

Cinématique des Fluides

Introduction

La cinématique, c'est l'étude du mouvement des fluides sans tenir compte des forces qui ont produit ce mouvement.

Variables de Lagrange (Description lagrangienne)

Soient $A(a, b, c)$ les coordonnées d'une particule P1 de fluide à l'instant t_0 dans le repère O, x, y, z .

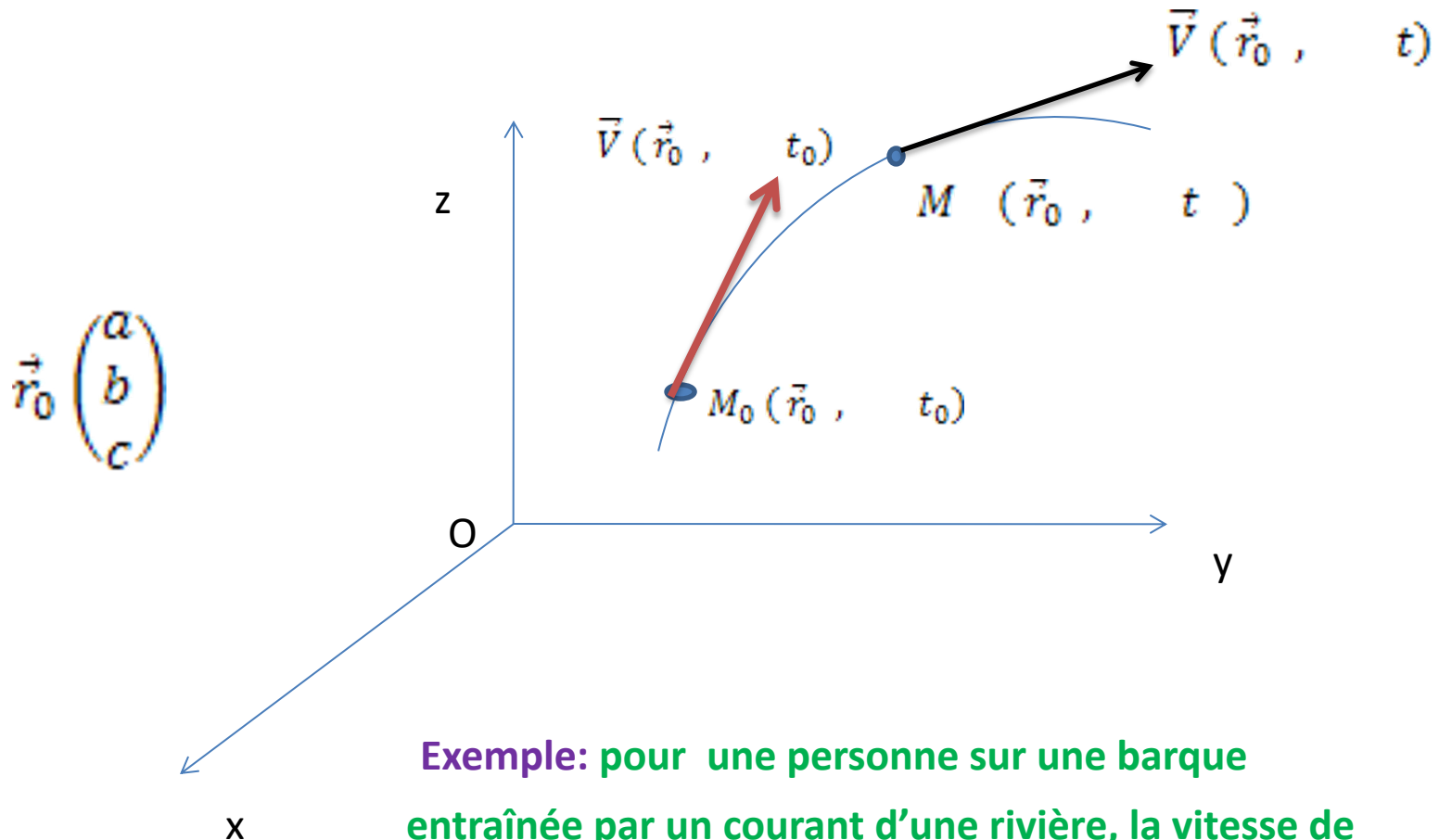
Les coordonnées indépendantes (a, b, c, t) sont appelées variables de Lagrange.

Pour t quelconque la position $M(x, y, z, t)$ de P1 est connue par la connaissance de

$$\begin{cases} x = g_1(a, b, c, t) \\ y = g_2(a, b, c, t) \\ z = g_3(a, b, c, t) \end{cases}$$

Le mouvement du fluide est connu si on a ces relations pour chaque particule P du fluide

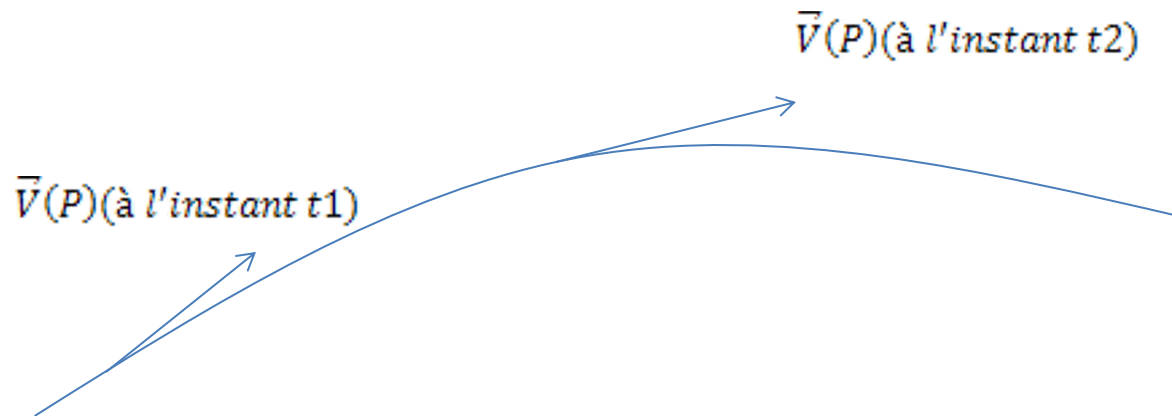
Dans cette description on suit chaque particule individuellement



Exemple: pour une personne sur une barque entraînée par un courant d'une rivière, la vitesse de la barque représente la vitesse lagrangienne

Trajectoire

La trajectoire est une courbe décrite au cours du temps par une particule P de fluide.



Equation de la trajectoire

L'équation de la trajectoire d'une particule est donnée par le système paramétrique suivant:

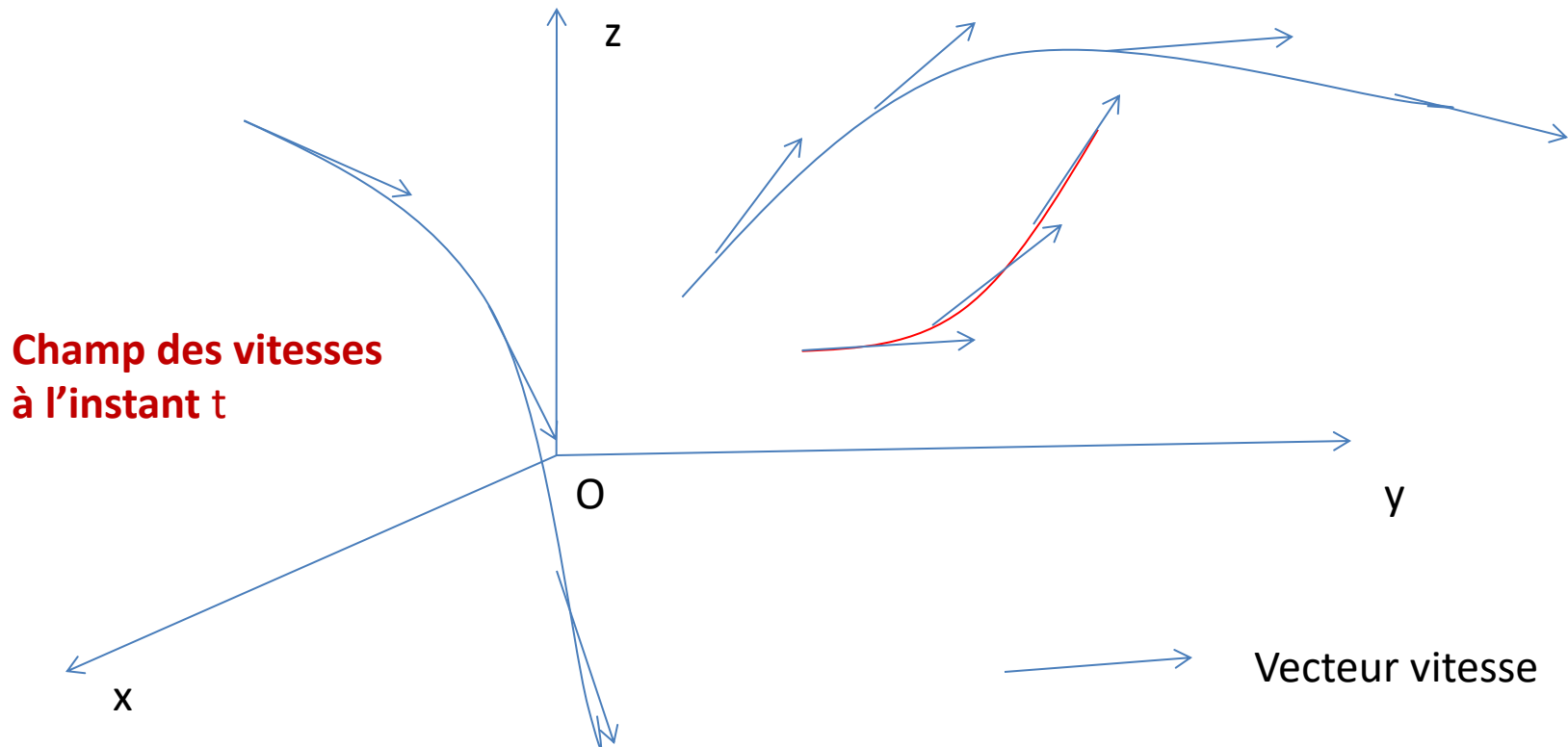
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= u(a, b, c, t) \\ \frac{dy}{dt} &= v(a, b, c, t) \\ \frac{dz}{dt} &= w(a, b, c, t)\end{aligned}\quad \vec{r}_0 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Le temps est une variable . Ou

$$\frac{dx}{u(\vec{r}_0, t)} = \frac{dy}{v(\vec{r}_0, t)} = \frac{dz}{w(\vec{r}_0, t)} = dt$$

Variables d'Euler (Description eulerienne)

Les variables d'Euler permettent de définir le champ des vitesses à chaque instant t et en tout point M du fluide



❖ Dans la description eulérienne il est plus commode pour une personne d'étudier à des instants différents les variations des grandeurs telles que la vitesse , la masse volumique, la température, le concentration du fluide, car il se place en un point $M(x, y, z)$ fixe du fluide .

