porcentual

marca de clase

media aritmética

La tecnología IMAX se estrenó en el Pabellón de Fuji, en la EXPO 70 de Osaka, Japón. El primer sistema de proyección IMAX permanente se instaló en Toronto, Canadá, en 1971. Luego, un Domo IMAX® debutó en San Diego, EE.UU. en 1973. En la actualidad hay más de 660 salas IMAX en 53 países. con sus enormes pantallas y potentes sistemas de sonido, hacen que los espectadores se sientan como si estuvieran en medio de la acción.

Para ver con que frecuencia es que una película de IMAX atrae a un gran número de espectadores puedes usar una tabla de frecuencias.

Una **tabla de frecuencias** es una forma de organizar datos por categorías o grupos. Al incluir una columna de **frecuencia acumulada** en tu tabla, puedes llevar la cuenta en todo momento de la cantidad total de datos.

EJEMPLO 1 **Organizar e interpretar datos en una tabla de frecuencia**

En la lista se muestran los ingresos de taquilla en millones de dólares de 20 películas de IMAX. Haz una tabla de frecuencia acumulada con los datos. ¿Cuántas películas ganaron menos de $ 40 millones?

76, 51, 41, 38, 18, 17, 16, 15, 13, 13, 12, 12, 10, 10, 6, 5, 5, 4, 4, 2

Paso 1: Elige una escala que incluya todos los datos. Luego, divide la escala en intervalos iguales.

Paso 2: Encuentra la cantidad de datos en cada intervalo. Escribe estos números en la columna de "Frecuencia".

Paso 3: Encuentra la frecuencia acumulada de cada fila sumando todos los valores de la frecuencia que estén por encima o en esa fila.

La cantidad de películas que ganaron menos de $ 40 millones es la frecuencia acumulada de las primeras dos filas: 17.

Películas IMAX		
Ingresos (millones de $)	Frecuencia	Frecuencia acumulada
0 – 19	16	16
20 – 39	1	17
40 – 59	2	19
60 – 79	1	20

¡Recuerda!

La frecuencia de un dato es la cantidad de veces que sucede.

En una tabla de frecuencias, también se registra la **frecuencia relativa** que es una comparación por cociente de la frecuencia absoluta y el total de la muestra. Además se puede calcular la **frecuencia relativa porcentual** que entrega información del porcentaje que equivale a cada dato o a cada intervalo registrado.

Para trabajar con datos agrupados en intervalos, se realizan los cálculos con el valor promedio de cada intervalo que lo representa. Ese valor se llama **marca de clase**.

EJEMPLO 2

Dada una tabla con datos agrupados, completarla e interpretar sus datos

Notas (promedio) de los estudiantes del 8°A en la asignatura de Matemáticas:

Intervalo de notas	Marca de clase o punto medio	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
[1,0 – 2,0[	1,5	1	1	$\frac{1}{40} = 0{,}025$	0,025 • 100 = 2,5%
[2,0 – 3,0[	2,5	1	2	$\frac{1}{40} = 0{,}025$	0,025 • 100 = 2,5%
[3,0 – 4,0[	3,5	3	5	$\frac{3}{40} = 0{,}075$	0,075 • 100 = 7,5%
[4,0 – 5,0[	4,5	12	17	$\frac{12}{40} = 0{,}3$	0,3 • 100 = 30%
[5,0 – 6,0[	5,5	17	34	$\frac{17}{40} = 0{,}425$	0,425 • 100 = 42,5%
[6,0 – 7,0]	6,5	6	40	$\frac{6}{40} = 0{,}15$	0,15 • 100 = 15%
		Total = 40			

Esta tabla permite tener todos los datos a la vista y poder saber, por ejemplo:

¿Cuántos alumnos obtuvieron promedio entre 4,0 y 5,0?

En la columna de la frecuencia absoluta leemos 12 alumnos.

¿Cuántos alumnos reprobaron matemáticas?

En la columna de frecuencia acumulada vemos los que alcanzaron hasta el intervalo [3,0 – 4,0[, son 5 alumnos.

¿Qué porcentaje de alumnos aprobó matemáticas?

En la columna de frecuencia relativa porcentual, se suma 30% + 42,5% + 15% = 87,5% es el porcentaje de alumnos que aprobaron matemáticas.

A partir de estos datos, se puede encontrar la media aritmética o promedio de las notas y la moda de las notas del curso. La media aritmética es una medida de tendencia central.

Para calcular la media aritmética o primedio se multiplican los datos de la columna de frecuencia absoluta por la marca de clase. Luego se suman y la suma se divide por el total de datos.

$$\text{Así: } \frac{1{,}5 \cdot 1 + 2{,}5 \cdot 1 + 3{,}5 \cdot 3 + 4{,}5 \cdot 12 + 5{,}5 \cdot 17 + 6{,}5 \cdot 6}{40} =$$

$$\frac{1{,}5 + 2{,}5 + 10{,}5 + 54 + 93{,}5 + 39}{40} =$$

$$\frac{201}{40} = 5{,}025$$

Luego, la media aritmética o promedio de notas del curso es 5,025.

Razonar y comentar

1. **Indica** qué columna de una tabla de frecuencias usarías para determinar la cantidad de datos en un conjunto. Explica.

5–2 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

A. En la lista se muestra la estatura en centímetros de los alumnos y alumnas de 8º A

Estatura de los estudiantes de 8º A									
145	147	180	154	162	168	157	167	178	165
164	159	163	155	167	176	148	176	149	167
179	168	169	172	154	167	179	177	178	165
157	165	178	168	158	179	167	175	173	147

1. Haz una tabla de frecuencia acumulada siguiendo los pasos del ejemplo.

2. ¿Cuántos alumnos miden menos de 170 cm?

3. ¿Entre qué estaturas se encuentra la mayoría de los alumnos?

B. Puntos en juego

4. Construye una tabla de frecuencias para los siguientes datos:

Cantidad de puntos obtenidos en un juego
3 - 5 - 2 - 5 - 4 - 7 - 1 - 0 - 6 - 4 - 8 - 5 - 3 - 2 - 4 - 5 - 9

5. ¿Cuántas personas obtuvieron menos de 4 puntos?

6. ¿Qué porcentaje de los puntajes estuvo sobre el 80%?

Ver Ejemplo 2

La siguiente tabla de distribución de frecuencia muestra el peso de los estudiantes que viajan en avión a un encuentro deportivo:

Peso (Kg)	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
[40 – 44[		7			
[44 – 48[		8			
[48 – 52[		10			
[52 – 56[		6			
[56 – 60]		9			

7. ¿Cuántos niños pesan menos de 48 kilos?

8. ¿Cuántos niños pesan más de 52 kilos?

9. ¿Qué porcentaje pesa entre 44 y 56 kilos?

10. Calcula la media aritmética e identifica el intervalo donde se encuentra la moda.

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

En la lista se muestran los datos de la duración de un tipo de ampolletas (en horas):

1 500	1 320	1 357	1 478	1 398	1 250	1 368	1 465	1 376
1 525	1 336	1 427	1 532	1 335	1 428	1 327	1 432	1 476
1 389	1 500	1 325	1 434	1 323	1 358	1 369	1 452	1 473
1 333	1 414	1 432	1 359	1 365	1 467	1 389	1 359	1 368

11. Haz una tabla de frecuencia siguiendo los pasos del ejemplo.

12. ¿Cuántas ampolletas duraron menos de 1 400 horas?

13. ¿Cuántas ampolletas duraron más de 1 300 horas?

Ver Ejemplo 2

Los datos corresponden a los puntajes obtenidos por los alumnos de cuarto medio de un colegio en la PSU:

Puntaje PSU	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
[350 – 450[		4			
[450 – 550[		8			
[550 – 650[		19			
[650 – 750[		10			
[750 – 850]		9			

14. ¿Cuántos alumnos rindieron esta prueba?

15. ¿Cuántos alumnos obtuvieron más de 450 puntos?

16. ¿Qué porcentaje de alumnos se encuentra en el intervalo de más bajo puntaje?

17. Calcula el promedio del puntaje obtenido en la PSU.

Presidente	Edad	Presidente	Edad
Manuel Blanco Encalada	36	Domingo Santa María González	57
Ramón Freire	36	José Manuel Balmaceda Fernández	46
Francisco Antonio Pinto	44	Jorge Montt Álvarez	46
José Joaquín Prieto Vial	50	Federico Errázuriz Echaurren	46
Manuel Bulnes Prieto	42	Germán Riesco Errázuriz	47
Manuel Montt Torres	42	Pedro Montt Montt	57
José Joaquín Pérez Mascayano	60	Ramón Barros Luco	75
Federico Errázuriz Zañartu	46	Juan Luis Sanfuentes Andonaegui	57
Aníbal Pinto Garmendia	51	Arturo Alessandri Palma	52

18. Utiliza la información y haz una tabla de frecuencias con datos agrupados.

19. Calcula la edad promedio de los presidentes de Chile.

20. Comenta dónde se encuentra la moda y compara con la edad en que asumen el mando en la actualidad.

21. ¿Qué porcentaje de los presidentes se encuentra bajo la media aritmética?

La siguiente tabla de distribución de frecuencias muestra el año de nacimiento de las personas de una empresa.

Año de nacimiento	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
[60 – 63[		5			
[63 – 66[		15			
[66 – 69[		10			
[69 – 72[		7			
[72 –75]		3			

22. Completa la tabla de frecuencia.

23. Calcula la media aritmética de las edades de los trabajadores.

24. ¿Qué porcentaje de los trabajadores tiene más de 69 años?

CONEXIÓN con Biología

En el mapa se muestra la cantidad de especies animales en grave peligro de extinción de cada país de América del Sur. Una especie está en grave peligro cuando tiene un riesgo muy elevado de desaparecer de su hábitat natural en el futuro próximo.

25. ¿Qué país tiene la menor cantidad de especies en peligro? ¿Cuál tiene la mayor cantidad?

26. Haz una tabla de frecuencia con datos agrupados. ¿Cuántos países tienen menos de 20 especies en grave peligro de extinción?

27. **Escríbelo** Explica cómo cambia tu tabla de frecuencia acumulada al cambiar los intervalos que usaste en el ejercicio 22.

28. **Desafío** ¿Qué porcentaje de los animales en peligro de extinción en América del Sur representan los animales de nuestro país?

Repaso

Usa la tabla para responder:

Datos	Frecuencia acumulada
[25 – 35[	6
[35 – 45[	14
[45 – 55]	20

29. ¿Cuál es la frecuencia absoluta del intervalo [45 –55]?

(A) 8 (C) 6

(B) 10 (D) 20

30. ¿Qué porcentaje representa al intervalo [35 – 45[?

31. María tiene 18 metros de tela. Para hacer un cojín necesita 1,2 metros. ¿Cuántos cojines puede hacer María con la tela?

Encontrar el valor de la incógnita:

32. $12x + 5 = 29 - 2x$ **33.** $4x - 7 = 33$ **34.** $36 - 46z - 150 = 24z$

CAPÍTULO

5–3 Moda para datos agrupados

Aprender a calcular la moda para datos agrupados.

Vocabulario

rango

moda

intervalo modal

límite inferior

marca de clase

El **rango** es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor de los datos.

Si los datos son: 10, 6, 91, 5, 8, 6, el dato mayor de los datos es 91 y el menor es 5. Entonces el rango se calcula:

$$91 - 5 = 86$$

La **marca de clase** es el valor medio de cada intervalo y equivale a la semisuma entre el límite superior y el límite inferior de cada intervalo. Se denota por x_i.

Si el intervalo es [60 – 68[, la marca de clase se calcula:

$$x_i = \frac{(60+68)}{2} = \frac{128}{2} = 64$$

La **moda** es el valor o los valores que aparecen más a menudo. Cuando todos los valores de datos aparecen la misma cantidad de veces, no hay moda.

Cuando se trabaja con datos agrupados, solo podemos saber en qué grupo de datos o intervalo se encuentra la moda. Este se llama **intervalo modal.**

Para calcular la moda en forma exacta, se usa una fórmula donde se debe identificar cada uno de los valores en la tabla.

Todos los intervalos deben ser iguales, es decir tener la misma amplitud o cantidad de datos:

$$Mo = L_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot a_i$$

L_i es el **límite inferior** del **intervalo modal**.

f_i es la frecuencia absoluta del intervalo modal.

f_{i-1} es la frecuencia absoluta inmediatamente inferior al intervalo modal.

f_{i+1} es la frecuencia absoluta inmediatamente posterior al intervalo modal.

a_i es la amplitud del intervalo.

EJEMPLO 1 Calcular el rango y la marca de clase

Año de nacimiento	marca de clase
[60 – 63[	$\frac{(60 + 63)}{2} = 61{,}5$
[63 – 66[	$\frac{(63 + 66)}{2} = 64{,}5$
[66 – 69[	$\frac{(66 + 69)}{2} = 67.5$
[69 – 72[	$\frac{(69 + 72)}{2} = 70{,}5$
[72 –75]	$\frac{(72 + 75)}{2} = 73{,}5$

Calcular el rango:

mayor valor de los datos = 75
menor valor de los datos = 60
rango = 15

EJEMPLO 2 Calcular la moda con datos agrupados

La tabla muestra los minutos que caminan al día dos amigas para hacer ejercicios:

Minutos de caminata	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
[45 – 50[	47,5	1	1	0,083…	8,3%
[50 – 55[	52,5	2	3	0,16…	16%
[55 – 60[	57,5	5	8	0,416…	41,6%
[60 – 65]	62,5	4	12	0,333…	33,3%

El intervalo que tiene mayor frecuencia en este caso es [55 – 60[.
Nótese que es el mismo intervalo en el que se encuentra la media.

Aplicando la fórmula:

$$MO = 55 + \frac{5 - 2}{(5 - 2) + (5 - 4)} \cdot 5$$

$$MO = 55 + \frac{3}{3 + 1} \cdot 5$$

$$MO = 55 + \frac{15}{4}$$

$$MO = 58{,}75$$

El valor exacto de la moda es 58,75 minutos.

5–3 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

1. Los puntajes obtenidos por un curso en una prueba de matemática son los que se indican en la tabla. Calcula la marca de clase, el rango y completa la tabla de frecuencias.:

Minutos de caminata	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
[0 – 6[		5			
[6 – 12[		6			
[12 – 18[		8			
[18 – 24[		10			
[24 – 30[		14			
[30 – 36[		9			
[36 – 42[		6			
[42 – 48]		2			

Ver Ejemplo 2

2. Calcula la moda con los datos de la tabla:

Año de nacimiento	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
[60 – 63[	5	5
[63 – 66[	18	23
[66 – 69[	42	65
[69 – 72[	27	92
[72 –75]	8	100

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

3. Los puntajes obtenidos por un curso en una prueba de matemática son los que se indican en la tabla. Calcula la el rango, la marca de clase y completa la tabla de frecuencias.

Puntajes	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
[0 – 6[		5	
[6 – 12[		6	
12 – 18[		8	
[18 – 24[		10	
[24 – 30[		14	
[30 – 36[		9	
[36 – 42[		6	
[42 – 48]		2	

Ver Ejemplo 2

4. Con los datos de la tabla, calcula la moda:

Datos	Frecuencia acumulada
[25 – 35[	6
[35 – 45[	14
[45 – 55]	20

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

5. La siguiente tabla de distribución de frecuencias muestra los pesos de estudiantes de 8º básico. Completa la tabla y responde las preguntas 1 y 2.

Peso (kg)	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
[40 – 44[	7	
[44 – 48[	8	
[48 – 52[	10	
[52 – 56[	6	
[56 – 60]	9	

6. Calcula la moda.

7. Calcula la media aritmética.

8. **Comenta** ¿Puedes calcular cuántos estudiantes tienen un peso por encima de la moda?

9. **Dónde está el error** A Javier le entregaron la siguiente tabla y le pidieron que calculara el precio del CD más vendido. Para entregar su respuesta, Javier calculó la media. ¿Es correcta la respuesta de Javier?

CDs vendidos		
Precio	Frecuencia	Frecuencia acumulada
6 000 – 9 000	5	5
10 000 – 13 000	7	12
14 000 – 17 000	4	16
17 000 – 20 000	2	18

10. Usa la tabla para calcular la media y la moda.

11. **Comenta** ¿Qué diferencia hay entre la media y la moda?

Repaso

12. Según la tabla, el intervalo modal es:

(A) 45 – 50 (C) 51 – 55

(B) 56 – 60 (D) 61 – 65

13. Calcula la moda y la media.

14. ¿Cuántos saltos son menores a 61 cm?

15. ¿Cuántos niños saltan entre 51 y 60 cm?

Mejores saltos de altura en 1° básico		
Altura (cm)	Frecuencia	Frecuencia acumulada
[45–50[	1	1
[51–55[	2	3
[56–60[	5	8
[61–65]	4	12

Laboratorio de TECNOLOGÍA

Construir una tabla de frecuencias con datos agrupados

5–3

Para usar con la lección 5–3

RECUERDA

- **Asegúrate de que tu muestra refleje tu población.**

Una tabla de frecuencias con datos agrupados te permite leer, identificar, interpretar y relacionar datos de forma rápida.

Actividad

Para construir una tabla de frecuencias con datos agrupados deberás seguir los pasos que se detallan a continuación, a partir del siguiente conjunto de datos: 30, 32, 17, 28, 79, 20, 5, 8, 69, 1, 72, 24, 76, 29, 47, 11, 22, 67, 60, 4, 39, 71, 19, 27, 64, 28, 56, 41, 70, 4, 44, 24, 62, 65, 30, 76, 3, 28, 78, 6, 78, 79,1, 13, 29, 64, 16, 37, 3.

Debes ingresarlos a partir de la celda B2 hasta H8 y crear una tabla resumen a partir de la celda B10, que comience con la cantidad de datos (n) y el número de intervalos (Nc) en B11.

1 **Paso 1: Determinar el número de intervalos (Nc)**

Para obtener esta información debes utilizar la función **CONTAR**. En la celda C10 ingresa la función **CONTAR** y aparecerá una pantalla donde te pide **Ref 1**. Escribe el rango de celdas, es decir **B2:H8.** Al pulsar **ENTER** aparecerá 49 en la celda.

Aplicando la fórmula Nc $=\sqrt{n}$ tienes el número de intervalos. En la celda C11, activa la función **RAIZ** y el número corresponde a la celda (C10). Entonces se escribe =**RAIZ**(C10. Pulsa **ENTER** y aparece el valor 7.

2 **Paso 2: Determinar el ancho de cada intervalo.**

En las celdas B12, B13, B14 y B15 anotaremos Xmin, Xmax, R y a_i que corresponden al valor mínimo, valor máximo, rango y ancho del intervalo respectivamente.

En la celda C12 activa la función **min, aceptar**, ingresa **B2:H8 ENTER** y aparecerá en la celda el valor 1.

De la misma forma, en la celda C13, activa la **función max, aceptar**, ingresar **B2:H8 Enter** y aparecerá en la celda el valor 79.

El rango (R) se calcula en la celda C14, con la fórmula **=C13-C12 ENTER** y aparece el valor 78.

El ancho del intervalo (ai) se calcula: en la celda C15, con la fórmula **=C14/C11 ENTER** y aparece el valor 11,1428571.

3 **Paso 3: Determinar el nuevo rango (R').**

Primero ajusta el ancho del intervalo a 12 (para trabajar con valores enteros). En la celda B16 y B17 se anotará a_i' y R', para identificar el nuevo ancho y el nuevo rango del intervalo, respectivamente.

En la celda C16, activa la función **MULTIPLO.SUPERIOR, acepta**, en las celdas debes escribir: **Número: C15, cifra_ significativa: 1**, **ENTER** y aparecerá el valor 12.

En la celda C17 activa la fórmula **=C16*C11 ENTER** y aparecerá 84. Agrega Xmin' y Xmax' en las celdas B18 y B19 para registrar los nuevos valores mínimo y máximo que serán usados. Sumaremos la diferencia entre R' y R al valor máximo (para no afectar el valor mínimo). En la celda C18 se mantiene el valor mínimo escribiendo en la celda **=C12, ENTER** y aparece el número 1. En la celda C19, activa la fórmula **=C13+(C17-C14)**. **ENTER**, y aparecerá 85.

4 **5** **Paso 4 y paso 5: Determinar los intervalos.**

Construye la tabla de frecuencias para 7 intervalos, a partir de la celda B21 en el siguiente orden:

N° de int	Li	Ls	f absolut	F acumula	f relat.%	F acum.%	Xi

El límite inferior (Li) para el primer intervalo es 1 y el límite superior (Ls) es 13. Para registrar los valores en la tabla, en la celda C22 escribe **=C18, ENTER**. En la celda D22, activa la fórmula **=C22+C16, ENTER**, aparecerá 13. Ubica el cursor en la celda C23, escribe = y haz clic sobre la celda D22 pulsa ENTER, aparecerá 13. Ubica el cursor en la celda C23 y pinchando el vértice inferior derecho hasta que aparezca + sobre él, podrás arrastrar esta fórmula hasta el último intervalo (celda C28), en las celdas seleccionadas aparecerán ceros.

Para calcular el límite superior, posiciona el cursor sobre la celda D22, pulsa F4 **ENTER**, para fijar la celda C16 que hace referencia al ancho del intervalo. Vuelve a posicionar el cursor en la celda D22 y arrastra la fórmula pinchando el vértice inferior derecho hasta que aparezca + sobre él, hasta la celda D28.

Se produce ambigüedad para el registro de los datos porque el límite superior de un intervalo es igual al límite inferior del intervalo siguiente. Por ejemplo, el valor 13 no podemos registrarlo en el intervalo 1 y en el 2 porque altera a la frecuencia. Esta ambigüedad se corregirá agregando 0,1 al primer límite superior y restando este mismo valor al último límite. Para esto, haz doble clic sobre la celda D22 y a la fórmula que aparece, agrégale **+ 0,1 ENTER** y cambiarán todos los límites de los intervalos. Repite el proceso sobre la celda D28 agregando a la fórmula **– 0,1 ENTER**.

6 **Paso 6: Determinar las frecuencias**

A partir de la celda E22, activamos la función **FRECUENCIA** esta función muestra una ventana que pide dos requisitos:

Datos: **B2:H8** (ubicación de los datos).

Grupos: **D22:D28** (columna de los límites superiores).

ENTER y aparecerá 11 en la celda. Copiar la fórmula hasta la celda E28 y aparecerá la columna completa.

Para el cálculo de la frecuencia acumulada, ubica el cursor en la celda F22 y escribe = E22 **ENTER**, aparecerá 11. Luego, en la celda F23 escribir **= E22+F23 ENTER** y arrastrar esta fórmula hasta F28.

Para el cálculo de la frecuencia relativa porcentual, ubica el cursor en la celda G22 y escribir **=E22/C10 pulsar F4 ENTER** y arrastra la fórmula de G22 hasta G28. Pulsa el ícono %, sobre la barra de herramientas.

Para el cálculo de la frecuencia acumulada porcentual, procede de la misma forma cómo se construyó la columna de la frecuencia acumulada y usa el ícono % para obtener los porcentajes.

La marca de clase se calcula usando en la celda I22, la fórmula **=(C22+D22)/2 ENTER** y luego arrastrandola hasta I28.

Inténtalo

1. Construye una tabla de frecuencias siguiendo los pasos indicados para los siguientes datos: 23, 21, 43, 41, 19, 29, 17, 33, 35, 30, 25, 11, 28, 40, 22, 45, 43, 23, 29, 32, 9, 47, 47, 31, 12.

CAPÍTULO 5

¿Listo para seguir?

Prueba de las lecciones 5–1 a 5–3

5–1 Muestras y encuestas

Al cuidador de un parque natural le gustaría saber con qué frecuencia anual acampan los visitantes del parque. ¿Cuál de las siguientes muestras entrega mejor información? Justifica tu respuesta.

1. El cuidador del parque coloca los formularios de la encuesta en la tienda de regalos.
2. El cuidador encuesta a los primeros 50 visitantes que pasan por la cabina de información del parque.

5–2 Tabla de frecuencias y media aritmética

En la lista se muestran las velocidades máximas a las que se desplazan distintos animales terrestres:

42 m/s, 55 m/s, 62 m/s, 48 m/s, 65 m/s, 51 m/s, 47 m/s, 59 m/s, 67 m/s, 61 m/s, 49 m/s, 54 m/s, 55 m/s, 52 m/s, 44 m/s, 60 m/s, 62 m/s, 48 m/s, 49 m/s, 54 m/s

3. Haz una tabla de frecuencias con los datos agrupados.
4. Construye una tabla de frecuencias con datos agrupados que resuma los siguientes datos:
   1, 6, 8, 4, 5, 3, 4, 1, 1, 5, 3, 8, 7, 4, 6, 2, 8, 9, 3, 4, 10, 2, 8, 7, 1, 4, 5, 2, 4, 4.
5. ¿En qué intervalo se encuentra la media aritmética?
6. Con los datos agrupados, ¿puedes decir qué dato es el que más se repite?
7. Un grupo de personas valora la gestión del departamento de servicio al cliente de un supermercado catalogándolo como: Excelente (E), Bueno (B), Regular (R) o Malo (M). Los resultados obtenidos son:
   E, B, B, R, E, M, B, E, B, R, R, R, M, B, B, E, M, E, R, B,
   B, E, R, R, B, B, E, R, M, E, E, B, E, B, B, R, M, R, E, M
   Elabora una tabla de frecuencias que permita resumir los datos.
8. ¿Qué porcentaje de personas valoró la gestión del departamento como Buena?

5–3 Moda para datos agrupados

En la lista se muestran los años de vida de una población de murciélagos vampiro en cautiverio:

18, 22, 5, 21, 19, 21, 17, 3, 19, 20, 27, 18, 17, 18, 15, 18, 4, 3, 12, 15

9. Calcula la media con los datos ordenados en una tabla.
10. Calcula el rango de los datos.
11. Agrupa los datos en intervalos de amplitud 4.
12. Calcula la moda.

Enfoque en resolución de problemas

Resuelve

• Elige una operación: suma o resta

Cuando resuelvas problemas verbales, debes identificar la información que es importante para resolver el problema. Lee el problema varias veces para encontrar todos los detalles importantes. A veces, es útil leerlo en voz alta para que puedas oír las palabras. Resalta los datos que sean necesarios para resolverlo. Luego, haz una lista con cualquier otra información que sea necesaria.

Resalta la información importante de cada problema y luego haz una lista con otros detalles importantes:

1. Una bolsa de chicles contiene 25 tabletas rosadas, 20 azules y 15 verdes. Laura toma 1 chicle sin mirar. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea azul?

2. Raquel tiene una bolsa de bolitas que contiene 6 bolitas rojas, 3 verdes y 4 azules. Saca una bolita de la bolsa sin mirar. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita sea roja?

3. Marco cuenta los automóviles que ve en su recorrido desde la escuela a su casa. De 20 automóviles, 10 son blancos, 6 son rojos, 2 son azules y 2 son verdes. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que el siguiente automóvil que vea sea rojo?

4. En un cajón, Fernanda tiene 8 calcetines rojos, 6 azules, 10 blancos y 4 amarillos. ¿Cuál es la probabilidad de que saque al azar un calcetín café del cajón?

5. Durante los primeros 20 minutos del almuerzo, 5 estudiantes varones, 7 estudiantes mujeres y 3 profesores pasaron por la fila del almuerzo. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que la siguiente persona que pase por la fila del almuerzo sea un profesor?

CAPÍTULO 5–4

Métodos de conteo y espacios muestrales

Aprender a usar métodos de conteo para hallar todos los resultados posibles.

Vocabulario

espacio muestral

Los espacios muestrales se usan para hallar la probabilidad. El **espacio muestral** de un experimento es el conjunto de todos los resultados posibles. Puedes usar { } para mostrar espacios muestrales.

Cuando necesitas hallar muchos resultados posibles, puedes hacer un diagrama de árbol. Un diagrama de árbol es una forma de organizar la información.

EJEMPLO 1

Aplicación a la resolución de problemas

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En invierno, Sofía tiene que elegir entre dos abrigos: una parka de esquiar o un chaquetón de marinero. En cuanto a los accesorios, tiene tres opciones: gorro, bufanda o guantes. ¿Cuáles son los diferentes conjuntos que puede ponerse Sofía?

1 Comprende el problema

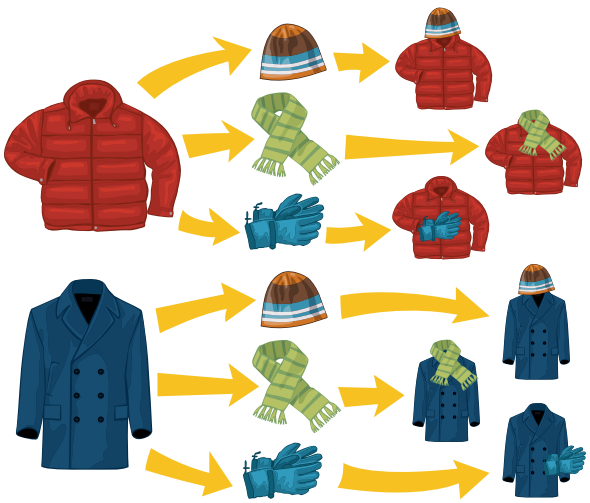
Haz una lista con la **información importante:**

- Hay dos tipos de abrigos.
- Hay tres tipos de accesorios.

2 Haz un plan

Puedes dibujar un diagrama de árbol para hallar todos los conjuntos posibles.

3 Resuelve



Combina la parka con cada accesorio.

Combina el chaquetón marinero con cada accesorio.

Sigue cada rama del diagrama de árbol para hallar todos los resultados posibles: {parka y gorro, parka y bufanda, parka y guantes, chaquetón de marinero y gorro, chaquetón de marinero y bufanda, chaquetón de marinero y guantes}.

4 Repasa

Hay 6 ramas al final del diagrama de árbol. Hay 6 conjuntos posibles en la lista.

Otra manera de llevar la cuenta de los resultados posibles es hacer una lista organizada.

EJEMPLO 2

Hacer una lista organizada

Mariela quiere comprar un reproductor portátil de MP3. El reproductor viene en color negro, plateado y rojo. Mariela puede elegir entre un modelo que almacena 120 canciones y otro que almacena 240 canciones. ¿Cuáles son todos los reproductores entre los que Mariela puede elegir?

negro, 120 canciones	*Haz una lista de todos los reproductores*
negro, 240 canciones	*que son negros.*
plateado, 120 canciones	*Haz una lista de todos los reproductores*
plateado, 240 canciones	*que son plateados.*
rojo, 120 canciones	*Haz una lista de todos los reproductores*
rojo, 240 canciones	*que son rojos.*

El Principio multiplicativo es una manera de hallar la cantidad de resultados de un espacio muestral sin tener que hacer una lista. Para usar el Principio multiplicativo, multiplica la cantidad de opciones de cada categoría.

En el ejemplo anterior, hay 3 colores y 2 modelos de reproductores de MP3. La cantidad total de reproductores de MP3 entre los que se puede elegir es $3 \cdot 2 = 6$.

EJEMPLO 3

Usar el Principio multiplicativo

Los estudiantes de 8° básico deben tomar una clase de arte y una clase de deportes. Las opciones de clases de arte son: banda, orquesta, coro y dibujo. Las opciones de clases de deportes son: educación física, fútbol, básquetbol, voleibol, natación y tenis. ¿Cuántas combinaciones posibles hay?

Hay 4 opciones de clases de arte y 6 opciones de clases de deportes.

$$4 \cdot 6 = 24$$

Hay 24 combinaciones posibles.

El número de elementos que tiene el espacio muestral se llama cardinalidad del espacio muestral.

Razonar y comentar

1. **Describe** una situación del mundo real en la que puedas estimar la probabilidad usando la probabilidad experimental.
2. **Explica** cómo se puede usar la probabilidad experimental para hacer predicciones.

5–4 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

1. Usa el menú de Comidas ZCool. Si Carlos elige un plato principal y una guarnición o postre, ¿cuáles son todos los resultados posibles?

Ver Ejemplo 2

2. Patricia, Javier y Karla se presentan a una prueba para la obra de teatro de la escuela. El director tiene dos papeles vacantes, un doctor o doctora y un maestro o maestra. ¿Cuáles son todas las maneras posibles de asignar los papeles?

Ver Ejemplo 3

3. El profesor Sánchez va a tomar una prueba de recuperación de Ciencias. Puede tomar la prueba el lunes, el martes o el jueves antes de clase, en el almuerzo o después de clase. ¿En cuántos horarios diferentes puede tomar la prueba el profesor Sánchez?

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

4. Usa el folleto del Club de Actividades al Aire Libre. El Club planea su festival anual de primavera. Los integrantes deben votar para elegir el día de la celebración y la actividad principal. ¿Cuáles son todos los resultados posibles?

Ver Ejemplo 2

5. El edificio del apartamento de Gabriela está protegido por un sistema de seguridad que pide a los vecinos un código para dejarlos entrar. El código se forma con números del 1 al 3. Tiene tres dígitos y ninguno se puede repetir. ¿Cuáles son todos los códigos posibles?

Ver Ejemplo 2

6. En una escuela intermedia compran nuevas camisetas de básquetbol. Cada una tendrá una letra y un número. Las letras posibles son de la A a la Z y los números posibles son del 0 al 9. ¿Cuántas combinaciones posibles hay?

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

7. Daniela elegirá una blusa y una falda o unos pantalones de su clóset para vestirse e ir a la escuela. Halla la cantidad de combinaciones diferentes que puede hacer si tiene

a. 3 blusas, 3 pantalones y 3 faldas.

b. 7 blusas, 5 pantalones y 3 faldas.

8. Omar redecora su habitación. Puede elegir un color de pintura, una greca y una clase de brocha.

a. ¿Cuántas combinaciones diferentes de pintura, greca y brocha son posibles?

b. Si Omar encuentra otra brocha que pueda usar, ¿cuántas combinaciones diferentes serán posibles?

9. Los niños japoneses practican un juego llamado *Jan-Ken-Pon*, que quizá conozcas como cachipún. Dos jugadores exclaman al mismo tiempo "*¡jan-ken-pon!*" y al decir "*pon*" ambos muestran una de las tres posiciones de la mano: puño (*gu*), palma abierta hacia abajo (*pa*) o dedos índice y mayor extendidos para formar una V (*choki*). ¿Cuántos resultados diferentes son posibles en este juego?

10. **Elige una estrategia** En una reunión, cada persona saluda con un apretón de manos a las demás exactamente una vez. Hubo un total de 28 apretones de manos. ¿Cuántas personas había en la reunión?

