UNIVERSITE FRERES MENTOURI CONSTANTINE 1 — 18 JANVIER 2024
FACULTE DES SCIENCES EXACTES — DUREE: 1H:30'
SCIENCES DE LA MATIERE (L2, S3)

CONTROLE -METODES NUMERIQUES ET PROGRAMMATION- (INF3)

EXERCICE 1

Soit à calculer la valeur numérique de l'intégrale suivante:

$$G = \int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

- Utiliser la méthode des trapèzes, avec 5 points d'intégration, pour calculer une valeur approchée de G.
- Sachant que la valeur de l'intégrale calculée par une méthode analytique est:

$$G_{ex} = \left[\frac{e^x}{x+1}\right]_0^1$$

Calculer l'erreur relative commise sur la valeur obtenue par la méthode des trapèzes.

(Le résultat doit être calculé avec 6 chiffres après la virgule)

EXERCICE 2

Utiliser la méthode de Newton pour résoudre l'équation suivante:

$$x * \sin(x) - \ln(x) + 1 = 0$$

La solution appartient à l'intervalle [2,4] et l'erreur de calcul doit être inférieure à 10^{-5}.

(Effectuer les calculs avec 6 chiffres après la virgule)

EXERCICE 3

Les résultats de mesure de la vitesse d'un mobile en fonction du temps sont enregistrés sur le tableau suivant:

t(s)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
v (m/s)	0.00	4.35	7.56	10.00	15.55	17.00	16.25	13.44	11.00	8.95	7.00

Utiliser la méthode de Simpson pour calculer la distance parcourue par le mobile.

EXERCICE 4

On considère le problème à valeurs initiales suivant:

$$\begin{cases} u'' - 2u' + 3u = 0 \\ u(0) = \sqrt{2} \\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

1. Transformer l'équation différentielle d'ordre 2 en un système d'équations différentielles d'ordre 1.
2. Utiliser la méthode d'Euler avec un pas $\Delta t=0.5$, pour calculer la valeur de u à t=1.5

   (Effectuer les calculs avec 5 chiffres après la virgule)

UNIVERSITE FRERES MENTOURI CONSTANTINE — 18 JANVIER 2024
FACULTE DES SCIENCES EXACTES — DUREE: 1H:30'
LMD SM (L2, S3)

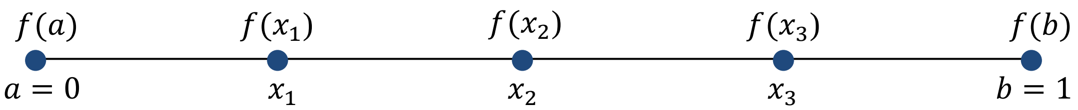
CORRIGE DU CONTROLE -INF3-

<u>EXERCICE 1</u> [5.0]

Calcul de l'intégrale: $G = \int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$, avec 5 points d'intégration.

1. <u>Discrétisation du domaine de calcul et valeurs de la fonction à intégrer dans chaque nœud:</u>

   Calcul du pas d'intégration: $h = \frac{b-a}{n-1} = \frac{1-0}{5-1} = 0.25$ **(1.0)**



i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
x	0.000000	0.250000	0.500000	0.750000	1.000000
$\boldsymbol{f(x)} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$	0.000000	0.205444	0.366383	0.518449	0.679570

(2.0)

2. <u>Calcul de G, par la méthode des trapèzes:</u>

$$G_z = h * \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right]$$

$$G_z = 0.25 * \left[\frac{0+0.679570}{2} + 0.205444 + 0.366383 + 0.518449\right]$$

$$\mathbf{G_z = 0.357515}$$

(1.0)

3. <u>Comparaison des résultats numériques avec la valeur exacte :</u>

$$G_{ex} = \left[\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\right]_0^1 = \left[\frac{\mathrm{e}^1}{1+1} - \frac{\mathrm{e}^0}{0+1}\right]$$

$$\mathbf{G_{ex} = 0.359141}$$

(0.5)

Calcul de l'erreur relative commise suite à l'utilisation de la méthode approchée des trapèzes :

	M. Trapèzes	**Valeur exacte**
$\boldsymbol{G = \int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx}$	$\mathbf{0.357515}$	$\mathbf{0.359141}$
$\boldsymbol{Err = \frac{\lvert G - G_{ex}\rvert}{G_{ex}}}$	**0.45%**	/

(0.5)

EXERCICE 2 [5.0]

Utilisant la méthode de Newton pour résoudre l'équation:

$$x * \sin(x) - \ln(x) + 1 = 0$$

Domaine de la racine à calculer: [2 , 4]