❖ Dans le repère O, x, y, z le vecteur vitesse a pour composantes:

$$\vec{V} \begin{cases} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{cases} \quad \text{A l'instant } t$$

Remarque

Dans un écoulement **permanent (ou stationnaire)**



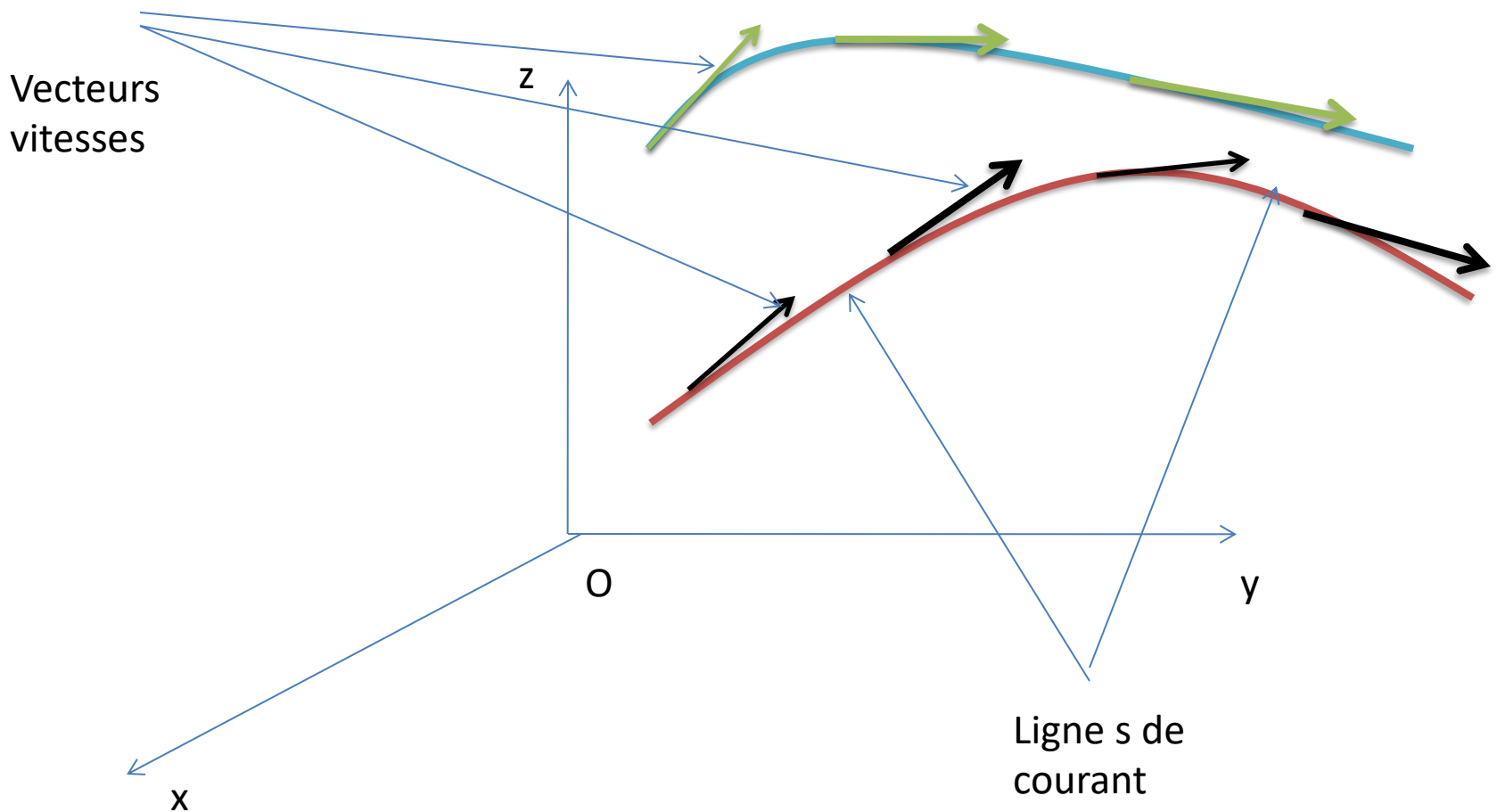
Ne dépend pas du temps soit:

$$\vec{V} = \begin{cases} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{cases}$$

Ligne et tube de courant

Ligne de courant

Une ligne de courant est une courbe dont la tangente en chacun de ses points est, à chaque instant est colinéaire au vecteur vitesse du champ des vitesses de écoulement.

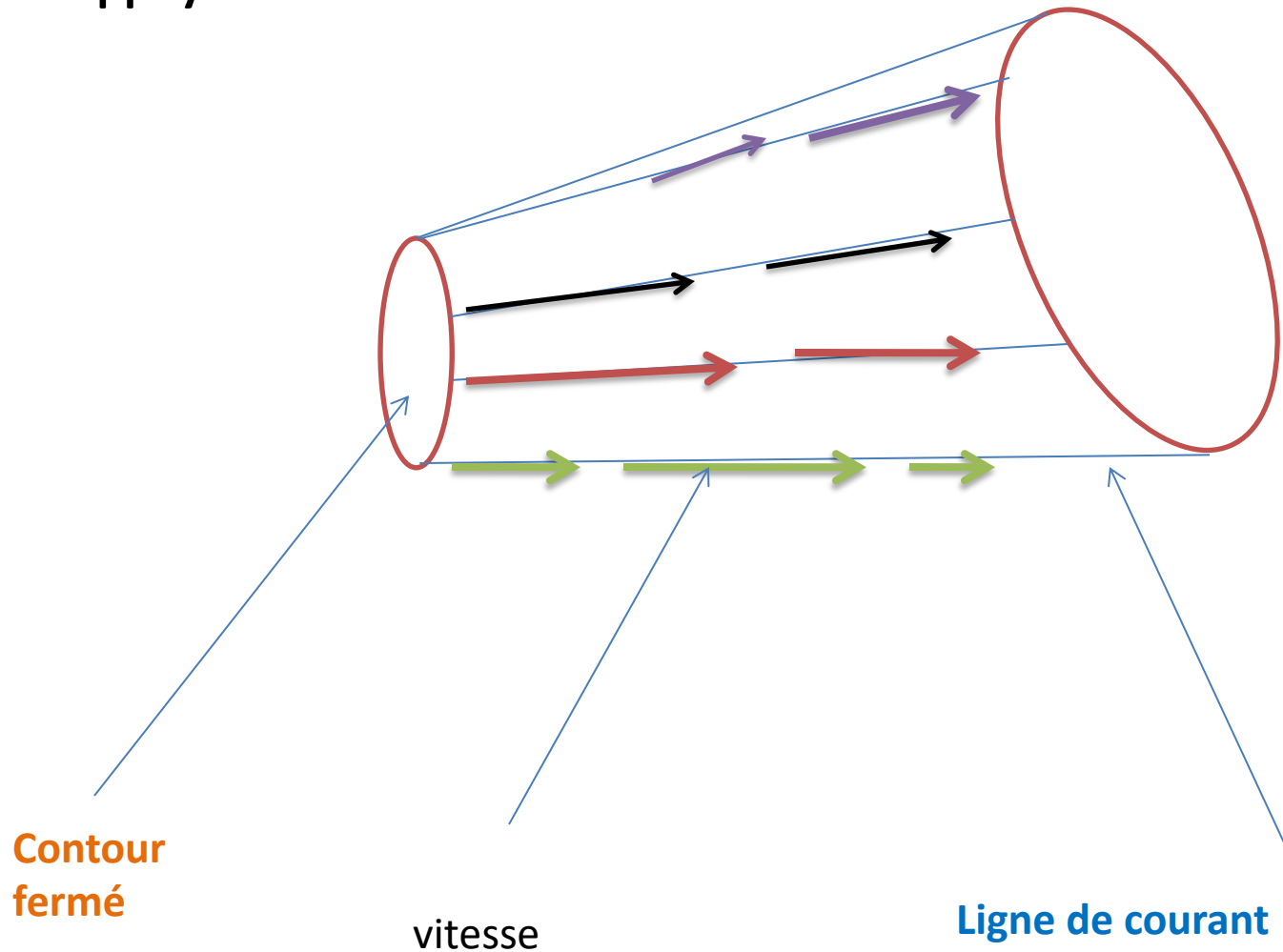


Remarque:

Si l'écoulement est permanent les trajectoires des particules du fluide sont confondues avec les lignes de courant .

Tube du courant

on appelle tube de courant l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.



Equation de la ligne du courant

L'équation de la ligne de courant par rapport à un repère est définie par :

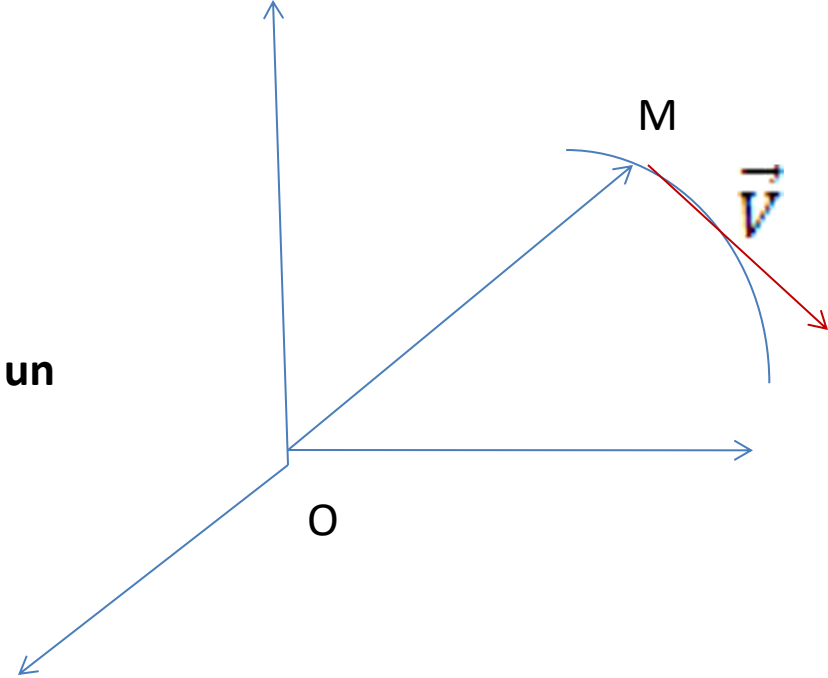
$$d\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} = \vec{0}$$

Soit:

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t_0)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t_0)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t_0)}$$

u, v et w sont les composantes de la vitesse

Le temps est considéré fixe dans cette relation



Différence entre ligne de courant et trajectoire

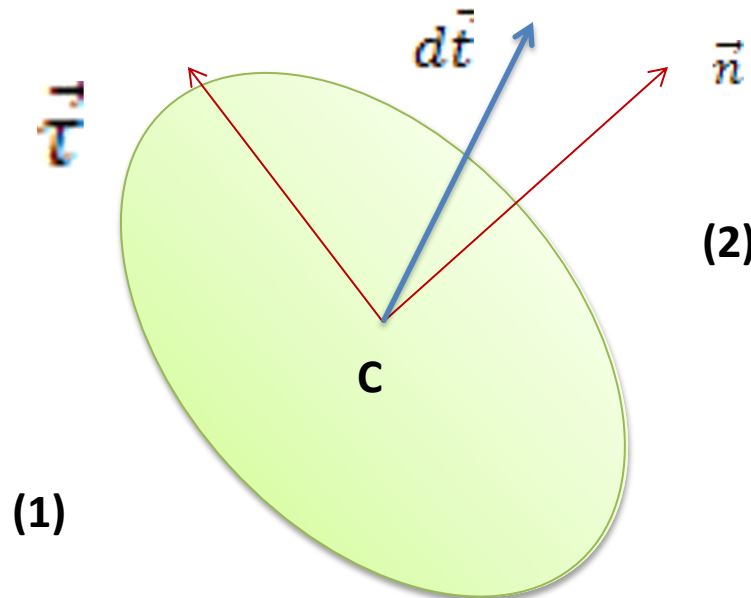
- On parle de la trajectoire pour une même particule à des instants différents
- On parle de la ligne de courant pour plusieurs particules en un même instant

Dynamique des fluides réels : Equations de Navier-Stokes

Contrainte et matrice des contraintes (tenseur des contraintes)

Force de contact

Soit (dS) une surface plane élémentaire prise au sein d'un fluide du centre C . cette surface sépare le fluide en deux régions (1) et (2).



$d\vec{t}$: Force de contact sur dS

\vec{n} : vecteur unitaire
Normal à dS en (C)

$\vec{\tau}$: vecteur unitaire
tangent à dS en (C)

Convention

La face de dS tournée vers (1) est la face négative et celle tournée vers (2) est positive.

Les actions de contact exercées par les particules de la région (1) suivant dS sur les particules de la région (2) ont une résultante $d\vec{t}$.