11. **Escríbelo** Supongamos que vas a elegir a un niño y a una niña de tu clase para un proyecto en grupo. ¿Cómo hallarías la cantidad de combinaciones posibles? Explica.

12. **Desafío** Una marinera tiene cinco banderas: azul, verde, roja, anaranjada y amarilla. Supongamos que quiere ondear tres banderas sin importar el orden: roja, anaranjada y amarilla es igual a amarilla, anaranjada y roja. Haz una lista de todas las combinaciones de banderas posibles. ¿Cuántas combinaciones hay?

Repaso

13. Una cafetería vende 3 tipos de cereal y 2 tipos de jugo para el desayuno. Benjamín puede elegir 1 tipo de cereal y 1 jugo. ¿Qué tan grande es el espacio muestral?

Ⓐ 2 Ⓑ 3 Ⓒ 6 Ⓓ 18

14. Bicicletas para ti vende bicicletas a pedido. Hay 5 colores distintos de armazones, 2 tipos de neumáticos y 4 tipos de asientos. ¿Cuántas combinaciones diferentes hay para 1 armazón, 1 tipo de neumático y 1 tipo de asiento?

Suma o resta. Escribe cada respuesta en su mínima expresión.

15. $\frac{1}{3} + \frac{3}{4}$ **16.** $\frac{3}{8} + \frac{2}{5}$ **17.** $\frac{7}{8} - \frac{1}{4}$ **18.** $\frac{5}{6} - \frac{1}{2}$

19. Usa los datos de la tabla para hacer un diagrama de tallo y hojas.

Altura de girasoles (cm)	18	22	15	17	18	21	16	20

CAPÍTULO 5–5

Probabilidad experimental

Aprender a encontrar la probabilidad experimental.

Vocabulario

probabilidad

probabilidad experimental

Durante un partido de fútbol, Tamara paró 15 de 25 tiros. Basándote en estas cifras, puedes estimar la **probabilidad** de que Tamara ataje el siguiente tiro.

La **probabilidad experimental** es una forma de estimar la probabilidad de un suceso. La probabilidad experimental de un suceso se encuentra al comparar la cantidad de veces que ocurre el suceso con la cantidad total de pruebas. Las pruebas se pueden realizar al mismo tiempo o en forma sucesiva. Los resultados dan la misma información. Cuantas más pruebas tengas, más probable es que la estimación sea exacta.

PROBABILIDAD EXPERIMENTAL

$$\text{probabilidad} \approx \frac{\text{cantidad de veces que ocurre un suceso}}{\text{cantidad total de pruebas}}$$

EJEMPLO 1 *Aplicación a los deportes*

Tamara paró 15 de 25 tiros. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que pare el siguiente tiro? Escribe tu respuesta como fracción, como decimal y como porcentaje.

$$P(\text{suceso}) \approx \frac{\text{cantidad de veces que ocurre el suceso}}{\text{cantidad total de pruebas}}$$

$$(\text{atajados}) \approx \frac{\text{cantidad de tiros parados}}{\text{cantidad total de tiros}}$$

$= \frac{15}{25}$ *Sustituye los datos del experimento.*

$= \frac{3}{5}$ *Escribe la fracción en su mínima expresión.*

$= 0{,}6 = 60\%$ *Escribe como decimal y como porcentaje.*

La probabilidad experimental de que Tamara pare el siguiente tiro es de $\frac{3}{5}$, 0,6 o 60%.

Escribir matemáticas

"P(suceso)" representa la probabilidad de que ocurra un suceso. Por ejemplo, la probabilidad de que caiga cara cuando se lanza una moneda podría escribirse como "P(cara)".

EJEMPLO 2 *Aplicación a las Ciencias*

En las tres últimas semanas, Carlos anotó los minutos que corrió por día para un proyecto de ciencias. Los resultados que obtuvo se muestran abajo.

Semana 1	minutos
Dom.	76
Lun.	74
Mar.	79
Mié.	80
Jue.	77
Vie.	76
Sáb.	75

Semana 2	minutos
Dom.	72
Lun.	79
Mar.	78
Mié.	79
Jue.	77
Vie.	74
Sáb.	73

Semana 3	minutos
Dom.	78
Lun.	76
Mar.	77
Mié.	75
Jue.	79
Vie.	77
Sáb.	75

A ¿Cuál es la probabilidad experimental de que la cantidad de minutos que corre sea superior a los 75 minutos al día siguiente?

Hubo 14 días en los que corrió más de 75 min.

$$P(\text{más de 75 °F}) \approx \frac{\text{cantidad de días que corrió más de 75 min}}{\text{cantidad total de días}}$$

$$= \frac{14}{21} \quad \textit{Sustituye los datos.}$$

$$= \frac{2}{3} \quad \textit{Escribe en su mínima expresión.}$$

La probabilidad experimental de que corriera más de 75 min al día siguiente es de $\frac{2}{3}$.

B ¿Cuál es la probabilidad experimental de que la cantidad de minutos que corra al día siguiente sea inferior a los 75 minutos?

$$P(\text{más de 75 min}) + P(\text{no más de 75 min}) = 1 \quad \textit{Usa el complemento.}$$

$$\frac{2}{3} + P(\text{no más de 75 min}) = 1 \quad \textit{Sustituye.}$$

$$-\frac{2}{3} \qquad\qquad -\frac{2}{3} \quad \textit{Resta } \frac{1}{2} \textit{ de ambos lados.}$$

$$P(\text{no más de 75 min}) = \frac{1}{3} \quad \textit{Simplifica.}$$

La probabilidad experimental de que el tiempo que corra no supere los 75 min al día siguiente es de $\frac{1}{3}$.

Razonar y comentar

1. **Describe** una situación del mundo real en la que puedas estimar la probabilidad usando la probabilidad experimental.
2. **Explica** cómo se puede usar la probabilidad experimental para hacer predicciones.

5–5 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

1. En su práctica de tiro con arco, Pía acierta 14 de 20 tiros. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que acierte en su próximo tiro? Escribe tu respuesta como fracción, como decimal y como porcentaje.

Ver Ejemplo 2

2. Un reportero entrevista a 75 personas para determinar si piensan votar a favor o en contra de una enmienda. De estas personas, 65 piensan votar a favor.

a. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que la siguiente persona entrevistada diga que piensa votar a favor de la enmienda?

b. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que la siguiente persona entrevistada diga que piensa votar en contra de la enmienda?

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

3. **Deportes** José le golpea una pelota de béisbol en 13 de 30 intentos durante una práctica. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que le pegue a la pelota en el siguiente intento? Escribe tu respuesta como fracción, como decimal y como porcentaje.

4. Camilo da en el blanco 8 de cada 15 veces que lanza un dardo. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que dé en el blanco en el siguiente lanzamiento?

Ver Ejemplo 2

5. En las dos últimas semanas, Daniela anotó la cantidad de personas que asistieron al centro comercial a la hora de almuerzo. Durante esa hora, hubo 50 personas o más en el centro comercial en 9 de 14 días.

a. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que haya 50 personas o más en el centro comercial durante la hora del almuerzo al decimoquinto día?

b. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que no haya 50 personas o más en el centro comercial durante la hora del almuerzo al decimoquinto día?

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

6. Mientras jugaba al boliche con sus amigos, Alexis hizo un pleno en 4 de 10 jugadas. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que Alexis haga un pleno en la primera jugada?

7. Jeremías saluda a los clientes en una tienda de música. De las primeras 25 personas que entran en la tienda, 16 llevan chaqueta y 9 no. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que la siguiente persona lleve chaqueta?

8. Durante el mes de junio, Carmen llevó la cuenta de los pájaros que vio en su jardín. En 12 días de ese mes vio un gorrión azul. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que vea un gorrión azul el 1 de julio?

9. **Razonamiento crítico** Claudia halló que la probabilidad experimental de que su gato la despierte entre las 5 a.m. y las 6 a.m es de $\frac{8}{11}$. ¿Aproximadamente qué porcentaje del tiempo el gato de Claudia no la despierta entre las 5 a.m y las 6 a.m?

CONEXIÓN con las Ciencias

10. Varios pasos En el diagrama de tallo y hojas se muestra la profundidad en cm de la nieve registrada en Coyhaique en un periodo de 10 días.

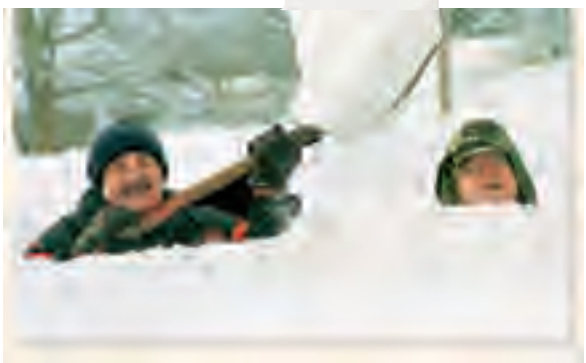
Tallos	Hojas
7	9 9
8	
9	1 1 1 1 8 8
10	
11	8
12	
13	0

Clave: 7 | 9 significa 7,9

a. ¿Cuál es la media de la profundidad de la nieve en el periodo de 10 días?

b. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que la nieve tenga una profundidad menor que 6 cm al undécimo día?

c. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que la nieve tenga una profundidad de más de 10 cm al décimo primer día?



11. En la tabla se muestra la cantidad de personas que se registraron en un hotel de Coyhaique entre el año 2004 y 2011.

Año	N° personas	Año	N° personas
2004	860	2008	968
2005	950	2009	891
2006	788	2010	900
2007	986	2011	910

a. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que la cantidad de personas que se registren para el año 2012 sea menor que 900?

b. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que la cantidad de personas el año 2012 sea mayor que 100?

12. Desafío Una fábrica de juguetes encuentra que la probabilidad experimental de fabricar una pelota defectuosa es de $\frac{3}{50}$. ¿Aproximadamente cuántas pelotas defectuosas es probable que haya en un lote de 1 800 pelotas?

Repaso

13. Luis acertó 26 de los 32 tiros libres que hizo. ¿Qué porcentaje está más cerca de la probabilidad experimental de que acierte su próximo tiro libre?

(A) 50% (B) 60% (C) 70% (D) 80%

14. Según una encuesta, 18 de 24 personas prefieren la pizza de queso. ¿Qué porcentaje está más cerca de la probabilidad experimental de que la pizza preferida de una persona NO sea la de queso?

(A) 25% (B) 33% (C) 40% (D) 75%

15. ¿Cuántos centímetros equivalen a 6 milímetros?

Compara. Escribe <, > o =.

16. $\frac{3}{5}$ ■ 62% **17.** 2,4 ■ $\frac{12}{5}$ **18.** 0,04 ■ $\frac{3}{10}$ **19.** 8,2 ■ 82%

CAPÍTULO 5–6

Probabilidad teórica

Aprender a encontrar la probabilidad teórica de un suceso.

Vocabulario

probabilidad teórica

igualmente probable

justo

Cualquier actividad relacionada con la probabilidad, como lanzar un dado, es un experimento. Cada repetición u observación de un experimento se llama prueba y lo que se obtiene del experimento se llama resultado. Un conjunto de uno o más resultados es un suceso. En el juego del bingo, se seleccionan al azar bolas que contienen una combinación de una letra y un número. Los jugadores intentan emparejar las combinaciones en tarjetas cuadriculadas de 5 • 5. En cada columna de 5 cuadrados pueden aparecer 15 números. Cada columna tiene 15 posibilidades de combinación con una de las letras. Si son 5 letras y 15 números posibles por columna, entonces el total de combinaciones posibles está dado por: 15 • 5 = 75.

Este conjunto se llama espacio muestral y corresponde al conjunto de todos los resultados que pueden obtenerse al realizar un experimento aleatorio. La cardinalidad del espacio muestral está dada por el número de elementos que lo componen.

Para determinar la probabilidad de sacar una B, puedes sacar bolas de bingo al azar y anotar tus resultados para encontrar la *probabilidad teórica*. La **probabilidad teórica** se usa para encontrar la probabilidad de un suceso cuando todos los resultados son igualmente probables. Los resultados **igualmente probables (equiprobables)** tienen la misma probabilidad de suceder. En estos casos se puede usar el modelo de Laplace.

Idea matemática
La frecuencia relativa es la frecuencia de un valor dividida entre el número total de los valores dados.

Modelo de Laplace

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Si todos los resultados posibles de un experimento son igualmente probables, se dice que el experimento es **justo**. Normalmente se supone que los experimentos con dados y monedas son justos.

EJEMPLO 1 Encontrar la probabilidad teórica

Encuentra la probabilidad de cada suceso. Escribe tu respuesta como fracción, como decimal y como porcentaje.

A **Sacar una de las 15 *B* de una bolsa de 75 bolas de bingo.**

$$P = \frac{\text{cantidad de maneras en que puede ocurrir el suceso}}{\text{cantidad total de resultados igualmente probables}}$$

$$P(B) = \frac{\text{cantidad de } B}{\text{cantidad total de bolas de bingo}}$$ *Escribe la razón.*

$$= \frac{15}{75}$$ *Sustituye.*

$$= \frac{1}{5}$$ *Exprésala en su mínima expresión.*

$$= 0{,}2 = 20\%$$ *Escribe como decimal y como porcentaje.*

La probabilidad teórica de sacar una *B* es de $\frac{1}{5}$, 0,2 o 20%.

Encuentra la probabilidad de cada suceso. Escribe tu respuesta como fracción, como decimal y como porcentaje.

B **Lanzar un dado y que salga un número mayor que 2:**

El suceso puede ocurrir de cuatro maneras: que caiga 3, 4, 5 y 6.

$$P(\text{mayor que } 2) = \frac{\text{cantidad de maneras en que puede ocurrir el suceso}}{\text{cantidad total de resultados igualmente probables}}$$

$= \frac{4}{6}$ *Escribe la razón.*

$= \frac{2}{3}$ *Exprésala en su mínima expresión.*

$\approx 0.667 \approx 66{,}7\%$ *Escribe como decimal y como porcentaje.*

La probabilidad teórica de lanzar un dado y que salga un número mayor que 2 es de $\frac{2}{3}$ o, aproximadamente, 0,667 o 66,7%.

EJEMPLO 2 *Aplicación a la escuela*

En la clase del profesor Fernández hay 11 niños y 16 niñas. El profesor Fernández ha escrito el nombre de cada estudiante en un palillo. Toma al azar uno de estos palillos para elegir al estudiante que responderá una pregunta.

A **Encuentra la probabilidad teórica de que salga el nombre de un niño:**

$$P(\text{niño}) = \frac{\text{cantidad de niños en la clase}}{\text{cantidad total de estudiantes en la clase}}$$

$$P(\text{niño}) = \frac{11}{27}$$

B **Encuentra la probabilidad teórica de que salga el nombre de una niña:**

$P(\text{niño}) + P(\text{niña}) = 1$ *Sustituye P(niño) por $\frac{11}{27}$.*

$\frac{11}{27} + P(\text{niña}) = 1$

$-\frac{11}{27} \quad = -\frac{11}{27}$ *Resta $\frac{11}{27}$ de ambos lados.*

$P(\text{niña}) = \frac{16}{27}$ *Simplifica.*

¡Recuerda!

La suma de la probabilidad de un suceso y su complemento es 1.

Razonar y comentar

1. **Da un ejemplo** de un experimento en el que todos los resultados no son igualmente probables. Explica.
2. **Describe** qué pasaría con la probabilidad del ejemplo 2 si el profesor Fernández no sacara los palillos al azar.

5–6 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

Encuentra la probabilidad de cada suceso. Escribe tu respuesta como fracción, como decimal y como porcentaje:

1. Sacar al azar una bolita roja de una bolsa que contiene 15 bolitas rojas, 15 azules, 15 verdes, 15 amarillas, 15 negras y 15 blancas.

2. Lanzar dos monedas y que ambas salgan cara.

Ver Ejemplo 2

Una baraja incluye 15 cartas amarillas, 10 verdes y 10 azules. Encuentra la probabilidad de cada suceso si se saca una carta al azar:

3. Amarilla **4.** Verde **5.** Ni verde ni amarilla

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

Encuentra la probabilidad de cada suceso. Escribe tu respuesta como fracción, como decimal y como porcentaje:

6. Sacar al azar un corazón o un trébol de una baraja de 52 cartas que contiene cuatro grupos de 13 cartas: diamantes, corazones, tréboles y picas, todas mezcladas.

7. Sacar al azar un disco morado de un juego que tiene 13 discos rojos, 13 morados, 13 anaranjados y 13 blancos, todos del mismo tamaño y la misma forma.

8. Sacar al azar una de las 30 G u O de una bolsa de 75 bolas de bingo.

Ver Ejemplo 2

En la clase de karate de Sofía hay 6 niñas y 8 niños. Sofía escoge al azar un estudiante para que demuestre una técnica de defensa personal. Encuentra la probabilidad de cada suceso:

9. Que escoja una niña. **10.** Que escoja un niño.

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Encuentra la probabilidad de cada suceso si se lanzan dos dados.

11. P(total de 3) **12.** P(total de 7) **13.** P(total de 4)

14. P(total de 2) **15.** P(total de 9) **16.** P(total de 13)

La rueda de una flecha giratoria está dividida en 10 sectores iguales. Los números del 1 al 5 están ubicados cada uno en dos sectores diferentes. Encuentra la probabilidad de cada suceso:

17. P(menor que 3) **18.** P(5) **19.** P(8)

20. P(menor que 6) **21.** P(mayor que o igual a 4) **22.** P(13)

Usa la flecha giratoria de la derecha para resolver el ejercicio 23:

23. ¿El experimento es justo o injusto para los siguientes resultados? Explica.

a. Que caiga en 2 **b.** Que caiga en azul

24. En la tabla se muestra la cantidad aproximada de visitantes que van a cinco parques de diversiones diferentes en Estados Unidos durante el periodo de un año. Encuentra la probabilidad de que un visitante elegido al azar haya visitado los parques que se mencionan abajo. Escribe tu respuesta como decimal y como porcentaje.

Parques de diversiones	Cantidad de visitantes
Disney World, FL	15 640 000
Disneylandia, CA	13 680 000
Mundo Marino, FL	4 900 000
Jardines Busch, FL	4 200 000
Mundo Marino, CA	3 700 000

a. Disney World

b. un parque en California

25. Un paquete de semillas de lechuga contiene 150 semillas de lechuga verde y 50 semillas de lechuga morada. ¿Cuál es la probabilidad de que una semilla escogida al azar sea una semilla de lechuga morada? Escribe tu respuesta como porcentaje.

26. **Elige una estrategia** Josefina, Amanda, Raimundo y Alberto vestían poleras de diferentes colores. Los colores eran beige, anaranjado, morado y azul claro. Ni Raimundo ni Amanda vestían poleras anaranjada y ni Josefina ni Raimundo vestían poleras azul claro. Alberto vestía una polera morada. ¿De qué color era la polera de cada persona?

27. **Escríbelo** Supongamos que la probabilidad de que ocurra un suceso es de $\frac{3}{8}$. Explica qué representa cada número de la fracción.

28. **Desafío** La rueda de una flecha giratoria está dividida en tres sectores. La mitad de la rueda es roja, $\frac{1}{3}$ es azul y $\frac{1}{6}$ es verde. ¿Cuál es la probabilidad de que la flecha giratoria caiga en rojo o verde?

Repaso

29. Renata saca una bolita de la bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita sea azul?

(A) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

30. En una bolsa hay 5 bolitas rojas, 7 verdes y 3 amarillas. Alguien saca una bolita al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita NO sea amarilla?

31. Débora compra un helado de yogur de un sabor. Puede elegir dos tamaños: chico o grande, y cuatro sabores: frutilla, vainilla, durazno o chocolate. ¿Cuántas opciones posibles tiene?

Laboratorio de TECNOLOGÍA

Simulaciones

5–6

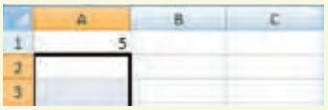
Para usar con la lección 5–5

Una *simulación* es un modelo de un experimento que resultaría inconveniente o difícil de realizar. Puedes usar una hoja de cálculo para realizar simulaciones como lanzar un dado o una moneda. Esta herramienta también puede ayudarte a determinar la probabilidad experimental y a compararla con la probabilidad teórica.

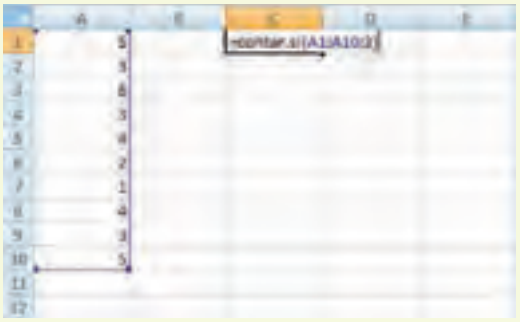
Actividad

Usa una hoja de cálculo para hacer un modelo de lanzar un dado calcular la probabilidad experimental de que caiga en 3.

Para hacer la simulación de lanzar un dado, usa una hoja de cálculo para generar un entero al azar entre 1 y 6. En la celda A1, escribe = **entero(aleatorio()*6 + 1).**



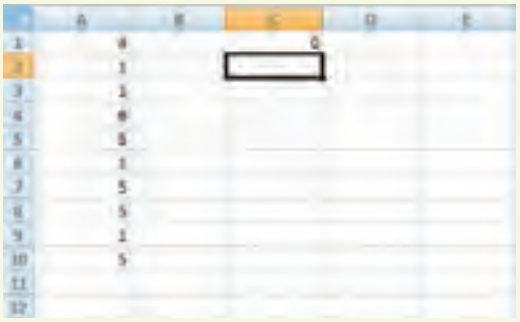
Para "lanzar el dado", pulsa **ENTER**. Debes ver un entero entre 1 y 6 en la celda A1. Para representar 10 lanzamientos, presiona el botón derecho del mouse con el cursor ubicado en la celda A1 y selecciona **copiar**, ahora selecciona las filas A2 a la A10, presiona botón derecho y selecciona **pegar**. Aparecerán todos los números al azar.



La probabilidad experimental (P) de que caiga en 3 es

$$P = \frac{\text{cantidad de veces que cae en 3}}{\text{cantidad total de lanzamientos}}$$

La cantidad total de lanzamientos es 10. Para contar la cantidad de veces que el dado cae en las celdas A1 – A10. Coloca el cursor y escribe la fórmula **=contar.si(A1:A10;3),** en la celda C1 y pulsa **ENTER.**



Razonar y comentar

1. ¿Cómo se compara esta simulación con la probabilidad teórica? Explica.
2. Explica cómo podrías adaptar la hoja de cálculo para representar 100 lanzamientos.
3. ¿Piensas que podrías obtener la misma probabilidad experimental si repitieras el experimento? Explica.

Inténtalo

1. Haz un modelo para 100 lanzamientos, cuenta la cantidad de veces que el dado cae en cada número de 1 al 6 y calcula la probabilidad experimental de que caiga en cada número.

2. ¿Cómo se compara cada probabilidad experimental con la probabilidad teórica?

3. **Haz una conjetura** ¿El modelo es mejor con 10 o con 100 pruebas?

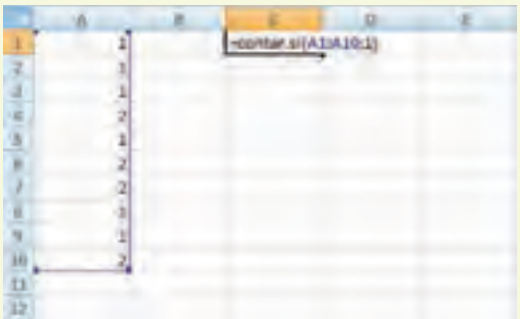
Actividad 2

El director de una escuela escoge 100 estudiantes al azar para hacer una encuesta sobre la comida de la cafetería. A la escuela asiste aproximadamente la misma cantidad de niños que de niñas. Encuentra la probabilidad experimental de que cualquier encuesta dada la haya respondido una niña.

Puedes hacer un modelo de esta situación en una hoja con una simulación que caiga en 1 o 2, donde 1 representa a los niños y 2 representa a las niñas. Sigue las instrucciones de la actividad anterior. En la celda A1 escribe **=entero(aleatorio()*2+1),** pulsa **ENTER**. Aparecerá aleatoriamente 1 o 2.

Ubicado en la celda A1, sigue las instrucciones para copiar y pegar seleccionando desde A2 hasta A100.

Para contar la cantidad de veces que contesta un niño (salga 1), en la celda C1 escribe la fórmula **=contar.si(A1:A100;1),** y se pulsa **ENTER.**

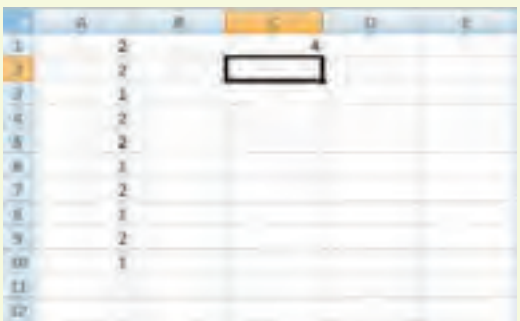


Razonar y comentar

1. Explica por qué realizar la simulación con 1 y 2 es un buen modelo para la situación.

2. Compara la probabilidad experimental y la probabilidad teórica de que una encuesta dada la haya respondido una niña.

3. Supongamos que la razón de niños a niñas era 3:2. ¿De qué manera influiría esto en el resultado?



Inténtalo

1. Supongamos que el director escoge a 200 estudiantes para hacer la encuesta. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que una encuesta dada la responda un niño?

2. Piensa en una situación que podrías representar con el lanzamiento de una moneda. Explica la situación, establece por qué lanzar una moneda podría ser un modelo útil, haz la simulación y encuentra la probabilidad experimental.

CAPÍTULO 5

¿Listo para seguir?

Prueba de las lecciones 5–4 y 5–6

5–4 Métodos de conteo y espacios muestrales

1. En la casa de comidas de Mindy se sirven 3 clases de pasta con 2 clases de salsa. Las pastas son espaguetis, fetuccini y moñitos. Las salsas son de tomate y pesto. ¿Cuáles son los resultados posibles que incluyen 1 clase de pasta y 1 de salsa?

2. Cynthia quiere elegir un conjunto de ropa para su primer día de clase. Las opciones son pantalones negros o azules y una camisa blanca, amarilla o rosada. ¿Entre cuántas combinaciones posibles puede elegir?

5–5 Probabilidad experimental

3 Carlos realiza una encuesta para el periódico de la escuela. Según su encuesta, 7 estudiantes no tienen mascota, 15 tienen una mascota y 9 tienen por lo menos dos mascotas. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que el siguiente estudiante que entreviste Carlos no tenga una mascota?

4. Claudia midió el tiempo que podía resistir sin respirar bajo el agua. Los tiempos fueron: 10 seg, 12 s, 9 s, 15 s, 20 s, 25 s. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que Claudia permanezca bajo el agua más de 20 segundos la próxima vez que se sumerja?

5. Lanza al aire una moneda 20 veces. Registra la información y responde: ¿cuál es la probabilidad experimental que en el lanzamiento número 21 salga cara?

5–6 Probabilidad teórica

Se gira una flecha giratoria con 10 sectores iguales numerados del 1 al 10. Encuentra la probabilidad de cada suceso. Escribe tu respuesta como fracción, como decimal y como porcentaje:

6. $P(5)$ **7.** P(número primo) **8.** $P(20)$

9. Sabina tiene una lista de 8 CD y 5 DVD que le gustaría comprar. Sus amigos eligen uno al azar de esa lista para hacerle un regalo. ¿Cuál es la probabilidad de que los amigos de Sabina elijan un CD? ¿Y un DVD?

Se extrae un boleto en una rifa de 100 números:

10. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par?

11. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número cuyos dígitos contengan al menos un 4?

12. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que 82?

13. Se lanzan dos dados no cargados. Escribe el espacio muestral.

14. ¿Cuál es la cardinalidad del espacio muestral de lanzar dos dados no cargados?

15. En una caja con bolas de colores, la probabilidad de extraer una bola roja es de 1/3. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola que NO sea roja?

16. Si se lanzan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que sumen 3 o 4?

17. Se tienen 10 fichas con los números 44, 44, 45, 46, 46, 46, 47, 48, 48, 49. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha con un número mayor que 46?

CONEXIONES

con el mundo real

CAPÍTULO 5

La bicicleta

Es un medio de transporte que ha cobrado gran fuerza en el último tiempo en nuestro país. Cada vez existen más proyectos de ciclovías en diversas comunas de la capital, las cuales buscan cubrir la creciente demanda de vías exclusivas para este medio de transporte. Un informe sobre el uso de bicicletas en Santiago quiso corroborar precisamente este fenómeno y medir la frecuencia de ciclistas que transitan por las calles de la ciudad.

Cantidad de bicicletas que transitan por ciclovías en hora punta	
Andrés Bello	231
Antonio Varas	258
Pocuro	267

1. Encuentrar la media y la moda de estos datos.

¡Vamos a jugar!

La aguja de Buffon

Si dejas caer una aguja de determinada longitud en un piso de madera que tiene grietas separadas de manera uniforme, ¿cuál es la probabilidad de que la aguja caiga entre dos grietas?

El conde de Buffon (1707–1788) planteó este problema de probabilidad geométrica. Para resolverlo, Buffon desarrolló una fórmula en la que usó l para representar la longitud de la aguja y d para representar la distancia entre las grietas.

$$\text{probabilidad} = \frac{2l}{\pi \cdot d}$$

Para reproducir este experimento, necesitas un clip y una hoja de papel en la que dibujarás varias líneas separadas de manera uniforme. Asegúrate de que la distancia entre las líneas sea mayor que la longitud del clip. Lanza el clip sobre la hoja de papel al menos una docena de veces. Divide la cantidad de veces que el clip cae entre dos líneas entre la cantidad de veces que lanzas el clip. Compara este cociente con la probabilidad que da la fórmula.

$$\pi = \frac{2l}{\text{probabilidad} \cdot d}$$

El otro resultado interesante del descubrimiento de Buffon es que puedes usar la probabilidad que obtienes al lanzar la aguja para estimar π. Lanza el clip 20 veces para encontrar la probabilidad experimental. Usa esta probabilidad en la fórmula de arriba y comparar el resultado con 3,14.

Coincidencia de patrones

ACTIVIDAD GRUPAL

Este juego es para dos jugadores. El jugador A ordena cuatro bloques de patrones distintos en una fila sin que el jugador B lo vea.

Luego el jugador B intenta adivinar el orden de los bloques. Después de cada intento, el jugador A revela cuántos bloques están en la posición correcta sin decir cuáles son. La ronda termina cuando el jugador B adivina el orden correcto.

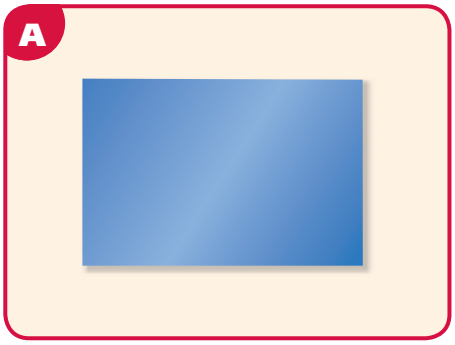
¡Está en la bolsa!

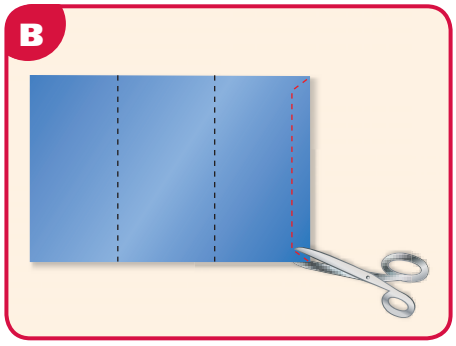
Materiales
- cartulina
- regla
- tijeras
- cinta adhesiva
- tarjetas

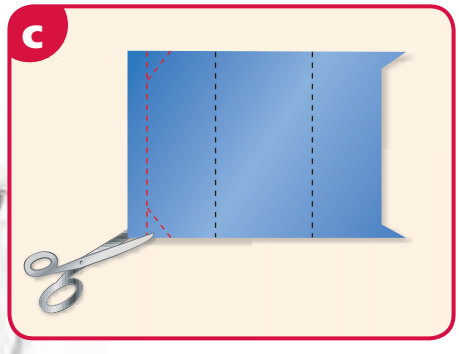
PROYECTO El negocio de la probabilidad

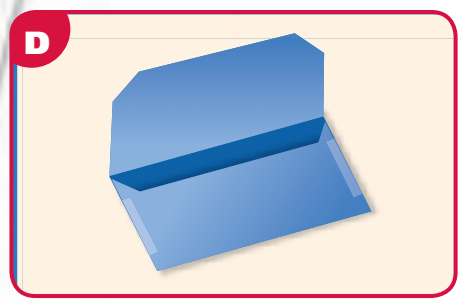
Haz un sobre para guardar tarjetas de presentación. Luego usa las tarjetas para tomar notas sobre probabilidades.

1. Recorta un trozo de cartulina que mida 19 cm por 12 cm. Dobla la cartulina en tres partes y luego desdóblala. **Figura A**
2. Recorta un trapecio de cerca de 2 cm de alto en un extremo de la cartulina, como se muestra. **Figura B**
3. Recorta un rectángulo de 2 cm de alto a lo largo del otro extremo de la cartulina. Luego recorta las esquinas en ángulo. **Figura C**
4. Dobla la sección inferior de la cartulina y cierra los extremos con cinta adhesiva. **Figura D**









En el dorso de las tarjetas, toma notas sobre probabilidad. Guarda las tarjetas en el sobre que hiciste. En la solapa del sobre, escribe el nombre y el número del capítulo.

CAPÍTULO 5

Guía de estudio: Repaso

Vocabulario

población 154
muestra aleatoria 154
muestra 154
variable discreta 155
variable continua 155
tabla de frecuencias 158
marca de clase 158
media aritmética 159
moda 164
rango 164
intervalo modal 164
espacio muestral 172
probabilidad experimental 176
probabilidad teórica 180
igualmente probable 180

Completa los siguientes enunciados con las palabras del vocabulario:

1. El _____ _____ es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento.
2. Un(a) _____ _____es la que se puede encontrar con números naturales.
3. Se dice que un experimento es justo cuando los resultados de este son _____ _____.
4. La _____ _____ es el valor representativo de un intervalo.

EJEMPLOS

5–1 Muestras y encuestas

■ **El dueño de una librería coloca encuestas impresas sobre el mostrador de la tienda. ¿Es esta una muestra aleatoria?**

No es una muestra aleatoria porque los clientes eligen si desean o no completarla. Los clientes no son elegidos al azar.