Précision de calcul: $\xi = 10^{-5}$

$f(x) = x * \sin(x) - \ln(x) + 1$

$f'(x) = x * \cos(x) + \sin(x) - \frac{1}{x}$ **(0.5)**

La racine à l'itération k est: $x = x0 - \frac{f(x0)}{f'(x0)}$ et x0 la racine calculée à l'itération k-1. **(0.5)**

La racine initiale est: $\frac{2+4}{2} = 3.000000$

Les résultats de l'algorithme de Newton sont donnés sur le tableau suivant: **(4.0)**

k	x0	f(x0)	f'(x0)	x	|x-x0|
1	3.000000	0.324748	-3.162191	3.102697	0.102697
2	3.102697	-0.011621	-3.383765	3.099263	0.003434
3	3.099265	-0.000019	-3.376831	3.099259	0.000006

La racine est donc: $\mathbf{x = 3.099259}$

EXERCICE 3 [4.0]

Numérotation des données : **(0.5)**

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t(s)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
v (m/s)	0.00	4.35	7.56	10.00	15.55	17.00	16.25	13.44	11.00	8.95	7.00

La vitesse est reliée à l'accélération par la relation:

$$\boldsymbol{v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = vdt}$$

Intégrant les deux membres de l'équation: $\int_0^x dx = \int_0^{300} vdt$

$x = \int_0^{300} vdt$ **(0.5)**

Evaluant l'intégrale par la méthode de Simpson:

$$x = \frac{\Delta t}{3}\left[v_0 + v_{10} + 4\sum_{\substack{i=1 \\ i:impair}}^{9} v_i + 2\sum_{\substack{i=2 \\ i:pair}}^{8} v_i\right]$$

$$= \frac{\Delta t}{3}[v_0 + v_{10} + 4(v_1 + v_3 + v_5 + v_7 + v_9) + 2(v_2 + v_4 + v_6 + v_8)]$$ **(2.0)**

$$= \frac{30}{3}[0 + 7 + 4(4.35 + 10 + 17 + 13.44 + 8.95) + 2(7.56 + 15.55 + 16.25 + 11)]$$

$$\boldsymbol{x = 3226.80\ \mathrm{m}}$$ **(1.0)**

EXERCICE 4 [6.0]

Problème à valeurs initiales:

$$\begin{cases} u'' - 2u' + 3u = 0 \\ u(0) \ = \sqrt{2} \\ u'(0) \ = 1 \end{cases}$$

1. Transformation du problème IVP d'ordre 2 en un système de deux problèmes de Cauchy d'ordre 1

$$\begin{cases} u' = w \\ w' = 2w - 3u \end{cases}$$

avec les conditions initiales: **(2.0)**

$$\begin{cases} t = 0, \quad u = \sqrt{2} \\ t = 0, \quad w = 1 \end{cases}$$

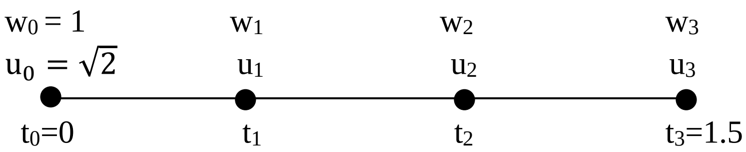
2. calcul de u(t=1.5) par la méthode d'Euler

- Discrétisation du domaine de calcul **(1.0)**

Domaine de calcul : $0 < t \leq 1.5$

Pas de calcul : $\Delta t=0.5$

Nombre de points **:** $n = \frac{1.5-0}{0.5} + 1 = 4$



- i=0: $t_0=0$, $u_0=\sqrt{2}$, $w_0=1$

- **i=1:** **(1.0)**

$$t1 = t0 + \Delta t = 0 + 0.5 = 0.50000$$

$$u1 = u0 + \Delta t * w0 = \sqrt{2} + 0.5 * 1 = 1.91421$$

$$w1 = w0 + \Delta t * (2 * w0 - 3 * u0) = 1 + 0.5 * \left(2 * 1 - 3 * \sqrt{2}\right) = -0.12132$$

- **i=2:** **(1.0)**

$$t2 = t1 + \Delta t = 0.5 + 0.5 = 1.0000$$

$$u2 = u1 + \Delta t * w1 = 1.91421 - 0.5 * 0.12132 = 1.85355$$

$$w2 = w1 + \Delta t * (2 * w1 - 3 * u1) = -0.12132 + 0.5 * (-2 * 0.12132 - 3 * 1.91421) = -3.11395$$

i=3: **(1.0)**

$$t3 = t2 + \Delta t = 1.0 + 0.5 = 1.50000$$

$$u3 = u2 + \Delta t * w2 = 1.85355 - 0.5 * 3.11395 = 0.29657$$

$$w3 = w2 + \Delta t * (2 * w2 - 3 * u2) = -3.11395 + 0.5 * (-2 * 3.11395 - 3 * 1.85355) = -9.00822$$