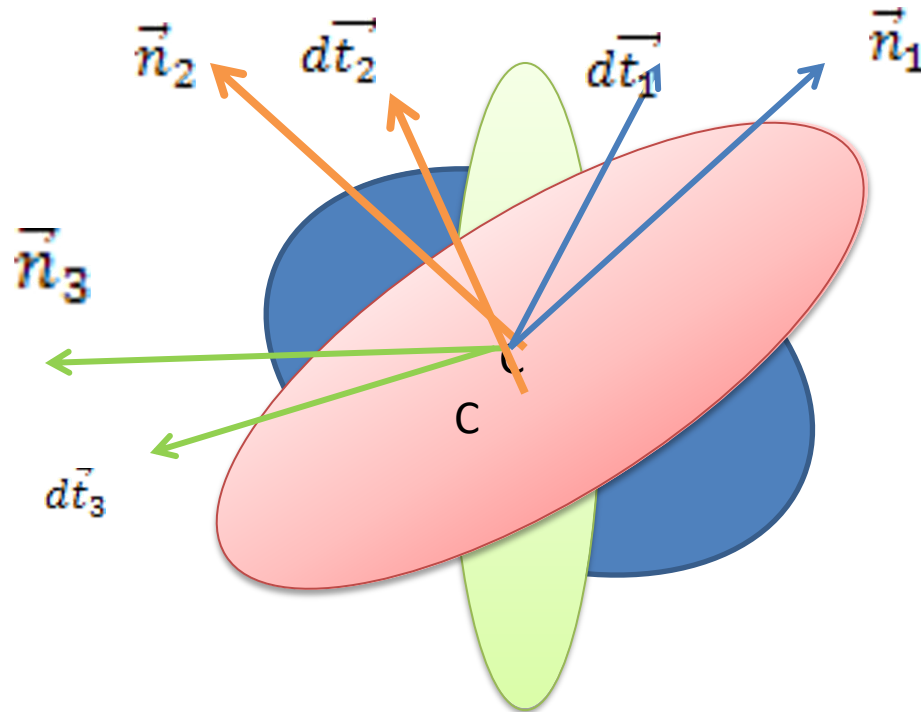
Par le principe d'action et de la réaction on a - $d\vec{t}$ de (2) sur (1)

Remarque importante

Le vecteur

$d\vec{t}$

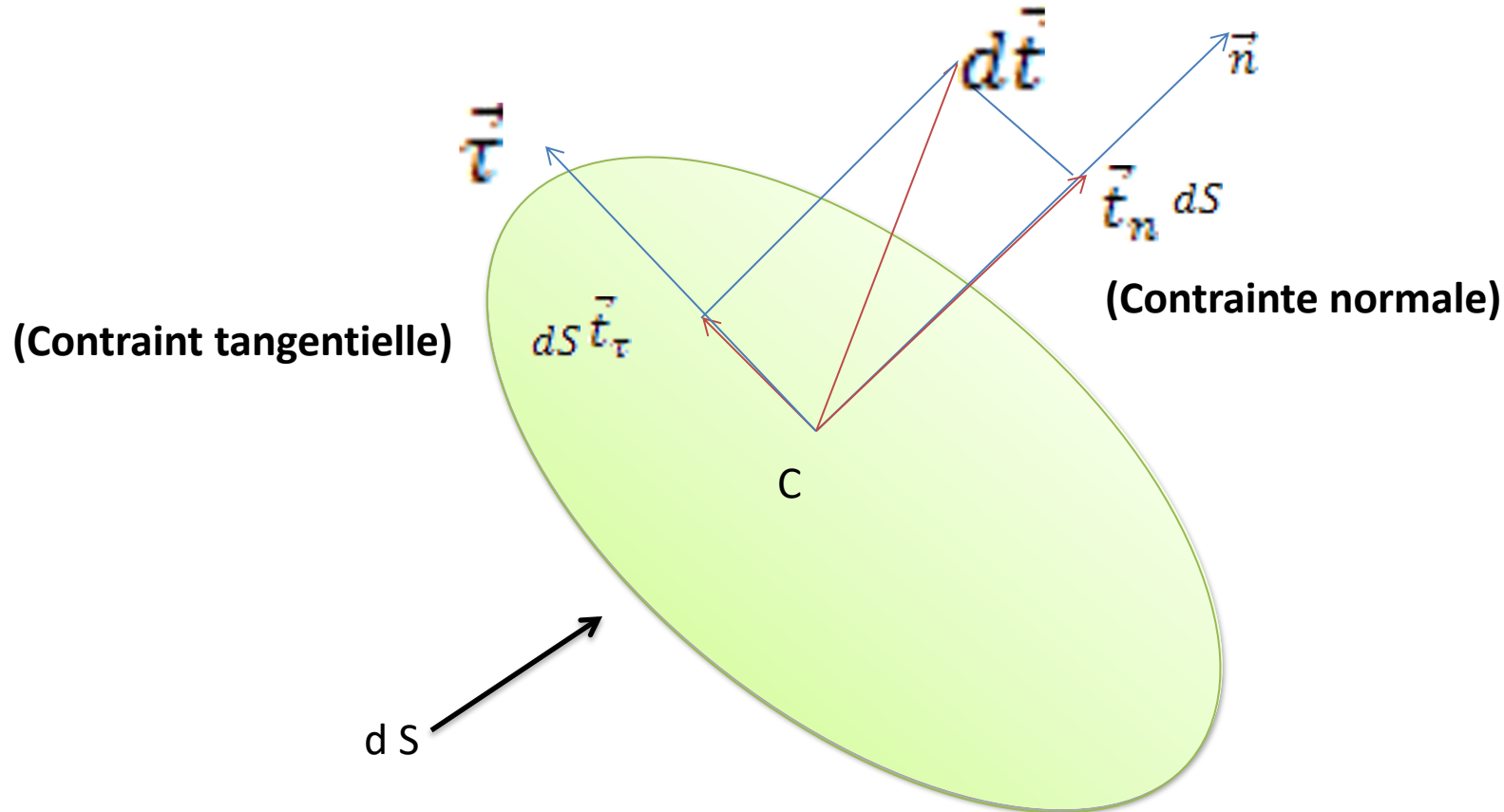
Dépend de la position du point (C) dans le fluide et de l'orientation de dS: $d\vec{t}(P,n)$



L'ensemble des forces de contact $\{d\vec{t}_1, d\vec{t}_2, d\vec{t}_3, \dots\}$

constitue un faisceau de force de contact au point (C)

Décomposition de la force de contact



Remarque

Dans un fluide parfait ou au repos la contrainte $d\vec{t}$ (force de pression)
est normale à dS quelques que soient le point (C) et l'orientation de dS .

Contrainte et tenseur de contrainte

On a

$$d\vec{t} = \vec{t}_\tau . dS + \vec{t}_n . dS$$

Posons

$$\vec{\sigma} = \vec{t}_\tau . dS + \vec{t}_n . dS \text{ il s'ensuit } \vec{\sigma} = \frac{d\vec{t}}{dS} \text{ appelée } \textbf{contrainte} \text{ (en N/m}^2\text{)}.$$

$\vec{t}_\tau . dS$ est la composante de cisaillement

$\vec{t}_n . dS$ est la composante de pression

la contrainte $\vec{\sigma}$ pour les trois orientations de la normale \vec{n} suivant les axes x, y et z du repère cartésien, c – à – d neuf composantes, peut s'organiser suivant une matrice 3×3 appelée tenseur des contraintes

noté $\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$ on montre que $\bar{\bar{\sigma}}$ est symétrique soit $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

σ_{ij} est la composante de $\bar{\bar{\sigma}}$ suivant l'axe j sur une surface dont la normale est suivant l'axe i

Les termes de la diagonale $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ représentent les contraintes normales

les termes non situés sur la diagonales représentent des contraintes tangentielles

on montre que la contrainte sur une surface de normale \vec{n} peut s'écrire:

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{t}}{dS} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n}$$

Dans la plupart des cas on écrit la contrainte sous la forme:

$$\vec{\sigma} = \underbrace{-p \cdot \vec{n}}_{\text{force de pression}} + \underbrace{\bar{\bar{\sigma}}' \cdot \vec{n}}_{\text{force visqueuse (cisaillement)}}$$

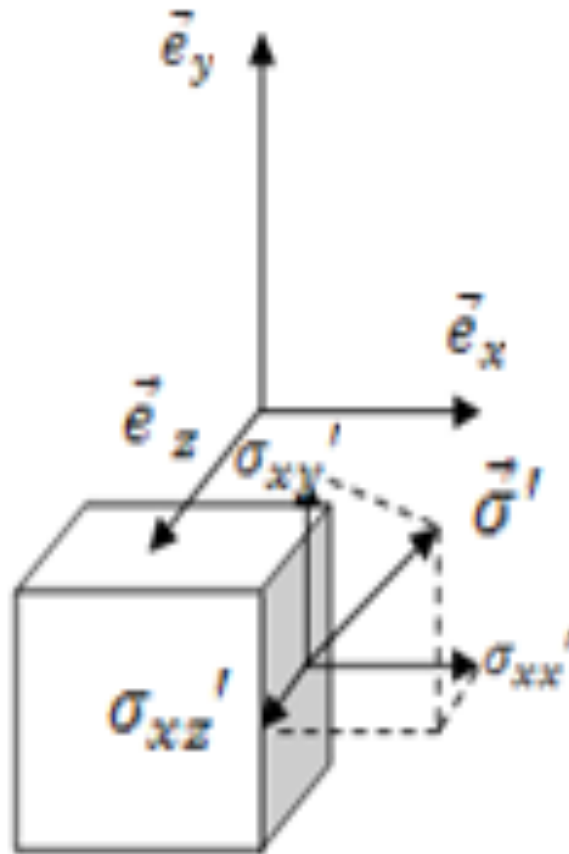
Soit

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \sigma'_{xy} & \sigma'_{xz} \\ \sigma'_{yx} & \sigma'_{yy} & \sigma'_{yz} \\ \sigma'_{zx} & \sigma'_{zy} & \sigma'_{zz} \end{bmatrix}}_{\text{tenseur des contraintes visqueuses}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}}_{\text{tenseur de pression}}$$

Remarquons aussi que le tenseur des contraintes visqueuses est aussi symétrique:

$$\text{soit } \sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$$

Représentation de la force visqueuse $\vec{\sigma}'$



$$\vec{e}_x = \vec{n}$$

on peut donc écrire les éléments de la matrice du tenseur $\bar{\sigma}$
associé à la contrainte en un point P du fluide sous la forme:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

Avec :

p : la pression

δ_{ij} : désigne le symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{si } i = j \quad \text{et } \delta_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

σ'_{ij} est l'élément de la matrice relatif au tenseur visqueux associé à la contrainte

Modèle newtonien

On montre expérimentalement (expérience de Couette) que pour les Fluides Newtoniens incompressible que le tenseur des contraintes s'écrit:

$$\text{pour un fluide newtonien } \bar{\bar{\sigma}} = -p\bar{\bar{I}} + \underbrace{\mu.(\overline{\text{grad}}\vec{V} + {}^T\overline{\text{grad}}\vec{V})}_{\bar{\bar{\sigma}}'}$$

$\bar{\bar{I}}$ est le tenseur unité

Avec

$$\overline{\overline{\text{grad}}} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Tenseur gradient
des vitesses

On peut noter que :

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p \bar{I} + 2.\mu.\bar{D}$$

avec : $\bar{D} = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad } \mathbf{v}} + {}^T \overline{\text{grad } \mathbf{v}} \right)$ est appelé tenseur vitesse de déformation

Pour un fluide newtonien incompressible les éléments de la matrice associée au tenseur des contraintes de viscosité s'écrivent:

$$\sigma'_{ij} = \mu. \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Interprétation de tenseur D et définition du tenseur tourbillon Ω

Champ des vitesses

Soient deux points voisins d'un même fluide $M(x, y, z)$ et

$M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ leurs vitesses respectives sont:

\vec{V} et \vec{V}' À l'instant t .

Si

(u, v, w) et (u', v', w') sont les composantes respectivement de \vec{V} et \vec{V}'

alors

$$u' = u'(x + dx, y + dy, z + dz) = u(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$v' = v'(x + dx, y + dy, z + dz) = v(x, y, z) + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$w' = w'(x + dx, y + dy, z + dz) = w(x, y, z) + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

Ou d'une façon condensée:

$$du_i = u_i' - u_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

$u_1 \rightarrow u$, $u_2 \rightarrow v$ et $u_3 \rightarrow w$ avec (u, v, w) les composantes de la vitesse \vec{V}

$x_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow y$ et $x_3 \rightarrow z$

Ou en adoptant la convention d'Einstein (lorsque deux indices sont répétés dans une expression la sommation est faite implicitement sur ces indices). Soit

$$du_i = u_i' - u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

Qu'on peut écrire sous forme matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} u_1' - u_1 \\ u_2' - u_2 \\ u_3' - u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

Les termes :

$$g_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Sont les éléments d'un tenseur d'ordre deux, appelé le tenseur gradient des vitesses ou tenseur des taux de déformation qu'on note :

$$\overline{\overline{\text{grad} \vec{V}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Notons que tout élément de $\overline{\overline{\text{grad} \vec{V}}}$ (du tenseur d'ordre deux) peut s'écrire:

$$g_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2} (g_{ij} + g_{ji})}_I + \underbrace{\frac{1}{2} (g_{ij} - g_{ji})}_{II}$$

d_{ij} ω_{ij}

I : éléments du tenseur symétrique

II : éléments du tenseur antisymétrique D'une façon générale

$$\underbrace{\overline{\overline{\text{grad} \vec{V}}}}_{\underline{\underline{\vec{G}}}} = \underbrace{\frac{1}{2} (\overline{\overline{\text{grad} \vec{V}}} + {}^t \overline{\overline{\text{grad} \vec{V}}})}_{\underline{\underline{\vec{D}}}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\overline{\overline{\text{grad} \vec{V}}} - {}^t \overline{\overline{\text{grad} \vec{V}}})}_{\underline{\underline{\vec{N}}}}$$

ou

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ Soit aussi } g_{ij} = d_{ij} + \omega_{ij}$$

Ou d'une manière générale

$$\bar{\bar{G}} = \bar{\bar{D}} + \bar{\bar{\Omega}}$$

Avec:

g_{ij} élément du tenseur G

d_{ij} élément du tenseur symétrique D

ω_{ij} élément du tenseur antisymétrique Ω

-interprétation du tenseur D

Les éléments,

dij de tenseur D peuvent s'écrire:

$$d_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot d_{ii}}_{\text{dilatation volumique}} + \underbrace{\left(d_{ij} - \frac{1}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot d_{ii}\right)}_{\text{tenseur diviateur}}$$