EJERCICIOS

1. Luis desea saber cuántos estudiantes de su escuela toman un autobús para llegar hasta allí. Identifica si lo que ha elegido es o no una muestra aleatoria. Justifica tu respuesta.

a. Luis encuesta a uno de cada diez estudiantes que aparecen en el registro de la escuela.

b. Luis encuesta a 30 estudiantes en el gimnasio.

Indica si las siguientes son muestras aleatorias:

2. Jugar a la ruleta.
3. Lanzar una moneda al aire.
4. Encender una vela y alumbre.
5. Los alumnos de tu curso, si quieres saber cuántos pelirrojos hay en el colegio.

EJEMPLOS

5–2 Tabla de frecuencias y media aritmética.

Minutos de caminata	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
[360–390[	375	2	2
[390–420[	405	1	3
[420–449[	435	3	6
[450–480[	465	1	7
[480–510]	495	3	10

La media aritmética se calcula:

$$\bar{x} = \frac{375 \cdot 2 + 405 \cdot 1 + 435 \cdot 3 + 465 \cdot 1 + 495 \cdot 3}{10}$$

$$= \frac{750 + 405 + 1305 + 465 + 1485}{10}$$

$$= \frac{4410}{10} = 44{,}1$$

EJERCICIOS

6. Con los datos siguientes, haz una tabla de frecuencias con datos agrupados.

Donaciones en pesos en el supermercado:

9	11	22	22
30	24	13	16
17	21	18	25
17	25	17	21
19	21	14	19
15	25	10	16
12	21	19	17

7. Calcula la media aritmética.

8. ¿Cuánto variaría este dato si se hicieran tres aportes de 25, 50 y 90 pesos?

5–3 Moda para datos agrupados

Minutos de caminata	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
[360–390[	375	2	2
[390–420[	405	1	3
[420–450[	435	4	7
[450–480[	465	1	8
[480–510]	495	2	10

El rango se calcula: $510 - 360 = 150$.

La moda se calcula:

$$Mo = 420 + \frac{4 - 1}{(4 - 1) + (4 - 1)} \cdot 30$$

$$= 420 + \frac{3}{6} \cdot \frac{10}{2}\cancel{30}$$

$$= 420 + 15 = 435$$

Donaciones en pesos en el supermercado

9	11	22	22
30	24	13	16
17	21	18	25
17	25	17	21
19	21	14	19
15	25	10	16
12	21	19	17

9. Según los datos, ¿cuál es el rango si se agrupan los datos en intervalos?

10. Calcula la moda usando la fórmula.

5–4 Métodos de conteo y espacios muestrales

■ **Lucía envuelve un regalo. Puede usar papel dorado o plateado y moño rojo o blanco. ¿Entre cuántas combinaciones distintas puede elegir?**

Dorado < rojo, blanco

Plateado < rojo, blanco

Sigue cada rama para hallar todos los resultados posibles.

Hay 4 combinaciones diferentes.

11. En el restaurante local ofrecen un menú especial para el almuerzo, en el que puedes elegir un aperitivo, un sándwich y una bebida. ¿Cuántas combinaciones diferentes hay del menú especial si tienes las siguientes opciones?

aperitivos: sopa o ensalada

sándwiches: pavo, churrasco o jamón

bebidas: jugo, leche o té helado

5–5 Probabilidad experimental

■ **De 50 personas encuestadas, 21 dijeron que les gustaba más el misterio que la comedia. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente persona encuestada prefiera el misterio?**

$$P(\text{misterio}) = \frac{\text{cantidad que prefiere el misterio}}{\text{cantidad total de encuestados}}$$

$$P(\text{misterio}) = \frac{21}{50}$$

La probabilidad es $\frac{21}{50}$.

Simón lleva un registro de sus calificaciones en Matemáticas. De sus primeras 15 calificaciones, 10 fueron mayores que 6.

12. ¿Cuál es la probabilidad de que su siguiente calificación sea mayor que 6?

13. ¿Cuál es la probabilidad de que su siguiente calificación no sea mayor que 6?

14. Sara juega básquetbol y ha encestado 5 tiros seguidos de 24 en total, ¿cuál es la probabilidad de que enceste el próximo tiro?

5–6 Probabilidad teórica

■ **Encuentra la probabilidad de sacar un 4 de una baraja normal de 52 cartas de juego. Escribe tu respuesta como fracción, como decimal y como porcentaje:**

$$P(4) = \frac{\text{cantidad de 4 en la baraja}}{\text{cantidad de cartas en la baraja}}$$

$$= \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \approx 0{,}077 \approx 7{,}7\%$$

Encuentra cada probabilidad. Escribe tu respuesta como fracción, como decimal y como porcentaje:

15. Hay 9 niñas y 12 niños en el consejo estudiantil. ¿Cuál es la probabilidad de que se elija a una niña como presidenta?

16. Anita lanza 3 monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que cada moneda salga sello?

17. En una caja hay 8 bolas rojas, 6 bolas azules, 3 bolas blancas, y 4 bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bola al azar esta sea azul?

18. Si se elige un número al azar del 1 al 30, ¿cuál es la probabilidad de que ese número sea múltiplo de 4?

Prueba del capítulo

CAPÍTULO 5

Una caja contiene 3 cubos anaranjados, 2 blancos, 3 negros y 4 azules. Determina la probabilidad en los ejercicios 1, 2 y 3.

1. Sacar al azar un cubo anaranjado o negro.
2. Sacar al azar un cubo blanco.
3. Sacar al azar un cubo morado.
4. Simón lanza una moneda 20 veces. La moneda cae en cara 7 veces. Según estos resultados, ¿cuántas veces puede esperar Simón que la moneda caiga en cara las siguientes 100 veces?
5. Emilio gira una flecha giratoria dividida en 8 sectores iguales numerados del 1 al 8. En las primeras tres veces, la flecha cae en 8. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que la flecha caiga en 10 en el cuarto giro?
6. Una marca de pantalones vende en 8 tallas diferentes de cintura: 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40 y 42. Los pantalones vienen también en tres colores distintos: azul, negro y beige. ¿Cuántas combinaciones diferentes de tallas de cintura y colores son posibles?
7. Jorge planea sus vacaciones. Puede elegir entre 3 maneras de viajar (en tren, autobús o avión) y entre cuatro actividades diferentes (esquiar, patinar, nadar o salir de excursión). ¿Cuáles son todos los resultados posibles? ¿Cuántas vacaciones distintas puede planear Jorge?

Raquel hace girar una flecha giratoria que está dividida en 10 sectores iguales numerados del 1 al 10. Encuentra cada probabilidad. Escribe tu respuesta como fracción, como decimal y como porcentaje:

8. P(número impar) **9.** P(número compuesto) **10.** P(número mayor que 10)

Encuentra la probabilidad de cada suceso.

11. Si lanzas un dado 12 veces, aproximadamente, ¿cuántas veces puedes esperar que caiga en un número mayor que 1?

12. ¿De cuántas maneras diferentes puedes elegir 2 estudiantes de 10?

Usa el conjunto de datos 14, 19, 21, 33, 31, 18, 20, 14, 19, 21, 32, 34, 21, 18, 25, 17, 18, 33, 21, 20, 22, 24, 17, 19, 25, 26, 18, 16, 18, 25 para resolver los problemas:

13. Realiza una tabla de frecuencia agrupando los datos.

14. Haz una tabla de frecuencia acumulada con los datos.

15. Haz un diagrama de tallo y hojas con los datos.

16. Haz un diagrama de puntos con los datos.

CAPÍTULO

5

Evaluación acumulativa

Capítulos 1 – 5

1. En una caja que contiene 115 bolitas hay 25 azules, 22 marrones y 68 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de elegir al azar una bolita azul?

(A) $\frac{115}{25}$ (C) $\frac{5}{23}$

(B) $\frac{22}{115}$ (D) No está la respuesta.

2. Convierte 805 centímetros a metros:

(A) 80,5 m (C) 0,0805 m

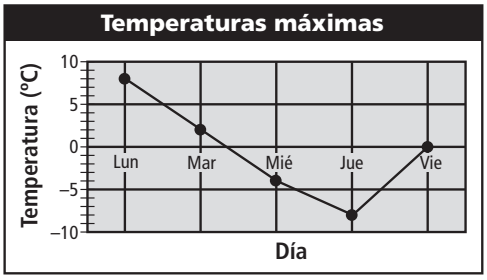
(B) 8,05 m (D) 0,00805 m

3. ¿Cuál es el valor de $(-8\ -4)^2 + 4^1$?

(A) –143 (C) 145

(B) 0 (D) 148

4. En el gráfico se muestran las temperaturas máximas de una ciudad durante un periodo de 5 días. ¿Cuál fue la temperatura máxima promedio en este periodo?



(A) –0,4°C (C) 0,4°C

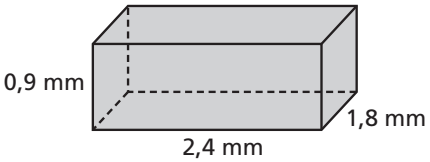
(B) 4,4°C (D) –4,4°C

5. ¿Cuál es el resultado de $2\frac{17}{19} \cdot \frac{12}{7}$?

(A) $\frac{5}{7}$ (C) $2\frac{17}{19}$

(B) $2\frac{5}{7}$ (D) $4\frac{128}{133}$

6. Encuentra el área total del prisma rectangular.



(A) 8,1 mm^2 (C) 15,84 mm^2

(B) 16,2 mm^2 (D) 3,888 mm^2

7. La piscina de Francisca mide 8 m de largo, 5 m de ancho y 2,5 m de profundidad. ¿Con cuántos m^3 de agua Francisca llena su piscina?

(A) 10 m^3 (C) 1 000 m^3

(B) 100 m^3 (D) 10 000 m^3

8. ¿Cuál es el espacio muestral si se lanzan dos monedas al aire, donde cara es "C" y sello es "S"?

(A) {(C, C) (C, S) (C, C) (S, C)}

(B) {(C, S) (S, C) (S, S) (C, C)}

(C) {(C, C) (C, C) (S, S) (S, S)}

(D) {(C, S) (C, S) (C, S) (C, S)}

9. Camila tiene que viajar a Chillán y luego a Puerto Montt. El primer tramo lo puede hacer en bus o en auto, y el segundo tramo lo puede hacer en tren, avión o camión. ¿De cuántas maneras distintas puede llegar Camila desde la partida hasta su destino final?

(A) 5 (C) 7

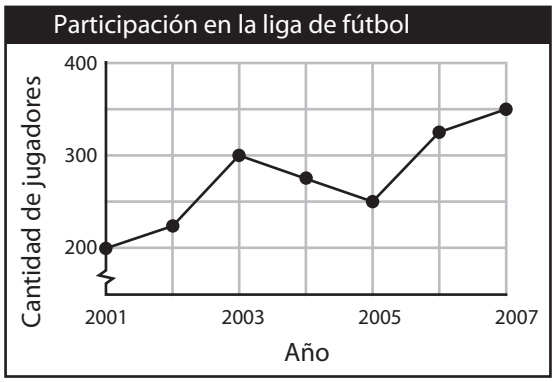
(B) 6 (D) 8

10. Encuentra el valor de x en $8 = 34x - 60$.

Ⓐ $x = -5$ Ⓒ $x = -2$

Ⓑ $x = -0{,}97$ Ⓓ $x = 2$

11. ¿Qué enunciado está mejor apoyado por los datos?



Ⓐ Más estudiantes jugaron fútbol en 2005 que en 2002.

Ⓑ De 2001 a 2007 la participación en fútbol aumentó el 100%.

Ⓒ De 2002 a 2006 la participación en fútbol disminuyó 144%.

Ⓓ La participación aumentó de 2004 a 2005.

¡UN CONSEJO! **Lee un gráfico o un diagrama con tanta atención como lees la pregunta de la prueba. Estos apoyos contienen información importante.**

12. Anita compró 4 camisas a $ 5 680. Luego compró una camisa a $ 1 920. ¿Cuál fue la media del costo de todas las camisas?

13. Rosa tiene un cupón del 60% de descuento sobre el precio total de dos pares de zapatos antes de sumar el impuesto. El primer par de zapatos cuesta $ 45 y el segundo, $ 32. ¿Cuánto debe pagar Rosa en total, en pesos, después de que a su compra se le agregue un 5,5% de impuesto sobre la venta?

14. ¿Cuál es el valor de x? $12 = x - \frac{3}{4}$

15. El diámetro del círculo más grande mide 36 cm y el radio del círculo más pequeño mide 6 cm.

¿Cuál es la razón del área del círculo más pequeño al área del círculo más grande redondeada al porcentaje natural más cercano?

16. Rebeca tiene 3 camisetas de distintos colores (rojo, azul y verde), un par de pantalones azules y un par de pantalones blancos. Elige al azar una camiseta y un par de pantalones. ¿Cuál es la probabilidad de que haya elegido la camiseta roja y el par de pantalones blancos? Muestra cómo encontraste tu respuesta.

17. Escribe $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{4}$ como fracción con un denominador común. Luego determina si las fracciones son equivalentes. Explica tu método.

18. En una bolsa hay 5 bloques azules, 3 rojos y 2 amarillos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que Teo saque al azar un bloque rojo y luego un bloque azul si antes de sacar el segundo devuelve el primero a la bolsa? Muestra los pasos necesarios para encontrar tu respuesta.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que Teo saque al azar un bloque rojo y luego un bloque amarillo si antes de sacar el segundo devuelve el primero a la bolsa? Muestra tu trabajo.

c. Explica qué bloque tiene mayor probabilidad de salir y por qué.

Responde verdadero (V) o falso (F)

19._____ Si compré 3 pantalones a $ 7 980 y luego compré otro a $ 3 570. La media del costo de los pantalones es $ 5 575.

20._____ Si compras un libro con un 50% de descuento, el libro te sale a mitad de precio.

21._____ En el conjunto de datos 17,15,14,17,18, 22,17,18 la moda es 18.

CAPÍTULO

6

Gráficos de funciones, ecuaciones y análisis de proporcionalidad

6–1 Cómo resolver ecuaciones con variables a ambos lados

LABORATORIO: Modelo de ecuaciones con variables en ambos lados

6–2 Funciones, tablas y gráficos

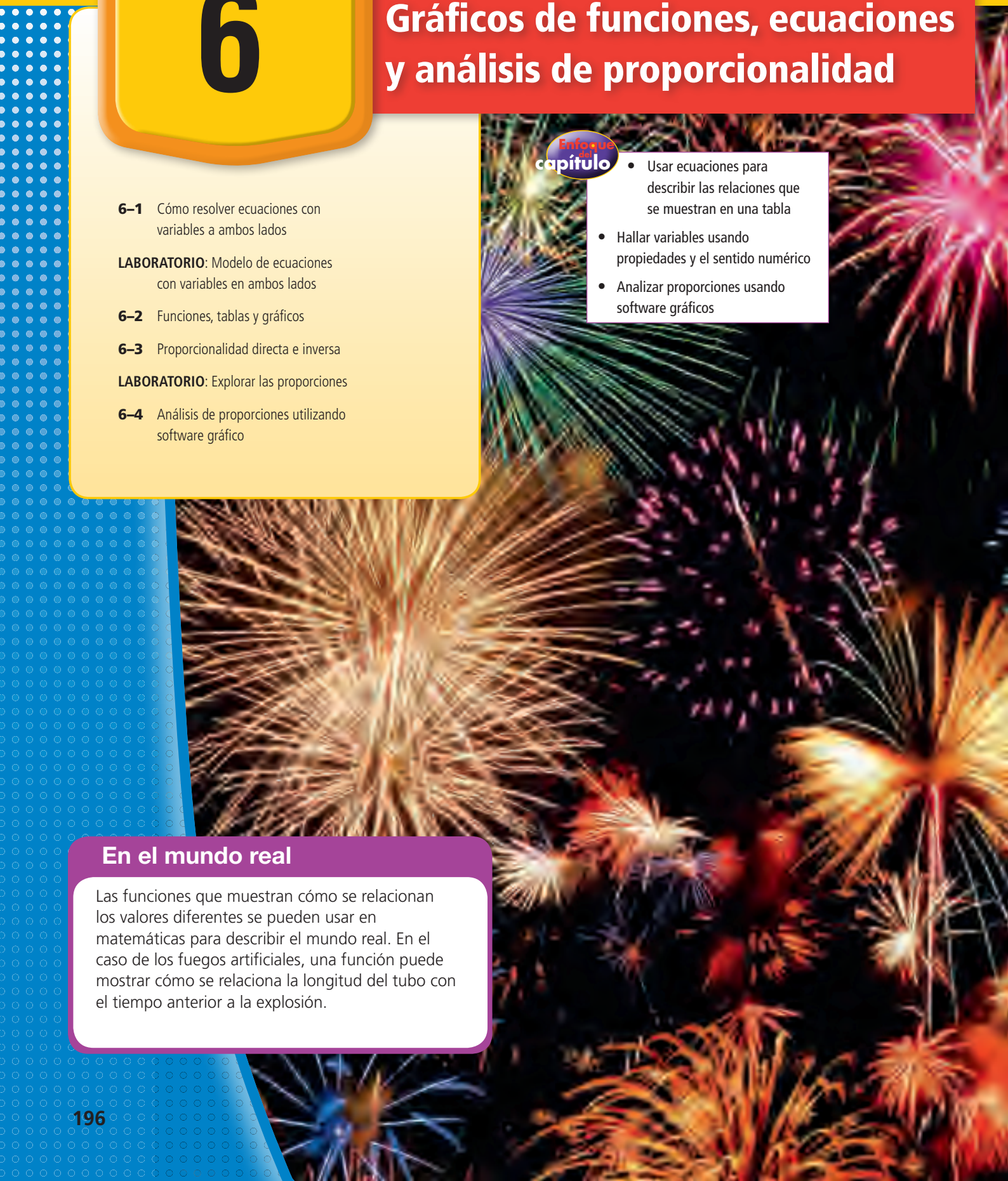
6–3 Proporcionalidad directa e inversa

LABORATORIO: Explorar las proporciones

6–4 Análisis de proporciones utilizando software gráfico

Enfoque del capítulo

- Usar ecuaciones para describir las relaciones que se muestran en una tabla
- Hallar variables usando propiedades y el sentido numérico
- Analizar proporciones usando software gráficos



En el mundo real

Las funciones que muestran cómo se relacionan los valores diferentes se pueden usar en matemáticas para describir el mundo real. En el caso de los fuegos artificiales, una función puede mostrar cómo se relaciona la longitud del tubo con el tiempo anterior a la explosión.

¿Estás listo?

Vocabulario

Elige el término de la lista que complete mejor cada enunciado:

1. Las operaciones_____ se cancelan entre sí.

2. Un(a)_____es un enunciado matemático que establece que dos cantidades son equivalentes.

3. Un(a)_____compara dos cantidades mediante un cociente.

4. Un(a)_____ es la igualdad entre dos razones.

ecuación
expresión
par ordenado
inversas
razón
proporción

Traducir expresiones en lenguaje natural a lenguaje simbólico

Escribe en lenguaje simbólico las siguientes expresiones:

5. el producto de 3 y t

6. 9 menos que z

7. el cociente de d y 17

8. 28 más que g

9. k multiplicado por 101

10. 43 menos x

11. El doble de la diferencia entre dos números.

12. la cuarta parte de un número

13. el doble del producto entre s y t.

Operaciones inversas

Resuelve:

14. $x + 12 = 31$

15. $8n = 84$

16. $56 : p = 8$

17. $t - 14 = 33$

18. $a - 82 = 7$

19. $\frac{s}{6} = 5$

20. $b + 22 = 93$

21. $15 = 3n$

22. $x - 2 = 2x + 5$

23. $3 - 3y = 5y - 21$

24. $3x = 24$

25. $12x + 4 = 28$

26. $15 - 2y = 3y - 5$

27. $5x = 125$

28. $4x - 2 = 10$

29. $42 = 7x$

CAPÍTULO 6

Vistazo previo

De dónde vienes

Antes

- Creaste y analizaste diferentes tipos de gráficos.
- Estudiaste razones y proporciones.
- Resolviste ecuaciones algebraicas usando operaciones inversas.

En este capítulo

Estudiarás

- Cómo resolver ecuaciones con variables en ambos lados.
- Cómo reconocer y representar relaciones de proporcionalidad directa e inversa como una función entre dos variables.

Hacia dónde vas

Puedes usar las destrezas aprendidas en este capítulo:

- Para hallar el costo total de artículos o servicios que se cobran por cantidad de unidades que se compran.
- Para analizar datos y hacer predicciones sobre funciones lineales en Matemáticas y Ciencias.

Vocabulario

ecuación lineal
entrada
salida
función
dominio
recorrido
tabla
par ordenado
variable dependiente
variable independiente
directamente proporcionales
valor de la razón
variación directa
inversamente proporcionales
no proporcionales

Conexiones de vocabulario

Considera lo siguiente para familiarizarte con algunos de los términos de vocabulario del capítulo. Puedes consultar el capítulo, el glosario o un diccionario si lo deseas:

1. Las palabras *entrada y salida* se usan frecuentemente. En Matemáticas, ciertos números son **valores de entrada** y otros, **valores de salida**. ¿Cuál crees que es la diferencia?
2. El adjetivo *directo* puede significar "que va en línea recta". ¿Cómo supones que será la gráfica de una ecuación con **variación directa**?

Leer y escribir matemáticas

CAPÍTULO 6

Estrategia de estudio: Prepárate para la prueba final

En la clase de Matemáticas usas destrezas que aprendiste a lo largo de todo el año; por lo tanto, la mayoría de las pruebas finales incluyen temas desde los comienzos del curso.

Una línea cronológica y una lista de control como las que se muestran abajo pueden ayudarte a estudiar para la prueba final de una manera organizada.

2 semanas antes de la prueba final debo:

- ✔ *juntar mis notas.*
- ✔ *repasar lecciones.*
- ✔ *hacer una lista de todas las fórmulas que probablemente necesite saber.*
- ✔ *crear una prueba de práctica con problemas del libro que tienen respuestas.*
- ✔ *revisar problemas en los que haya fallado en pruebas anteriores.*
- ✔ *consultar sobre conceptos difíciles.*

1 semana antes de la prueba final debo:

- ✔ *hacer la prueba de práctica y comprobar mis respuestas.*
- ✔ *por cada problema que resuelva mal, buscar 2 o 3 problemas similares y resolverlos.*
- ✔ *leer el Repaso que aparece al final de cada capítulo.*
- ✔ *trabajar con un compañero de clase para preguntarnos mutuamente sobre fórmulas de mi lista y otros conceptos importantes.*

1 día antes de la prueba final debo:

Comprobar que tenga:

- ✔ *lápices con punta y gomas de borrar.*
- ✔ *calculadora (si está permitida) con pilas.*
- ✔ *cualquier otro instrumento de matemáticas que pueda necesitar.*
- ✔ *dormir bien de noche.*

FINAL

Inténtalo

1. Crea una línea cronológica y una lista de control propias para prepararte para tu prueba final.

CAPÍTULO 6–1

Cómo resolver ecuaciones con variables en ambos lados

Aprender a resolver ecuaciones con variables en ambos lados del signo de igualdad.

Vocabulario

ecuación

ecuación literal

Algunos problemas generan ecuaciones que contienen variables en ambos lados del signo de igualdad. Por ejemplo, escribe una **ecuación** para hallar en qué cantidad de horas el costo será el mismo para ambos servicios de cuidado de perros.

$\$\ 19\,000 + \$\ 1\,500\ h$ — *Expresión para Patas felices*

$\$\ 15\,000 + \$\ 2\,750\ h$ — *Expresión para Guardianes de ladridos*

$$\$\ 19\,000 + 1\,500\ h = \$\ 15\,000 + 2\,750\ h$$

En estas expresiones, la variable h representa la cantidad de horas. Las dos expresiones son iguales cuando el costo es el mismo.

Resolver una ecuación con variables en ambos lados es similar a resolver una ecuación con una variable en un solo lado. Puedes sumar o restar un término que contiene una variable en ambos lados de una ecuación.

EJEMPLO 1 Resuelve ecuaciones con variables en ambos lados

Resuelve:

Pista útil

Siempre puedes comprobar tu solución sustituyendo el valor en la ecuación original.

A $2a + 3 = 3a$

$$\begin{array}{rcl} 2a + 3 & = & 3a \\ -2a & & -2a \\ \hline 3 & = & a \end{array}$$

Resta 2a de ambos lados.

B $3v - 8 = 7 + 8v$

$$\begin{array}{rcl} 3v - 8 & = & 7 + 8v \\ -3v & & -3v \\ \hline -8 & = & 7 + 5v \\ -7 & & -7 \\ \hline -15 & = & 5v \end{array}$$

Resta 3v de ambos lados.

Resta 7 de ambos lados.

$$\frac{-15}{5} = \frac{5v}{5}$$

Divide ambos lados entre 5.

$$-3 = v$$

Pista útil

Si se eliminan las variables de una ecuación y el enunciado resultante es falso, la ecuación no tiene solución.

Resuelve:

C $g + 7 = g - 3$

$-g \quad\quad -g$

$7 \neq -3$

Resta g de ambos lados.

No hay solución. Ningún número puede sustituir a la variable g para que la ecuación sea verdadera.

Para resolver ecuaciones de varios pasos con variables en ambos lados, primero se combinan los términos semejantes y se despejan las fracciones. Luego, se suman o restan los términos variables en ambos lados para que la variable esté en un solo lado de la ecuación. Luego, se usan las propiedades de la igualdad para despejar la variable.

EJEMPLO 2 Resolver ecuaciones de varios pasos con variables en ambos lados

Resuelve $2c + 4 - 3c = -9 + c + 5$.

$2c + 4 - 3c = -9 + c + 5$

$-c + 4 = -4 + c$ *Combina los términos semejantes.*

$+c \quad\quad +c$ *Suma c a ambos lados.*

$4 = -4 + 2c$

$+4 \quad\quad +4$ *Suma 4 a ambos lados.*

$8 = 2c$

$\frac{8}{2} = \frac{2c}{2}$ *Divide por 2 ambos lados de la ecuación.*

$4 = c$

EJEMPLO 3 *Aplicación a los negocios*

Por cuidar un perro durante un día, el servicio de cuidado para perros Patas Felices cobra una tarifa fija de $ 19 000 más $ 1 500 por hora. Su competencia, el servicio Guardianes de Ladridos, cobra una tarifa fija de $ 15 000 más $ 2 750 por hora. Halla la cantidad de horas por las cuales pagarías el mismo precio total por ambos servicios.

$19\,000 + 1\,500\,h = 15\,000 + 2\,750\,h$ *Sea h la cantidad de horas.*

$-1\,500\,h \quad\quad -1\,500\,h$ *Resta 1 500 h de ambos lados.*

$19\,000 = 15\,000 + 1\,250\,h$

$-15\,000 \quad\quad -15\,000$ *Resta 15 000 de ambos lados.*

$4\,000 = 1\,250\,h$

$\frac{4\,000}{1\,250} = \frac{1\,250\,h}{1\,250}$ *Divide por 1250 ambos lados de la ecuación.*

$3{,}2 = h$

El costo de ambos servicios es el mismo cuando se los contrata por 3,2 horas.

EJEMPLO 4 ***Aplicación a la salud***

Elena corre la misma distancia todos los días. Los lunes, viernes y sábados corre 3 vueltas alrededor de la pista y luego corre 5 kilómetros más. Los martes y jueves corre 4 vueltas alrededor de la pista y luego corre 2,5 kilómetros más. Los miércoles solo corre alrededor de la pista. ¿Cuántas vueltas corre los miércoles?

Primero halla la distacia alrededor de la pista.

$3x + 5 = 4x + 2{,}5$ — *Sea x la distancia alrededor de la pista.*

$-3x = -3x$ — *Resta 3x de ambos lados.*

$5 = x + 2{,}5$

$-2{,}5 \quad -2{,}5$ — *Resta 2,5 de ambos lados.*

$2{,}5 = x$ — *La distancia alrededor de la pista es 2,5 kilómetros.*

Ahora, halla la distancia total que corre Elena por día.

$3x + 5$ — *Elige una de las expresiones originales.*

$3(2{,}5) + 5 = 12{,}5$ — *En una corre 12,5 kilómetros por día.*

Halla la cantidad de vueltas que corre Elena los miércoles.

$2{,}5n = 12{,}5$ — *Sean n la cantidad de vueltas de 2,5 kilómetros.*

$\frac{2{,}5n}{2{,}5} = \frac{+12{,}5}{2{,}5}$ — *Divide ambos lados entre 2,5.*

$n = 5$

Los miércoles Elena corre 5 vueltas.

¡Atención!

El valor de la variable no es necesariamente la respuesta a la pregunta.

Una **ecuación literal** es una ecuación que además de la incógnita, tiene una o varias letras distintas a la variable (constantes literales), por ejemplo: ax + 3x = 4 - a. Una fórmula es un tipo de ecuación literal. Puedes hallar una de las variables de una ecuación literal usando operaciones inversas.

EJEMPLO 5 **Hallar una variable en ecuaciones literales**

El valor de la ecuación $P = 2\ell + 2a$ da el perímetro P de un rectángulo con longitud ℓ y ancho a. Encuentra el valor a en esta ecuación.

$P = 2\ell + 2a$ — *Ubica a en la ecuación.*

$P = 2\ell + 2a$

$-2\ell \quad -2\ell$ — *Como 2ℓ se suma a 2a, resta 2ℓ de ambos lados para cancelar la suma.*

$P - 2\ell = 2a$

$\frac{P - 2\ell}{2} = \frac{2a}{2}$ — *Como a se multiplica por 2, divide ambos lados entre 2 para cancelar la multiplicación.*

$\frac{P - 2\ell}{2} = a$

Razonar y comentar

1. Explica cómo resolverías la ecuación $3x + 4 - 2x = 6x + 2 - 5x + 2$. ¿Qué crees que significa la solución?

6–1 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Resuelve:

Ver Ejemplo 1

1. $6x + 3 = x + 8$

2. $5a - 5 = 7 + 2a$

3. $13x + 15 = 11x - 25$

4. $5t - 5 = 5t + 7$

Ver Ejemplo 2

5. $5x - 2 + 3x = 17 + 12x - 23$

6. $4(x - 5) + 2 = x + 3$

Ver Ejemplo 3

7. Una empresa de telefonía de larga distancia cobra $ 15 por minuto y una tarifa mensual de $ 2 000. Otra empresa cobra $ 17 por minuto sin tarifa mensual. Halla la cantidad de minutos para los que el costo de ambas empresas sería el mismo.

Ver Ejemplo 4

8. Julia tiene un conjunto de sillas plegables. Si las ordena en 5 filas de la misma longitud, le sobran 2 sillas. Si las ordena en 3 filas de la misma longitud, le sobran 14 sillas. ¿Cuántas sillas tiene?

Ver Ejemplo 5

9. La ecuación $A = \frac{1}{2}bh$ da el área A de un triángulo, donde b es la longitud de la base y h es la altura. Halla h en esta ecuación.

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Resuelve:

Ver Ejemplo 1

10. $3n + 16 = 7n$

11. $8x - 3 = 11 - 6x$

12. $5n + 3 = 14 - 6n$

13. $3(2x + 11) = 6x + 33$

Ver Ejemplo 2

14. $4(x - 5) - 5 = 6x + 7{,}4 - 4x$

15. $\frac{1}{2}(2n + 6) = 5n - 12 - n$

Ver Ejemplo 3

16. Alberto cobra $ 25 000 por/hora por el arriendo de una tabla de windsurf y un traje de neopreno. Carola cobra $ 20 000 por hora más $ 15 000 adicionales por el traje de neopreno. Halla la cantidad de horas por las que el costo total sería el mismo.

Ver Ejemplo 4

17. Samuel y Laura tienen la misma cantidad de figuras de acción en sus colecciones. Samuel tiene 6 juegos completos más 2 figuras individuales y Laura tiene 3 juegos completos más 20 figuras individuales. ¿Cuántas figuras hay en un juego completo?

Ver Ejemplo 5

18. La ecuación $A = r\left(\frac{c}{2}\right)$ da el área A de un círculo, donde r es el radio y C es el perímetro. Halla C en esta ecuación.

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resuelve en tu cuaderno y comprueba:

19. $3y - 1 = 13 - 4y$

20. $4n + 8 = 9n - 7$

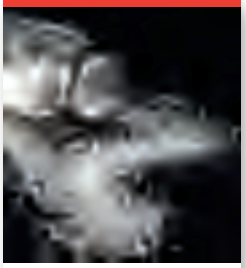
21. $5n + 20n = 5(n + 20)$

22. $3(4x - 2) = 12x$

23. $100(x - 3) = 450 - 50x$

24. $2p - 12 = 12 - 2p$

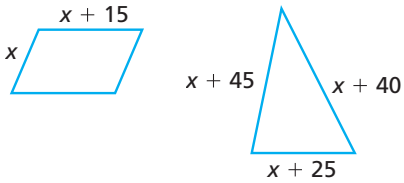
CONEXIÓN con Física



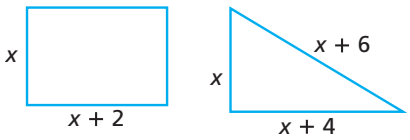
El sodio y el cloro se unen para formar el cloruro de sodio o sal. La estructura atómica del cloruro de sodio hace que este forme cubos.

Para los ejercicios 25 y 26, ambas figuras de cada par tienen el mismo perímetro. Halla cada perímetro:

25.



26.



27. Física Un átomo de cloro (Cl) tiene 6 protones más que un átomo de sodio (Na). El número atómico del cloro es 5 menos que el doble del número atómico del sodio. El número atómico de un elemento equivale a la cantidad de protones por átomo.

a. ¿Cuántos protones hay en un átomo de cloro?

b. ¿Cuál es el número atómico del sodio?

28. Jorge y Álvaro trabajan para distintos concesionarios de automóviles. Jorge gana un sueldo mensual de $ 750 000 más una comisión del 5% sobre sus ventas. Álvaro gana un sueldo mensual de $ 800 000 más una comisión del 3% sobre sus ventas. ¿Cuánto deben vender ambos para ganar la misma cantidad en un mes?

29. Elige una estrategia Halla el valor de t en la siguiente ecuación. ¿Cómo puedes determinar la solución después de combinar los términos semejantes?

$3(t-24) = 7t-4(t+18)$

30. Escríbelo Dos automóviles viajan en la misma dirección. El primero viaja a 80 km/h y el segundo, a 95 km/h. El primer automóvil partió 2 horas antes que el segundo. Explica cómo puedes resolver una ecuación para hallar cuánto tiempo tardará el segundo automóvil en alcanzar al primero.

