أسئلة إنتاج الإجابة على التباديل والتوافيق ص ١٨

رقم ٢:-

إذا كان

$\frac{\lfloor ٥}{\lfloor ٣} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ٣ \, \lfloor ن-٢}$ فما قيمة ن

الحـــل :-

$(ن-٢) \lfloor ن-٢ = \lfloor ٥$

$(ن-٢) \lfloor ن-٣ = ٣ \times ٢ \times \lfloor ٥$

$(ن-٢) \lfloor ن-٣ = ٦ \lfloor ٥$

$\lfloor ن-٢ = \lfloor ٦$

$ن - ٢ = ٦$

$\Leftarrow ن = ٨$

رقم ٣:- اثبت أن

$\frac{\lfloor ن-ر-١}{\lfloor ر \, \lfloor ن-١} - \frac{\lfloor ن-ر-١}{\lfloor ر-١ \, \lfloor ن} = \frac{\lfloor ن-ر}{\lfloor ن \, \lfloor ر}$

الحـــل :-

الأيمن $= \frac{\lfloor ن-ر-١}{\lfloor ر \, \lfloor ن-١} - \frac{\lfloor ن-ر-١}{\lfloor ر-١ \, \lfloor ن-١}$

ثم نأخذ عامل مشترك من البسط والمقام

$\frac{\lfloor ن-ر-١}{\lfloor ر-١ \, \lfloor ن-١} \left[\frac{١}{ر} - \frac{١}{ن} \right]$

$\frac{\lfloor ن-ر-١}{\lfloor ر-١ \, \lfloor ن-١} \left(\frac{ن-ر}{ر \, ن} \right)$

$= \frac{(ن-ر) \lfloor ن-ر-١}{\lfloor ر-١ \, ن \, \lfloor ن-١}$

$= \frac{\lfloor ن-ر}{ر \, \lfloor ن} =$ الأيسر

رقم ٤:- حل المعادلة

$ل^{س+١} = ١٠ \times ق^{س+١}$

حيث س ∈ ط ، ٣ ، ٥

الحـــل :-

$\frac{\lfloor س+١}{\lfloor س+١-٣} = \frac{١٠ \lfloor س+١}{\lfloor ٥ \, \lfloor س+١-٥}$

$\frac{\lfloor س+١}{\lfloor س-٢} = \frac{١٠ \lfloor س+١}{١٢٠ \lfloor س-٤}$

$\frac{١}{(س-٢)(س-٣) \lfloor س-٤} = \frac{١٠}{١٢٠ \lfloor س-٤}$

$\frac{١}{(س-٢)(س-٣)} = \frac{١}{١٢}$

$(س-٢)(س-٣) = ١٢$

$ل^{س-٢} = ٤ \times ٣$

$ل^{س-٢} = ل^{٤}$ ∴ س = ٦

رقم ٥:- إثبت أن

$ق^{ن+١}_{ر+١} : ق^{ن-١}_{ر+١} = \frac{ن(ن+١)}{(ن-ر)(ن-ر-١)}$

ومن ذلك أوجد قيمة :-

$ق^{١٨}_{٦} : ق^{١٦}_{٦}$

الحـــل:-

الأيمن $= \frac{\lfloor ن+١}{\lfloor ر+١ \, \lfloor ن-ر} \div \frac{\lfloor ن-١}{\lfloor ر+١ \, \lfloor ن-ر-٢}$

$\frac{\lfloor ن+١}{\lfloor ر+١ \, \lfloor ن-ر} \times \frac{\lfloor ر+١ \, \lfloor ن-ر-٢}{\lfloor ن-١}$

$= ١$

$$= \frac{(ن + ١)\, ن\, |ن-١|\, ن-ر-٢}{(ن-ر)\,(ن-ر-١)\, |ن-ر-٢|\, ن-١}$$

$$= \frac{ن\,(ن+١)}{(ن-ر)\,(ن-ر-١)} = \text{الأيسر}$$

$$\frac{ق^{ن+١}_{ر+١}}{ق^{ن-١}_{ر}} = \frac{ن\,(ن+١)}{(ن-ر)\,(ن-ر-١)}$$

نضع ن = ١٧ ، ر = ٥

$$\frac{ق^{١٧+١}_{٥+١}}{ق^{١٧-١}_{٥+١}} = \frac{١٧\,(١٧+١)}{(١٧-٥)(١٧-٥-١)}$$

$$\frac{ق^{١٨}_{٦}}{ق^{١٦}_{٦}} = \frac{١٧ \times ١٨}{١٢ \times ١١} = \frac{١٧ \times ٣}{٢ \times ١١} = \frac{٥١}{٢٢}$$