δ_{ij} désigne le symole de Kronecker égal à 1 si $i = j$ et égal à 0 si $i \neq j$

- Interprétation du tenseur Ω

Les éléments

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$$

du tenseur Ω

représentent les composantes du vecteur
tourbillon local définie par:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{V} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

On peut définir aussi la vorticité locale par:

$$2. \vec{\Omega}$$

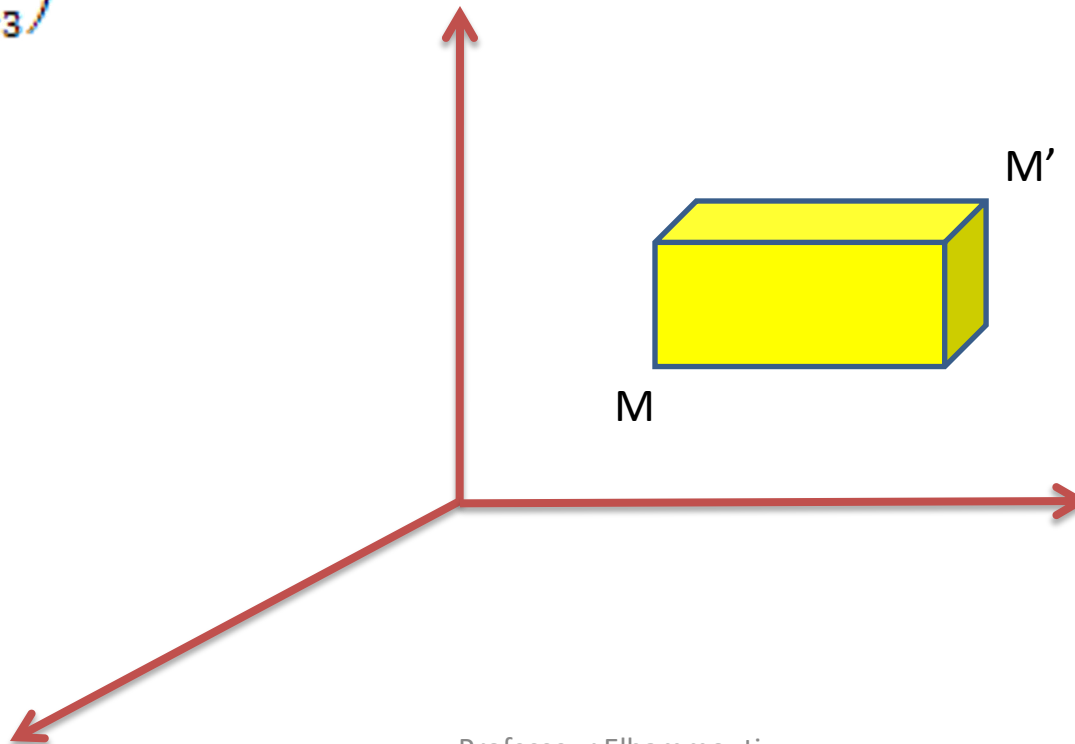
Interprétation de \mathbf{D} et Ω sur un élément de volume du fluide

Rappelons que :

(u, v, w) et (u', v', w') sont les composantes respectivement de \vec{V} et \vec{V}'

$\vec{V} = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix}$ vitesse au point $M(x, y, z)$

$\vec{V}' = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ vitesse au point $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$



$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

Qui peut s'écrire aussi :

$$\vec{V}(M') = \vec{V}(M) + \overline{\overline{\text{grad}\vec{V}}} \cdot d\vec{OM} = \vec{V}(M) + \left(\underbrace{D \cdot d\vec{OM}}_{\substack{\text{dilatation} \\ + \text{déformation}}} + \underbrace{\Omega \cdot d\vec{OM}}_{\text{rotation propre}} \right)$$

$$\overline{\overline{\text{grad}\vec{V}}} \cdot d\vec{OM} = (D + \Omega) \cdot d\vec{OM}$$

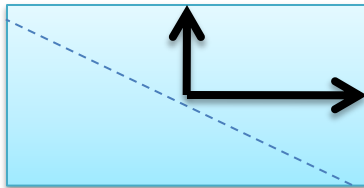
Les composantes de la vitesse sont données par:

$$u'_j = u_j + \omega_{ji} \cdot dx_i + d_{ji} \cdot dx_i$$

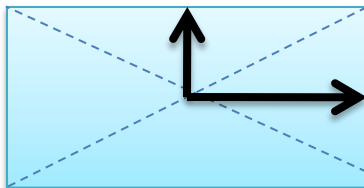
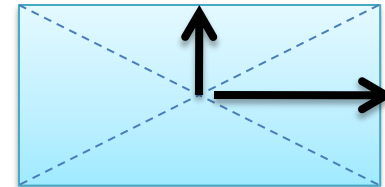
Ou encore :

$$\vec{V}(M') = \underbrace{\vec{V}(M)}_{\text{translation}} + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge d\vec{OM}}_{\text{rotation}} + \underbrace{D \cdot d\vec{OM}}_{\text{dilatation}} + \text{déformation}$$

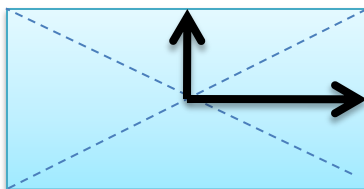
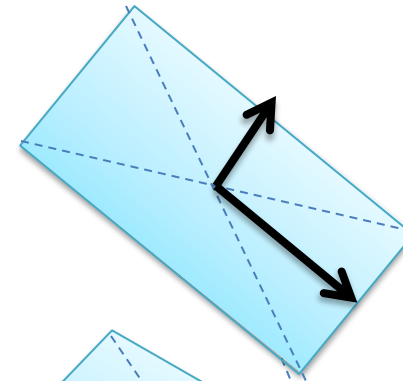
comportement d'un solide parfait



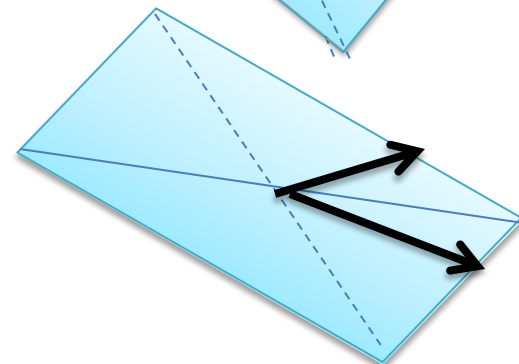
Translation



Rotation



Déformation



Dérivée particulière

-Cas d'une grandeur scalaire

Soit $f(x, y, z)$ une grandeur associée à un élément de fluide qui se déplace d'un point

$$M(x, y, z) \text{ à } M'(x + dx, y + dy, z + dz)$$

$$\text{on note aussi que } \overrightarrow{OM} = \vec{r} \text{ et } \overrightarrow{OM'} = \vec{r} + d\vec{r}$$

La variation pendant un intervalle de temps dt de f est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \overrightarrow{\text{grad} f} \cdot d\vec{r}$$

d'autre part on $d\vec{r} = \vec{V} \cdot dt$

il vient donc :

$$\frac{df}{dt} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{variation temporelle}} + \underbrace{\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad} f}}_{\text{variation due à la variation de } f \text{ dans l'espace}}$$

$\frac{df}{dt}$ est dite dérivée particulière on la note $\frac{Df}{Dt}$

-Cas d'une grandeur vectorielle

Soit $\vec{V}(x, y, z, t)$ une fonction vectorielle et $u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)$ ses composantes sur la base cartésienne

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \begin{cases} \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}u} \\ \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}v} \\ \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}w} \end{cases} = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}v}$$

On remarque facilement que $\frac{D\vec{V}}{Dt}$ peut s'écrire:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\overline{\text{grad} \vec{V}}} \cdot \vec{V}$$

avec

$$\overline{\overline{\text{grad} \mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Equation de quantité de mouvement : équation de Navier Stokes

On peut montrer que la force par unité de volume des forces de viscosités est :

$$\text{Div } \overline{\overline{\sigma'}}$$

et l'accélération de la particule peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{V}$$

Par ailleurs

$$\text{Div} (\overline{\overline{\text{grad} \vec{V}}} + {}^T \overline{\overline{\text{grad} \vec{V}}}) = \vec{\Delta} \vec{V} + \overline{\overline{\text{grad}}} (\text{Div } \vec{V})$$

Avec

$\text{div } V = 0$ pour un fluide incompressible donc $\text{grad}(\text{div } V) = 0$

D'après la conservation de la quantité de mouvement (LFD) dans un repère galiléen pour une particule fluide on peut écrire:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \rho \cdot \vec{g} - \text{grad} p + \text{Div } \bar{\bar{\sigma}}'$$

C'est l'équation de Navier –
Stokes sous forme vectorielle

Avec

$$\text{Div } \vec{\sigma}' = \begin{cases} \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma'_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma'_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z} \end{cases}$$

Ou encore pour un fluide incompressible newtonien:

$$\text{Div } \vec{\sigma}' = \mu. \vec{\Delta V}$$

Avec

$$\vec{\Delta V} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \Delta v \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \Delta w \end{array} \right.$$

Equation de Navier-Stokes sous forme cartésienne

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho \cdot g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho \cdot g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho \cdot g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases}$$

Et l'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Si l'axe des z est ascendant les composantes de l'équation de N-S deviennent:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \Delta w$$

avec $\nu = \frac{\mu}{\rho}$: viscosité cinématique

Si le régime est permanent les équations de Navier-Stokes deviennent:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \Delta w$$

avec $\nu = \frac{\mu}{\rho}$: viscosité cinématique

En utilisant la convention d'Einstein nous obtenons la forme condensée de la projection de l'équation de N-S :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \nu \Delta u_i$$

Conditions initiales et aux limites

Conditions initiales

Solution connue dans tout le domaine de l'écoulement à l'instant initial.

Conditions aux limites

Fluides parfaits

❖ la composante de la vitesse perpendiculaire est continue lors de la traversée d'une interface.

❖ la pression est continue à la traversée d'une interface fluide-fluide dans le cas

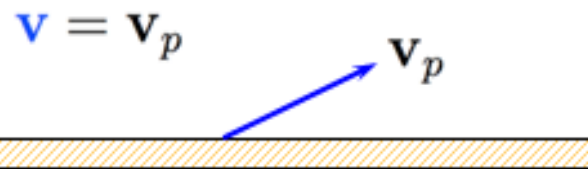
où l'on néglige la capillarité ; sinon il faut appliquer la formule de Laplace

Fluide visqueux

- Paroi solide fixe : condition d'adhérence : $\mathbf{v} = 0$

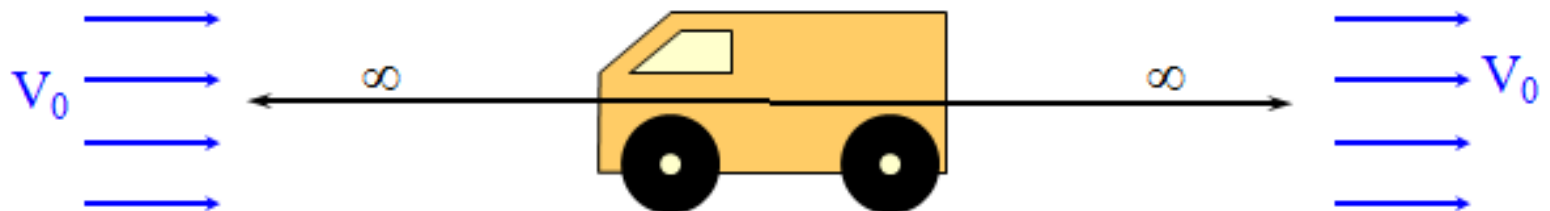
Rappel : en fluide parfait, glissement autorisé
on imposait seulement : $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$

- Paroi mobile
(exemples : Couette, pales) :



- Sortie d'un écoulement : p imposé (souvent $= p_{\text{atm}}$), pas de cisaillement
- Surface libre à l'atmosphère $p = p_{\text{atm}} \quad \overline{\overline{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n} = 0$

- Ecoulement autour d'un obstacle :
écoulement parallèle à l'infini $\mathbf{v}(r \rightarrow +\infty) = V_0$



❖ la composante tangentielle de la contrainte est continue entre deux fluides

(elle est quelconque pour une interface liquide solide)

Quelques types d'écoulement

❖ Ecoulement permanent ou stationnaire

Un écoulement est dit permanent si :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{0} \text{ pour quel que soit le point où évolue le fluide}$$

Autrement dit la vitesse ne varie pas localement

De même pour les champs de température, de masse volumique et de pression sont stationnaires si:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ et } \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

❖ **Ecoulement tridimensionnel (3D) , bidimensionnel (2D), unidimensionnel (1D) et uniforme**

❑ **Ecoulement 3D**

Si la vitesse une fonction vectorielle de trois variables: $\vec{V}(x, y, z)$

Si en plus la vitesse dépend du temps: $\vec{V}(x, y, z, t)$

L'écoulement est dit à trois dimension non permanent

❑ Ecoulement 2D ou plan

Si le vecteur vitesse d'un écoulement dépend de deux variables (x,y) , (x,z) ou (y,z) l'écoulement sera dit bidimensionnel ou plan

$\vec{V}(x,y), \vec{V}(x,z)$ ou $\vec{V}(y,z) \rightarrow$ écoulement plan permanent

Si $\vec{V}(x,y,t), \vec{V}(x,z,t)$ ou $\vec{V}(y,z,t) \rightarrow$ écoulement plan non permanent

❑ Ecoulement unidimensionnel

Un écoulement unidimensionnel est un écoulement où la vitesse dépend d'une seule coordonnée

$\vec{V}(x), \vec{V}(z)$ ou $\vec{V}(y) \rightarrow$ écoulement unidimensionnel permanent

Si $\vec{V}(x,t), \vec{V}(z,t)$ ou $\vec{V}(y,t) \rightarrow$ écoulement unidimensionnel non permanent

□ Ecoulement uniforme

Un écoulement est dit uniforme à l'instant t si :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = \vec{0}$$

Si, en plus $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{0}$ alors l'écoulement est uniforme permanent.