31. Desafío Resuelve la ecuación $\frac{x+2}{8} = \frac{6}{7} + \frac{x-2}{2}$

Repaso

32. Halla tres enteros consecutivos de modo que la suma de los dos primeros sea 10 más que el tercer entero.

Ⓐ $-7, -6, -5$ Ⓑ 4, 5, 6 Ⓒ 11, 12, 13 Ⓓ 35, 36, 37

33. Resuelve $6w - 15 = 9w$.

Ⓐ $w = 3$ Ⓑ $w = 0$ Ⓒ $w = -1$ Ⓓ $w = -5$

Escribe cada número en notación científica:

34. 0,00000064 **35.** 7 390 000 000 **36.** 0,0000016 **37.** 4 100 000

Resuelve:

38. $6x - 3 + x = 4$ **39.** $32 = 13 - 4x + 21$ **40.** $5x + 14 - 2x = 23$

Laboratorio de PRÁCTICA 6-1

Modelo de ecuaciones con variables en ambos lados

Para usar con la lección 6–1

CLAVE

Fichas de álgebra

+ = x − = −x

− = 1 + = −1

RECUERDA

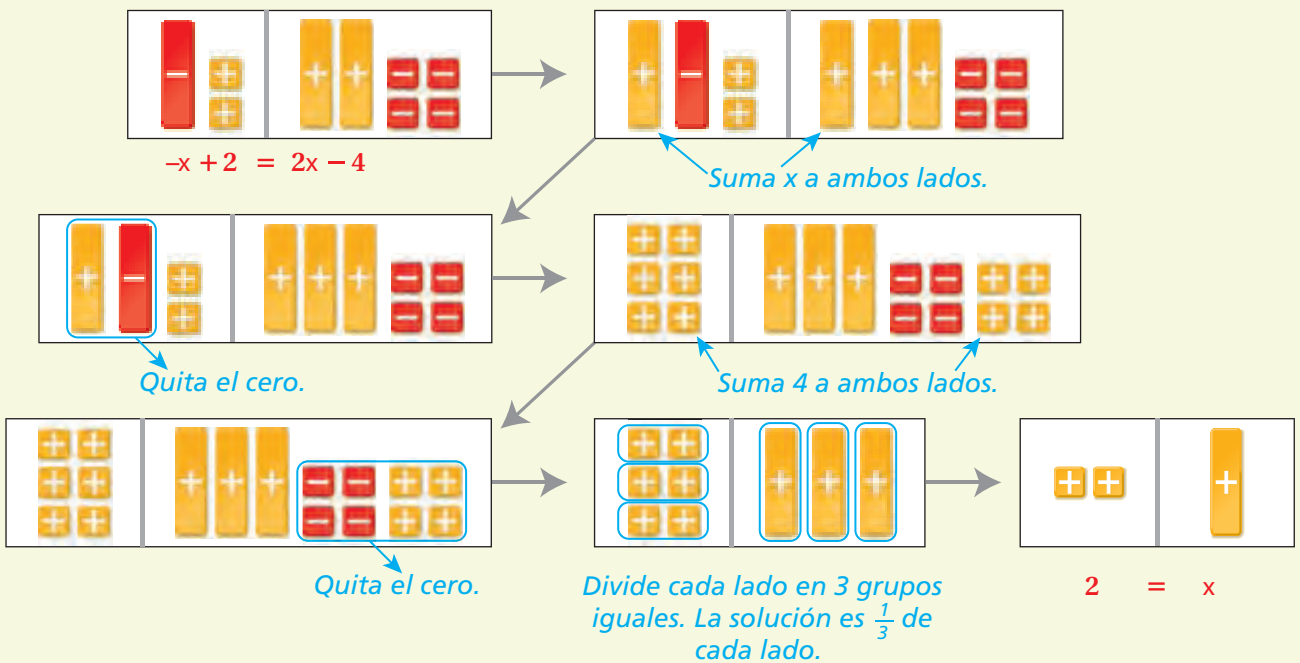
Si añades o eliminas un cero de una expresión, el valor de la expresión no se altera.

+ − = 0 + − = 0

Para resolver una ecuación que tiene la misma variable a ambos lados del signo de igualdad, primero debes sumar o restar para eliminar el término de la variable de uno de los lados de la ecuación.

Actividad

1 Haz un modelo de la ecuación $-x + 2 = 2x - 4$ y resuélvela.



Razonar y comentar

1. ¿Cómo comprobarías la solución de $-x + 2 = 2x - 4$ usando fichas?

2. ¿Por qué debes despejar los términos de las variables colocándolos en solo uno de los lados de la ecuación?

Inténtalo

Haz un modelo de cada ecuación y resuélvela:

1. $x + 3 = -x - 3$ **2.** $3x = -3x + 18$ **3.** $6 - 3x = -4x + 8$ **4.** $3x + 3x + 2 = x + 17$

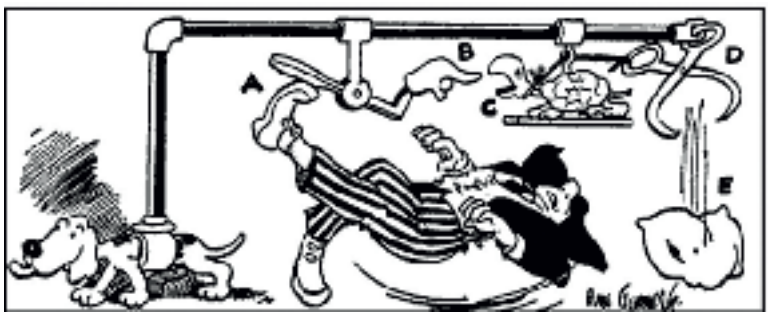
CAPÍTULO 6–2

Funciones, tablas y gráficos

Aprender a usar tablas de funciones para generar y representar gráficamente pares ordenados.

Vocabulario

función
valor de entrada
valor de salida
dominio
recorrido
tabla
par ordenado
variable dependiente
variable independiente



Rube Goldberg, un caricaturista famoso, inventó máquinas que realizaban tareas comunes en formas extraordinarias. Cada máquina operaba según una regla o una serie de pasos para producir un resultado o valor de salida determinado.

En matemáticas, una **función** es una relación que asigna a cada valor de la variable independiente (X) un solo valor de la variable dependiente (Y). Opera según una regla para producir exactamente un valor de salida por cada valor de entrada. El **valor de entrada** es el valor que se sustituye en la función. El **valor de salida** es el valor que resulta de la sustitución de un valor de entrada dado en la función.

Una función puede representarse como una regla escrita con palabras, como *"duplica el número y luego suma nueve al resultado"* o mediante una ecuación con dos variables.

$f(x)=2x+9$

o

Regla de función

$y=2x+9$

Variable de salida o variable dependiente

Variable de entrada o variable independiente

Una variable representa el valor de entrada y la otra representa el valor de salida. El conjunto que se forma con todos los valores que pueden ser sustituidos en la variable de entrada recibe el nombre de **dominio** de la función y el conjunto de valores que resultan de esta sustitución se llaman **recorrido** de la función, es decir, es el conjunto de valores que puede tomar la **variable dependiente** (y) a partir de los valores de la **variable independiente** (x).

Puedes usar una **tabla** para organizar y mostrar los valores de entrada y salida de una función.

EJEMPLO 1 Completar una tabla de funciones

Halla el valor de salida para cada valor de entrada.

A $y = 4x - 2$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida	
x	$4x-2$	y	
-1	$4(-1)-2$	-6	*Sustituye x por –1 y luego desarrolla.*
0	$4(0)-2$	-2	*Sustituye x por 0 y luego desarrolla.*
3	$4(3)-2$	10	*Sustituye x por 3 y luego desarrolla.*

La variable de entrada admite cualquier número real, por lo tanto, el dominio de la función $y = 4x - 2$ es el conjunto $\mathbb{R}$. Los valores de salida también son números reales, por lo tanto el recorrido de la función es el conjunto $\mathbb{R}$.

Halla el valor de salida para cada valor de entrada, el dominio y el recorrido.

B $y = 6x^2$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida	
x	$6x^2$	y	
-5	$6(-5)^2$	150	*Sustituye x por –5 y luego desarrolla.*
0	$6(0)^2$	0	*Sustituye x por 0 y luego desarrolla.*
5	$6(5)^2$	150	*Sustituye x por 5 y luego desarrolla.*

La variable de entrada admite cualquier número real, por lo tanto el dominio de la función $y = 6x^2$ es el conjunto $\mathbb{R}$. En este caso, los valores de salida son números reales positivos y el cero, por lo tanto, el recorrido de la función es el conjunto $\mathbb{R}$.

También puedes usar una gráfica para representar una función. Los valores de entrada y salida correspondientes forman, en conjunto, **pares ordenados** únicos.

¡Recuerda!

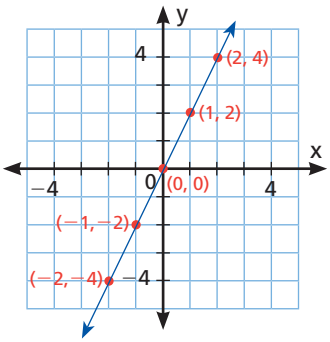
Un par ordenado es un par de números que representa un punto en una gráfica.

EJEMPLO 2 Representar funciones gráficamente con pares ordenados

Haz una tabla de funciones y representa gráficamente los pares ordenados resultantes.

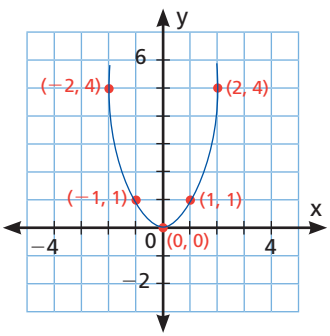
A $y = 2x$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida	Par ordenado
x	$2x$	y	(x,y)
-2	$2(-2)$	-4	$(-2, -4)$
-1	$2(-1)$	-2	$(-1, -2)$
0	2(0)	0	(0, 0)
1	2(1)	2	(1, 2)
2	2(2)	4	(2, 4)



B $y = x^2$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida	Par ordenado
x	$2x^2$	y	(x,y)
-2	$(-2)^2$	4	$(-2, 4)$
-1	$(-1)^2$	1	$(-1, 1)$
0	$(0)^2$	0	(0, 0)
1	$(1)^2$	1	(1, 1)
2	$(2)^2$	4	(2, 4)



Pista útil

Para escribir un par ordenado, escribe primero el valor de entrada y luego el valor de salida.

Razonar y comentar

1. **Describe** en qué se podría parecer una función a una máquina.
2. **Da un ejemplo** de una regla que tome un valor de entrada de 4 y produzca un valor de salida de 10.

6–2 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

Halla el valor de salida para cada valor de entrada, el dominio y el recorrido.

1. $y = 2x + 1$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida
x	$2x+1$	y
-3		
0		
1		

2. $y = 2x + 3$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida
x	$2x+3$	y
-2		
0		
1		

3. $y = 2x$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida
x	$2x$	y
-5		
1		
3		

Ver Ejemplo 2

Haz una tabla de funciones y representa gráficamente los pares ordenados resultantes.

4. $y = 3x - 2$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida	Par ordenado
x	$3x - 2$	y	(x,y)
-1			
0			
1			
2			

5. $y = x + 2$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida	Par ordenado
x	$x + 2$	y	(x,y)
-1			
0			
1			
2			

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

Halla el valor de salida para cada valor de entrada, el dominio y el recorrido.

6. $y = -2x$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida
x	$-2x$	y
-2		
0		
4		

7. $y = 3x + 2$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida
x	$3x+2$	y
-3		
-1		
2		

8. $y = 3x$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida
x	$3x$	y
-10		
-6		
-2		

Ver Ejemplo 2

Haz una tabla de funciones y representa gráficamente los pares ordenados resultantes:

9. $y = x : 2.$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida	Par ordenado
x	$x : 2$	y	(x,y)
-1			
0			
1			
2			

10. $y = 2x - 4$

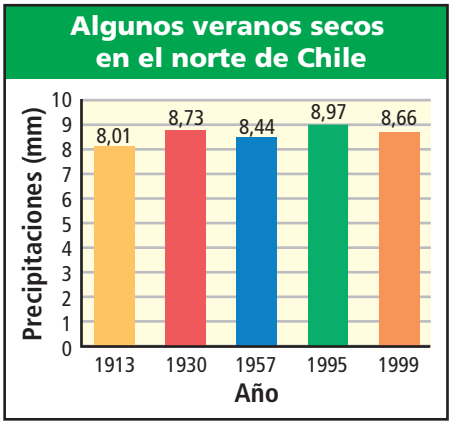
Valor de entrada	Regla	Valor de salida	Par ordenado
x	$2x - 4$	y	(x,y)
-1			
0			
1			
2			

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

11. **Meteorología** El norte de Chile recibe un promedio de 11,66 mm de lluvia en verano.

a. Escribe una ecuación para hallar y, la diferencia de precipitaciones entre la cantidad promedio de lluvias de verano y x, las lluvias de verano de un determinado año.

b. Haz una tabla de funciones con los datos de las lluvias de verano de cada año.



12. **Física** La ecuación $F = \frac{9}{5}\ C + 32$ da la temperatura Fahrenheit (F) para una temperatura Celsius (C) determinada. Haz una tabla de funciones para los valores C = –20°, –5°, 0°, 20° y 100°.

13. **¿Dónde está el error?** ¿Dónde está el error en la tabla de funciones de la derecha?

x	$y = -x - 5$	y
−2	$y = -(-2) - 5$	−7
−1	$y = -(-1) - 5$	−6
0	$y = -(0) - 5$	−5
1	$y = -(1) - 5$	−6
2	$y = -(2) - 5$	−7

14. **Escríbelo** Explica cómo hacer una tabla de funciones para $y = 2x + 11$.

15. **Desafío** Bicicletas Fantásticas cobra un depósito de $ 2 500 más $ 1 000 por hora para arrendar una bicicleta. Escribe una ecuación que dé el costo (y) de arrendar una bicicleta durante x horas y luego escribe los pares ordenados para $x = \frac{1}{2}$, 5 y $8\frac{1}{2}$.

Repaso

16. ¿En qué tabla se muestran los valores de salida y de entrada correspondientes a la función $y = -2x + 3$?

(A)

x	y
−1	−1
0	0

(B)

x	y
−3	−2
−2	−1

(C)

x	y
−5	−7
−1	1

(D)

x	y
−3	9
−1	5

17. ¿Qué función corresponde a la tabla de funciones de la derecha?

(A) $y = x + 3$

(B) $y = x + 7$

(C) $y = 5x + 1$

(D) $y = 3x + 3$

x	0	1	2
y	1	6	11

Resuelve.

18. $43 - (-18)$

19. $3 - (-2) - (5 + 1)$

20. $-4 - 8 - (-3)$

21. $\frac{6}{7}x =$

22. $4z = \frac{4}{5}$

23. $\frac{6}{9}y = 3$

24. $\frac{1}{10}x = \frac{7}{8}$

CAPÍTULO 6

¿Listo para seguir?

Prueba de las lecciones 6–1 y 6–2

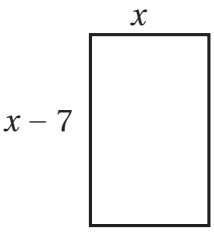
6–1 Cómo resolver ecuaciones con variables en ambos lados

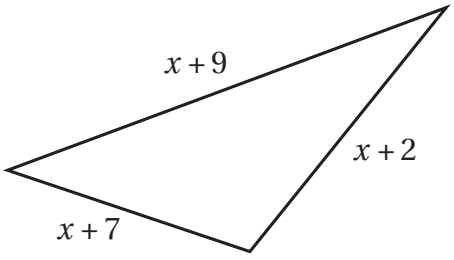
Resuelve.

1. $4x + 11 = x + 2$ **2.** $q + 5 = 2q + 7$ **3.** $6n + 21 = 4n + 57$ **4.** $2m + 6 = 2m - 1$

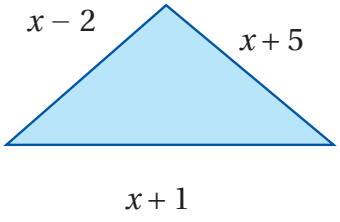
5. $9w - 2w + 8 = 4w + 38$ **6.** $-4a - 2a + 11 = 6a - 13$ **7.** $\frac{7}{12}y - \frac{1}{4} = 2y - \frac{5}{3}$

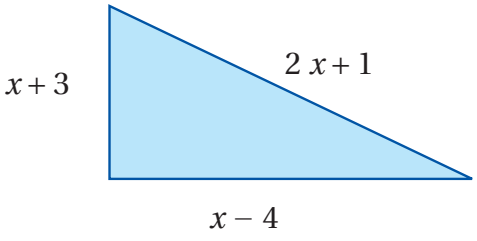
8. El rectángulo y el triángulo tienen el mismo perímetro. Halla el perímetro de cada figura.





9. Los dos triángulos tienen el mismo perímetro. Halla el perímetro de cada figura.





6–2 Funciones, tablas y gráficos

Haz una tabla de funciones y representa gráficamente los pares ordenados resultantes:

10. $y = -6$ **11.** $y = 4x - 3$ **12.** $y = 4x^2$ **13.** $y = 2x + 4$

14. Encuentra el dominio y el recorrido de cada función anterior.

Enfoque en resolución de problemas

Comprende el problema

• Escribe una ecuación

Al leer un problema de matemáticas, poner los sucesos en orden o en *secuencia* te ayuda a comprender mejor el problema. Ordenar la información te ayuda a *priorizarla.* Para priorizar la información, decide qué es lo más importante de tu lista. La información más importante tiene la mayor prioridad.

Usa la información de la lista o de la tabla para responder cada pregunta:

Actividades del sábado

- ✓ Ir a la fiesta de cumpleaños a las 16:00.
- ✓ Comprar regalo: un CD a $ 18 000 o un juego de computadora a $ 25 000.
- ✓ Ir a cortarme el pelo a las 14:00, pago $ 16 000
- ✓ Cortar el pasto de la sra. Martínez antes de las 10:00; gano $ 15 000.
- ✓ Cortar el pasto y podar el cerco del sr. Baeza en cualquier momento después de las 10:00, gano $ 25 000.

1 En la lista de la derecha se muestra todo lo que tiene que hacer Rodrigo el sábado. Empieza el día sin dinero.

a. ¿Qué par de actividades de la lista de Rodrigo deben realizarse antes que cualquier otra actividad? ¿Estas dos actividades tienen prioridad alta o baja?

b. ¿Hay más de una manera en que pueda ordenar sus actividades? Explica.

c. Haz una lista del orden posible en que Rodrigo debe realizar las actividades del sábado.

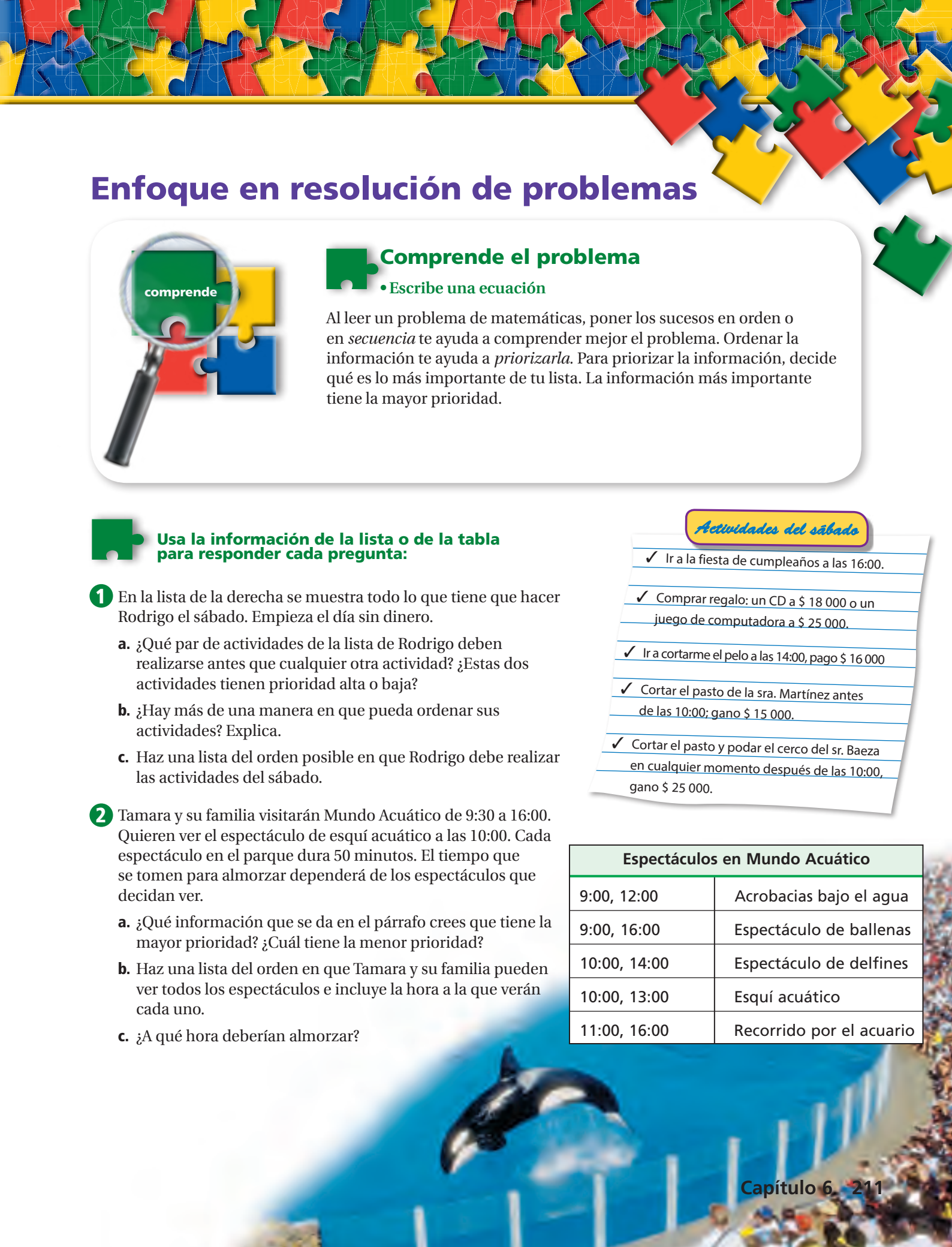
2 Tamara y su familia visitarán Mundo Acuático de 9:30 a 16:00. Quieren ver el espectáculo de esquí acuático a las 10:00. Cada espectáculo en el parque dura 50 minutos. El tiempo que se tomen para almorzar dependerá de los espectáculos que decidan ver.

a. ¿Qué información que se da en el párrafo crees que tiene la mayor prioridad? ¿Cuál tiene la menor prioridad?

b. Haz una lista del orden en que Tamara y su familia pueden ver todos los espectáculos e incluye la hora a la que verán cada uno.

c. ¿A qué hora deberían almorzar?

Espectáculos en Mundo Acuático	
9:00, 12:00	Acrobacias bajo el agua
9:00, 16:00	Espectáculo de ballenas
10:00, 14:00	Espectáculo de delfines
10:00, 13:00	Esquí acuático
11:00, 16:00	Recorrido por el acuario



Laboratorio de PRÁCTICA 6–3

Explorar las proporciones

Para usar con la lección 6–3

Preparación previa

Puedes usar fichas para representar razones equivalentes.

Actividad 1

Halla tres razones que sean equivalentes a $\frac{6}{12}$

1. Muestra 6 fichas rojas y 12 fichas amarillas.

2. Separa las fichas rojas en dos grupos iguales. Luego, separa las fichas amarillas en dos grupos iguales.

3. Escribe la razón de fichas rojas de cada grupo a fichas amarillas de cada grupo.

$$\frac{\text{3 fichas rojas}}{\text{6 fichas amarillas}} = \frac{3}{6}$$

4. Ahora separa las fichas rojas en tres grupos iguales. Luego, separa las fichas amarillas en tres grupos iguales.

5. Escribe la razón de fichas rojas de cada grupo a fichas amarillas de cada grupo.

$$\frac{\text{2 fichas rojas}}{\text{4 fichas amarillas}} = \frac{2}{4}$$

6. Ahora separa las fichas rojas en seis grupos iguales. Luego, separa las fichas amarillas en seis grupos iguales.

7. Escribe la razón de fichas rojas de cada grupo a fichas amarillas de cada grupo.

$$\frac{\text{1 ficha roja}}{\text{2 fichas amarillas}} = \frac{1}{2}$$

Las tres razones que escribiste son equivalentes a $\frac{6}{12}$

$$\frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Cuando escribes una ecuación que tiene razones equivalentes, esa ecuación se llama *proporción*.

Razonar y comentar

1. ¿Cómo muestran los modelos que las razones son equivalentes?

Inténtalo

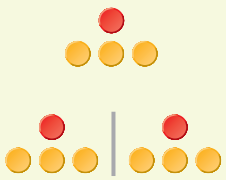
Usa modelos para determinar si las razones forman una proporción.

1. $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{12}$ **2.** $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{9}$ **3.** $\frac{4}{10}$ y $\frac{2}{5}$

Actividad 2

Escribe una proporción en la que una de las razones sea $\frac{1}{3}$

1 Debes hallar una razón que sea equivalente a $\frac{1}{3}$. Primero muestra una ficha roja y tres amarillas.



2 Muestra otro grupo de una ficha roja y tres amarillas.

3 Escribe la razón de fichas rojas a fichas amarillas de los dos grupos.

$$\frac{\text{2 fichas rojas}}{\text{6 fichas amarillas}} = \frac{2}{6}$$

4 Las dos razones son equivalentes. Escribe la proporción $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

Puedes hallar más razones equivalentes si agregas más grupos de una ficha roja y tres amarillas. Usa tus modelos para escribir proporciones.

$$\frac{\text{3 fichas rojas}}{\text{9 fichas amarillas}} = \frac{3}{9}$$

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\text{4 fichas rojas}}{\text{12 fichas amarillas}} = \frac{4}{12}$$

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Razonar y comentar

1. Los modelos anteriores muestran que $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}$ y $\frac{4}{12}$ son razones equivalentes. ¿Ves un patrón en esta lista de razones?

2. Usa fichas para hallar otra razón que sea equivalente a $\frac{1}{3}$

Inténtalo

Usa fichas para escribir una proporción con la razón que se da:

1. $\frac{1}{4}$ **2.** $\frac{1}{5}$ **3.** $\frac{3}{7}$ **4.** $\frac{1}{6}$ **5.** $\frac{4}{9}$

CAPÍTULO 6–3

Proporcionalidad directa e inversa

Aprender a discriminar entre una proporción directa y una proporción inversa.

Vocabulario

directamente proporcionales

valor de la razón

inversamente proporcionales

no proporcionales

José le comentó a su compañero Sebastián: "recuerdo algo de las variaciones proporcionales, te daré algunos ejemplos:"

- Si un tarro de pelotas de tenis vale $ 2 500, entonces tres tarros iguales valen $ 7 500.
- Si y es el valor total de los tarros y x es la cantidad de tarros, matemáticamente se representa por la función:

$$y = 2500 \cdot x$$

- En un ascensor cuya capacidad es de 400 kg pueden subir 5 personas de 80 kg cada una o 20 niños de 20 kg cada uno. En este caso, si y es el peso de las personas y x es el número de personas que suben al ascensor, matemáticamente se representa por la función:

$$400 = y \cdot x \qquad \text{o bien} \qquad y = \frac{400}{x}$$

¿Cuáles de los ejemplos que dio José corresponden a una variación proporcional?

Dos cantidades son **directamente proporcionales** si el **valor de la razón** entre ellas es siempre constante. Es decir, si al aumentar una, la otra también aumenta manteniendo la razón constante entre ellas.

EJEMPLO 1 Usar la comparación de razones o valor de la razón

- Si un tarro de pelotas de tenis vale $ 2 500, entonces tres tarros iguales valen $ 7 500.

Realizamos una tabla donde registrar los datos.

Cantidad de tarros	1	2	3	4
Valor en pesos	2 500	5 000	7 500	¿?

La razón es $\frac{1}{2\,500} = 0{,}0004$; $\frac{2}{5\,000} = 0{,}0004$; $\frac{7}{7\,500} = 0{,}0004$.

Cuatro tarros de pelotas deben valer $ 10 000 ya que $\frac{4}{10\,000} = 0{,}0004$.

Como el valor de la razón se mantiene constante, las razones son directamente proporcionales.

También podemos utilizar la propiedad fundamental de las proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Es decir, en la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, los productos $a \cdot d = b \cdot c$

EJEMPLO 2 **Usar la propiedad fundamental de las proporciones**

Pista útil

En cada ejercicio puedes dibujar una tabla para visualizar los valores y distinguir si es proporción directa o inversa.

Un tono de pintura se forma mezclando 5 partes de pintura amarilla con 7 partes de pintura verde. Si mezclas 21 partes de pintura verde y 15 partes de pintura amarilla, ¿conseguirás el tono correcto?

$$\frac{5 \text{ partes de amarillo}}{7 \text{ partes de verde}} = \frac{15 \text{ partes de amarillo}}{21 \text{ partes de verde}}$$

Establecer dos razones.

$$7 \cdot 15 = 5 \cdot 21$$

$$105 \qquad 105$$

Aplica la propiedad fundamental de las proporciones.

Los productos cruzados son iguales. Obtendrás el tono correcto de pintura. Son cantidades directamente proporcionales.

Dos cantidades son **inversamente proporcionales** si el producto entre ellas es siempre constante. Es decir, si al aumentar una, la otra disminuye manteniendo el producto constante entre ellas.

EJEMPLO 3 **Usar la comparación de productos**

En un ascensor cuya capacidad es de 400 kg pueden subir 5 personas de 80 kg cada una o 20 niños de 20 kg cada uno. Si suben 4 personas al ascensor, ¿cuánto debe pesar cada una?

Nº de personas	5	20	4
Peso de cada persona en kilos	80	20	¿?

$$\underbrace{5 \cdot 80}_{400} \qquad \underbrace{20 \cdot 20}_{400} \qquad \underbrace{4 \cdot ¿?}_{400}$$

Por lo tanto cada persona debe pesar 100 kg ya que $4 \cdot 100 = 400$.

Como el producto entre las cantidades se mantiene constante, se dice que son inversamente proporcionales.

Dos cantidades **no son proporcionales** si no son directamente proporcionales ni inversamente proporcionales. Por ejemplo: la masa de una persona es de 72 kg y ocupa un volumen de 2 m^3. Un lingote de fierro de 84 kg ocupa un volumen de 1,5 m^3. Cuando la variable masa aumenta, la variable volumen disminuye, por lo tanto, posiblemente es una proporción inversa, pero debes comprobar si tienes una constante de proporcionalidad, es decir:

$$72 \cdot 2 \overset{?}{=} 84 \cdot 1{,}5$$

$$144 \neq 126$$

Por lo tanto no es una relación proporcional.

Razonar y comentar

1. **Explica** cómo puedes diferenciar una proporción directa de una proporción inversa.
2. **Da un ejemplo** de una situación donde no exista proporcionalidad.

6–3 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

1. Ximena fue a comprar los cuadernos para comenzar el año en su colegio y la vendedora le mostró la siguiente tabla para saber cuánto iba a pagar según la cantidad de cuadernos que comprara.

Nº de	1	2	3	4	5	10
Pesos	1 200	2 400	3 600	4 800		

¿Puede Ximena saber cuánto le costarían 5 cuadernos o 10 cuadernos y completar esta tabla? ¿Qué tipo de proporción es?

Ver Ejemplo 2

2. Un helicóptero para combatir incendios recorre 48 km en 20 minutos. A esta velocidad, el piloto dice que puede recorrer 100 km en 40 minutos. ¿Está el piloto en lo correcto? Explica por qué.

Ver Ejemplo 3

3. En un establo hay fardos de pasto para que 4 caballos se alimenten 20 días. Si la cantidad de alimento permanece constante, calcula para cuántos días alcanzará el alimento si hay 5 caballos.

Resuelve:

4. $x - 4\frac{3}{4} = 1\frac{1}{12}$

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

5. Completa la tabla si las cantidades A y B son directamente proporcionales.

A	2		4	8	
B	38	57			190

6. Un grupo de ciclistas recorre 3,5 km en 15 minutos. A esta velocidad ¿qué distancia puede recorrer el grupo en 1 hora?

Ver Ejemplo 2

7. La razón entre los estudiantes de 7º básico y los alumnos de 8º básico que participan en la feria científica es 4 : 3. Si participan 18 estudiantes de octavo en la feria entonces los alumnos de séptimo son 24. ¿Es correcta esta afirmación? Explica.

Ver Ejemplo 3

8. Si 15 hombres realizan una obra en 5 días, ¿cuántos hombres harían el mismo trabajo en 3 días?

9. $y + 8\frac{2}{4} = 10$

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

10. Una molécula de nitrógeno que reacciona con tres moléculas de hidrógeno forma dos moléculas de amoníaco. ¿Cuántas moléculas de nitrógeno deben reaccionar con 42 moléculas de hidrógeno para formar 28 moléculas de amoníaco?

11. Los lápices mina se venden a $ 1 000 las tres unidades. Si se mantiene la razón entre el precio y la cantidad de lápices, ¿cuánto costarían 10 lápices? Redondea a la unidad.

12. Varios pasos Germán vende poleras en un festival de música. Ayer vendió 51 y ganó $ 127 500. ¿Cuántas poleras debe vender Germán hoy y mañana para ganar un total de $ 385 000? Explica cómo llegaste a la respuesta.

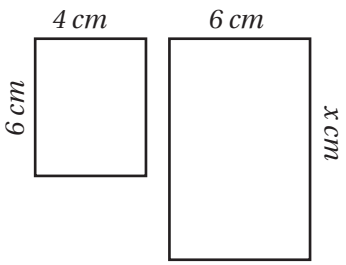
13. Las medidas de los lados de los rectángulos que se muestran a la derecha son directamente proporcionales.

a. Halla el largo del rectángulo mayor.

b. Halla el perímetro de cada rectángulo.

c. Halla la razón entre los perímetros y compárala con la razón de las longitudes de los lados correspondientes.

d. Haz una conjetura acerca de la relación entre los perímetros de figuras que tienen sus lados proporcionales.



CONEXIÓN con Arte

Muchas reproducciones de obras de arte han sido ampliadas para cubrir superficies inusuales.

14. Arte Elena está copiando una reproducción impresa de la Mona Lisa. La impresión mide 24 cm de ancho y 36 cm de alto. Si la tela de Elena mide 12 cm de ancho, ¿qué altura debe tener su tela para que la copia sea proporcional a la impresión?