رقم ٦:- إذا كان ن م + ن

$ل_{٢} = ٢$ ، $ل_{٢} = ٩٠$

فأوجد قيمة م + ن ق م − ن

الحـــــــــل

$ل^{ن}_{٢} = ٢ \times ١ \Leftarrow ن = ٢$

$ل^{م+ن}_{٢} = ٩٠ = ل^{م+٢}_{٢} = ١٠ \times ٩$

ن = ٢ ، م = ٨

$ق^{٨+٢}_{٨-٢} = ق^{١٠}_{٦} = ٢١٠$

رقم ٧:- $ل^{ن}_{ر} = ٢١٠$ ، $ق^{ن}_{ر} = ١٠٥$

فأوجد ن ، ر الحـــــــــل

$ق^{ن}_{ر} = ١٠٥$

$$\frac{ل^{ن}_{ر}}{ق^{ن}_{ر}} = \frac{٢١٠}{١٠٥} = ١٠٥$$

$١٠٥\,|ر = ٢١٠ \Leftarrow |ر = ٢$

$|ر = ٢ \Leftarrow ر = ٢$

$ل^{ن}_{٢} = ٢١٠ \qquad ل^{ن}_{٢} = ١٥ \times ١٤$

$ل^{ن}_{٢} = ل^{١٥}_{٢} \Leftarrow ن = ١٥$

رقم ٨:- إذا كان

$ل^{ن}_{ر} = ١٢٠ \quad ق^{ن}_{ر} \quad$ فأوجد قيمة $ق^{١٢}_{٢ر}$

ثم أوجد اقل قيمة للعدد (ن) والتي تجعل هذه العلاقة صحيحة

الحـــــــــل

$ل^{ن}_{ر} = ١٢٠\,|ر \Leftarrow |ر = ١٢٠$

$|ر = ٥$

$\Leftarrow$

$ق^{١٢}_{٢ر} = ق^{١٢}_{١٠} = ق^{١٢}_{٢} = ٦٦$

أقل قيمة التي تجعل هذا المعادلة صحيحة

هـ ن = ن ⟸ ن = ٥

رقم ٩ :- إذا كان

$ق^{م}_{م-٤} = ٣٥ \cdot ق^{ن}_{م+١}$

فما قيمة م ، ن

الحـــــــل

$ق^{م}_{م-٤} = ٣٥$ بتبسيط هذه التوفيقة نجد أن

$ق^{م}_{٤} = ٣٥ \leftarrow \frac{ل^{م}_{٤}}{\lfloor ٤} = ٣٥$

$ل^{م}_{٤} = ٣٥ \lfloor ٤ = ٨٤٠$

$ل^{م}_{٤} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤$

$ل^{م}_{٤} = ل^{٧}_{٤} \Longleftarrow م = ٧$

$ق^{ن}_{م} = ق^{ن}_{م+١} \leftarrow ٢م + ١ = ن$

$١٤ + ١ = ن \Longleftarrow ن = ١٥$

رقم ١٠ :-

إثبت أن $\lfloor ١١ = ٢^{٥} \lfloor ٥ \, (١١ \times ٩ \times ٧ \times .. \times ١)$

الحـــــــل

الايمن = $(١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١)$

$= (١٠ \times ٨ \times ٦ \times ٤ \times ٢) \times (١١ \times ٩ \times ٧ \times ٥ \times ٣ \times ١)$

$= (٢ \times ٥ \times ٢^{٣} \times ٢ \times ٤ \times ٣ \times ٢) \times (١١ \times ٩ \times ٧ .. \times ٣ \times ١)$

$= ٢^{٥} (٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢) \times (١١ \times ٩ \times ٧ .. \times ١)$

$= ٢^{٥} \lfloor ٥ \, (١١ \times ٩ \times ٧ \times .. \times ١)$ = الأيسر

رقم ١١ :- إذا كان $ق^{ن}_{٧} = ق^{ن}_{١٣}$

فما قيمة كل من ن ، $ق^{٢٣}_{ن}$ ، $ق^{ن}_{١٨}$

$ق^{ن}_{٧} = ق^{ن}_{١٣} \Longleftarrow ن = ٧ + ١٣ = ٢٠$

$ق^{ن}_{١٨} = ق^{٢٠}_{١٨} = ق^{٢٠}_{٢} = ١٩٠$

$ق^{٢٣}_{ن} = ق^{٢٣}_{٢٠} = ق^{٢٣}_{٣} = ١٧٧١$

رقم ١٢ :- إثبت أن

$ق^{١٣}_{ر} = \frac{(١٤ - ر)(١٥ - ر)}{ر(ر - ١)} \times ق^{١٣}_{ر-٢}$

الحـــــــل

الأيسر = $\frac{(١٤ - ر)(١٥ - ر)}{ر(ر - ١)} \times \frac{\lfloor ١٣}{\lfloor ر-٢ \, \lfloor ١٥ - ر}$

$= \frac{(١٤ - ر)(١٥ - ر)}{ر(ر - ١)\lfloor ر-٢} \times \frac{\lfloor ١٣}{(١٥ - ر)(١٤ - ر)\lfloor ١٣ - ر}$