❖ Ecoulement incompressible

Un écoulement est dit incompressible si :

$$\text{Div } \vec{V} = \vec{0}$$

Remarques

si $\text{Div } \vec{V} = \vec{0}$ alors $\exists \vec{A}$ tel que $\vec{V} = \text{rot } \vec{A}$

❖ Ecoulement irrotationnel

Un écoulement est dit irrotationnel si $rot \vec{V} = \vec{0}$

Or

$rot \vec{V} = \vec{0} \rightarrow \exists$ une fonction potentielle φ telle que $\vec{V} = -grad \varphi$

$$\text{soit } \vec{V} \begin{cases} u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases}$$

Remarque

A) La fonction $\varphi(x, y, z) = \text{constante}$ définie une surface dite **équipotentielle**

B) On a:

$$\text{si } \varphi \text{ est une équipotentielle } d\varphi = 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \overrightarrow{\text{grad} \varphi} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

D'où

$$\overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{OM} = 0 \text{ sur l'équipotentielle}$$

Par conséquent \overrightarrow{V} est perpendiculaire en M à l'équipotentielle

Analyse dimensionnelle

Introduction

La méthode de l'analyse dimensionnelle permet de simplifier la forme des solutions des problèmes physique en réduisant le nombre de variables dont dépendent ces solutions. Ceci présente un grand intérêt en expérience et dans le recherche des solution aussi bien analytique que numérique .

Dans ce chapitre nous allons utiliser le théorème de Vaschy- Buckingham pour relier le nombre de variables , le nombre d'unités fondamentales et le nombre de variables adimensionnelles pour exprimer une relation physique.

Dimensions des quantités physiques rencontrées dans la mécanique des fluides.

Quantité physique	Symbole	Dimensions
longueur	L	L
temps	t	T
masse	m	M
Force	F	MLT^{-2}
Vitesse	V	LT^{-1}
Accélération		LT^{-2}
Surface	S	
Débit volumique	Q_v	L^3T^{-1}
Débit massique	Q_m	MT^{-1}
pression	p	$ML^{-1}T^{-2}$

gravitation	g	LT^{-2}
Masse volumique	ρ	ML^{-3}
Viscosité dynamique	μ	$ML^{-1}.T^{-1}$
Viscosité cinématique	ν	L^2T^{-1}
Angle	θ	sans
Vitesse angulaire	ω	T^{-1}
Température	T	θ

Enoncé du théorème de Vaschy- Buckingham

Si on a n quantités physiques (grandeurs) avec m dimensions entre elles
alors, on peut former $n - m$ Paramètres sans dimension

Autrement

Si A_1, A_2, \dots, A_n (*pression, longueur, viscosité, débit volumique ...*)

sont des grandeurs qui interviennent dans une équation d'un problème physique

telles que :

$$F(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0$$

On peut montrer par le théorème de vaschy-Buckingham qu'il existe une relation de la forme:

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = 0$$

Avec

$(\pi_i)_{i=1, \dots, n-m}$ paramètres sans dimension indépendants

m est le nombre de dimension des l'ensemble A_1, A_2, \dots, A_n

Exemple

Le débit volumique Q_v dans un tube capillaire horizontal est donné par:

$$F\left(Q_v, \frac{\Delta p}{l}, D, \mu\right) = 0$$

Débit
volumique

Chute de pression
par unité de
longueur

Viscosité
dynamique

Diamètre du
tube
capillaire

$$A_1 \rightarrow Q_v \rightarrow L^3 T^{-1}$$

$$A_2 \rightarrow \frac{\Delta p}{l} \rightarrow M L^{-2} T^{-2}$$

$$A_3 \rightarrow D \rightarrow L$$

$$A_4 \rightarrow \mu \rightarrow M L^{-1} T^{-1}$$

Par conséquent :

$$n = 4$$

la dimension de $\{ A_1, A_2, \dots, A_n \} = m = 3 \text{ (MLT)}$

Donc le nombre de paramètres sans dimension est :

$$n - m = 1$$

Soit un paramètre π_1

Exemple

Supposons qu'on a $\{ A_1, A_2, \dots, A_n \}$ et $m = 3$ (MLT)

Si nous choisissons par exemple $\{A_1, A_2, A_3\}$ (comme variables répétitives ayant MLT entre elles) alors

$$\pi_1 = A_1^{x_1} \cdot A_2^{y_1} \cdot A_3^{z_1} \cdot A_4 = M^0 L^0 T^0$$

$$\pi_2 = A_1^{x_2} \cdot A_2^{y_2} \cdot A_3^{z_2} \cdot A_5 = M^0 L^0 T^0$$

$$\pi_{n-m} = A_1^{x_{n-m}} \cdot A_2^{y_{n-m}} \cdot A_3^{z_{n-m}} \cdot A_n = M^0 L^0 T^0$$

Le problème final c'est de chercher

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_{n-m}, y_{n-m}, z_{n-m})$ Pour respectivement

$$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}$$

Pour ceux-ci il suffit de remplacer les quantités

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

Par leur dimension (MLT) et les exposants de (MLT)
sont égalés à zéro.

De cette façon, on obtient trois équations pour chaque paramètre sans dimension avec trois inconnues.

Exemple

$$F\left(Q_v, \frac{\Delta p}{l}, D, \mu\right) = 0$$

or $m = 3$ (MLT)

le nombre de paramètres sans dimension est $4 - 3 = 1$

Les variables répétitives sont $\left\{Q_v, \frac{\Delta p}{l}, D\right\}$

Il s'ensuit: $\pi_1 = Q_v^{x_1} \cdot \left[\frac{\Delta p}{l}\right]^{y_1} \cdot D^{z_1} \cdot \mu = M^0 L^0 T^0$

Soit

$$(L^3 T^{-1})^{x_1} (M L^{-2} T^{-2})^{y_1} (L)^{z_1} (M L^{-1} T^{-1}) = M^0 L^0 T^0$$

d'où pour l on : $3x_1 - 2y_1 + z_1 = 0$

pour M : $y_1 + 1 = 0$

et pour T : $-x_1 - 2y_1 - 1 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \\ z_1 = -5 \end{cases}$$

D'où

$$\pi_1 = \frac{Q_v \cdot \mu}{D^5 \cdot \frac{\Delta p}{l}}$$

L'expérience montre que

$$\pi_1 = \frac{3,14}{125}$$

Soit :

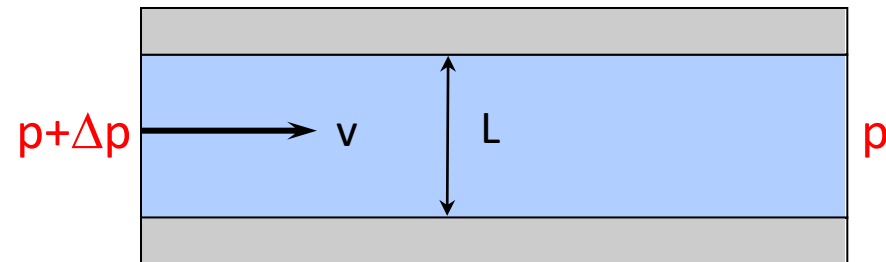
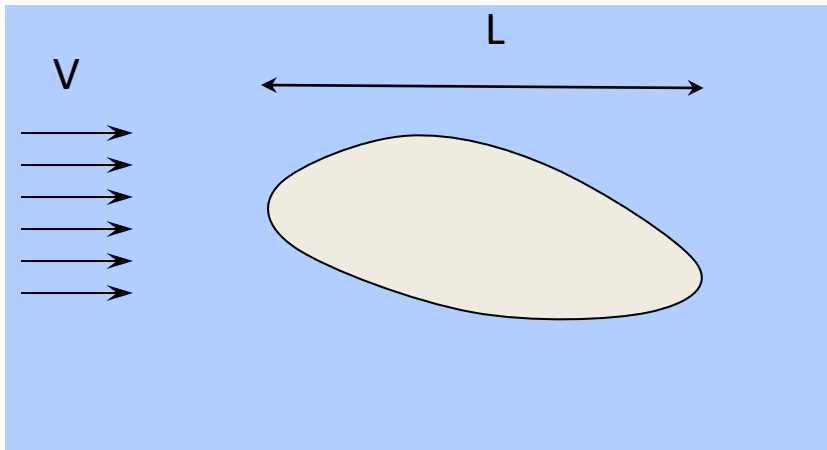
$$Q_v = \frac{3,14}{125} \cdot \frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{D^5}{\mu}$$

Adimensionnalisation des équations de Navier-stokes

On choisit :

- une longueur de référence
- une vitesse de référence
- et/ou une variation de pression de référence Δp

L
 V



$$\Delta p = \rho V^2 \quad (= \text{double de la pression d'arrêt})$$

Δp imposée

On se limite au régime permanent :

$$x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{L} \quad z^* = \frac{z}{L} \quad \mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{V} \quad p^* = \frac{p - p_0}{\Delta p}$$

$$(\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = \frac{1}{\text{Fr}^2} \frac{\mathbf{g}}{g} - \text{Eu} \, \text{grad}^* p^* + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}^*$$

$$\text{Eu} = \frac{\Delta p}{\rho V^2} \quad \text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gL}} \quad \text{Re} = \frac{\rho L V}{\eta}$$

L'analyse dimensionnelle prédit donc que :

$$\mathbf{v}^* = f(x^*, y^*, z^*, \text{Fr}, \text{Eu}, \text{Re})$$

Intérêt analyse dimensionnelle

$$(\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = \frac{1}{Fr^2} \frac{\mathbf{g}}{g} - Eu \mathbf{grad}^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \mathbf{v}^*$$

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$$

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

$$Re = \frac{\rho LV}{\eta}$$

- Permet de négliger des phénomènes pesanteur négligeable si

$$\text{soit } Fr \rightarrow \infty \quad V^2 \gg gL$$

- Certains nombres disparaissent dans de nombreux cas.

Par exemple, pour un écoulement autour d'un obstacle :

$$Fr \rightarrow \infty \quad \Delta p = \rho V^2 \text{ donc } Eu = 1 \quad \text{Il ne reste que } Re !$$

- Quand $Re \rightarrow 0$ e disparaît $(\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^*$
domaine des **écoulement rampant**

- On pourrait penser que quand $Re \rightarrow \infty$, on revient au fluide parfait. Ce n'est que partiellement vrai (couche limite)

Intérêt A.D. (bis)

Tous les avantages de l'analyse dimensionnelle...