15. Escribe un problema En una hoja de papel se ha dibujado un rectángulo de 9 cm de ancho y 12 cm de largo. Se dibuja otro rectángulo cuyo ancho mide 3 cm. Escribe y resuelve un problema acerca del rectángulo.

16. Desafío Un terreno mide 20 metros de ancho y 40 de largo. Se necesita limitar el terreno con un ancho de 25 metros, sin alterar su superficie. ¿Cuántos metros debe tener de largo ahora?

Repaso

17. Si cuatro operarias fabrican 16 delantales por día, ¿cuántos delantales fabrican 24 operarias?

(A) 96 (B) 87 (C) 69 (D) 75

18. Ricardo compra 5 kilos de manzanas por $ 3 250. Escribe una ecuación que represente el costo de manzanas. Halla el costo de 12 kilos de manzanas.

19. Un automóvil recorre 150 km en 3 horas. ¿Cuál es su velocidad por hora?

20. Despeja la variable y de la ecuación: $4y + 12 = -3x$.

CAPÍTULO

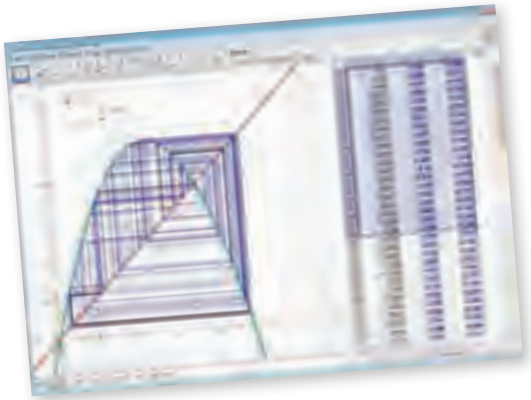
6–4 Análisis de proporciones utilizando software gráfico

Aprender a analizar situaciones proporcionales mediante gráficos.

Vocabulario

variables

Una de las herramientas tecnológicas que se puede utilizar de forma libre para graficar y analizar la relación entre dos **variables** es el software *Geogebra*.



Geogebra. Software de uso libre.

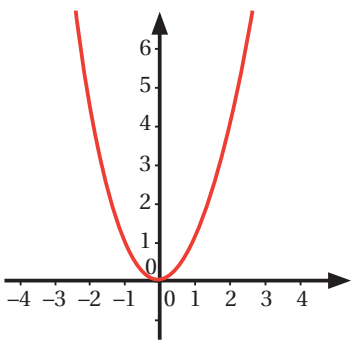
Se puede descargar desde
http://www.geogebra.org

1. Abre el programa
2. En la parte inferior (casilla entrada) digita la relación matemática por analizar.
3. Presiona **ENTER** y aparece el gráfico.

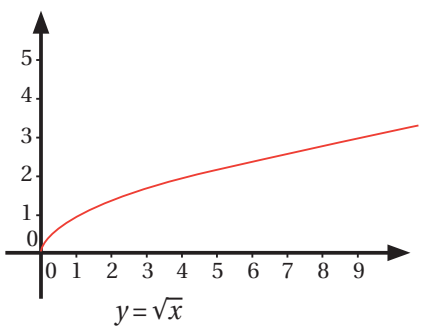
Para borrar la gráfica debes presionar el botón derecho del mouse sobre la curva o función, y seleccionar la opción **BORRAR**.

http://www.geogebra.org

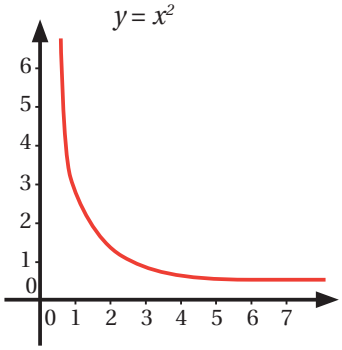
Al analizar el gráfico se puede determinar la relación que existe entre dos variables x e y. Se clasifica como directamente proporcional si es una línea recta que pasa por el origen y como inversamente proporcional si es una curva que no pasa por el origen ni intersecta a los ejes. El gráfico es no proporcional en cualquier otro caso.



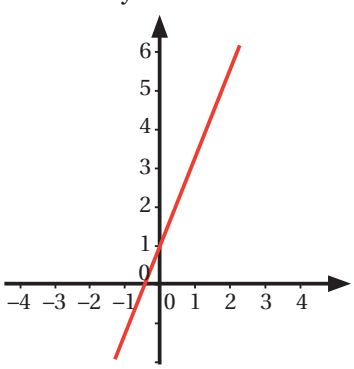
$y = x^2$



$y = \sqrt{x}$



$y = \frac{2}{x}$



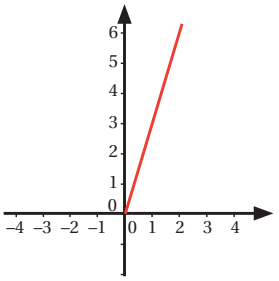
$y = 2x + 1$

EJEMPLO 1 Gráfico y análisis de relaciones directamente proporcionales

Para confeccionar un traje se necesitan 3 metros de género. La función que modela la cantidad de metros necesarios para confeccionar cierto número de trajes es:

$f(y) = 3x$

Para graficar sigue los pasos 1, 2, 3 y encontrarás:



La gráfica es una recta que comienza en el origen de coordenadas.

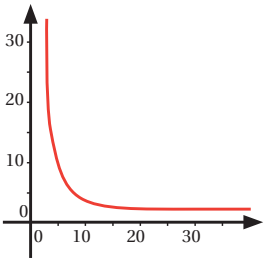
Podemos determinar que la relación entre las variables es directamente proporcional ya que el gráfico muestra una recta que pasa por el origen.

EJEMPLO 2 Gráfico y análisis de relaciones inversamente proporcionales

Para pintar la fachada de una casa, 6 pintores se demoraron 4 días. La función que modela la cantidad de días que se demoraron de acuerdo a la cantidad de pintores que trabajaron es:

$y = \frac{24}{x}$

Para graficar sigue los pasos 1, 2, 3 y encontrarás:



La gráfica es una curva llamada: rama de hipérbola.

Podemos determinar que la relación entre las variables es inversamente proporcional.

EJEMPLO 3 Gráfico y análisis de relaciones no proporcionales

Resuelve:

A Un artista se demora 30 minutos en realizar la matriz de un grabado simple y 5 minutos por cada copia. La función que modela esta situación es:

$f(x) = 5x + 30$

B La relación entre el volumen de un cubo y la medida de su arista está modelada por:

$V(a) = a^3$

Podemos determinar que no existe proporción directa entre las variables ya que la recta no pasa por el origen, y tampoco una proporción inversa ya que el gráfico no es una curva representativa de esta.

Razonar y comentar

1. **Explica** por qué la relación distancia y tiempo son directamente proporcionales.
2. **Plantea** otras situaciones de relación inversamente proporcionales.

6–4 Ejercicios

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN

Ver Ejemplo 1

Encuentra una función que represente la situación, gráfica la función e identifica el tipo de proporción, si existe.

1. Por cada 100 grs de naranjas ingeridas en el desayuno, el cuerpo absorbe 50 mg de vitamina C.

Ver Ejemplo 2

2. En una fábrica, 10 máquinas se demoran 60 seg en la producción de cierta cantidad de frutillas.

Ver Ejemplo 3

3. Un vendedor de televisores de una tienda comercial recibe un sueldo base de $ 180 000 y por cada televisor vendido gana $ 20 000.

4. El área de un rectángulo de largo x y ancho 9 unidades menos que el largo.

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Ver Ejemplo 1

Encuentra una función que represente la situación, grafica la función e identifica el tipo de proporción, si existe.

5. Una llamada telefónica de larga distancia nacional vale $ 200 por 5 minutos.

Ver Ejemplo 2

6. Un albañil quiere construir un piso rectangular cuya superficie mide 48 m^2 pero no sabe las dimensiones del largo y del ancho.

Ver Ejemplo 3

7. En una empresa el costo por producir cierta cantidad de artículos esta dado por:

$C(x) = 20x + 100$

8. En un laboratorio se estudia la reproducción de una determinada bacteria que se duplica cada dos horas. La función que representa la cantidad de bacterias que habrá después de cierto tiempo:

$B(x) = 2^x$

PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Grafica y clasifica en relaciones proporcionales o no proporcionales.

9. $y = \frac{5}{x}$

10. $3x = 5y$

11. $y + 10 = 24x$

12. $y = x + 4$

13. $y = \frac{24}{x}$

14. $y = 7x$

15. $y = 5x + 2$

16. $y = \frac{7}{3x}$

17. $y = 5x$

CONEXIÓN con Geografía

Isla de Pascua o Rapa Nui se encuentra frente a las costas de Chile y forma parte de las islas polinésicas. Su capital es Hanga Roa.

Durante años, arqueólogos y paleontólogos han llegado a este lugar para descubrir los secretos de los Moais y de los sitios ceremoniales del pueblo Rapa Nui.

Tepito Ote Henua (ombligo del mundo), como la llamaban sus antiguos hablantes, es la isla habitada más remota del planeta. No hay otra porción de tierra en el mundo tan aislada en el mar, el punto del continente más próximo a la isla se ubica en la Punta Lavapié, VIII región del Bio–bío, a 3 526 km de distancia.

Halla la función que modela las relaciones e identifica si son proporcionales o no proporcionales.

18. **Transporte** Una persona que viaja diariamente en el Transantiago paga $ 600 por cada viaje. ¿Cuál es la función que modela lo que debe pagar por cierta cantidad de viajes?

19. **Geografía** Ciertos estudios aseguran que la Isla de Pascua se acerca al continente sudamericano a razón de unos 10 cm por año. ¿Cuántos años demorará en llegar al continente?

20. **Cocina** Cocinar un queque cuesta $ 3 000 en ingredientes, y se vende en trozos a un precio de $ 200 cada uno. ¿Cuántos trozos se debe vender para recuperar el dinero gastado en la preparación?
$y = 200x - 3\,000$

21. **Desafío** En la tabla se muestran los precios normales y de oferta de discos compactos en La Gran Rebaja. ¿Cuánto dinero ahorrarás si compras 10 discos compactos en oferta?

Cantidad de discos	Precio normal (pesos)	Precio de oferta (pesos)
2	17 000	14 400
3	25 500	21 600
6	51 000	43 200

Repaso

22. ¿Qué razón no es equivalente a 3 es a 7?

(A) 9 : 21 (B) 36 : 77 (C) 45 : 105 (D) 54 : 126

23. En la tabla se muestran las distancias recorridas y la cantidad de litros de gasolina usados en cuatro viajes en automóvil. Predice cuántos litros de gasolina se usarían en un viaje de 483 km.

Distancia (km)	552	414	276	138
Bencina usada (l)	24	18	12	6

24. En el año 2005, las alturas de los edificios más altos del mundo eran 509, 452, 452, 442, 421 y 415 metros. Encuentra la media aritmética, moda y el rango de los datos.

25. Javier ahorró $ 65, $ 82, $ 58, $ 74, $ 65 y $ 72 de su trabajo de media jornada durante seis meses. El mes siguiente, trabajó a jornada completa y ahorró $ 285. Halla la media aritmética, y la moda de las cantidades ahorradas con y sin los ahorros del trabajo a tiempo completo.

CAPÍTULO 6

¿Listo para seguir?

Prueba de las lecciones 6–3 a 6–4

6–3 Proporcionalidad directa e inversa

1. Un camión transporta 24 toneladas de tierra en cada viaje. Se necesita rellenar un terreno con 8 540 toneladas y se dispone solo de este camión. ¿Cuántos viajes se deben contratar?
2. Un pintor se demora 8 horas en pintar una habitación. ¿Cuánto tiempo se demorarían dos pintores en pintar la misma habitación?
3. Un ganadero tiene 300 animales y forraje para alimentarlos durante 90 días. Vende un cierto número de animales y de este modo el alimento le dura 45 días más. ¿Cuántos animales vendió?
4. Una lancha se demora media hora en atravesar un lago a una rapidez de 120 km/h. ¿Qué rapidez promedio tiene que alcanzar la lancha para regresar en 0,2 horas?
5. En un día determinado, la razón de dólares a pesos chilenos fue aproximadamente 1:0,735. ¿La razón 20 a 14,70 es una razón equivalente? Explica.

Usa productos cruzados para resolver cada proporción.

6. $\frac{n}{8} = \frac{15}{4}$
7. $\frac{20}{t} = \frac{2,5}{6}$
8. $\frac{6}{11} = \frac{0,12}{z}$
9. $\frac{15}{24} = \frac{x}{10}$
10. Se dice que un año de un ser humano equivale aproximadamente a 7 años de un perro. El perro de Cristóbal tiene 5,5 años en edad humana. Estima la edad de su perro en años de perro.
11. Un grifo de 3 cm se demora 18 horas en llenar un estanque. ¿Cuántas horas empleará en llenar el mismo estanque otro grifo de 6 cm?
12. Un actor de teatro memoriza 15 líneas de su parlamento en 25 minutos, ¿Cuántos minutos se demorará en memorizar 120 líneas, en las mismas condiciones?
13. En un mapa, 1 cm equivale a 150 kilómetros de la realidad. Si dos ciudades se encuentran a 750 kilómetros de distancia, ¿a cuántos centímetros equivale en el mapa?
14. En una construcción 5 maestros pintan una pared en 2 horas. ¿Cuánto tiempo se demoran en pintar una pared igual 2 maestros?
15. Una promoción ofrece que por la compra de cada 5 productos iguales, entregan 2 gratis. ¿Cuántos productos iguales se deben comprar para recibir 6 gratis?

6–4 Análisis de proporciones utilizando software gráfico

Usa el programa Geogebra, para graficar las siguientes relaciones y clasifícalas como proporción directa, inversa o no proporcional.

16. $y = 4x - 5$
17. $y = 8x$
18. $y = \frac{3}{x}$

CONEXIONES con el mundo real

Torre Entel

Para los chilenos, la torre Entel se ha convertido en un verdadero símbolo. Su imagen, visible desde los puntos más alejados de nuestra capital, es motivo obligado de postales fotográficas o un común punto de referencia.

La torre es el elemento más destacado del Centro Nacional de Telecomunicaciones, núcleo vital de todos los sistemas de telecomunicaciones de larga distancia de Chile. Además, es un área que facilita la interconexión con las redes de microondas del sur y el norte del país, establece un enlace a la Estación Terrestre de Comunicaciones por Satélite de Longovilo y vía microondas con Mendoza, Argentina.

Su altura se explica porque las antenas de microondas requieren que no exista ningún tipo de obstáculo físico como cerros, edificios o árboles delante de ellas.

La torre está constituida por dos secciones El Fuste, construcción de ferroconcreto, que comienza 18 metros bajo el nivel de la Alameda y llega hasta 80 metros sobre el nivel del suelo; y el Antenófano, estructura de acero y aluminio de 47 metros de alto con seis plataformas para antenas.

1. En una tarde de sol, la torre Entel proyecta una sombra de 305,64 metros de largo. Al mismo tiempo, un mástil de 5 metros proyecta una sombra de 12 metros de largo. Escribe y resuelve una proporción para hallar la altura de la torre Entel.

2. ¿A qué parte de un kilómetro equivale la altura de la torre Entel?

Recuerda que 1 km = 1 000 metros.

3. Un arquitecto quiere hacer una maqueta que represente las medidas de la torre Entel en forma proporcional. Para esto usó la escala 1 : 100, es decir 1 centímetro en la maqueta representa 100 centímetros de la realidad. ¿Qué altura tiene la maqueta?

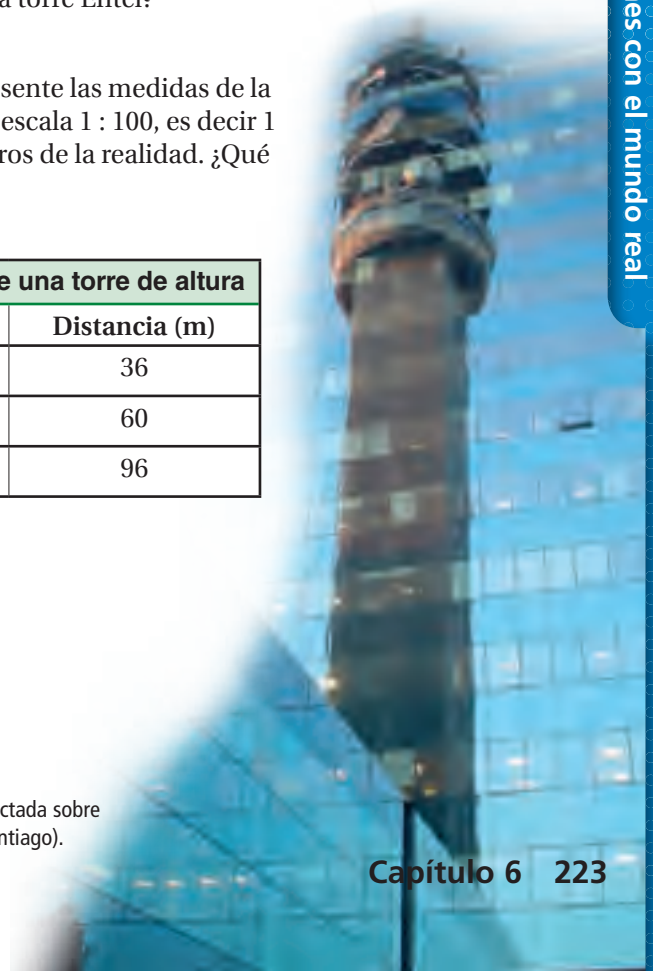
Usa la información de la tabla para responder los problemas 4 al 6.

Ascensores de una torre de altura	
Tiempo (s)	**Distancia (m)**
3	36
5	60
8	96

4. En la tabla se muestra la distancia que recorre un ascensor en distintas cantidades de tiempo. ¿Cuál es la velocidad promedio de los ascensores?

5. ¿Qué distancia puede recorrer un ascensor en 20 segundos? Explica cómo determinaste tu respuesta.

6. Si estos ascensores fueran los de la torre Entel, ¿aproximadamente cuánto tiempo demorarían en ir desde la planta baja hasta lo más alto de la torre?



Sombra de la torre Entel proyectada sobre el vecino edificio de cristal (Santiago).

¡Vamos a jugar!

¡Cuidado con el copión!

Puedes usar este método para copiar una obra de arte muy conocida o cualquier dibujo.

Primero, dibuja una cuadrícula sobre la obra que quieres copiar o dibuja una cuadrícula en papel de calcar y pégala sobre la pintura.

Luego, dibuja en otra hoja una cuadrícula en blanco con la misma cantidad de cuadrados. No es necesario que los cuadrados tengan el mismo tamaño. Copia cada cuadrado del original exactamente en la cuadrícula en blanco. No mires la totalidad de la pintura mientras la copias.

Cuando hayas copiado todos los cuadrados, el dibujo en tu cuadrícula terminada debe lucir como la obra original.

Supongamos que copias una imagen impresa de 25 cm por 36 cm y que usas cuadrados de 2 cm en la primera cuadrícula.

1. Si usas cuadrados de 6 cm en la cuadrícula en blanco, ¿que tamaño tendrá tu copia terminada?
2. Si quieres hacer una copia de 20 cm de alto, ¿de qué tamaño debes hacer los cuadrados en tu cuadrícula en blanco? ¿Cuál será el ancho de la copia?
3. Elige una pintura, dibujo o caricatura y cópiala usando el método anterior.

Proporciones

ACTIVIDAD GRUPAL

Dibuja un gran tablero con 9 divisiones (igual al que usas para jugar al gato). En cada cuadrado escribe una proporción en blanco: — = —. Los jugadores se turnan para hacer girar una rueda con 12 secciones o un dado de 12 caras. El turno del jugador consiste en colocar un número en cualquier lugar en una de las proporciones. El jugador que completa la proporción correctamente se apropia de ese cuadrado. También se puede bloquear un cuadrado rellenando tres partes de una proporción que no se pueda completar con un número del 1 al 12.

El primer jugador que se apropie de tres cuadrados en una fila gana.

¡Está en la bolsa!

Materiales

- cinta adhesiva ancha
- regla
- tijeras
- 6 tarjetas (3 cm por 5 cm)
- marcadores

PROYECTO

Una carpeta que vale la pena

Haz una carpeta para guardar tarjetas con cinta adhesiva. Las tarjetas te ayudarán a estudiar razones, proporciones y semejanzas.

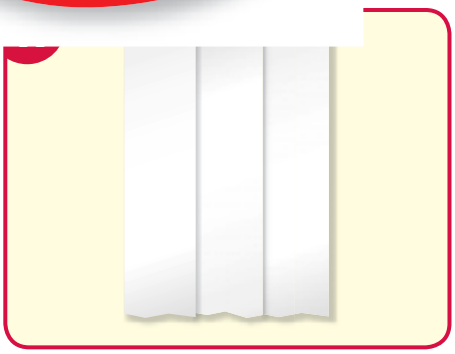
Instrucciones

1. Corta tres tiras de cinta adhesiva de al menos 23 cm de largo. Coloca las tiras una junto a la otra, con el lado adhesivo hacia arriba, de modo que se superpongan levemente. El ancho total debe ser de aproximadamente 14 cm. **Figura A**

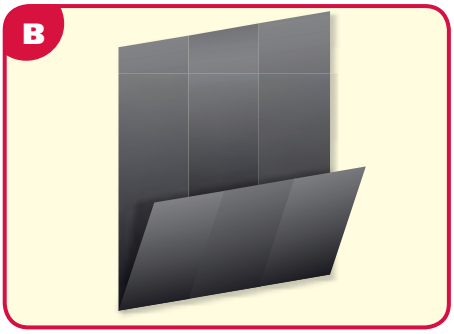
2. Coloca tres tiras más de cinta adhesiva encima de las primeras tres, con el lado adhesivo hacia abajo. Corta los bordes. Esto producirá una lámina de "tela" fabricada con cinta adhesiva.

3. Pliega la tela aproximadamente a 5 cm desde el borde inferior para formar un bolsillo. Usa cinta adhesiva para sellar los lados y que queden cerrados. **Figura B**

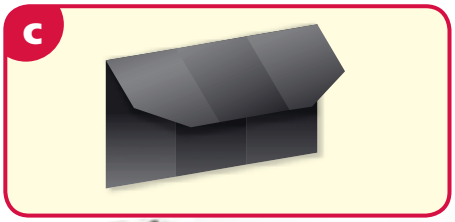
4. Pliega la parte superior hacia abajo. Corta las esquinas de la solapa. **Figura C**



B



C



Tomar notas de Matemáticas

Repasa el capítulo para identificar conceptos clave. Luego, anota en las tarjetas vocabulario, ejemplos y problemas de práctica. Guarda las tarjetas en la carpeta de cinta adhesiva.

CAPÍTULO 6

Guía de estudio: Repaso

Vocabulario

ecuación	196	variable independiente	202	par ordenado	202
valor de entrada	202	variable dependiente	202	recorrido	202
función	202	valor de salida	202	variables	214
tabla	202	dominio	202		

Completa los siguientes enunciados con las palabras del vocabulario:

1. Una _____ es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.
2. El conjunto de los valores de entrada, en una función, se llama _____.
3. En una _____ con 2 _____ una depende de la otra.
4. En una _____ se escriben los datos para graficar una función.
5. El conjunto de los valores de salida se llama _____.

EJEMPLOS

EJERCICIOS

6–1 Cómo resolver ecuaciones con variables en ambos lados:

■ **Resuelve $8a = 3a + 25$.**

$$8a = 3a + 25$$
$$8a - 3a = 3a - 3a + 25 \quad \textit{Resta.}$$
$$5a = 25$$
$$\frac{5a}{5} = \frac{25}{5} \quad \textit{Divide.}$$
$$a = 5$$

Resuelve.

1. $-6b + 9 = 12b$
2. $5 - 7c + = 3c - 19$
3. $18m - 14 = 12m + 2$
4. $4 - \frac{2}{5}x = \frac{1}{5}x - 8$
5. Mercedes ahorra $ 50 000 cada mes. Silvia ahorra $ 40 000 por mes, y comenzó con $ 100 000. ¿Después de cuántos meses tendrán la misma cantidad ahorrada?

EJEMPLOS

EJERCICIOS

6–2 Funciones, tablas y gráficos

■ **Halla el valor de salida para cada valor de entrada.**

$y = 3x + 4$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida
x	$3x + 4$	y
-1	$3(-1) + 4$	1
0	$3(0) + 4$	4
2	$3(2) + 4$	10

Halla el valor de salida para cada valor de entrada.

6. $y = 3x - 1$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida
x	$3x - 1$	y
-2		
3		
5		

Halla el valor de salida para cada valor de entrada.

7. $y = 2x - 1$ para $x = 2$

8. $y = -3x$ para $x = 5$

9. $y = x - 3$ para $x = 1$

10. $y = 2x + 4$ para $x = \frac{1}{2}$

11. $y = x - 6$ para $x = -5$

12. $y = 3x - 9$ para $x = -\frac{1}{3}$

EJEMPLOS

EJERCICIOS

6–3 Proporcionalidad directa e inversa

■ **Tres personas demoran 7 días en realizar un trabajo. ¿Cuántas personas harían el trabajo en 4 días?**

N° de personas	7	x
N° de días	7	4

Se necesitan más personas para hacer el trabajo en menos días, por lo tanto, es inversamente proporcional y el producto de las cantidades se mantiene constante, entonces:

$4x = 3 \cdot 7$

$x = \frac{21}{4} = 5{,}25$

Se necesitan aproximadamente 5 personas.

13. Marisol compró lápices para su dibujo y pagó $ 3 600 por 4 unidades. ¿Cuánto pagaría Marisol si compra una docena?

14. José corta el pasto en su casa y se demora 3 horas. Le pidió ayuda a dos amigos. ¿Cuánto tiempo demoraron realizando el trabajo juntos?

15. En una receta de cocina por cada dos cucharadas de azúcar corresponden una y media tazas de harina; si el total de harina es 6 tazas y ya se han echado 7 cucharadas de azúcar. ¿Cuántas cucharadas de azúcar faltan para cumplir con la receta?

16. En un curso la razón entre las niñas y los niños es 3:5; si en total hay 9 damas en el curso, entonces ¿Cuál es el total de alumnos (niñas y niños) del curso?

EJEMPLOS

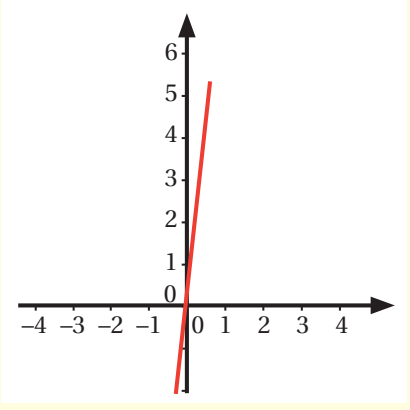
EJERCICIOS

6–4 Análisis de proporciones utilizando software gráfico

■ **La tarifa de un estacionamiento es de $ 15 por cada minuto de uso. La función que modela esta situación es:**

$$y = 15x$$

Utilizando Geogebra, grafica la función. Puedes observar que la recta pasa por el origen, por lo tanto es directamente proporcional.



17. La dueña de una tienda va a comprar mercadería al por mayor. Cada artículo vale $ 36. ¿Cuál es la función que modela esta situación? Gráfica y responde si es directa o inversamente proporcional.

Grafica las funciones y responde si es una relación directa o inversamente proporcional.

18. $y = \frac{5}{x}$

19. $y = 3x + 2$

20. $y = \frac{3}{4}x$

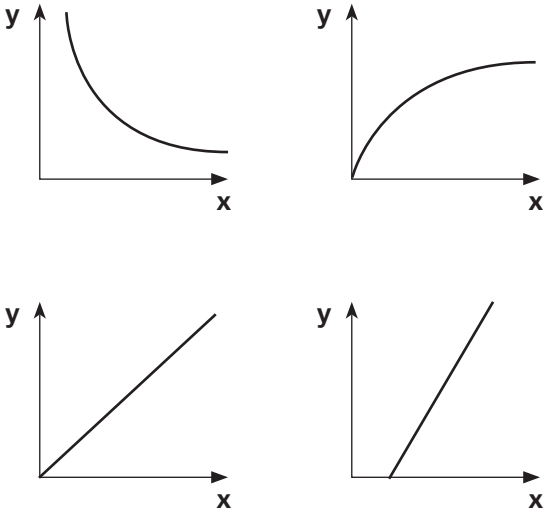
21. $y = 25\ x$

22. $y = 5x + \frac{1}{4}$

23. $y = 3x - 4$

24. $y = \frac{30}{x}$

25. Observa los siguientes gráficos e indica si corresponde a una proporción directa, inversa o no representa proporción.



Prueba del capítulo

CAPÍTULO 6

Resuelve:

1. $3y - 8 = 16$

2. $\frac{x}{3} + 12 = -4$

3. $\frac{a}{6} - 7 = -4$

4. $-7b + 5 = -51$

5. $\frac{5y - 4}{3} = 7$

6. $8r + 7 - 13 = 58$

7. $6 = \frac{12s - 6}{5}$

8. $8.7 = \frac{19{,}8 - 4t}{3}$

9. $-14q = 4q - 126$

10. $\frac{5}{6}p + 4 = \frac{1}{6}p - 16$

11. $9 - 6k = 3k - 54$

12. $-3{,}6d = -7d + 34$

13. La cuenta por la reparación de una computadora fue de $ 17 900. El costo de los repuestos fue $ 4 400 y el precio por la mano de obra fue $ 4 500 por hora. ¿Cuántas horas se tardó en reparar la computadora?

14. Los integrantes de un coro hornean galletas para recaudar fondos. Hornear una docena de galletas cuesta $ 2 250 y los gastos iniciales del coro fueron $ 15 750. Venden las galletas a $ 4 590 la docena. ¿Cuántas docenas deben vender para cubrir sus gastos?

Haz una tabla de valores para representar gráficamente cada función:

15. $y = 3x - 4$ **16.** $y = x - 8$ **17.** $y = 2x + 7$ **18.** $y = -x + 1$

19. Paula sube por una colina de 520 metros de altura a una velocidad de 40 metros por minuto. La ecuación $y = -40x + 520$ representa la distancia y que le falta caminar a Paula después de x minutos. Representa gráficamente la ecuación. Luego identifica la intersección con el eje x y la intersección con el eje y, explica su significado.

Indica si cada ecuación representa una proporción directa.

20. $5y = 10x$ **21.** $y - 3 = x$ **22.** $x + y = 4$ **23.** $-7x = y$

24. Rosa quiere ahorrar al menos $ 12 500 para comprar una patineta nueva. Ya ahorró $ 4 600. ¿Cuánto más debe ahorrar Rosa?

25. La bencina cuesta $ 875 por litro. Como máximo, ¿cuántos litros pueden comprarse con $ 22 000?

26. Los estudiantes de 8º básico del Colegio Flores de Manantial tratan de recaudar al menos $ 750 000 para la biblioteca pública local. Hasta ahora, cada uno de los 198 estudiantes ha reunido un promedio de $ 2 000. ¿Cuánto dinero más debe recaudar, en promedio, cada estudiante de 8º básico para alcanzar la meta?

CAPÍTULO 6

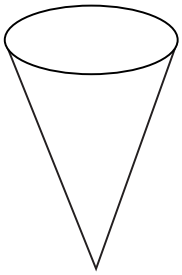
Evaluación acumulativa

Capítulos 1 – 6

1. El club de teatro de la escuela vende entradas para su obra. La entrada cuesta $ 600 para estudiantes y $ 1 000 para no estudiantes. Si vendieron 680 entradas y recaudaron $ 528 000 en total, ¿cuántas entradas para estudiantes vendieron?

(A) 680 entradas
(C) 300 entradas
(B) 380 entradas
(D) 260 entradas

2. Juan Carlos usa un cono de papel como si fuera una taza. Si el radio mide 4 cm y la altura mide 10 cm, ¿cuánta agua cabe en la taza? Usa $\pi = 3{,}14$.



(A) 49,9 cm^3
(C) 167,47 cm^3
(B) 502,4 cm^3
(D) 1 507,2 cm^3

3. Si el área de un círculo es 49π y el perímetro de su circunferencia es 14π, ¿cuál es su diámetro?

(A) 7 unidades
(C) 21 unidades
(B) 14 unidades
(D) 49 unidades

4. ¿Cómo se escribe el número 8 330 000 000 como una multiplicación de un número por una potencia de 10?

(A) $0{,}83 \cdot 10^{10}$
(C) $83{,}3 \cdot 10^{8}$
(B) $8{,}33 \cdot 10^{9}$
(D) $833 \cdot 10^{7}$

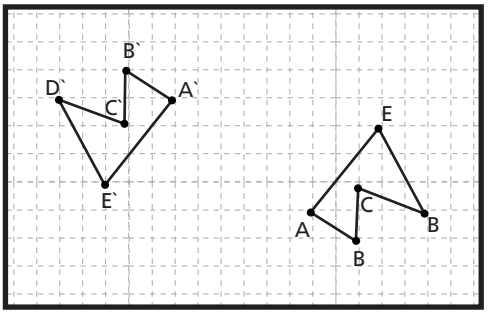
5. En un almuerzo hay 126 niñas y 104 niños. Cada uno debe escribir su nombre en un trozo de papel e introducirlo en un barril. Luego, se elegirá al azar uno de los nombres del barril y el ganador se llevará un reproductor de MP3 nuevo. ¿Qué probabilidad existe de que el nombre elegido sea de un niño? (Aproximar a la centésima.)

(A) 0,45
(C) 0,83
(B) 0,55
(D) 0,38

6. El valor de y en la ecuación $10y + 17 = -2y + 25$ es:

(A) 3
(C) $\frac{12}{8}$
(B) 1
(D) 4

7. En el dibujo se realizó una transformación isométrica. ¿Cuál es?



(A) simetría axial
(C) teselación
(B) simetría central
(D) traslación

8. Una impresora a color está diseñada para imprimir 8 páginas por minuto. ¿Cuántas páginas puede imprimir en 13 minutos?

(A) 16 páginas
(C) 84 páginas
(B) 21 páginas
(D) 104 páginas

9. ¿Qué expresión representa "El doble de la diferencia entre un número y ocho"?

(A) $2(x + 8)$ (C) $2(x - 8)$

(B) $2x - 8$ (D) $2x + 8$

10. ¿Qué razones forman una proporción?