Ecoulement externe :

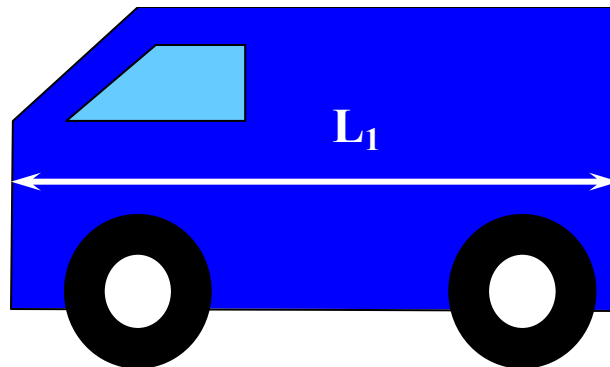
$$Fr \rightarrow \infty \quad Eu = 1$$

$$(\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = -\text{grad}^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \mathbf{v}^*$$

donc :

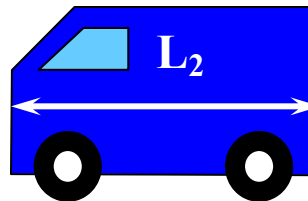
$$\mathbf{v}^* = f(x^*, y^*, z^*, Re)$$

$$\xrightarrow{V_1, \rho_1, \eta_1}$$



$$Re_1 = \frac{\rho_1 L_1 V_1}{\eta_1}$$

$$\xrightarrow{V_2, \rho_2, \eta_2}$$



$$Re_2 = \frac{\rho_2 L_2 V_2}{\eta_2}$$

Même structure d'écoulement si $Re_1 = Re_2$

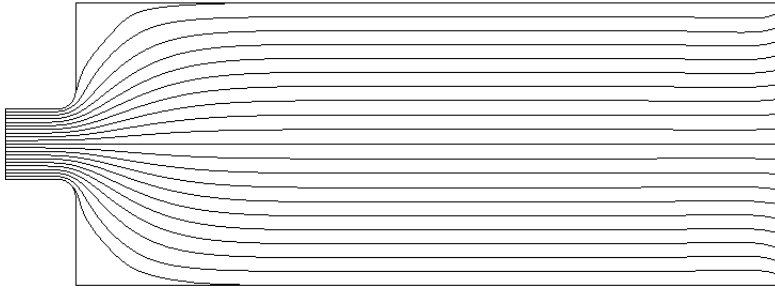
Intérêt A.D. (bis)



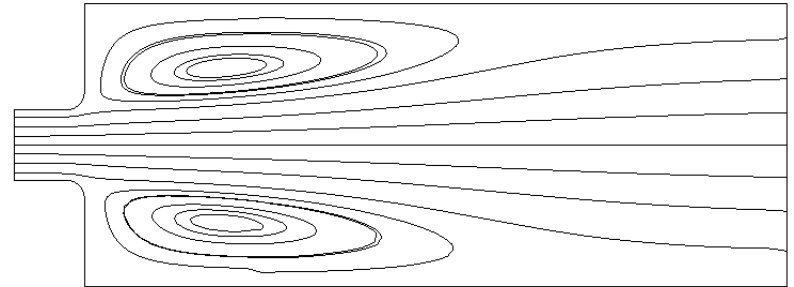
Le théorème de Π -Buckingham montre que :

$$C_x = \frac{F_x}{1/2 \rho U_\infty^2 S} = f(\text{Re}) \quad C_z = \frac{F_z}{1/2 \rho U_\infty^2 S} = f(\text{Re})$$

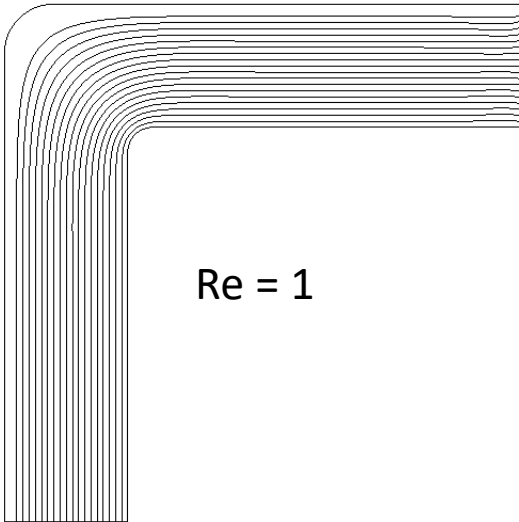
Effets du Reynolds



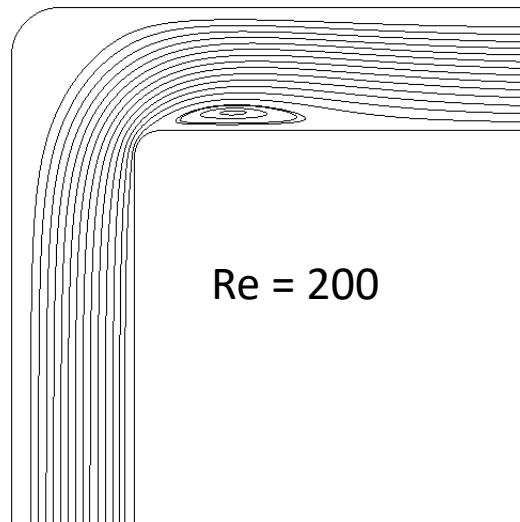
Re = 1



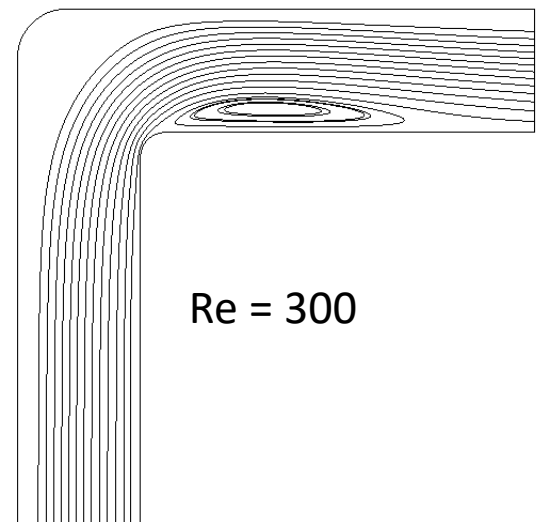
Re = 60



Re = 1



Re = 200

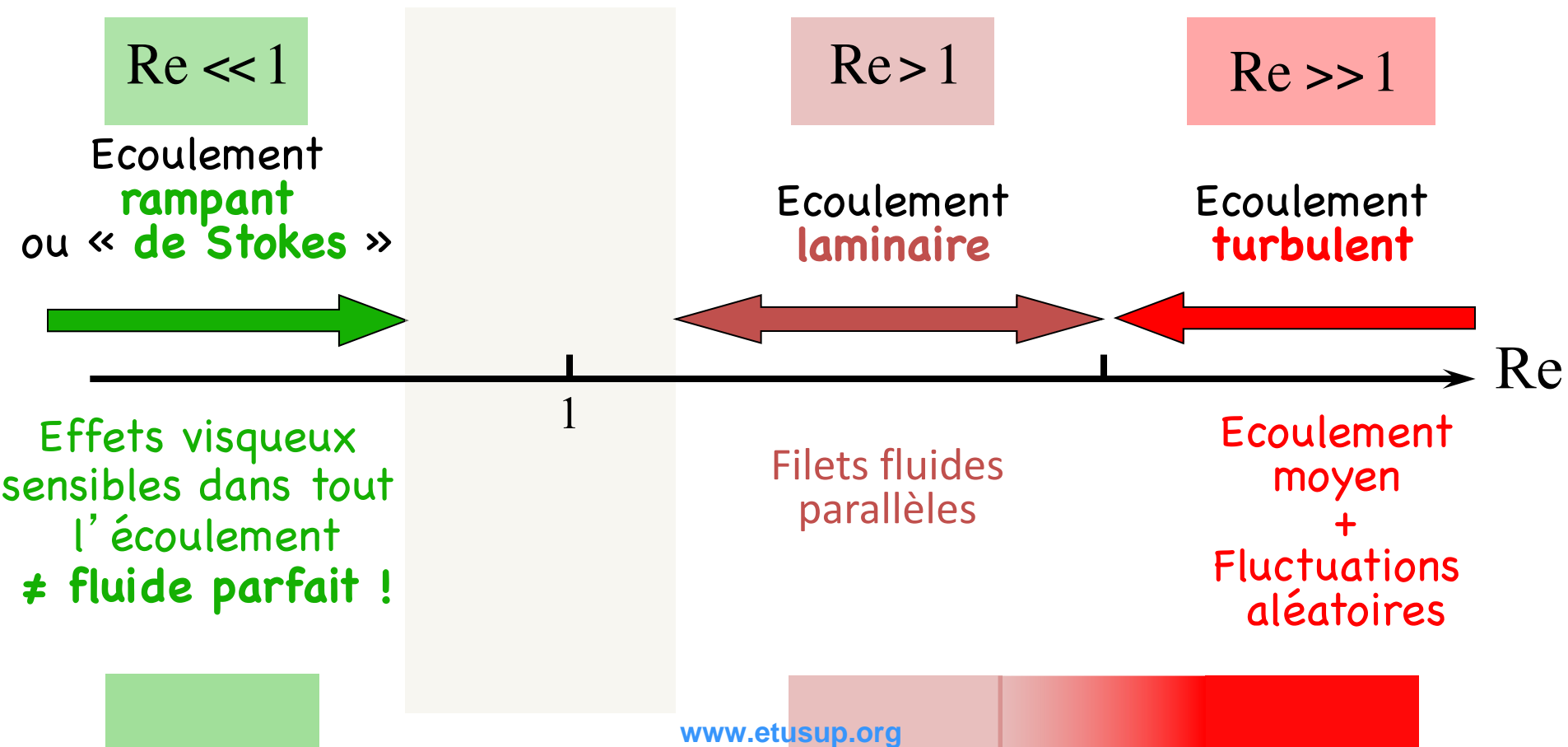


Re = 300

$$Re = \frac{\text{Inertie du fluide}}{\text{Effets visqueux}}$$

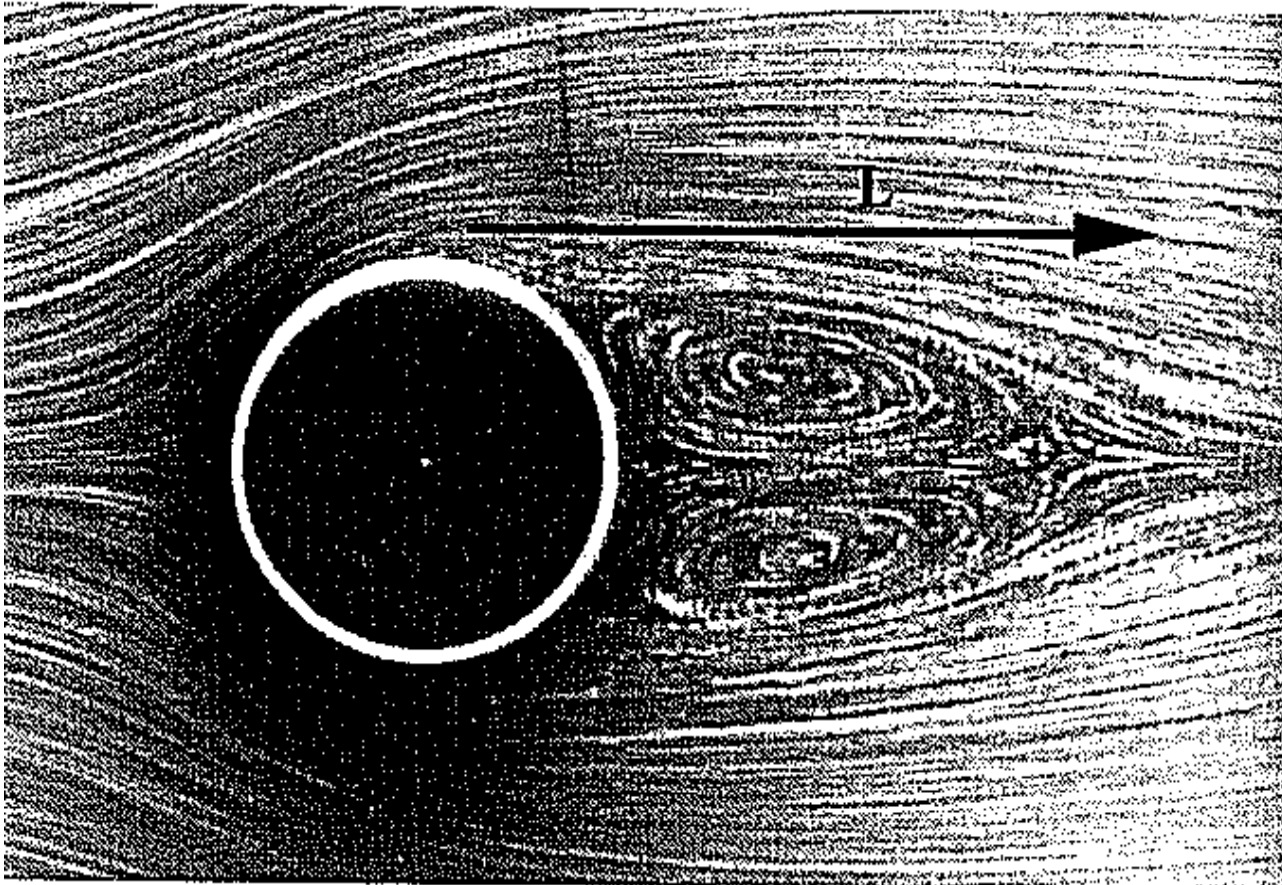
www.etusup.org

Classification des écoulements

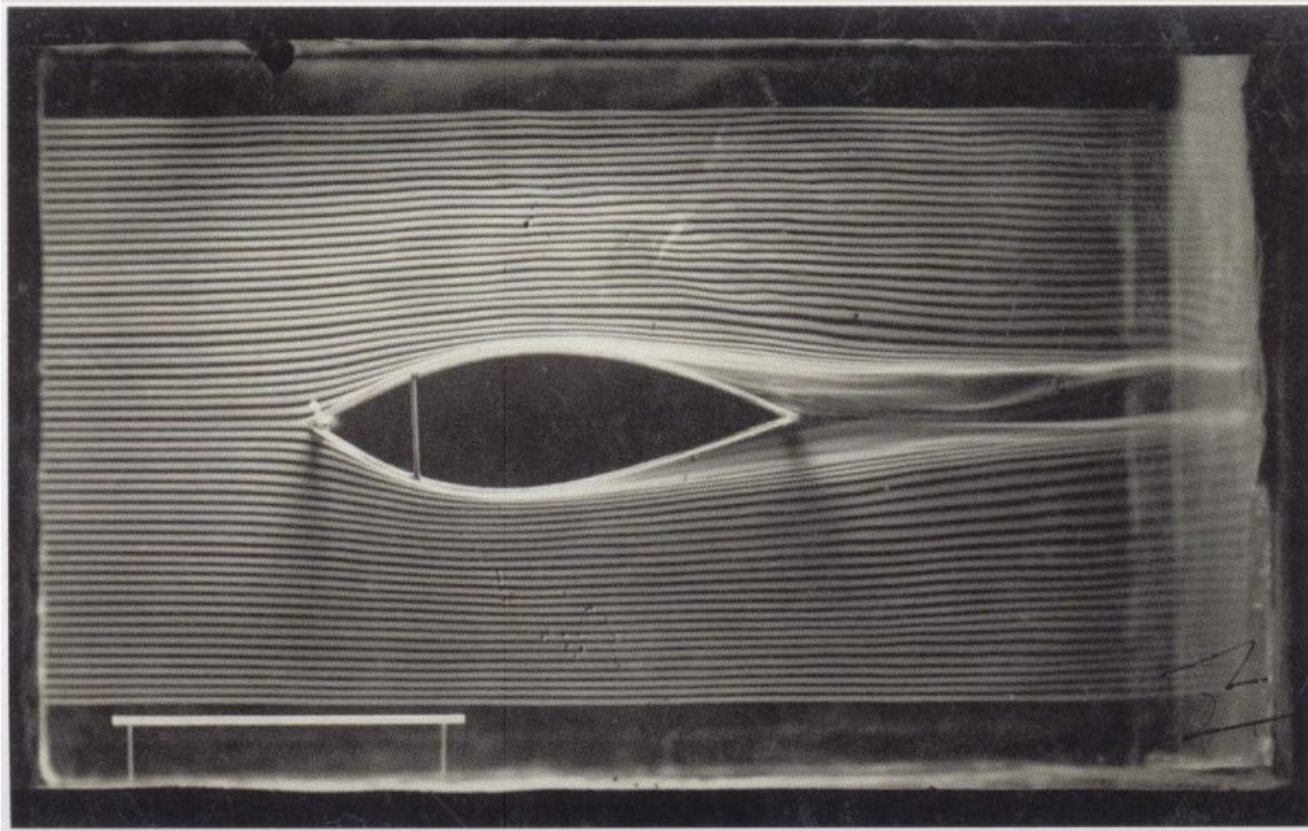


Ecoulement laminaire

$Re = 26$



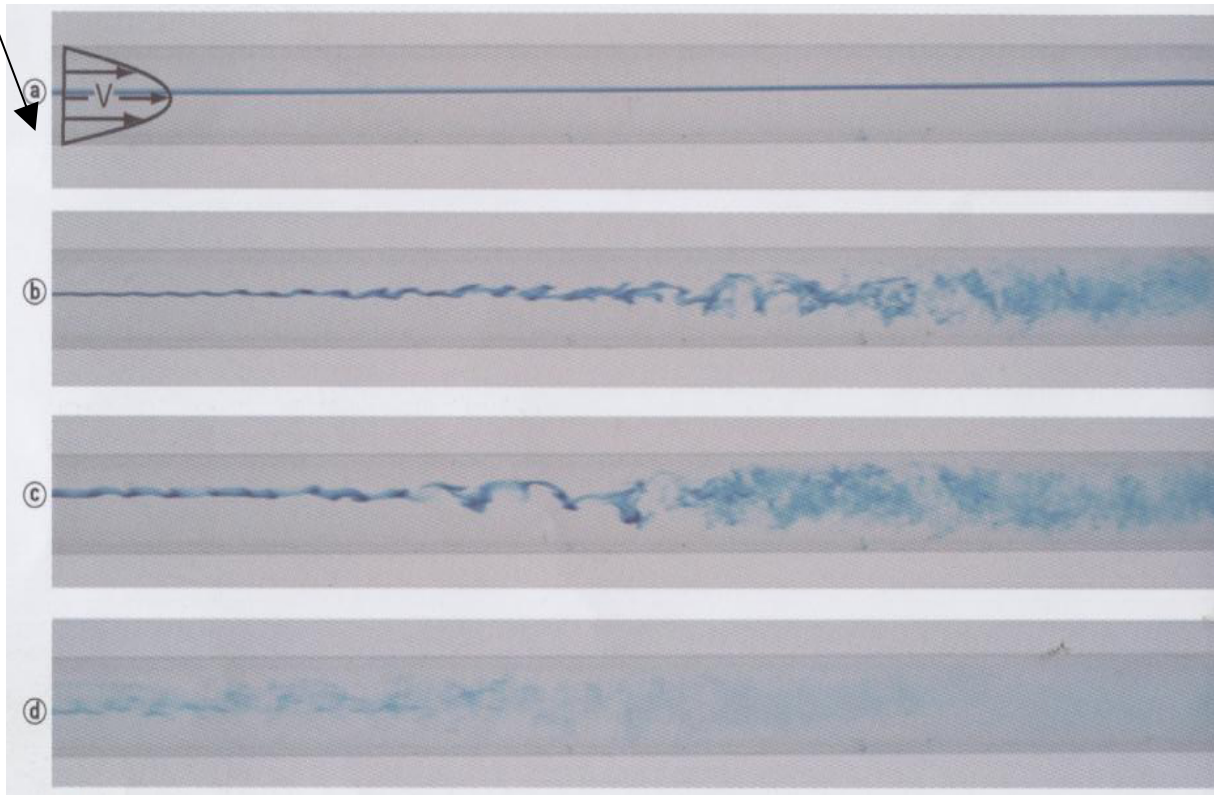
Ecoulement laminaire



Transition laminaire-turbulent

C' est Reynolds...

Expérience de Reynolds

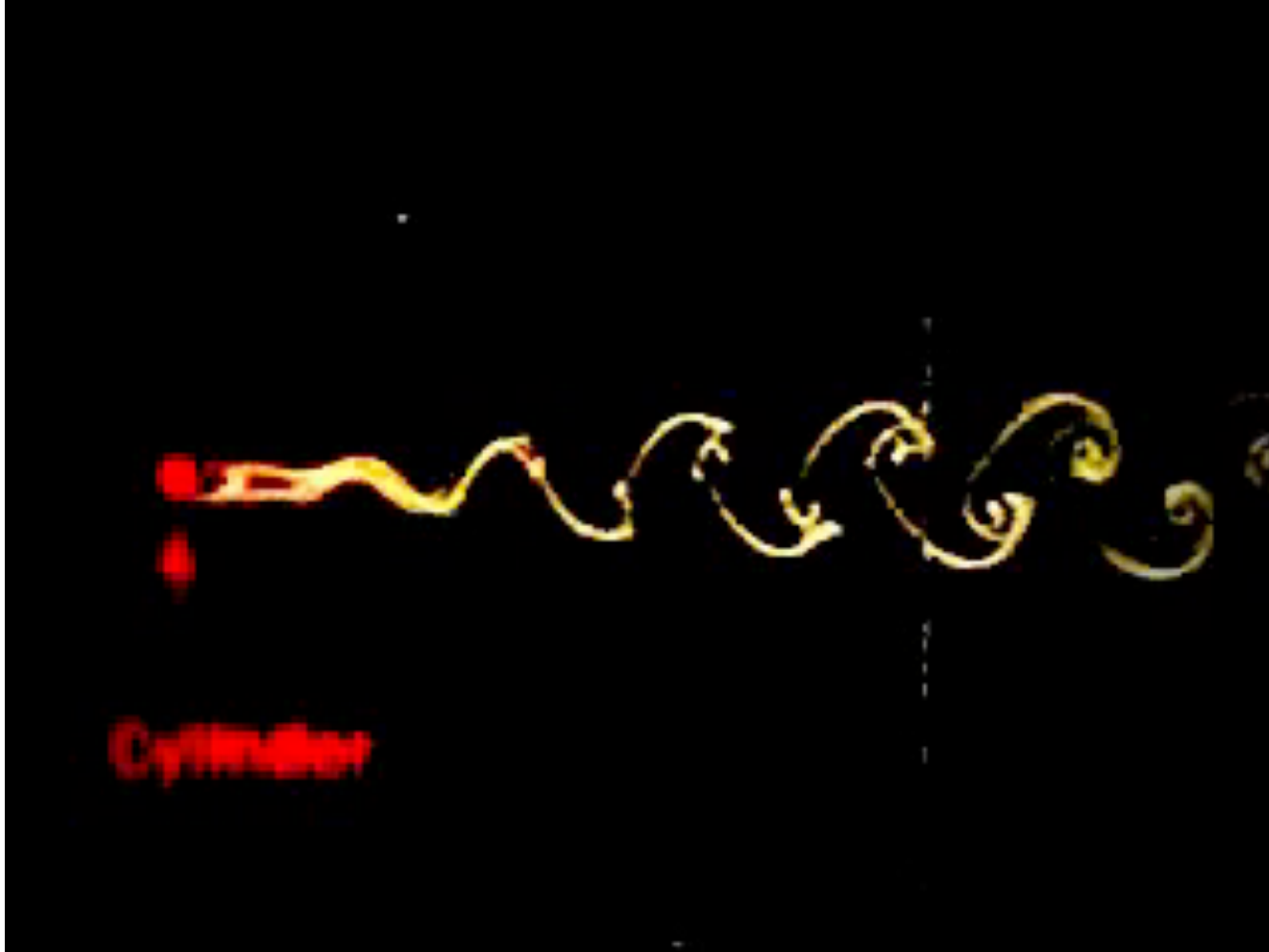


Tourbillons de Karman

$Re = 200$



Tourbillons de Karman



Ecoulement rampant (ou de Stokes)



$$(\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = \text{Fr} \frac{\mathbf{g}}{g} - \frac{1}{\text{Eu}} \text{grad}^* p^* + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}^*$$

- $\text{Re} \ll 1$ (inertie négligeable devant frottements visqueux)
- Effets visqueux sensibles dans tout l'écoulement
- Equations linéaires \Rightarrow plusieurs solutions analytiques pratiques (suspensions, milieux poreux)

Couche limite dynamique laminaire, bidimensionnelle et stationnaire

Dans ce chapitre on ne considérera que des fluides incompressible à masse volumique constante . Les écoulements seront supposés permanents et plans. On négligera la pesanteur .

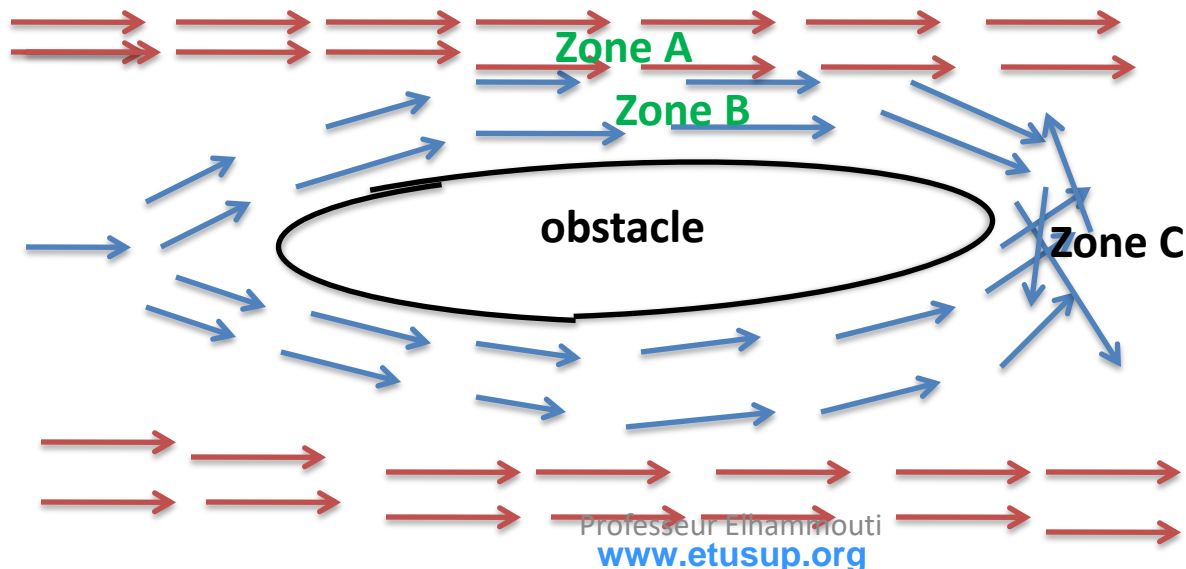
Analyse des effets de la viscosité

Cas des fluides à viscosité faible

Exemple : l'eau et l'air

Dans ces cas , il est légitime de prendre en compte les effets de la viscosité dans les zones à forte gradient de vitesse .