(A) $\frac{4}{8}$ y $\frac{3}{6}$ (C) $\frac{4}{10}$ y $\frac{6}{16}$

(B) $\frac{4}{12}$ y $\frac{6}{15}$ (D) $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{8}$

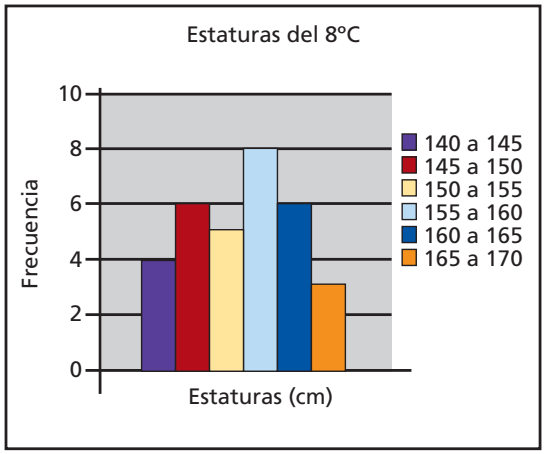
¡UN CONSEJO! **Escribe las explicaciones de las respuestas breves y desarrolladas en forma de oraciones completas.**

11. Cinco caminos conducen a la cumbre de un cerro:

(A) ¿De cuántas maneras puede un turista subir y bajar el cerro?

(B) ¿De cuántas maneras puede un turista subir y bajar el cerro si el ascenso y el descenso deben ser por caminos diferentes?

Para los ejercicios 12 a 16 usa los datos del gráfico.



12. ¿Cuántos alumnos miden entre 1,45 m y 2,60 m?

13. ¿Cuántos alumnos tiene el curso?

14. Elabora una tabla de frecuencias con la frecuencia relativa.

15. ¿Cuántos alumnos del curso miden más de 165 cm?

16. Estima a partir del gráfico y las tablas la moda y media aritmética.

17. El conjunto de números que aparece a continuación corresponde a las estaturas (cm) de los seleccionados de básquetbol de un colegio:

168	177	183	159	166
172	170	184	158	172
174	178	173	173	177
166	163	174	165	162
184	182	179	171	180
172	178	158	162	184

Registra los datos en una tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos de amplitud 5.

18. Calcula la moda de los datos.

Responde verdadero (V) o falso (F)

20. _____ El valor de x en la ecuación $3x + 12 = x + 1$ es -5.

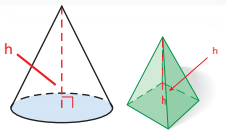
21. _____ Si un tarro de pintura cuesta $ 1 500 y cuatro tarros de la misma pintura cuestan $ 6 000, entonces hablamos de una proporcionalidad directa.

22. _____ La razón 1 : 4 es equivalente con la razón 3 : 8.

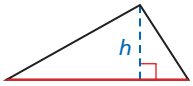
Glosario ...

A

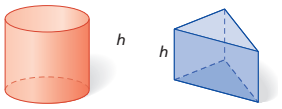
altura En una pirámide o cono, la distancia perpendicular desde la base a la cúspide.



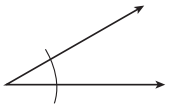
En un triángulo o cuadrilátero, la distancia perpendicular desde la base de la figura al vértice opuesto.



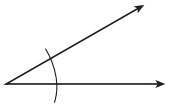
En un prisma o cilindro, la distancia perpendicular entre las bases.



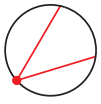
ángulo Figura formada por dos rayos con un extremo común llamado vértice.



ángulo agudo Ángulo que mide más de 0° y menos de 90°.

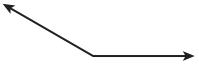


ángulo inscrito Ángulo formado por dos cuerdas cuyo vértice está en un círculo.



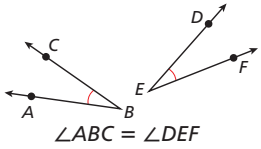
ángulo llano o extendido Ángulo que mide exactamente 180°.

ángulo obtuso Ángulo que mide más de 90° y menos de 180°.

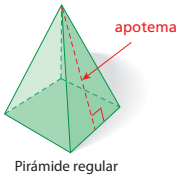


ángulo recto ángulo recto Ángulo que mide 90°

ángulos congruentes Ángulos que tienen la misma medida.

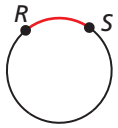


apotema lateral (de una pirámide) Distancia desde el vértice de una pirámide hasta el punto medio de una arista de la base.

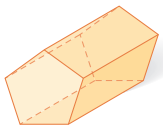


Glosario

arco Parte continua de una circunferencia $\overset{\frown}{RS}$

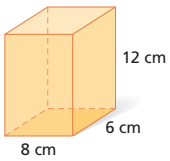


área lateral Suma de las áreas de las caras laterales de un prisma o pirámide, o área de la superficie lateral de un cilindro o cono.



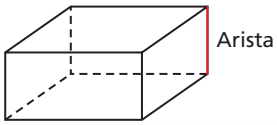
Área lateral = área de las 5 caras rectangulares

área total Suma de las áreas de las caras, o superficies, de una figura tridimensional.



Área total = $2(8)(12) + 2(8)(6) + 2(12)(6) = 432\ cm^2$

arista Segmento de recta donde se intersectan dos caras de un poliedro.



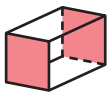
B

base Cuando un número es elevado a una potencia, el número que se usa como factor es la base.

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; 3 es la base.

base (de un polígono o figura tridimensional) Lado de un polígono; cara de una figura tridimensional según la cual se mide o se clasifica la figura.

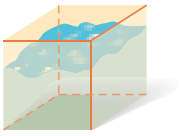
Bases de un cilindro



Bases de un prisma

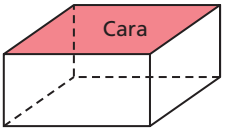
C

capacidad Cantidad que cabe en un recipiente cuando se llena.

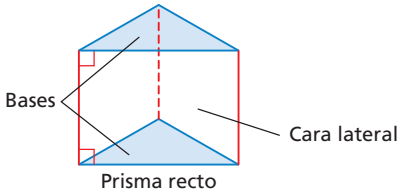


capital Cantidad inicial de dinero depositada o recibida en préstamo.

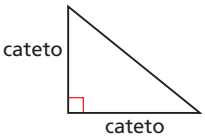
cara Superficie plana de un poliedro.



cara lateral En un prisma o pirámide, una cara que no es la base.

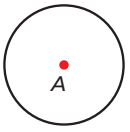


catetos En un triángulo rectángulo, los lados adyacentes al ángulo recto. En un triángulo isósceles, el par de lados congruentes.

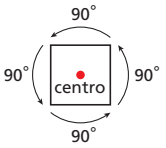


Celsius Escala métrica para medir la temperatura, en la que 0 °C es el punto de congelación del agua y 100 °C es el punto de ebullición del agua. También se llama *centígrado*.

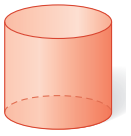
centro (de la circunferencia) Punto interior de un círculo que se encuentra a la misma distancia de todos los puntos de la circunferencia.



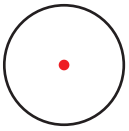
centro de una rotación Punto alrededor del cual se hace girar una figura.



cilindro Figura tridimensional con dos bases circulares paralelas y congruentes, unidas por una superficie lateral curva.



círculo Superficie del plano limitada por la circunferencia. Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a otro punto fijo, llamado centro, es menor o igual que una cantidad llamada radio.



circunferencia Es la curva geométrica plana y cerrada, cuyos puntos son equidistantes del centro.

cociente Resultado de dividir un número entre otro.

En 8 : 4 = 2, 2 es el cociente.

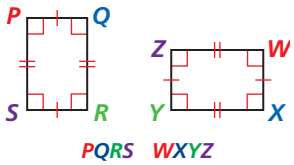
coeficiente Número que se multiplica por la variable en una expresión algebraica.

5 es el coeficiente en 5*b*.

complemento La serie de resultados que no están en el suceso.

Experimento: Lanzar un dado
Espacio muestral: {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Suceso: Sacar 1, 3, 4 ó 6
Complemento: Sacar 2 ó 5

congruentes Que tienen la misma forma y el mismo tamaño; expresado por $\cong$.



PQRS WXYZ

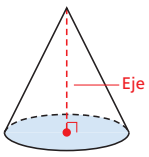
conjetura Juicio que se forma de las cosas o acaecimientos por indicios y observaciones.

conjunto solución Conjunto de valores que hacen verdadero un enunciado.

Desigualdad: $x + 3 \geq 5$
Conjunto solución: $x \geq 2$

cono Figura tridimensional con un vértice y una base circular.

cono regular o recto Cono en el que una línea perpendicular trazada de la base a la punta (vértice) pasa por el centro de la base.



Cono regular

constante Valor que no cambia.

3, 0, π

constante de proporción La constante k en ecuaciones de variación directa e inversa.

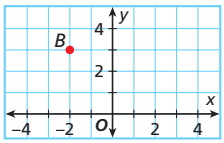
$y = 5x$
↑
constante de proporción

contraejemplo Ejemplo que demuestra que una conjetura o enunciado es falso.

conversión de unidades
Proceso que consiste en cambiar una unidad de medida por otra.

coordenada Uno de los números de un par ordenado que ubica un punto en una gráfica de coordenadas.

Las coordenadas de B son $(-2, 3)$.



coordenada x El primer número de un par ordenado; indica la distancia que debes avanzar hacia la izquierda o la derecha desde el origen, (0, 0).

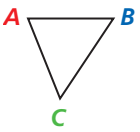
5 es la coordenada x en (5, 3).

coordenada y El segundo número de un par ordenado; indica la distancia que debes avanzar hacia arriba o hacia abajo desde el origen, (0, 0).

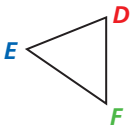
3 es la coordenada y en (5, 3).

correspondencia La relación entre dos o más objetos que coinciden.

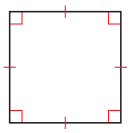
$\angle A$ y $\angle D$ son ángulos correspondientes.



$\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son lados correspondientes.



cuadrado Rectángulo con cuatro lados congruentes.



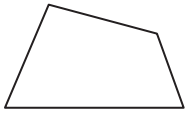
cuadrado (en numeración) Número elevado a la segunda potencia.

En 5^2, el número 5 está elevado al cuadrado.

cuadrado perfecto El cuadrado de un número natural.

$5^2 = 25$, por lo tanto, 25 es un cuadrado perfecto.

cuadrilátero Polígono de cuatro lados.

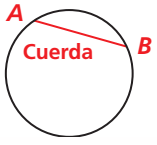


cubo (en numeración) Número elevado a la tercera potencia.

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
8 es el cubo de 2.

cubo (figura geométrica) Prisma rectangular con seis caras cuadradas congruentes.

cuerda Segmento de recta cuyos extremos forman parte de un círculo.



D

decágono Polígono de diez lados.

decimal finito Decimal con un número determinado de lugares decimales.

6,75

decimal infinito Decimal que nunca termina.

decimal periódico Decimal en el que uno o más dígitos se repiten infinitamente.

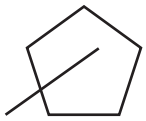
$0,757575\ldots = 0,\overline{75}$

descuento Cantidad que se resta del precio original de un artículo.

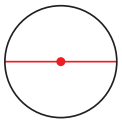
despejar la variable Dejar sola la variable en un lado de una ecuación o desigualdad para resolverla.

$$x + 7 = 22$$
$$\underline{-7 \quad -7}$$
$$x \quad = 15$$
$$\frac{12}{3} = \frac{3x}{3}$$
$$4 = x$$

diagonal Segmento de recta que une dos vértices no adyacentes de un polígono.



diámetro Segmento de recta que pasa por el centro de un círculo y tiene sus extremos en la circunferencia, o bien la longitud de ese segmento.



dimensiones (geometría)
Longitud, ancho o altura de una figura.

dodecaedro Poliedro de 12 caras.

E

dominio Conjunto de todos los posibles valores de entrada de una función.

El dominio de la función $y = x^2 + 1$ son todos los números reales.

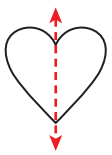
ecuación Enunciado matemático que indica que dos expresiones son equivalentes.

$y = 2x + 1$

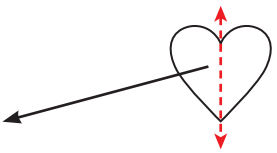
ecuación literal Ecuación que contiene varias letras distintas a la variable (constantes literales).

$y = a\,x + b$

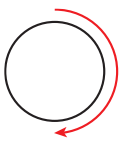
eje de reflexión Línea sobre la cual se invierte una figura para crear una imagen reflejada de la figura original. En una reflexión, una figura es "volteada" sobre el eje de reflexión.



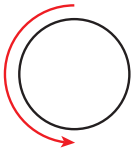
eje de simetría Línea de referencia imaginaria que divide una figura en dos mitades reflejas. Las dos partes se ven iguales, pero están orientadas en direcciones opuestas.



en el sentido de las manecillas del reloj Movimiento circular en la dirección que se indica.

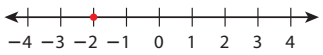


en sentido contrario a las manecillas del reloj
Movimiento circular en la dirección que se indica.

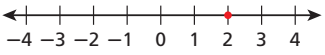


entero negativo Entero menor que cero.

−2 es un entero negativo.



entero positivo Entero mayor que cero.



2 es un entero positivo.

enteros Conjunto de todos los números naturales más cero y sus opuestos.

... −3, −2, 1, 0, 1, 2, 3, ...

equivalentes Que tienen el mismo valor.

espacio muestral Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento.

Cuando se lanza un dado, el espacio muestral es 1, 2, 3, 4, 5, 6.

estimación Una solución aproximada a la respuesta exacta que se halla mediante el redondeo u otros métodos.

estimar Hallar una solución aproximada a la respuesta exacta.

500 es una estimación de la suma 98 + 287 + 104.

evaluar Hallar el valor de una expresión numérica o algebraica.

Evalúa $2x + 7$ para $x = 3$.
$2x + 7$
$2(3) + 7$
$6 + 7$
13

exactitud Cercanía de una medida o un valor a la medida o el valor real.

experimento (probabilidad) En probabilidad, cualquier actividad basada en el azar, como lanzar una moneda.

Lanzar una moneda 10 veces y anotar la cantidad de "caras".

exponente Número que indica cuántas veces se usa la base como factor.

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$;
3 es el exponente.

expresión Enunciado matemático que contiene operaciones, números y/o variables.

$6x + 1$

expresión algebraica Expresión que contiene al menos una variable.

$x + 8$
$4(m - b)$

expresión equivalente Las expresiones equivalentes tienen el mismo valor para todos los valores de las variables.

$4x + 5x$ y $9x$ son expresiones equivalentes.

expresión numérica Expresión que incluye sólo números y operaciones.

$(2 \cdot 3) + 1$

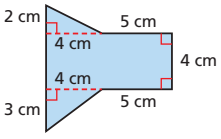
F

factor Número que se multiplica por otro para hallar un producto.

7 es un factor de 21 porque $7 \cdot 3 = 21$.

Fahrenheit Escala de temperatura en la que 32 °F es el punto de congelación del agua y 212 °F es el punto de ebullición.

figura compuesta Figura formada por figuras geométricas simples.



figuras congruentes Ver *congruente*.

forma desarrollada Número escrito como suma de los valores de sus dígitos.

236,536 escrito en forma desarrollada es 200 000 + 30 000 + 6 000 + 500 + 30 + 6.

fórmula Regla que muestra relaciones entre cantidades.

$A = \ell a$ es la fórmula del área de un rectángulo.

fracción Número escrito en la forma $\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$.

$\frac{2}{3}$

fracción impropia Fracción cuyo numerador es mayor que el denominador.

$\frac{17}{5}$

fracción propia Fracción en la que el numerador es menor que el denominador.

$\frac{3}{4}, \frac{1}{12}, \frac{7}{8}$

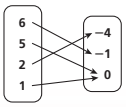
frecuencia Cantidad de veces que aparece un valor en un conjunto de datos.

Conjunto de datos: 5, 6, 6, 7, 8, 9. El valor 6 tiene una frecuencia de 2.

frecuencia acumulada La suma de datos sucesivos.

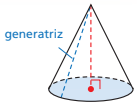
frecuencia relativa La frecuencia de un valor o un rango de valores dividido entre el número total de los valores en el conjunto.

función Relación de entrada-salida en la que a cada valor de entrada corresponde exactamente un valor de salida.



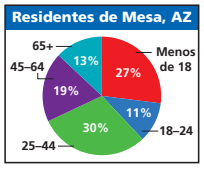
G

generatríz Distancia desde el vertice de un cono regular hasta un punto en el borde de la base.



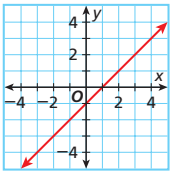
grado Unidad de medida para ángulos y temperaturas.

gráfica circular Gráfica que usa secciones de un círculo para comparar partes con el todo y con otras partes.

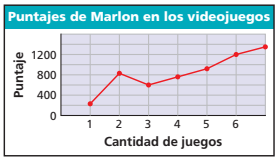


gráfica de barras Gráfica en la que se usan barras verticales u horizontales para presentar datos.

gráfica de una ecuación Gráfica del conjunto de pares ordenados que son soluciones de la ecuación.



gráfica lineal Gráfica que muestra cómo cambian los datos mediante segmentos de recta.

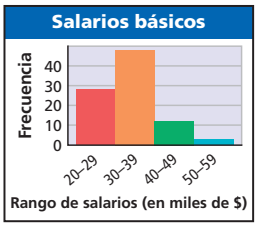


H

heptágono Polígono de siete lados.

hexágono Polígono de seis lados.

histograma Gráfica de barras que muestra la frecuencia de los datos en intervalos iguales.

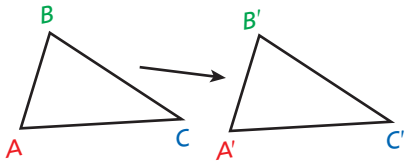


I

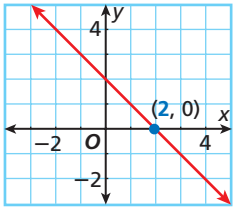
igualmente probables Resultados que tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Cuando se lanza una moneda, los resultados "cara" y "cruz" son igualmente probables.

imagen Figura que resulta de una transformación.

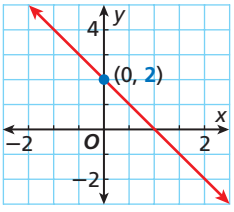


intersección con el eje x
Coordenada *x* del punto donde la gráfica de una línea cruza el eje *x*.



La intersección con el eje *x* es 2.

intersección con el eje y
Coordenada *y* del punto donde la gráfica de una línea cruza el eje *y*.



La intersección con el eje *y* es 2.

intervalo El espacio entre los valores marcados en una recta numérica o en la escala de una gráfica.

inverso aditivo De un número n, es un número que sumado con n, da cero (opuesto).

El inverso aditivo de 5 es −5.

inverso multiplicativo Un número multiplicado por su inverso multiplicativo es igual a 1. También se llama *recíproco*.

El inverso multiplicativo de $\frac{4}{5}$ es $\frac{5}{4}$.

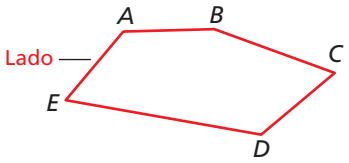
J

justo Se dice de un experimento en el que todos los resultados posibles son igualmente probables.

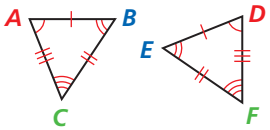
Cuando se lanza una moneda, que caiga cara o que caiga cruz son resultados igualmente probables, por lo tanto, es un experimento justo.

L

lado Línea que delimita las figuras geométricas; una de las caras que forman la parte exterior de un objeto.



lados correspondientes Lados que se ubican en la misma posición relativa en dos o más polígonos.



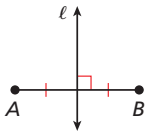
$\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son lados correspondientes.

M

media aritmética La suma de todos los elementos de un conjunto de datos dividida entre el número de elementos del conjunto. También se llama *promedio*.

Conjunto de datos: 4, 6, 7, 8, 10
Media aritmética:
$\frac{4+6+7+8+10}{5} = \frac{35}{5} = 7$

mediatriz ó simetral Línea que cruza un segmento en su punto medio y es perpendicular al segmento.



medida de tendencia central Medida que describe la parte media de un conjunto de datos; la media, la mediana y la moda son medidas de tendencia dominante.

mínima expresión Una fracción está en su mínima expresión cuando el numerador y el denominador no tienen más factor común que 1.

Fracción: $\frac{8}{12}$
Mínima expresión: $\frac{2}{3}$

moda Número o números más frecuentes en un conjunto de datos; si todos los números aparecen con la misma frecuencia, no hay moda.

Conjunto de datos: 3, 5, 8, 8, 10
Moda: 8

muestra Una parte de la población.

muestra aleatoria Muestra en la que cada individuo u objeto de la población tiene la misma posibilidad de ser elegido.

muestra auto-seleccionada
Una muestra en la que los miembros eligen participar.

En una tienda dan tarjetas de encuesta para los clientes que quieran completarlas.

muestra de conveniencia Una muestra basada en miembros de la población que están fácilmente disponibles.

muestra imparcial Una muestra es imparcial si todos los individuos de la población tienen la misma probabilidad de ser elegidos.

muestra no representativa
Muestra que no representa adecuadamente la población.

muestra sistemática Muestra de una población, que ha sido elegida mediante un patrón.

Para realizar una encuesta telefónica, se elige cada décimo nombre del directorio telefónico.

múltiplo El producto de cualquier número y un número natural distinto de cero es un múltiplo de ese número.

6 es múltiplo de 2 y de 3 porque $2 \cdot 3 = 6$

N

notación científica Método que se usa para escribir números muy grandes o muy pequeños mediante potencias de 10.

$12\,560\,000\,000\,000 = 1\,256 \cdot 10^{13}$

notación de funciones
Notación que se usa para describir una función.

Ecuación: $y = 2x$
Notación de función: $f(x) = 2x$

número racional Número que se puede escribir como una razón de dos enteros.

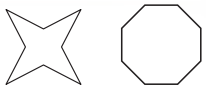
6 se puede expresar como $\frac{6}{1}$.
0,5 se puede expresar como $\frac{1}{2}$.

número real Número racional o irracional.

números aleatorios En un conjunto de números aleatorios, todos los números tienen la misma probabilidad de ser seleccionados.

O

octágono Polígono de ocho lados.

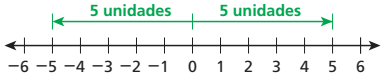


operaciones inversas
Operaciones que se cancelan mutuamente: suma y resta, o multiplicación y división.

La suma y la resta son operaciones inversas:
$5 + 3 + 8;\ 8 - 3 = 5$
La multiplicación y la división son operaciones inversas:
$2 \cdot 3 = 6;\ 6 : 3 = 2$

opuestos Dos números que están a la misma distancia de cero en una recta numérica. También se llaman *inversos aditivos*.

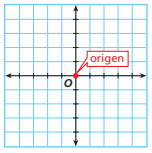
5 y −5 son opuestos.



orden de las operaciones Regla para evaluar expresiones: primero se hacen las operaciones entre paréntesis, luego se hallan las potencias y raíces, después todas las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha, y por último, todas las sumas y restas de izquierda a derecha.

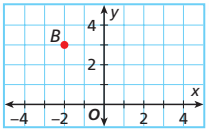
$4^2 + 8 : 2$	Evalúa la potencia.
$16 + 8 : 2$	Divide.
$16 + 4$	Suma.
20	

origen Punto de intersección entre el eje x y el eje y en un plano cartesiano: (0, 0).



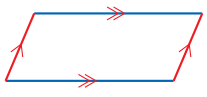
P

par ordenado Par de números que sirven para ubicar un punto en un plano cartesiano.



Las coordenadas de B son $(-2, 3)$.

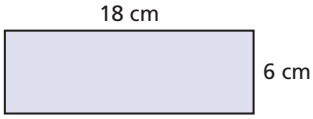
paralelogramo Cuadrilátero con dos pares de lados paralelos.



pentágono Polígono de cinco lados.

perímetro Distancia alrededor de un polígono.

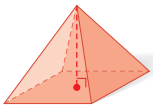
perímetro =
18 + 6 + 18 + 6 = 48 cm



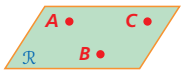
pi (π) Razón de la circunferencia de un círculo a la longitud de su diámetro; $\pi \approx 3{,}14$ ó $\frac{22}{7}$.

pirámide Poliedro cuya base es un polígono; tiene caras triangulares que se juntan en un vértice común.

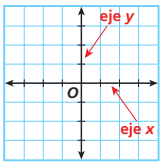
pirámide regular Pirámide que tiene un polígono regular como base y caras laterales congruentes.



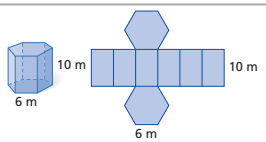
plano Superficie plana que no tiene espesor y que se extiende por siempre.



plano cartesiano Plano formado por la intersección de una recta numérica horizontal llamada eje *x* y otra vertical llamada eje *y*.



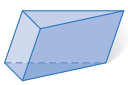
plantilla o red Arreglo de figuras bidimensionales que se doblan para formar un poliedro.



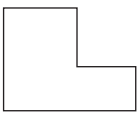
población Grupo completo de objetos o individuos que se desea estudiar.

En una encuesta sobre los hábitos de estudio de estudiantes de escuela intermedia, la población son todos los estudiantes de escuela intermedia.

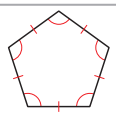
poliedro Figura tridimensional cuyas superficies o caras tienen forma de polígonos.



polígono Figura plana cerrada, formada por tres o más segmentos de recta que se intersecan sólo en sus extremos (vértices).



polígono regular Polígono con lados y ángulos congruentes.



porcentaje de cambio Cantidad en que un número aumenta o disminuye, expresada como un porcentaje.

porcentaje de disminución
Porcentaje de cambio en que una cantidad disminuye.

Un artículo que cuesta $ 8 con descuento cuesta $ 6. La cantidad de la disminución es $ 2 y el porcentaje de disminución es $\frac{2}{8} = 0{,}25 = 25\%$.

porcentaje de incremento
Porcentaje de cambio en que una cantidad aumenta.

El precio de un artículo aumenta de $ 8 a $ 12. La cantidad del aumento es $ 4 y el porcentaje de incremento es $\frac{4}{8} = 0{,}5 = 50\%$.

potencia Número que resulta al elevar una base a un exponente.

$2^3 = 8$; por lo tanto, 2 a la 3.° potencia es 8.

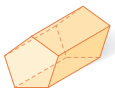
precio unitario Tasa unitaria que sirve para comparar precios.

El cereal cuesta $ 0,23 por gramo.

principio fundamental de conteo Si un suceso tiene m resultados posibles y otro suceso tiene n resultados posibles después de ocurrido el primer suceso, entonces hay $m \cdot n$ resultados posibles en total para los dos sucesos.

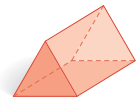
Hay 4 colores de camisas y 3 colores de pantalones. Hay $4 \cdot 3 = 12$ combinaciones de ropa posibles.

prisma Poliedro con dos bases congruentes con forma de polígono y caras con forma de paralelogramo.



paralelepípedo Poliedro cuyas bases son rectángulos y cuyas caras tienen forma de paralelogramo.

prisma triangular Poliedro cuyas bases son triángulos y cuyas demás caras tienen forma de paralelogramo.



probabilidad Un número entre 0 y 1 (ó 0% y 100%) que describe qué tan probable es un suceso.

En una bolsa hay 3 bolitas rojas y 4 azules. La probabilidad de elegir al azar una bolita roja es $\frac{3}{7}$.

probabilidad experimental
Razón del número de veces que ocurre un suceso al número total de pruebas o al número de veces que se realiza el experimento.

María hizo 27 lanzamientos libres y anotó 16. La probabilidad experimental de anotar un lanzamiento libre es

$$\frac{\text{cantidad de aciertos}}{\text{cantidad de intentos}} = \frac{16}{27} \approx 0{,}59.$$

probabilidad teórica Razón del número de las maneras que puede ocurrir un suceso al número total de resultados igualmente probables.

Cuando se lanza un dado, la probabilidad teórica de que caiga en 4 es $\frac{1}{6}$.

producto cruzado El producto de los números multiplicados en diagonal cuando se comparan dos razones.

En la proporción $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, los productos cruzados son $2 \cdot 6 = 12$ y $3 \cdot 4 = 12$.

promedio La suma de los elementos de un conjunto de datos dividida entre el número de elementos del conjunto. También se le llama *media aritmética.*

Conjunto de datos: 4, 6, 7, 8, 10

Promedio: $\frac{4 + 6 + 7 + 8 + 10}{5}$

$= \frac{35}{5} = 7$

propiedad asociativa (de la multiplicación) Propiedad que establece que para todos los números reales a, b y c, el producto siempre es el mismo, sin importar cómo se agrupen.

$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

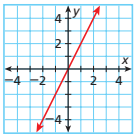
propiedad conmutativa (de la multiplicación) Propiedad que establece que multiplicar dos o más números en cualquier orden no altera el producto.

$6 \cdot 12 = 12 \cdot 6$; $a \cdot b = b \cdot a$

propiedad de identidad (del uno) Propiedad que establece que el producto de 1 y cualquier número es ese número.

$4 \cdot 1 = 4$
$-3 \cdot 1 = -3$

proporción directa Relación entre dos variables, x e y, que puede expresarse en la forma $y = kx$, donde k es una constante distinta de cero.



$y = 2x$

proporción inversa Relación en la que una cantidad variable aumenta a medida que otra cantidad variable disminuye; el producto de las variables es una constante.

$xy = 7,\ y = \frac{7}{x}$

propiedad de igualdad de la división Propiedad que establece que puedes dividir ambos lados de una ecuación entre el mismo número distinto de cero, y la nueva ecuación tendrá la misma solución.

propiedad de igualdad de la multiplicación Propiedad que establece que puedes multiplicar ambos lados de una ecuación por el mismo número y la nueva ecuación tendrá la misma solución.

$3 \cdot 4 = 12$
$3 \cdot 4 \cdot 2 = 12 \cdot 2$
$24 = 24$

propiedad de igualdad de la resta Propiedad que establece que puedes restar el mismo número de ambos lados de una ecuación y la nueva ecuación tendrá la misma solución.

$14 - 6 = 8$
$-6 = -6$
$14 - 12 = 2$

propiedad de igualdad de la suma Propiedad que establece que puedes sumar el mismo número a ambos lados de una ecuación y la nueva ecuación tendrá la misma solución.

$14 - 6 = 8$
$+6 \quad +6$
$14 = 14$

propiedad de la suma de los opuestos Propiedad que establece que la suma de un número y su opuesto es cero.

$12 + (-12) = 0$

propiedad de multiplicación del cero Propiedad que establece que para todo número real a, $a \cdot 0 = 0$ y $0 \cdot a = 0$.

propiedad distributiva Dados los números reales a, b y c, $a(b + c) = ab + ac$, y $a(b - c)\ a = ab - ac$.

$5 \cdot 21 = 5(20 + 1) =$
$(5 \cdot 20) + (5 \cdot 1)$

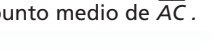
proporción Ecuación que establece que dos razones son equivalentes.

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

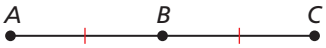
prueba Cada repetición u observación de un experimento.

Cuando se lanza un dado, cada lanzamiento es una prueba.

punto Elemento geométrico que no tiene dimensión y que se utiliza para indicar una ubicación.



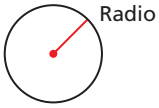
punto medio El punto que divide un segmento de recta en dos segmentos de recta congruentes.



B es el punto medio de $\overline{AC}$.

R

radio Segmento de recta con un extremo en el centro de un círculo y el otro en la circunferencia, o bien se llama radio a la longitud de ese segmento.



recorrido (en una función) El conjunto de todos los valores de salida posibles de una función.

El recorrido de $y = |x|$ es $y \geq 0$.

rayo Parte de una recta que comienza en un extremo y se extiende infinitamente en una dirección.

razón Comparación de dos cantidades mediante una división.

12 a 25, 12:25, $\frac{12}{25}$

razones equivalentes Razones que representan la misma comparación.

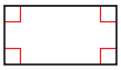
$\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son razones equivalentes.

recíproco Uno de dos números cuyo producto es igual a 1. También se llama *inverso multiplicativo.*

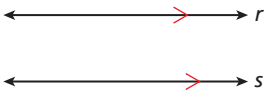
El recíproco de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$.

recta Trayectoria recta que no tiene espesor y se extiende infinitamente.

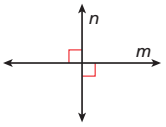
rectángulo Paralelogramo con cuatro ángulos rectos.



rectas paralelas Rectas que se encuentran en el mismo plano pero que nunca se intersecan.

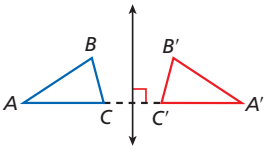


rectas perpendiculares Rectas que al intersecarse forman ángulos rectos.



rectas secantes Rectas que se cruzan en un solo punto.

reflexión Transformación que ocurre cuando se invierte una figura sobre una línea.



relación Conjunto de pares ordenados.

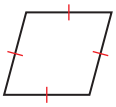
(0, 5), (0, 4), (2, 3), (4, 0)

resolver Hallar una respuesta o solución.

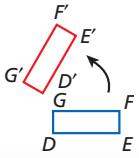
resultado (en probabilidad)
Posible resultado de un experimento de probabilidad.

Cuando se lanza un dado, los resultados posibles son 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

rombo Paralelogramo en el que todos los lados son congruentes.



rotación Transformación que ocurre cuando una figura gira alrededor de un punto.

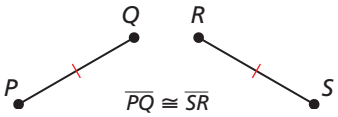


S

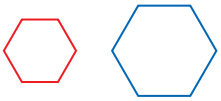
segmento Parte de una línea entre dos extremos.

segmento de recta Parte de una recta que consiste en dos extremos y todos los puntos entre éstos.

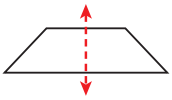
segmentos congruentes
Segmentos que tienen la misma longitud.