Considérons, l'écoulement ci-dessous autour d'un obstacle:



Dans cet écoulement on distingue trois zones

❖ **Zone A** où l'écoulement est peu perturbé: peu d'influence de la viscosité

❖ **Zones B** au voisinage de l'obstacle et **C** dans le sillage où l'écoulement présente un important gradient de vitesse

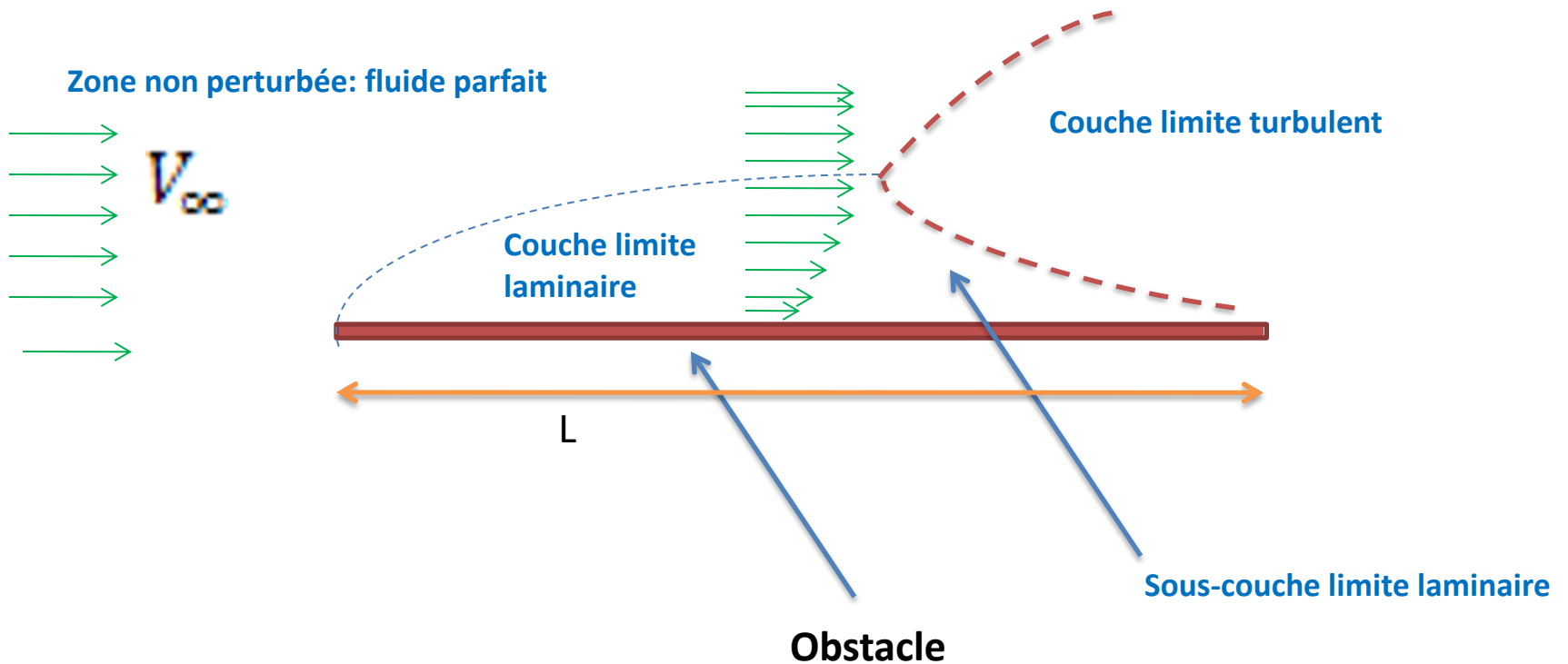
Il est logique le partage en deux zones principale l'étude d'un écoulement autour d'un obstacle

I – Une première zone au voisinage de l'obstacle où il faut tenir compte de la viscosité

II- une deuxième zone loin de l'obstacle où l'effet de la viscosité est négligeable et où le fluide est supposé parfait

Ce modèle constitue la base de la théorie de la couche limite dynamique.

Modèle de la couche de la couche limite dynamique



Equations adimensionnelles de Navier-Stokes et de continuité

Les équations dimensionnelles de Navier-Stokes d'un écoulement bidimensionnel stationnaire sont:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u$$

$$u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v$$

ν : *viscosité cinématique*

équation dimensionnelle de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Dans ces équations on néglige la pesanteur.

Prenons V_∞ et L Comme grandeurs de référence pour respectivement les vitesses et les longueurs.

Posons les changement de variable s et de fonctions suivants:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad U = \frac{u}{V_\infty}, \quad V = \frac{v}{V_\infty} \quad \text{et} \quad P = \frac{p - p_\infty}{\rho \cdot V_\infty^2}$$

En introduisant ces changements dans les équations de Navier-Stokes on obtient:

$$U. \frac{\partial U}{\partial X} + V. \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{R_e} \Delta U$$

$$U. \frac{\partial V}{\partial X} + V. \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{R_e} \Delta V$$

Equation adimensionnelle de Navier-Stokes

$$vec \ R_e = \frac{L.V_{\infty}}{\nu} \quad \text{le nombre sans dimension de Reynolds}$$

Equation adimensionnelle de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

Equation de continuité et de Navier-Stokes dans la zone non perturbée:

Problème extérieur à la couche limite

Si la viscosité est très faible (zone non perturbée loin de l'obstacle)

alors
$$R_e = \frac{L \cdot V_\infty}{\nu} \rightarrow \infty$$

Et obtient dans ce cas :

Equation adimensionnelle de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

Equation adimensionnelle de Navier-Stokes

$$U \cdot \frac{\partial U}{\partial X} + V \cdot \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X}$$
$$U \cdot \frac{\partial V}{\partial X} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y}$$

Ces dernières équation sont des équations adimensionnelles pour un fluide parfait en écoulement (Equation d'Euler)

Conséquence

Dans la zone non perturbée (à l'extérieur de la couche limite)
l'écoulement est régi dans la théorie de la couche limite par l'équation d'Euler pour un fluide parfait

la condition aux limite de glissement s'écrit $V(X,0) = 0$

La résolution de ce problème conduit à la détermination de

$U(X,Y)$

en particulier

$U(X,Y) = U_s(X)$ au voisinage de la paroi ($Y = 0$)

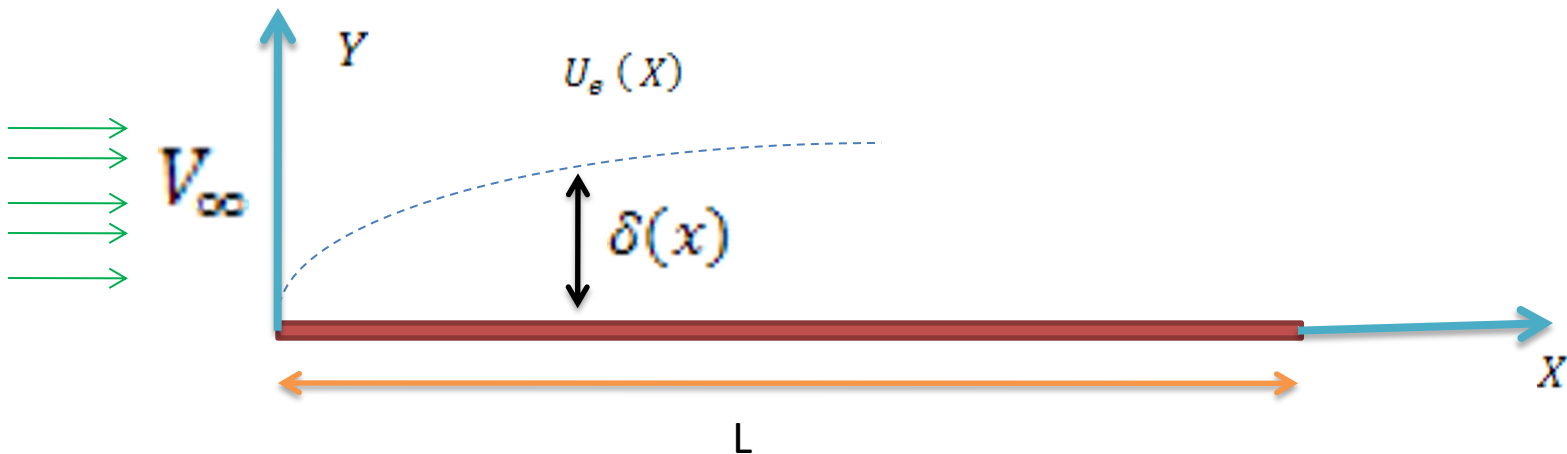
$P(X,Y) = P_s(X)$ au voisinage de la paroi ($Y = 0$)

D'après l'équation adimensionnelle de Bernoulli pour un fluide parfait on a :

$$P_s + \frac{1}{2} \cdot U_s^2 = \text{constante} \text{ soit } \frac{dP_s}{dX} = -U_s \cdot \frac{dU_s}{dX}$$

Equations de Navier Stokes et de continuité dans la couche limite

En réalité la couche du fluide en contact avec la paroi solide a une vitesse nulle par rapport à cette paroi (condition de non glissement)



Et la condition de glissement peut être réalisée à la limite de la couche limite

$\delta(x)$: est la distance qui sépare la paroi et la zone où le fluide est non perturbé

Remarque

Lorsque Y passe de 0 à $\Delta = \frac{\delta}{L} \ll 1$

U passe de 0 à U_∞ et V de 0 à $V_\infty \cong 0$

variation rapide de U sur une petite distance δ

Cette variation suggère d'introduire un nouvel changement de variable et de fonction comme suit:

$$\bar{Y} = Y \cdot R_\infty^{1/2} \quad \text{et} \quad \bar{V} = V \cdot R_\infty^{1/2}$$

En introduisant ce nouveau changement dans les équations adimensionnelles de Navier Stokes et de continuité précédente on obtient :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{Y}} = 0$$

$$U \cdot \frac{\partial U}{\partial X} + \bar{V} \cdot \frac{\partial U}{\partial \bar{Y}} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{Y}^2}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial \bar{Y}} = 0 \quad \rightarrow \quad P(X)$$

Avec:

$$X = \frac{x}{L}, \quad \bar{Y} = \frac{y \cdot R_s^{1/2}}{L}, \quad U = \frac{u}{V_\infty}, \quad \bar{V} = \frac{v \cdot R_s^{1/2}}{V_\infty} \quad \text{et} \quad P = \frac{p - p_\infty}{\rho \cdot V_\infty^2}$$

Soit sous forme dimensionnelle

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Ces équations représentent les équation de Navier Stokes et de continuité dans la couche limite ou équation de Prandtl

La relation $-\frac{\partial P}{\partial Y} = 0$ entraine que la pression sur la plaque

(à la surface du corps solide) est $P_s(X)$ (pression dans la zone entre

le fluide parfait et la couche limite) on a donc:

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial P_e}{\partial X}$$

Et d'après la relation de Bernoulli on :

$$\frac{d P_e}{d X} = -U_e \cdot \frac{d U_e}{d X}$$

Les équations de Prandtl s'écrivent alors

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{Y}} = 0$$

$$U \cdot \frac{\partial U}{\partial X} + \bar{V} \cdot \frac{\partial U}{\partial \bar{Y}} = U_e \cdot \frac{d U_e}{d X} + \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{Y}^2}$$

Avec la condition d'adhérence à la paroi :

$$\text{si } \bar{Y} \rightarrow 0 \text{ alors } U = 0 \text{ et } \bar{V} = 0$$

Et la condition de raccordement:

$$\lim_{\bar{Y} \rightarrow \infty} U(X, \bar{Y}) = U_e(X)$$

Ou sous forme dimensionnelle

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = u_{\epsilon} \cdot \frac{du_{\epsilon}}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$