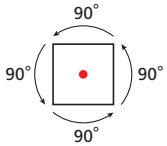
semejantes Figuras que tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño.



simetría axial Una figura tiene simetría axial si una de sus mitades es la imagen reflejada de la otra.



simetría de rotación Ocurre cuando una figura gira menos de 360° alrededor de un punto central sin dejar de ser congruente con la figura original.



simplificar Escribir una fracción o expresión numérica en su mínima expresión.

simulación Representación de un experimento, por lo general, de uno cuya realización sería demasiado difícil o llevaría mucho tiempo.

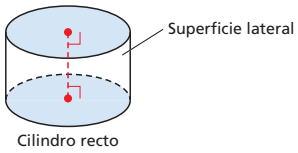
solución de una ecuación Valor o valores que hacen verdadera una ecuación.

Ecuación: $x + 2 = 6$
Solución: $x = 4$

suceso Un resultado o una serie de resultados de un experimento o una situación.

Cuando se lanza un dado, el suceso "número impar" consiste en los resultados 1, 3 y 5.

superficie lateral En un cilindro, superficie curva que une las bases circulares; en un cono, la superficie curva que no es la base.



sustituir Reemplazar una variable por un número u otra expresión en una expresión algebraica.

Sustituir m por 3 en la expresión $5m - 2$ da $5(3) - 2 = 15 - 2 = 13$.

T

tabla de frecuencia Una tabla en la que se organizan los datos de acuerdo con el número de veces que aparece cada uno (o la frecuencia).

Conjunto de datos: 1, 1, 2, 2, 3, 5, 5, 5
Tabla de frecuencia:

Datos	Frecuencia
1	2
2	2
3	1

tabla de funciones Tabla de pares ordenados que representan soluciones de una función.

x	3	4	5	6
y	7	9	11	13

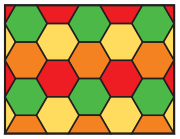
término (en una expresión) Las partes de una expresión que se suman o se restan.

$3x^2 +$ $6x -$ 8
Término Término Término

términos semejantes Términos que contienen las mismas variables elevadas a los mismos exponentes.

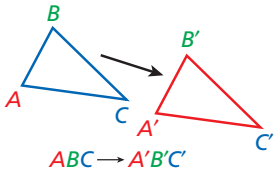
En la expresión $3a^2 + 5b + 12a^2$, $3a^2$ y $12a^2$ son términos semejantes.

teselado Patrón repetido de figuras planas que cubren totalmente un plano sin superponerse ni dejar huecos.

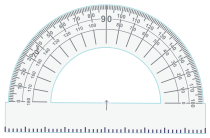


Glosario

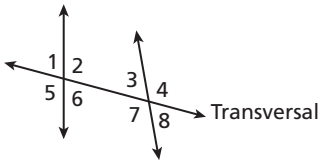
transformación Cambio en el tamaño o la posición de una figura.



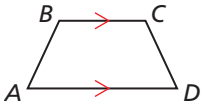
transportador Instrumento para medir ángulos.



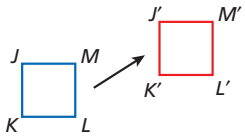
transversal Línea que cruza dos o más líneas.



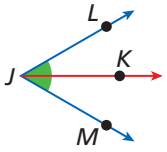
trapecio Cuadrilátero con un par de lados paralelos.



traslación Desplazamiento de una figura a lo largo de una línea recta.

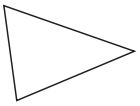


trazar una bisectriz Dividir un ángulo en dos partes congruentes.

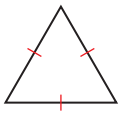


$\overrightarrow{JK}$ es bisectriz de $\angle LJM$.

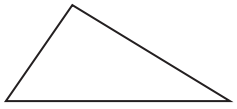
triángulo acutángulo Triángulo en el que todos los ángulos miden menos de 90°.



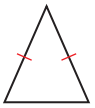
triángulo equilátero Triángulo con tres lados congruentes.



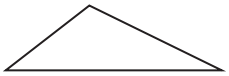
triángulo escaleno Triángulo que no tiene lados congruentes.



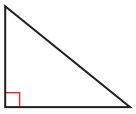
triángulo isósceles Triángulo que tiene al menos dos lados congruentes.



triángulo obtusángulo
Triángulo que tiene un ángulo obtuso.



triángulo rectángulo Triángulo que tiene un ángulo recto.



V

valor absoluto Distancia a la que está un número de 0 en una recta numérica. El símbolo del valor absoluto es $| \, |$.

$|-5| = 5$

valor de entrada Valor que se usa para sustituir una variable en una expresión o función.

En la función $y = 6x$, el valor de entrada 4 produce un valor de salida de 24.

valor de salida Valor que resulta después de sustituir un valor de entrada determinado en una expresión o función.

Para la función $y = 6x$, el valor de entrada 4 produce un valor de salida de 24.

variable Símbolo que representa una cantidad que puede cambiar.

En la expresión $2x + 3$, x es la variable.

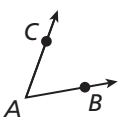
variable dependiente Valor de salida de una función; variable cuyo valor depende del valor de entrada, o variable independiente.

Para $y = 2x + 1$, y es la variable dependiente.
valor de entrada: x
valor de salida: y

variable independiente Valor de entrada de una función; variable cuyo valor determina el valor de salida, o variable dependiente.

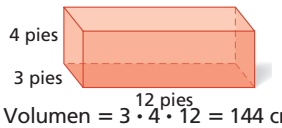
Para $y = 2x + 1$, x es la variable independiente.
valor de entrada: x
valor de salida: y

vértice En un ángulo o polígono, el punto de intersección de dos lados; en un poliedro, el punto de intersección de tres o más caras; en un cono o pirámide, la punta.



A es el vértice de $\angle CAB$.

volumen Número de unidades cúbicas que se necesitan para llenar un espacio.



Volumen = $3 \cdot 4 \cdot 12 = 144$ cm^2

Índice temático

A

Ángulo de rotación 80
Ángulo obtuso 102
Apotema lateral 118, 120, 121
Arco 95, 108, 111, 144, 174,
Área 54, 148, 149, 153, 179, 190, 191, 199, 216, 226,

B

Base 36, 37, 38, 40, 41, 42, 44, 47, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 59, 69, 100, 107, 118, 119, 120, 121, 122, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 138, 139, 140, 144, 148, 149, 153, 199
Base fraccionaria 51, 52
Bisectriz 39

C

Cálculos mentales 12, 19, 24, 26
Cara 30, 118, 122, 124, 132, 144, 148
Centro de rotación 78, 80, 87, 88, 89, 99
Cilindro 104, 106, 122, 123, 124, 125, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 144, 146, 148, 149
Círculo 39, 93, 104, 106, 112, 113, 114, 116, 144, 145, 149, 191, 199, 226
Circunferencia 80, 95, 104, 106, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 118, 122, 132, 144, 145, 148, 149, 226
Coordenada x 71
Coordenada y 71
Cociente 3, 4, 13, 16, 19, 21, 22, 23, 28, 31, 33, 35, 57, 67, 77, 159, 184, 193
Cono 104, 106, 118, 119, 120, 121, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 140, 141, 144, 145, 146, 226
Cuerda 108, 109, 110, 111, 144, 148
Cuerpos geométricos 104, 106

D

Datos agrupados 150, 152, 155, 159, 162, 163, 164, 165, 168, 170, 187,
Diámetro 46, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 119, 120, 121, 123, 124, 128, 129, 131, 132, 134, 135, 136, 141, 144, 145, 148, 149, 191,
Directamente proporcionales 208, 209, 210, 211, 214, 215, 224
División 2, 3, 4, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 24, 31, 32, 35, 36, 38, 54, 55, 56, 62, 67, 69
División de potencias 36, 54, 55, 56, 62, 67
Dominio 202, 203, 204, 206

E

Ecuación lineal 194
Eje de reflexión 74, 75
Eje de simetría 79, 84, 85, 86, 88, 94, 98, 99, 101, 103
Entrada 194, 202, 203, 204, 205, 222, 223
Espacio muestral 152, 176, 182
Experimento 152, 172, 176, 177, 178, 180, 184, 186,
Exponente 40, 41, 42, 44, 45, 47, 50, 51, 52, 54, 55, 57, 58, 59, 66, 69, 103

F

Factores 4, 11, 22, 39, 41
Figuras compuestas 134
Frecuencia 90, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 183, 186, 187, 189, 227
Frecuencia acumulada 158, 159, 160, 161, 162, 163, 165, 166, 167, 169, 187, 189
Frecuencia relativa 159, 161, 162, 165, 166, 169, 176, 227
Función 193, 194, 202, 203, 205, 206, 208, 214, 215, 216, 217, 222, 223, 224, 225

G

Geometría 72, 95, 97, 104, 108
Generatriz 118, 119, 120, 121, 144
Giros 115, 188

I

Igualmente probable 176, 177, 186,
Intervalo modal 162, 164, 167, 186
Inversamente proporcionales 209, 215

J

Justo 176, 178, 186

L

Límite inferior 164, 169
Lugar geométrico 106, 108, 112, 144

M

Marca de clase 159, 161, 162, 164, 165, 166, 169, 187
Media aritmética 150, 151, 158, 159, 161, 170, 187, 217
Mediana 175, 227
Moda 150, 152, 159, 161, 162, 164, 165, 166, 167, 170, 183, 186, 187, 191, 217, 227
Muestra 48, 150, 154
Muestra aleatoria 154, 155, 156, 186
Muestra auto – seleccionada 154
Muestra sistemática 154
Multiplicación 198, 209, 226
Multiplicación de potencias 50, 51, 52, 62

No proporcionales 215, 216, 217
Notación científica 36, 38, 39, 44, 45, 46, 47, 48, 66, 67, 68, 69, 200
Número negativo 4, 7, 16, 32, 35
Número positivo 4, 16, 32, 34
Número racional 38, 115
Números enteros 16, 29, 32, 40

Operaciones con enteros 2, 24, 28, 33
Operación inversa 16, 32, 193, 194, 198
Opuesto aditivo 24, 32

Palíndromos 64
Par ordenado 71, 79, 193, 202, 203, 204
Patrón numérico 24
Perímetro 198, 199, 200, 206, 211, 226
Pirámide 104, 107, 118, 119, 120, 121, 126, 127, 128, 129, 130, 140, 144, 145, 146, 148, 149, 153
Plano cartesiano 71, 72
Población 43, 154, 155, 157, 168, 186
Polígono 70, 72, 78, 79, 80, 81, 82, 90, 91, 93, 96, 105, 111, 113
Potencias 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 48, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 62, 66, 67, 68, 103
Potencia de base 2 50, 66
Potencia de una potencia 36, 58, 59, 60, 62, 67
Prisma 122, 124, 125, 130, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 144, 146, 190
Probabilidad 150, 152, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 184, 185, 186, 188, 189, 190, 191, 226
Probabilidad experimental 150, 152, 171, 172, 173, 174, 175, 180, 181, 182
Probabilidad teórica 150, 152, 176, 177, 180, 181, 182, 186, 188
Producto 4, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 16, 21, 22, 32, 34, 35, 41, 44, 52, 57, 59, 61, 66, 67, 68, 69, 103, 105, 107, 157, 193, 208, 209, 218, 221, 223
Promedio 205, 218
Propiedad conmutativa de la multiplicación 4
Propiedad del cero en la multiplicación 10
Proporciones 192, 208, 209, 212, 213, 214, 218, 220, 221, 224
Proporcionalidad directa e inversa 192, 208, 223, 227

Radio 80, 95, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 119, 120, 123, 125, 127, 128, 129, 131, 133, 136, 137, 138, 144, 145, 148, 149, 191, 199, 226
Rango 217
Recorrido 202, 203, 204, 206
Recta numérica 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 32, 34, 157
Reflexión 72, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 82, 83, 86, 89, 94, 98, 99, 101, 103, 107,
Resultado 16, 30, 35, 50, 53, 62, 63, 67, 68, 69, 86, 91, 135, 152, 154, 172, 173, 176, 177, 178, 181, 184, 189, 190, 202
Rotación 74, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 94, 98, 99, 100, 101, 103, 106

Salida 194, 202, 203, 204, 205, 222, 223
Secante 108, 144, 148
Simetría axial 79, 85, 86, 87, 88, 89, 95, 98, 103, 226
Simetría central 86, 87, 103, 226
Suceso 152, 172, 176, 177, 178, 179, 182, 186, 189
Sumas 4
Superficie 11, 13, 20, 54, 61, 67, 113, 118, 120, 122, 123, 126, 141, 144, 148, 149, 211, 216

Tabla 13, 17, 18, 19, 39, 41, 43, 44, 64, 103, 121, 138, 150, 151, 152, 153, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 175, 179, 186, 189, 192, 202, 203, 204, 205, 206,207, 208, 209, 210, 217, 219, 223, 225, 227
Tabla de frecuencia 150, 151, 152, 153, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 179, 186, 189, 227
Tangente 108, 144
Teselado 70, 72, 77, 90, 91, 92, 94, 96, 98, 100
Teselado regular 90
Teselado semiregular 90
Transformación 70, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 84, 85, 98, 100, 101
Transformaciones isométricas 70, 74, 84, 98, 100
Traslación 70, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 85, 95, 98, 99, 100, 101, 106

Valor de entrada 202, 203, 204, 222, 223, 224
Valor de la razón 208
Valor de la potencia 37, 38, 40, 50
Variable continua 155
Variable dependiente 202, 222
Variable discreta 155
Variable independiente 202, 222
Variación directa 194

Solucionario

Capítulo 1

Página 3

¿ Estás listo?

1. Dividir
2. Multiplicación es una suma reiterada.
3. Dividir Producto
4. Cociente
5. 84
6. 15
7. 1
8. 105
9. 6
10. 4
11. 24
12. 12
13. 135
14. 3
15. 8
16. 38
17. 30
18. 63
19. 32
20. 88
21. 36
22. 132
23. 144
24. 64
25. 81
26. 16
27. 42
28. 20
29. 5
30. 7
31. 4
32. 8
33. 7
34. 6
35. 2
36. 5
37. 6
38. 12
39. 11
40. 9

Capítulo 1 · Lección 1

Página 8 - 9

1. -40
2. -12
3. 20
4. -16
5. 12
6. -16
7. 10
8. -10
9. 92 m.
10. 6
11. -15
12. -8
13. 14
14. 18
15. -12
16. -9
17. -24
18. 27 720
19. -10
20. 6
21. -18
22. -15
23. -12
24. -9
25. -16
26. -24
27. -7
28. 27
29. -15
30. -20
31. -30
32. -14
33. 24
34. -16
35. -5
36. 16
37. 25
38. Respuesta abierta
39. C
40. C
41. 40
42. -32
43. -54
44. -16
45. 5
46. -11
47. -2
48. 9

Capítulo 1 · Leccción 2

Páginas 12 – 13

1. -8
2. -36
3. +
4. –
5. +
6. –
7. +
8. 0
9. -78
10. -45
11. 581
12. -114
13. -15
14. -10
15. +
16. –
17. –
18. +
19. –
20. -96
21. 0
22. -252
23. 40
24. -11
25. 3
26. 7
27. -5
28. 4
29. –
30. +
31. –
32. –
33. +
34. -21
35. -504
36. 111
37. -380
38. -462
39. -48
40. -200
41. 45
42. -704
43. 48
44. 5
45. -8
46. -10
47. 0
48. 8
49. -12
50. -3
51. -9
52. 150 m.
53. Abierta
54. a) Negativo; positivo;
    b) siempre será positivo; siempre será negativo
55. uno o tres
56. abierta
57. B
58. A
59. –
60. +
61. +
62. –
63. 84
64. -324
65. 9
66. 3 753

Página 14

¿Listo para seguir?

1. A 9. Dibujar fichas
10. 10
11. -15
12. 12
13. -12
14. -12
15. -6
16. -15
17. -14
18. -18
19. 120
20. -105
21. 132
22. -84
23. 840
24. -4 042
25. -2 736
26. 675
27. 1 148
28. -882
29. -2 415
30. 4 664
31. -7200
32. -80
33. 168
34. -90
35. -1 280
36. -216
37. –2 184
38. -5 340
39. Igual
40. Distinto
41. +, -, - ó -, +, -

Página 15

Enfoque en resolución de problemas

1. 117 seg.
2. $ 400
3. 33 días

Capítulo 1 · Lección 3

Páginas 18 – 19 - 20

1. -6
2. 4
3. -5
4. 0
5. 8
6. 9
7. -9
8. -7
9. 12
10. -6
11. 28,5
12. 45
13. -41
14. 95
15. $ 1 400
16. -8,8 °C
17. -6 °C
18. -9
19. 11
20. -10
21. 8
22. $ 28 250
23. -8,8 °C
24. 17,6 °C
25. -23
26. 15
27. 8
28. -5
29. -32
30. 0
31. -21
32. 60
33. -28
34. 240
35. -46
36. -48
37. 35
38. -50
39. -225
40. 63
41. -45
42. -5 400
43. -288
44. -6
45. 70
46. 28
47. 2
48. 60
49. -12
50. 5
51. -54
52. -39
53. -6
54. -10
55. 9
56. 0
57. -45
58. Respuesta abierta
59. Positivo
60. Respuesta abierta
61. -1 r -3
62. El de -36 : -12 porque es el único positivo
63. Respuesta abierta
64. 160 cm^3
65. (2, 1)
66. -84
67. 25
68. -8
69. 5
70. 52
71. 85
72. 26
73. 24 → C
74. 1 → C

Capítulo 1 · Lección 4

Página 23

1. +, -
2. +, - ; -, +
3. +, - ; -, +
4. - , - ; + , +
5. 27
6. 12
7. -9
8. -16
9. + , - ; - , +; -, - ; + , +
10. + , - ; - , +; -, - ; + , +
11. + , - ; - , +; -, - ; + , +
12. 21
13. 54
14. -12
15. -32
16. -77
17. -1
18. -28
19. 1
20. -5
21. -7
22. -75
23. 48
24. -192
25. 2
26. -325
27. 90
28. -10
29. -54
30. 0
31. -6
32. 4
33. -56
34. 6
35. 0
36. 24 • -6 = 48 • -3
37. 9 • -2; -2 • 9
38. Y = 5
39. 2 7/8
40. -25
41. C

Capítulo 1 · Lección 5

Páginas 26 - 27

1. 19
2. 3
3. 33
4. 70
5. 3
6. -8
7. Sumar -4; -23, -27
8. (-3)n; 81, -243
9. 3
10. 20
11. 2
12. -10
13. 8
14. -36
15. -4
16. 6
17. -6
18. -1
19. Sumar -2; -13; -15
20. Sumar -9; - 22; -31
21. Multiplicar -3; -162; -1 458
22. 0
23. 104
24. 13
25. -320
26. 5
27. 20
28. -25
29. -66
30. Multiplicar (• -1); 6; -6
31. Sumar 5; 9, 19
32. Multiplicar (•4); -256; -1 024
33. 2 920
34. Bajó 25 grados
35. -29 + 11n , si n ≥0 ; -29 + 11(n – 1) si n >0; 15
36. Respuesta abierta
37. No cambió
38. 2n + 1; 37; 75
39. $16
40. Revisar el cuaderno del estudiante
41. 6
42. -16
43. -26
44. 60%

45. C

Página 28

¿Listo para seguir?

1. -6
2. -25
3. 3
4. -7
5. 5
6. 95
7. -32
8. 31
9. -8
10. 12
11. -3
12. -2
13. 30
14. -24
15. -27
16. 36
17. -38
18. -775
19. -33
20. 17
21. 48
22. –11
23. 33
24. -2
25. -137
26. 89
27. -38
28. Sumar -5; -18, -23
29. Sumar 4n, con n ≥ 0; 45, 65

Página 29

Conexiones con el mundo real

1. -720
2. 495 min.
3. 21: 36 hrs del día 13 de octubre
4. 0,8 m/seg
5. Equivale a un edificio de 200 pisos aprox.

Páginas 32 -33

Guía de estudio y repaso

1. Números negativos
2. Operación inversa
3. Números enteros
4. Opuestos aditivos
5. -10
6. 15
7. -8
8. Ver dibujo en libro
9. Ver dibujo en libro
10. -10
11. 6
12. 6
13. -8
14. -18
15. 45
16. Eduardo= 50; Sergio= -25
17. -3
18. 3
19. 2
20. -2
21. -5
22. -9
23. -12
24. -9
25. -2
26. -4
27. 216
28. 25
29. 30
30. 162
31. 26
32. 55
33. 2
34. 2
35. -6
36. -56
37. 104
38. 48

Página 34

Prueba del capítulo

1. -30
2. + 2 300
3. -5
4. Dibujar 5 filas de 6 fichas rojas cada una
5. Dibujar 3 filas de 8 fichas amarillas cada una
6. Dibujar 7 filas de 2 fichas rojas cada una
7. Dibujar 3 filas de 5 fichas rojas cada una
8. Dibujar 2 filas de 4 fichas amarillas cada una
9. Copiar dibujo del libro
10. Copiar dibujo del libro
11. Copiar dibujo del libro
12. Copiar dibujo del libro
13. Copiar dibujo del libro
14. -130
15. -176
16. 221
17. 400
18. -72
19. 91
20. 559
21. -147
22. -8
23. 9
24. -18
25. 8
26. -9
27. 7
28. -16
29. 8
30. -5
31. -25
32. 100
33. 16
34. -28
35. -108
36. -32
37. 90
38. 1320
39. 43
40. -30
41. 144
42. -74
43. -54
44. -81
45. 5
46. -375

Página 35

Evaluación acumulativa

1. D
2. D
3. Alternativa C, + B
4. A es correcta
5. D (-19 y 2)
6. -19
7. -7
8. 3 bolitas
9. B
10. Respuesta abierta
11. -3
12. -68
13. 30
14. -5
15. -750
16. V
17. V
18. F

Capítulo 2

Página 37

¿Estás listo?

1. Potencia, multiplicación
2. Base
3. Exponente
4. Número racional
5. 2^5
6. 3^7
7. 8^3
8. 7^4
9. 9^2
10. 10^6
11. 2•2•2•2•2
12. 3•3•3•3
13. 5•5•5•5•5
14. 0•0•0
15. 6•6•6•6
16. 5•5•5•5•5•5
17. 4•4•4•4•4•4
18. 3•3•3•3•3•3
19. 27
20. 16
21. 125
22. 64
23. 343
24. 32
25. 81
26. 625
27. 64
28. 9
29. 243
30. 256
31. 729
32. 128
33. 512
34. 256

Capítulo 2 · Lección 1

Páginas 42 - 43

1. 32
2. 27
3. 36
4. 9
5. 1 000 000
6. 5^2
7. 4^2
8. 3^3
9. 10^2
10. 100 veces
11. 121
12. 243
13. -512
14. 64
15. 81
16. 32
17. -5
18. 8
19. 125
20. 30
21. 9^2
22. 4^1
23. 4^3
24. 7^0
25. 2^5
26. 2^7
27. 40^2
28. 50^2
29. 10^5
30. $3^4 = 81$
31. 9^2 ; 3^4
32. 2^4 ; 4^2
33. 2^6 ; 8^2
34. 3^6 ; 9^3
35. 5^4 ; 25^2
36. >
37. <
38. =
39. <
40. <
41. >
42. =
43. >
44. 216 cm^3
45. 583200
46. 1024 kg.
47. Aysén 359 944; Valparaíso 6 159 408
48. 6•6•6 ≠3•3•3•3•3•3
49. 3^4 = 81 estrellas
50. $16^0 < 2^3 < 6^2 < 3^5 < 2^9$
51. $10^1 < 33 < 6^2 < 4^3 < 5^3$
52. $1^8 < 2^4 < 7^2 < 80 < 10^2$
53. $0 < 1^8 < 2 < 16^1 < 3^4$
54. $1^9 < 13^1 < 21 < 5^2 < 11^2$
55. $8^1 < 9 < 5^2 < 3^3 < 2^5$
56. Al 5° día recibe \$ 2^4 y el día de su cumpleaños recibe \$ 21^4 = \$16 384
57. 4; 16; 64 bacterias
58. 8^2= 64
59. Sí porque $2^5 = 3^2$ y $3^3 = 2^7$
60. 10 m.
61. C
62. A
63. 8 + 9 = 17
64. 88
65. 196
66. Restar 9; 55, 46, 37
67. Sumar 2, 3, 4, ... ; 37, 44, 52
68. 2 x 3n-1 ;486, 1 458, 4 374

Capítulo 2 · Lección 2

Páginas 46 - 47

1. 1 500
2. 120 000
3. 208 000
4. 1 130 000 000
5. 3,6 • 10^6
6. 2,14 • 10^5
7. 8 x 10^9
8. 4,2 • 10^4
9. 2 000 000 000 000 000 000 000
10. Neptuno
11. 2 100
12. 80 000
13. 2 500 000
14. 400 000
15. 268 000
16. 5 500 000 000
17. 211 500 000
18. 70 030
19. 4,28 • 10^5
20. 1,61 • 10^6
21. 3 • 10^9
22. 6,01 • 10^4
23. 5,2 • 10^4
24. 2,98 • 10^8
25. 8,9 • 10^6
26. 5 • 10^5
27. 367 000
28. Venus
29. 4
30. 1,68
31. 340
32. 5
33. 540 000 000
34. 6; 7
35. No
36. Sí
37. Sí
38. No; orden de menor a mayor 1 • 10^7 < 2,9 • 10^7 < 43,7 • 10^6 < 305 • 10^6
39. 9,8 • 10^8
40. 1,3 • 10^9 años
41. 1,8^3 • 10^8 años
42. Era Mesozoica, período Triásico
43. Permite escribir números muy grandes u otros muy pequeños en forma abreviada
44. 1,1 • 10^4 años
45. C
46. D
47. Restar 3; 7, 4, 1.
48. Multiplicar por 3; 405, 1215, 3645
49. 5^4
50. 8^3
51. 2^9

Página 48

¿Listo para seguir?

1. 4 096
2. 343
3. 1 024
4. 36
5. 128
6. 6
7. 52
8. 1
9. 91
10. 256
11. -343
12. 625
13. 1 296
14. -512
15. -2 048
16. -343/512
17. 0,81
18. 81/256
19. -2 744
20. -1 024
21. 27
22. 3 580
23. 358 000
24. 35 800 000
25. 45 600 000
26. 930
27. 36 000 000
28. 24 000
29. 2 000 000
30. 318 000
31. 21 800 000
32. 250 800 000
33. 5 555 000 000
34. 8,4 • 10^6
35. 5,2 • 10^8
36. 2,9 • 10^4
37. 3,87 • 10^5
38. 2,056 • 10^6
39. 6,54 • 10^7
40. 1,56 • 10^3
41. 7 • 10^9
42. 2,067 • 10^5
43. 6,446 • 10^9

Página 49

Enfoque en resolución de problemas

1. 27
2. 4
3. 3

Capítulo 2 · Lección 3

Páginas 52 - 53

1. $(-2)^7$
2. 6^6
3. $(-3)^9$
4. 8^{12}
5. 12^{10}
6. $(-9)^{12}$
7. $(0,2)^8$
8. $(1/3)^7$
9. $(-3/2)^9$
10. $(-0,8)^{14}$
11. $(4/7)^{13}$
12. $(0,6)^9$
13. 20^3
14. 16^5
15. $(-15)^2$
16. $(2/15)^4$
17. $(-3,15)^3$
18. $(-168)^6$
19. $(-8)^{22}$
20. 7^{20}
21. 4^{11}
22. $(-5)^{12}$
23. 7^{13}
24. $(-2)^{13}$
25. $(2/5)^{11}$
26. $(-3/8)^{10}$
27. $(0,008)^8$
28. $(1,2)^{10}$
29. $(0,02)^7$
30. $(1/2)^{17}$

Solucionario

31. $(-40)^3$
32. $(0,06)^4$
33. $(1/9)^3$
34. $(4)^4$
35. $(-3/2)^2$
36. $(1/2)^4$
37. 7^8
38. $(-4)^{11}$
39. 36^3
40. $(-20)^4$
41. $(1/18)^6$
42. 2^2
43. $0,18^6$
44. $(1/2)^{11}$
45. 0
46. 4
47. 2
48. 3
49. 0,25
50. (1/2)
51. 3^7
52. 2^7
53. 2^4
54. D
55. C
56. -24
57. 432
58. 65
59. -200
60. -33
61. 30

Capítulo 2 · Lección 4

Páginas 56 - 57

1. 17^2
2. 1
3. (1/2)
4. 3^3
5. 3^4
6. $(-21/16)^3$
7. $(-2/5)^3$
8. 3^5
9. $(-8)^5$
10. Múltiples respuestas
11. Múltiples respuestas
12. Múltiples respuestas
13. $(2/3)^2$
14. $(0,84)^6$
15. (-8/5)
16. $(-2,3)^3$
17. 1
18. $(2,3)^3$
19. $(2/3)^2$
20. $(-4/5)^3$
21. $(1/5)^5$
22. 5^3
23. $(-7)^2$
24. 6^4
25. Múltiples respuestas
26. Múltiples respuestas
27. Múltiples respuestas
28. Múltiples respuestas
29. 8^3
30. 5^5
31. $0,8^5$
32. $0,001^4$
33. $0,5^2$
34. 1
35. $(-12)^5$
36. $0,06^2$
37. 8
38. 0,04
39. 1
40. 125
41. 3
42. 5
43. 4^4
44. 10^9
45. x^{10}
46. 2^5
47. 1
48. 7^5
49. 729 cubos
50. 20^4 = 160 000 botellas
51. No cometió error
52. Porque simplificas factores iguales
53. 4
54. A
55. 60^4
56. 14
57. 17

Capítulo 2 · Lección 5

Páginas 60 - 61

1. 5^{12}
2. 8^6
3. 35^{15}
4. 18^{56}
5. $(-24)^{12}$
6. $(-3/5)^{30}$
7. $(-0,2)^8$
8. 1
9. $(2,04)^6$
10. $(1/9)^8$
11. 8^9
12. 7^8
13. 9^{15}
14. 12^{45}
15. $(-5)^8$
16. $(-0,2)^{12}$
17. $(-4/7)^{72}$
18. $(2/9)^{12}$
19. $(-0,7)^{10}$
20. $(-3,4)^9$
21. $(-8)^6$
22. 1
23. $(1/6)^8$
24. $(2^{18}/5^{12})$
25. 3^{24}
26. 1
27. $(2/5)^{15}$
28. $(1,5)^4$
29. Y^{12}
30. 4
31. 2
32. 2
33. 2
34. 45
35. 2
36. 1
37. 22^3
38. 16
39. C
40. $64^2 = 2^{12}$
41. -1 632
42. 3 072
43. 12 638
44. -5 625
45. 5 184
46. 256
47. 169
48. 576
49. $(-4)^{15}$
50. $(-1/3)^6$
51. 7^{12}
52. $(0,3)^{20}$
53. 40
54. 2
55. 11
56. 5
57. -2
58. No existe diferencia -18 = -18

Página 62

1. $(9)^4$
2. $(-12)^4$
3. $(-8)^{10}$
4. $(q)^{12}$
5. -8 000
6. $(24)^4$
7. 64
8. $(4)^5$
9. $(4/5)^8$
10. $(0,5)^{10}$
11. $(1/4)^3$
12. $(-2/5)^6$
13. $(-7)^7$
14. $(2/3)^{17}$
15. $(0,2)^{21}$
16. $(4/5)^{14}$
17. $(0,04)^3$
18. $(0,0006)^5$
19. $(8/3)^3$
20. $(-4)^5$
21. $(5)^4$
22. $(-2)^3$
23. $(-2/3)^3$
24. 1
25. $(5/9)^2$
26. $(9/5)^2$
27. 1
28. $(3/8)^8$
29. 1
30. $(-3)^2$
31. $(3/4)^6$
32. $(2/5)^{20}$
33. 1
34. $(a/b)^{mn}$
35. $(3)^{54}$
36. $(2)^{32}$
37. $(0,8)^8$
38. 1

Página 63

Conexiones con el mundo real

1. Ver cuaderno del alumno
2. Ver cuaderno del alumno
3. Ver cuaderno del alumno
4. Ver cuaderno del alumno

Páginas 66 - 67

Guía de estudio: repaso

1. Base, exponente
2. Notación científica
3. Potencias, base
4. Notación científica
5. 7^3
6. $(-3)^2$
7. K^4
8. $(-9)^1$
9. $(-2d)^2$
10. $(3n)^3$
11. 6•2x
12. 10^4
13. 5•5•5•5 = 625
14. -2•2•2•2•2 = -32
15. (-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = -1
16. 2•2•2•2•2•2•2•2 = 256
17. (-3)
18. 4•4•4 = 64
19. (-3)(-3)(-3) = -27
20. (-5)(-5) = 25
21. 15
22. 6•6•6•6 = 1296
23. 10•10•10•10•10 = 100 000
24. -2•2•2•2•2•2•2 = -128
25. 1 620
26. 910 000
27. 2 345 000
28. 800 200
29. 5,6 • 10^{10}
30. 7,3 • 10^7
31. 2 x 10^5
32. 4,8 x 10^8
33. 18^2
34. 90^5
35. 5^{10}
36. 9^{15}
37. 40^4
38. 98^3
39. 27^4
40. 30^2
41. 5^5
42. 4^1
43. 5^3
44. 3^3
45. 8^3
46. 7^1
47. 1
48. 2^4
49. 8^{35}
50. $(-2)^{18}$
51. $(-5)^{35}$
52. -3^{10}
53. 12^{12}
54. $(2/3)^8$
55. 3^{40}
56. -4^{14}

Página 68

1. $(-2)^4$
2. 5^4
3. $(1/3)^3$
4. 8^6
5. 1
6. 11
7. 128
8. 81
9. 512
10. 625
11. 3^3
12. 7^{11}
13. 5^{60}
14. 1
15. 27^{21}
16. 52^{21}
17. 13^9
18. 8^5
19. $(2/5)^3$
20. 8^5
21. 18^4
22. 5^4
23. 2 700 000 000 000
24. 353
25. 425 700
26. 98 700 000 000
27. 480 000 000
28. 6 090
29. 8 100 000
30. 35 000
31. 308 000
32. 1 472 000 000
33. 29 730 000
34. 1,69 • 10^4
35. 3,9 • 10^7
36. 1,805 • 10^5
37. 4,5 • 10^4
38. 60 - 10^4 o 6 • 10^5
39. 5,217 • 10^7
40. 1,69 • 10^4
41. 3,19 • 10^6
42. 5,16 • 10^6
43. 1,.682 • 10^3
44. 1,9 • 10^{10}
45. 1,98 • 10^9
46. 3,8 • 10^6
47. 1,245 • 10^8

Página 69

Evaluación acumulativa

1. C
2. C
3. C
4. C
5. A
6. B
7. A
8. A
9. C
10. 58
11. 130
12. 6
13. 13 m.
14. 36 • 24 • 52
15. 5^2 • $10^3/9^2$
16. a) 2 100 000 grs.
b) 2,1 x 10^2 ; 10^4
c) respuesta múltiple
17. 5 • -2 = -10
18. V
19. F
20. F

Capítulo 3

Página 71

¿Estás listo?

1. Punto, coordenada x, coordenada y
2. Ejes de coordenadas; plano cartesiano
3. Origen
4. Eje y; Eje x
5. (2, 3)
6. (-1, 0)
7. (-3, -2)
8. (0, -3)
9. (5, -4)
10. (0, 5)
11. (-4, 0)
12. (5, 0)
13. Sí
14. No
15. Ver cuaderno del alumno
16. Ver cuaderno del alumno
17. Ver cuaderno del alumno
18. Ver cuaderno del alumno

Capítulo 3 · Lección 1

Páginas 76 - 77

Transformaciones isométricas

1. Reflexión
2. Rotación
3. Traslación
4. Ver cuaderno del alumno
5. Ver cuaderno del alumno
6. Rotación
7. Traslación
8. Reflexión
9. Ver cuaderno del alumno
10. Ver cuaderno del alumno
11. Ver cuaderno del alumno
12. Ver cuaderno del alumno
13. Ver cuaderno del alumno
14. Ver cuaderno del alumno
15. A
16. Reflejo horizontal A, H, J, M, O, T, U, V, W, X; reflejo vertical B, C, D, E, H, I, O, X.
17. Observación directa de la actividad
18. Ver cuaderno del alumno
19. Ver cuaderno del alumno
20. Ver cuaderno del alumno
21. D

22. Reflexión
23. 19 x 3
24. g/6
25. 5 + 9
26. 9/10
27. 6 71/100
28. 1/5
29. 144/25
30. 11/20

Capítulo 3 · Lección 2

Páginas 81 - 82
Traslaciones, simetría y rotaciones
1. Ver cuaderno del alumno
2. Ver cuaderno del alumno
3. Ver cuaderno del alumno
4. Ver cuaderno del alumno
5. Ver cuaderno del alumno
6. Ver cuaderno del alumno
7. Ver cuaderno del alumno
8. Ver cuaderno del alumno
9. Ver cuaderno del alumno
10. Ver cuaderno del alumno
11. Ver cuaderno del alumno
12. Ver cuaderno del alumno
13. Ver cuaderno del alumno
14. Ver cuaderno del alumno
15. Ver cuaderno del alumno
16. Ver cuaderno del alumno
17. Ver cuaderno del alumno
18. Ver cuaderno del alumno
19. Ver cuaderno del alumno
20. B

Página 84
¿Listo para seguir?
1. Rotación
2. Traslación
3. Observación directa de la actividad
4. Observación directa de la actividad
5. Observación directa de la actividad
6. Observación directa de la actividad
7. Observación directa de la actividad

Capítulo 3 · Lección 3

Páginas 88 - 89
Teselados
1. Observación directa de la actividad
2. Observación directa de la actividad
3. Observación directa de la actividad
4. Observación directa de la actividad
5. Observación directa de la actividad
6. Observación directa de la actividad
7. Observación directa de la actividad
8. Observación directa de la actividad
9. Observación directa de la actividad
10. Observación directa de la actividad
11. Observación directa de la actividad
12. Observación directa de la actividad
13. Observación directa de la actividad
14. Observación directa de la actividad
15. Observación directa de la actividad
16. Observación directa de la actividad
17. 4
18. 2
19. 3
20. 1
21. Respuesta abierta
22. No, los irregulares no tienen
23. a. y b. simetría de rotación, c. no tiene simetría
24. 360/n
25. Múltiples respuestas
26. Solo cuando el eje de simetría está fuera de la figura se encuentra una simetría axial y cuando el trapecio es isósceles, tiene un eje de simetría sobre él.
27. Respuesta abierta
28. Israel, Brasil, Argentina
29. Respuesta abierta
30. B
31. $ 220 c/u
32. 31 km/hr.
33. $ 160 c/ gr.
34. 5
35. 4
36. 4
37. 7

Capítulo 3· Lección 4

Página 91
Transformaciones isométricas
1. Observación directa de la actividad
2. Observación directa de la actividad
3. Observación directa de la actividad
4. Observación directa de la actividad
5. Observación directa de la actividad
6. Observación directa de la actividad
7. Sí, se mantiene la formación de 360° alrededor de un vértice.
8. Sí, se mantiene la formación de 360° alrededor de un vértice.
9. Porque no se forma un ángulo de 360° alrededor de un vértice, cada ángulo interior de un pentágono mide 108°.
10. B
11. -27
12. 3^{13}
13. $(-35)^3$
14. $(-2)^{15}$

Página 94
¿Listo para seguir?
1. Sí es eje de simetría y sí tiene simetría de rotación
2. No
3. Sí es eje de simetría pero no tiene simetría de rotación
4. Ver cuaderno del alumno
5. Ver cuaderno del alumno
6. Con el cuadrado y con la figura de encaje
7. La tapa A

Páginas 98 - 99 - 100
Guía de estudio: repaso
1. Eje de simetría
2. Transformación
3. Traslación
4. Teselados
5. Traslación
6. Ver cuaderno del alumno
7. Ver cuaderno del alumno
8. B
9. Ver cuaderno del alumno
10. Ver cuaderno del alumno
11. Ver cuaderno del alumno
12. Ver cuaderno del alumno
13. Ver cuaderno del alumno

Página 101
Prueba del capítulo
Ejercicios para revisar en cuaderno del estudiante del 1 al 13

Páginas 102 - 103
Evaluación acumulativa
1. B
2. A
3. B
4. B
5. D
6. C
7. D
8. A
9. D
10. D
11. 7
12. 12
13. 443
14. $(2/3)^{20}$
15. 4^4
16. Pentágono
17. 16
18. 30º
19. a. b. y c. revisar el cuaderno del estudiante
20. v
21. f
22. f

Capítulo 4

Página 105

¿Estás listo? Pág 105
1. área o superficie
2. Polígono
3. Cuadrilátero
4. Cuerpo geométrico
5. Sí
6. Sí
7. No
8. No
9. Sí
10. No
11. No
12. No
13. 10
14. 17,92
15. 15
16. 66
17. 22/3
18. 17,5
19. 1
20. 10
21. 1
22. 5,4
23. 16
24. ½
25. 600
26. 0,024
27. 0,038

Capítulo 4 · Lección 1

Páginas 110 - 111
1. OT, OR, OQ, OS
2. RT
3. RS, ST, QT
4. Ver cuaderno del alumno
5. CE, CD, CA, CF
6. AE, BF
7. BG, BF, EF, DE
8. Ver cuaderno del alumno
9. 12
10. Ver cuaderno del alumno
11. Ver cuaderno del alumno
12. Ver cuaderno del alumno
13. Ver cuaderno del alumno
14. Ver cuaderno del alumno
15. C
16. 3,5 cm
17. 42
18. 18,9
19. 1,1
20. 38,16
21. Ver cuaderno del alumno
22. Ver cuaderno del alumno

Capítulo 4 · Lección 2

Páginas 114 - 115
1. 18,84 cm
2. 20,1 m
3. 52,8 cm^2
4. 176,6 cm^2
5. 12,6
6. 220 cm
7. 56,5 cm
8. 19,8 m
9. 803,8 cm^2
10. 19,6 m^2
11. 28,3 cm^2
12. 21,1 m
13. P = 10,7 m; A = 9,1 m^2
14. P = 44 cm; A = 153,9 cm^2
15. P = 56,5 m; A = 254,3 m^2
16. 13 m
17. 6,4 cm
18. 7,5 m
19. 6 cm
20. 17 cm
21. 11,7 m
22. 12,6 m^2
23. 248,1 m^2
24. 75,4 m
25. 188,4 m^2
26. a. Área galleta pequeña = 9.6 cm^2; b. Área galleta normal = 28.3 cm^2; c. las galletas normales
27. considera π como racional.
28. Ver cuaderno del alumno
29. 7,85 m
30. D
31. 235,5 m
32. 30°
33. 50°
34. 110°
35. 65°

Página 116

¿Listo para seguir?
1. Cuerda
2. Secante
3. Radio
4. Diámetro
5. A = 25 π; P = 10 π
6. Á = 9,14 cm^2; P = 12,28 cm
7. Á = 361π cm^2 = 1133,5 cm^2 ; P = 38π cm = 119,32 cm^2
8. Á = 4,6 π m^2 = 14,4 m^2 ; P = 4,3π m= 13,5 m
9. Á = 56,25π cm^2 = 176,6 cm^2; P = 15π cm = 47,1 cm
10. 4,5
11. 3
12. 2π
13. 7,5

Páginas 117
Enfoque de resolución de problemas
1. 44
2. 12°
3. 108°
4. 6 cm^2
5. 55,1 m^2

Capítulo 4 · Lección 3

Páginas 120 - 121
1. 105 m^2
2. 30,6 dm^2
3. 13,11 cm^2
4. Se cuadruplica
5. 4 710 cm^2
6. $33+8\sqrt{3}$
7. 125,6 mm^2
8. 144 m^2
9. 264 m^2
10. 63,05 m^2
11. 0,18 km^2
12. 2237,4 m^2
13. 2270811387,6 km^2
14. 900v2
15. Altura: 146 m (aprox); Apotema lateral: 83,6 (aprox)
b) Micerino, 17 556 m^2
c) Keops, 2 574 466 m^3
16. Múltiples respuestas
17. Aplicando el Teorema de Pitágoras
18. 19842 m^2
19. B
20. 56,52 cm^2
21. 8
22. -27
23. 10
24. 6
25. 120 m^2
26. 61,25 m^2

Capítulo 4 · Lección 4

Páginas 124 - 125
1. 791,28 cm^2
2. 356
3. 57,9
4. Cuadruplica el área total
5. 32 cm^2
6. 112 m^2
7. 1160 mm^2
8. 676,984 m^2
9. No
10. 286,98 cm^2
11. 6028,8 mm^2
12. 402 cm^2
13. 4 m
14. 21,5 cm
15. $ 36,8
16. 142,2 m^2
17. 25 cuartos de litro
18. C
19. Múltiples respuestas
20. 463,68 cm^2
21. D
22. 232 m^2
23. 0,3
24. -4,25
25. -0,26
26. -1,77
27. 48
28. 42
29. 43,2

Capítulo 4 · Lección 5

Páginas 128 - 129
1. 20
2. 96
3. 31,14
4. 782 cm^3
5. 9,1 cm^3
6. 3 159 m^3
7. Sí
8. 160,14
9. 0,17 m^3
10. 35 m^3
11. 130,8 cm^3
12. 66,2 m^3
13. 1 173,3 m^3
14. 5 494,5
15. Sí
16. 1,77 dm^3
17. 6 m
18. 27 m
19. 11
20. 50
21. 500 cm^3
22. 2 574 466 m^3
23. 8477 m^3
24. Volumen de un cilindro es $\pi r^2 h$
25. Se duplica; se cuadruplica
26. 8 cm
27. A
28. B
29. 4 cm
30. 9
31. 8
32. 22
33. 0

Capítulo 4 · Lección 6

Páginas 136 - 137
1. 308,7
2. 96 cm^3
3. 1256 m^3
4. No, se multiplica por 9

Solucionario

5. 52 858
6. 114,7
7. 27,75 cm^3, hay múltiples prismas que tienen el mismo volumen
8. 100 cm^3
9. 569,9 cm^3
10. 351 m^3
11. Sí
12. 68,5 cm^3
13. 168 cm^3
14. 160 cm^3
15. a. 800 000 cm^3 . b. 102 cm por 199 cm por 84 cm (hay otras)
16. Múltiples respuestas
17. a. 909 000 000 cm^3
b. 628 cm
18. 0,8... m.
19. El área de la base se mide en cm^2
20. Múltiples respuestas
21. 180 m^3
22. D
23. C
24. (3, 4)
25. Altura = 4 cm; área = 12 cm^2

Página 140
¿Listo para seguir?
1. 256 m^2.
2. 125,6
3. 60,6 m^2.
4. 378
5. 48 cm^2.
6. 967,1 cm^2.
7. 182 m^2.
8. 470
9. 23 cm^2. (aprox)
10. 48
11. 810 cm^3
12. 110,08 cm^3.

Páginas 144 - 145 - 146
Guía de estudio: Repaso
1. Cilindro
2. Área total
3. Prisma
4. Cono
5. Tangente
6. Radio
7. Cuerda
8. Diámetro
9. 16π
10. 7 cm
11. 8,04 cm^2
12. 18π
13. 2,5 m
14. 32 cm
15. 37m^2
16. 180 cm^2
17. 200,96 cm^2
18. 703,36 cm^2
19. 175,84 cm^2
20. 250 m^2
21. 34 cm^2
22. 262,2 cm^2
23. 803,84 cm^2
24. 60 m^3
25. 471 cm^3
26. 364 cm^3
27. 119 909,6 cm^3

Página 147
Prueba del capítulo
1. Cono
2. Prisma triangular
3. Pirámide hexagonal
4. 4 680 cm^3
5. 1 292,4 m^3
6. 36,6
7. 936 cm^3
8. 492,4 cm^3
9. 45 564,8 cm^3
10. 1 006 cm^2
11. 424,8 cm^2
12. 90 m^2
13. 134
14. 91,4 m^2
15. 92 m2
16. 25 515 mm^3

Páginas 148 - 149
Evaluación acumulativa
1. B
2. A
3. B
4. A
5. B
6. C
7. D
8. B
9. B
10. D
11. a. 48 cm
b. 648 cm^3
12. 48 π
13. Á= 84 cm^2; P= 56 cm
14. 256 cm^2
15. Cubo, 729 m^3
16. 7 cm
17. a. dos conos;
b. 131,88 cm3 ;
c. 172,12 cm^3
18. V
19. F
20. F

Capítulo 5

Página 151
¿Estás listo?
1. Segmento de recta
2. Intervalo, escala
3. Frecuencia
4. Tabla de frecuencias
5. 23,4
6. 6,45
7. 6
8. 6
9. 90
10. Scooter
11. Bicicleta

Página 153
1. 1,52 m^3
2. El cubo
3. Múltiples respuestas

Páginas 156
1. Muestra aleatoria
2. No es muestra aleatoria
3. Múltiples respuestas
4. Discreta
5. Continua
6. Discreta
7. Continua
8. Continua
9. [59 - 63[; [63 - 67[; [67 - 71[; [71 - 75[; [75 - 79[; [79 - 83[; [83 - 87[; [87 - 91]
10. Muestra aleatoria.
11. Muestra no aleatoria.
12. Múltiples respuestas.

Páginas 157
13. Continua.
14. Continua.
15. Discreta.
16. Discreta.
17. Continua.
18. [0 - 2[; [2 -4[; [4 - 6[; [6 - 8[; [8 – 10[; [10 - 12]
19. Múltiples respuestas.
20. Múltiples respuestas.
21. Investigación.
22. [45 -49[; [49 - 53[; [53 - 57[; [57 - 61]
23. 25 datos.
24. 5
25. -62
26. 6
27. 3^{13}
28. 7^6
29. 12^8
30. x^8

Capítulo 5 · Lección 2

Páginas 160 - 163
1. tabla de frecuencias
2. 27 alumnos.
3. 165 y 170 cm
4. tabla de frecuencias.
5. 6 personas.
6. 11,76%
7. 15 niños.
8. 15 niños.
9. 60%
10. la media aritmética es 50,2. La moda está en el intervalo [48 - 52[.
11. tabla de frecuencias
12. 20 ampolletas.
13. 35 ampolletas
14. 50 alumnos
15. 46 alumnos.
16. 8%
17. 684 puntos.
18. tabla de frecuencias.
19. 49,4 años.
20. la moda está en [44 - 52[
21. 55,5%
22. completar tabla
23. 66,6 años
24. 25%
25. la menor: Paraguay, La mayor: Colombia y Ecuador.
26. 8 países
27. múltiples respuestas
28. 4,04%
29. C
30. 40%
31. 15 cojines
32. 12/7
33. 10
34. - 7/15

Capítulo 5 · Lección 3

Páginas 166 -167
1. Rango = 48
2. Moda = 67,8
3. Rango = 48
4. Moda = 47,3
5. completar tabla
6. Moda = 49,3
7. Media aritmética = 50,2
8. No en forma exacta
9. Javier debió calcular la moda
10. Media aritmética = 12 055,5; moda = 11 200
11. $ 855,5
12. B
13. Moda = 58; Media aritmética = 57,9
14. 8
15. 7

Capítulo 5 · Lección 4

Páginas 170 - 171
¿Listo para seguir?
1. No entrega buena información
2. Entrega información pero no la mejor.
3. tabla de frecuencias
4. tabla de frecuencias
5. [4 – 6[
6. Nº 7. Tabla de frecuencias
8. 32,5 %
9. 15,6
10. 27 – 3 = 24
11. [3 – 7[; [7 – 11[; [11 – 15[; [15 – 19[; [19 – 23[; [23 – 27]
12. Moda = 18
1. 1/2
2. 6/13
3. 3/10
4. 0
5. 1/5

Página 174
1. (pavo, frutas), (pavo, ensalada), (tacos, frutas), (tacos, ensalada), (pasta, frutas), (pasta, ensalada).
2. Patricio, maestro; Patricio, doctor Javier, maestro; Javier, doctor Carla, maestra; Carla, doctora.
3. En 6 horarios diferentes
4. (sábado, carrera caminata); (sábado, carrera de bicicleta); (sábado, carrera de natación); (sábado, búsqueda del tesoro); (domingo, carrera caminata); (domingo, carrera de bicicleta); (domingo, carrera de natación); (domingo, búsqueda del tesoro).
5. 1 2 3 ; 1 3 2 ; 2 3 1; 2 1 3; 3 2 1;3 1 2.
6. 260 combinaciones.
7. a. 18 combinaciones
b. 56 combinaciones
8. a. 12 combinaciones posibles.
b. 18 combinaciones posibles.
9. Hay 9 resultados posibles.
10. Hay 8 personas
11. respuestas múltiples
12. 10 combinaciones
13. C
14. 40
15. 13/12
16. 31/40
17. 5/8
18. 1/3
19.
1 | 5 6 7 8 8
2 | 0 1 2

Página 178
1. 14/20; 0,7; 70%
2. a. 65/75;
b. 10/75
3. 13/30; 0,43; 43%
4. 8/15
5. a. 64%;
b. 36%
6. 2/5
7. 16/25
8. 12/30 = 0,4
9. 27%

Página 179
10. a. Media aritmética = 9,66;
b. 0
c. 1/5
11. a. 3/8; b. 1
12. 108 pelotas.
13. D
14. D
15. 0,6 cm.
16. <
17. =
18. <
19. >

Capítulo 5 · Lección 5

Página 182
1. 1/6; 0,16; 16%
2. ¼; 0,25; 25%
3. 3/7 = 0,43
4. 2/7 = 0,29
5. 2/7 = 0,29
6. ½ = 0,5
7. ¼ = 0,25
8. 0,4 = 40%
9. 6/14 = 3/7
10. 8/14 = 4/7
11. 2/36 = 1/18
12. 6/36 = 1/6
13. 3/36 = 1/12
14. 1/36
15. 4/36 = 1/9
16. 0
17. 4/10 = 2/5
18. 2/10 = 1/5
19. 0
20. 1
21. 2/5
22. 0
23. a. es justo;
b. es justo.
24. a. 0,37 = 37%;
b. 0,41 = 41%
25. 33,3%
26. Josefina con color anaranjado, Amanda con color azul claro, Raimundo con color beige y Alberto con color morado.
27. 3 es el número de casos favorables y 8 es la cantidad total.
28. 4/6 = 2/3
29. D
30. 4/5
31. 8

Página 186.
1. (espaguetis, tomate); (espaguetis, pesto); (fetuccini, tomate); (fetuccini, pesto); (moñitos, tomate); (moñitos, pesto).
2. 6 opciones.
3. 7/31
4. 1/6
5. ½
6. 1/10
7. 1/2
8. 0
9. P(elijan un CD) = 8/13; P(elijan un DVD) = 5/13
10. ½
11. 19/100
12. 18/100 = 9/50
13. (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (4,6); (5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (5,5); (5,6); (6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5); (6,6).
14. 36
15. 2/3
16. 5/36
17. 4/10 = 2/5

Página 187
1. Media = 252; moda = Pocuro.

Página 190 - 191
1. espacio muestral.
2. variable discreta

3. igualmente probables.
4. marca de clase.

Ejemplos – ejercicios

1. a. No es aleatoria; b. No es aleatoria.
2. sí
3. sí
4. no
5. no
6. tabla de frecuencias
7. media = 18,42
8. varía en 3,54
9. rango = 21
10. moda = 19,6

Página 192

11. 18
12. 10/15 = 2/3
13. 1/3
14. 5/24
15. 9/21 = 0,43 = 43%
16. 1/8 = 0,125 = 12,5%
17. 6/21 = 0,29 = 29%
18. 7/30 = 0,23 = 23%

Página 193

1. ½
2. 1/6
3. 0
4. 35 veces
5. 0
6. 24
7. 12
8. ½ = 0,5 = 50%
9. ½ = 0,5 = 50%
10. 0
11. 10 veces
12. 45
13. tabla de frecuencias.
14. tabla de frecuencias.
15.

1	4 4 6 7 7 8 8 8 8 8 9 9 9
2	0 0 1 1 1 1 2 4 5 5 6
3	1 2 3 3 4

16. ver cuaderno del estudiante.

Página 194

1. C
2. B
3. D
4. A
5. D
6. B
7. B
8. B
9. 6

Página 195

10. D
11. A
12. $ 4 928
13. 31,494
14. x = 51/4
15. 1/9
16. 2/5
17. 10/12 y 9/12, no son equivalentes.
18. a) 0,88
b) 0,5
c) bloque azul
19. F
20. V
21. F

Capítulo 6

Página 197

¿Estás listo?

1. Inversas
2. Ecuación
3. Razón
4. Par ordenado
5. 3t
6. Z – 9
7. d/17
8. g + 28
9. 101k
10. 43 – x
11. 2(x–y)
12. x/4
13. 2(5•t)
14. 19
15. 10,5
16. 7
17. 47
18. 89
19. 30
20. 71
21. 5
22. -7
23. 3
24. 8
25. 2
26. 4
27. 25
28. 3
29. 6

Capítulo 6 · Lección 1

Páginas 203 - 204

1. 1
2. 4
3. -20
4. No tiene solución
5. 1
6. 7
7. 1000 min.
8. 8 - 112
9. h=2A/b
10. 4
11. 1
12. 1
13. No tiene solución
14. 16,2
15. 5
16. 7 horas
17. 6 figuras
18. c=2A/r
19. 2
20. 3
21. 5
22. No tiene solución
23. 5
24. 6
25. 350
26. 28
27. A. 17 b. 11
28. $ 2 500 000
29. No tiene solución
30. Respuesta abierta
31. 22/21
32. C
33. D
34. $6,4 \times 10^{-7}$
35. $7,39 \times 10^{9}$
36. $1,6 \times 10^{-6}$
37. $4,1 \times 10^{6}$
38. 1
39. ½
40. 3

Páginas 205

Inténtalo

1. $x = -3$
2. $x = 3$
3. $x = 2$
4. $x = 3$

Capítulo 6 ·Lección 2

Páginas 208 - 209

1. X = -3 , y = -5; X = 0 , y = 1; X = 1 , y = 3
2. X = -2, y = -1; X = 0, y = 3; X = 1, y = 5
3. X = -5, y = -10; X = 1, y = 2; X = 3, y = 6
4. X = -1, y = -5; (-1, -5); X = 0, y = -2; (0,-2); X=1,y=1;(1,1); X=2,y=4;(2,4)
5. X = -1, y = 1; (-1, 1); X = 0, y = 2; (0,2); X=1,y=3;(1,3); X=2,y=4; (2,4)
6. X = -2, y = 4; X = 0, y = 0; X = 4, y = -8
7. X = -3, y = -7; X = -1, y = -1; X = 2, y = 8
8. X = -10; y = -30; X = -6, y = -18; X = -2, y = -6
9. X = -1, y = -1/2; (-1, -1/2); X = 0; y = 0; (0, 0); X = 1, y = 1/2 ; (1, 1/2); X = 2, y = 1; (2, 1)
10. X = -1; y = -6; (-1, -6); X = 0, y = -4; (0, -4); X = 1, y = -2 (1, -2); X = 2, y = 0; (2, 0)
11. a. Y = 11,6 – x;
b. ver cuaderno del estudiante
12. °C = -20, °F = -4; °C = -5, °F = 23; °C = 0, °F = 32; °C = 20, °F = 68; °C = 100, °F = 212
13. Para los valores de -1 y -2 se ha realizado mal la operación de suma de enteros.
14. Ver cuaderno del estudiante
15. Y = 2500 + 1000x; (1/2, 3000); (5, 7500); (8 1/2,11 000)
16. D
17. C
18. 61
19. 1
20. -9
21. 7/6
22. 1/5
23. 9/2
24. 35/4

Página 210

1. -3
2. -2/3
3. 18
4. ∅
5. 10
6. 2
7. 1
8. 114
9. 16
10. Ver cuadernos del estudiante
11. Ver cuadernos del estudiante
12. Ver cuadernos del estudiante
13. Ver cuadernos del estudiante
14. Ver cuadernos del estudiante

Página 211

1. a. cortar el pasto de la Sra. Martínez.
cortar el pasto del Sr. Baeza.
alta prioridad.
b. Sí.
c. cortar el pasto de la Sra. Martínez.
cortar el pasto del Sr. Baeza.
comprar regalos.
cortarse el pelo.
ir a la fiesta.
2. a. Respuesta abierta
b. Respuesta abierta
c. Respuesta abierta

Capítulo 6 · Lección 3

Páginas 216 - 217

1. Si; porporción directa
2. No; velocidad es constante
3. 16 días
4. 35/6
5. Ver cuaderno
6. 14 km
7. Es correcta
8. 25
9. $y = 5/2$
10. 14
11. 3 334
12. 154
13. a) 9;
b) Cuaderno;
c) Cuaderno;
d) Cuaderno.
14. 72
15. Ver cuaderno del alumno
16. 32 m
17. A
18. Ver cuaderno del alumno; 7 800
19. 50 Km/h
20. $y = (-3x - 12)/4$

Capítulo 6 · Lección 4

Página 220 - 221

1. $y = 2x$, directa
2. $y = 600x$, inversa
3. $y = 20\,000x + 180\,000$, no proporcional
4. $y = x(x\text{-}9)$, no proporcional
5. $y = 40x$, directa
6. $y = 48/x$, inversa
7. no proporcional
8. no proporcional
9. inversa
10. directa
11. no proporcional
12. no proporcional
13. inversa
14. directa
15. no proporcional
16. inversa
17. directa
18. $y = 600x$, directa
19. $y = 10x$, directa
20. $y = 200x - 3\,000$, no proporcional
21. $13 000
22. B
23. 21 litros
24. Media aritmética = 448,5

Moda= 452

Rango= 94

25. Media aritmética= 69,3; sin jornada completa

Media aritmética= 100,1; con jornada completa

Moda= 65

Página 222

¿Listo para seguir?

1. 356
2. 4 horas
3. 100
4. 600 km
5. Ver cuaderno del estudiante; sí
6. 30
7. 48
8. 0,22
9. 6,25
10. 38,5
11. 9 horas
12. 200 mm
13. 5 cm
14. 5 h
15. 15
16. Software matemático
17. Software matemático
18. Software matemático

Página 223

1. 127,35 m
2. 0,127 km
3. 1,27 cm
4. 12 m/s
5. 240 m
6. 10,6 s

Capítulo 6 · Lección 4

Páginas 226 - 228

Vocabulario

1. Ecuación
2. Dominio
3. Función, variables
4. Tabla
5. Recorrido

Ejemplos - ejercicios

1. 1/2
2. 12/5
3. 8/3
4. 20
5. 6 meses
6. Ver cuaderno del alumno
7. 3
8. -15
9. -2
10. 5
11. -11
12. -10
13. 10 800
14. 1 hora
15. 1
16. 24
17. Utilizar software matemático
18. Inversa
19. No proporcional
20. Directa
21. Directa
22. No proporcional
23. No proporcional
24. Inversa
25. Ver cuaderno de estudiante

Páginas 229

Prueba del capítulo

1. 8
2. 48
3. 18
4. 8
5. 5
6. 8
7. 2
8. 63/40
9. 7
10. –30
11. 7
12. 10
13. 3
14. 4 docenas
15. Ver cuaderno de estudiante
16. Ver cuaderno de estudiante
17. Ver cuaderno de estudiante
18. Ver cuaderno de estudiante
19. Ver cuaderno de estudiante
20. Sí
21. No
22. No
23. Sí
24. 7 900
25. 25
26. 1 788

Página 230 - 231

Evaluación acumulativa

1. B
2. C
3. B
4. B
5. A
6. 8/12
7. B
8. D
9. C
10. A
11. a) 25
b) 20
12. 19
13. 32
14. Ver cuaderno del estudiante
15. 3
16. Ver cuaderno del estudiante
17. Ver cuaderno del estudiante
18. Ver cuaderno de estudiante
19. F
20. V
21. F

Bibliografía

Bibliografía

Castro, E. (2003). *Didáctica de la Matemática en La Educación Primaria***.** Madrid: Pearson.

Chamorro, M. **(**2003). *Didáctica de la Matemática Preescolar***.** Madrid: Pearson.

Chamorro M. (2003). *Didáctica de la Matemática para Primaria***.** Madrid: Pearson.

Cofré, A. y Tapia, L.(1995). *Cómo desarrollar el razonamiento lógico y matemático*. Santiago: Universitaria.

Centeno, J. (1989). *Números Decimales*. Colección Matemáticas Cultura y Aprendizaje Vol. 5. Madrid: Síntesis.

Cofré, A. y Tapia, L. (2002). *Matemática Recreativa en el Aula*. Santiago: Universidad Católica de Chile.

Godino, J. et al. (2005). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros***.** ProyectoEduMat - Maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática. España: Universidad de Granada.

Guzmán, M. (1995). *Para pensar mejor*. España: Pirámide.

Holt, R., Wiston. (2003). *Mathematics in Context*. Encyclopaedia Britannica.

Llinares, S y Sánchez, M.(1989). *Fracciones.* Colección Matemáticas Cultura y Aprendizaje Vol. 4 Madrid: Síntesis.

Alsina, C.(1989). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Alsina, C. (1991). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid: Síntesis.

Chamorro, Mª. (2005). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Pearson Educación.

Martínez, A. M., Juan, F. R. (1989). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Boule, F. (2005). *Reflexiones sobre la Geometría y su enseñanza.* México: La Vasija.

Siguero, F. y Carrillo, E. (1993). *Recursos en el aula de matemáticas* Madrid: Síntesis.

Riveros, Zanocco. (1991). *Geometría y aprendizaje*. Universidad Católica de Chile.

García, J. (1998). *Geometría y experiencias*. Madrid: Pearson Educación.

Castro, E. (2003). *Didáctica de la Matemática en La Educación Primaria.* Madrid: Pearson.

Maza G, C. (1991). *Multiplicación y división. A través de la resolución de problemas.* Madrid: Visor.

Centeno, J. (1989). *Números Decimales*. Colección Matemáticas Cultura y Aprendizaje Vol. 5. Madrid: Síntesis.

Chamorro, C.(2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria.* Madrid: Pearson Prentice Hall.

Martínez, J. (1991). *Numeración y operaciones básicas en la educación primaria*. Madrid: Escuela Española.

Resnick, Lauren B. y Ford, Wendy W. (2010). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Paidós.

Bibliografía adicional

Alder, K. (2003). *La medida de todas las cosas.* España: Taurus.

Arce, J. C. (2000). *El matemático del rey.* España: Planeta.

Ávila, C. (2010). *Aventuras matemáticas: En busca del código secreto.* España: Brief Editorial.

Cesaroli, A. (2009). *Mr. Cuadrado*. España: Maeva.

De la Torre, A. (2010). *La rebelión de los números.* España: Ed. La Torre.

Doxiadis, A. (2000). *El tío Petrus y la Conjetura de Goldbach.* España: Ediciones B.

Enzesberg, H. M (1999). *El diablo de los números.* España: Siruela.

Guedj, D. (2000). *El teorema del loro.* España: Anagrama.

Haddon, M. (2011). *El curioso incidente del perro a medianoche.* España: Salamandra.

Kaye, M. (2002). *Ni un día sin matemáticas*. Chile: Ed. Galileo.

Millás, J. J. (2001). *Números pares, impares e idiotas.* España: Ed. Alba.

Norman, L. C. (2000). *El país de las mates para expertos.* España: Nívola.

Norman, L. C. (2000). *El país de las mates para novatos.* España: Nívola.

Ogawa, Y. (2008). *La fórmula preferida del profesor.* España: Funambulista.

Serrano Marugán, E. (2002). *¡Ojalá no hubiera números!* España: Nívola.

Shaw, C. (2005). *La incógnita Newton.* España: Roca.

Tahan, M. (1999). *El hombre que calculaba.* Colombia: Ed. Panamericana

Video

Donald en el país de las matemáticas. - YouTube

http://www.youtube.com/watch?v=WtIrtPumGco

13/08/2011 - Subido por mapacheplus.

Donald en el país de las matemáticas. completo audio latino por Jorge Armando Hernández.

Links para el estudiante

- www.elhuevodechocolate.com/mates.htm
- http://www.educapeques.com/juegos-infantiles-de-matematicas-para-ninos
- www.juegos/matmatica/html
- http://www.aprendejugando.com/
- http://www.sectormatematica.cl/preescolar.htm
- http://www.sectormatematica.cl/geometria.htm
- http://www.todoeducativo.com/
- http://roble.pntic.mec.es/arum0010/#matematicas
- http://www.santillana.cl/grupo/arbolalegre/
- http://www.escolar.com/menugeom.htm
- http://www.disfrutalasmatematicas.com/ejercicios/horas.php
- http://cremc.ponce.inter.edu/carpetamagica/guiaelreloj.htm
- http://cremc.ponce.inter.edu/carpetamagica/guiaelreloj.htm
- http://descartes.cnice.mec.es/matemagicas/pages/jeux_mat/textes/horloge.htm
- http://sauce.pntic.mec.es/~atub0000/hotpot/reloj/horasini.htm
- http://members.learningplanet.com/act/mayhem/free.asp
- http://kids.aol.com/
- http://www.ixl.com/
- http://www.icarito.cl/medio/articulo/0,0,38035857_152308913_188909704_1,00.html
- http://www.aulademate.com/