$= \frac{\lfloor ١٣}{\lfloor ر \, \lfloor ١٣ - ر} = ق^{١٣}_{ر}$ = الأيمن

رقم ١٣ :-

أ- اثبت أن $ق^{ن}_{ر} = \frac{ن}{ر} \times ق^{ن-١}_{ر-١}$

ب- إذا كان $ق^{ن+١}_{ر+١} = ٩ \times ق^{ن}_{ر}$ ، $ق^{ن}_{ر-١} = ٩٠$

فأوجد ن ، ر

الحـــــــل

أ- الأيسر = $\frac{ن}{ر} \times \frac{\lfloor ن-١}{\lfloor ر-١ \, \lfloor ن-ر}$

$= \frac{ن \lfloor ن-١}{ر \lfloor ر-١ \, \lfloor ن-ر} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \, \lfloor ن-ر}$

= الأيسر

$$\text{ق}_{\text{ر}+1}^{\text{ن}+1} = 9 \times \text{ق}_{\text{ر}}^{\text{ن}+2}$$

$$\frac{\text{ن}!}{(\text{ر}+1)!\,(\text{ن}-\text{ر}-1)!} = \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر}-1)!}$$

$$\frac{(\text{ن}+2)!}{(\text{ر}+1)!} = \frac{9\,(\text{ن}+1)!}{\text{ر}!}$$

$$\frac{\text{ن}+2}{\text{ر}+1} = 9 \longrightarrow \text{ن}+2 = 9\text{ر}+9$$

$$\text{ن} = 9\text{ر}+7 \longrightarrow (1)$$

ولكن $\text{ق}_{\text{ر}-1}^{\text{ن}+1} = 90\ \text{ق}_{\text{ر}}^{\text{ن}}$

$$\frac{(\text{ن}+1)!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر}+1)!} = \frac{10\,\text{ن}!}{(\text{ر}-1)!\,(\text{ن}-\text{ر}+1)!}$$

$$\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}} = \frac{10\,\text{ن}!}{(\text{ر}-1)!\,\text{ر}!}$$

$$\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}} = \frac{10}{1}$$

$$\text{ن}+1 = 10\text{ر} \longrightarrow \text{ن} = 10\text{ر}-1 \longrightarrow (2)$$

من (1) ، (2) نجد أن :-

$$9\text{ر}+7 = 10\text{ر}-1 \longrightarrow 7+1 = 10\text{ر}-9\text{ر}$$

$$\Longrightarrow \text{ر} = 8$$

$$\text{لكن } \text{ن} = 10\text{ر}-1 = 80-1 = 79$$

$$\Longrightarrow \text{ن} = 79$$

رقم ١٤ :- اثبت أن

$$\frac{\text{ق}_{1}^{\text{ن}} \times \text{ق}_{2}^{2\text{ن}}}{\text{ل}_{2}^{3\text{ن}-1}} = \frac{\text{ق}_{3}^{2\text{ن}}}{\text{ل}_{2}^{3}}$$

الحـــــــــــل

باستخدام الطرق العادية فى مفهوم التوفيقة نجد أن

$$\text{الايمن} = \frac{\text{ن} \times \frac{2\text{ن}(2\text{ن}-1)}{2 \times 1}}{\frac{3\text{ن}(3\text{ن}-1)(3\text{ن}-2)}{3 \times 2}}$$

$$\text{الايمن} = \frac{2\text{ن}(2\text{ن}-1)}{(3\text{ن}-1)(3\text{ن}-2)} = \frac{\text{ل}_{2}^{2\text{ن}}}{\text{ل}_{2}^{3\text{ن}-1}}$$

= الأيســــــــر

رقم ١٥ :- إذا كان $\text{ق}_{\text{ر}-1}^{24} = \text{ق}_{\text{ر}+4}^{24}$

فما قيمة $\text{ل}_{2}^{\text{ر}}$

الحـــــــــــل

الاحتمال الاول :- العلم = العلم ← الدليل = الدليل

$$2\text{ر}-1 = \text{ر}+4 \longrightarrow 2\text{ر}-\text{ر} = 4+1$$

$$\Longrightarrow \text{ر} = 5 \qquad \text{ل}_{2}^{\text{ر}} = \text{ل}_{2}^{5} = 20$$

الاحتمال الثانى :- مجموع الدليلين = العلم

$$2\text{ر}-1+\text{ر}+4 = 24 \longrightarrow 3\text{ر}+3 = 24$$

$$\text{ر}+1 = 8 \Longrightarrow \text{ر} = 7$$

$$\text{ل}_{2}^{\text{ر}} = \text{ل}_{2}^{7} = 42$$

رقم ١٦ :- إذا كان العامل الاوسط فى مفكوك $\text{ل}_{7}^{\text{ن}} = 9$ **وكان** $\text{س}^2 - \text{ن} = 4$

فأوجد س **حيث** س ∈ ص+

الحـــــــــــل

$$\text{ل}_{7}^{\text{ن}} = \text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)(\text{ن}-4)(\text{ن}-5)(\text{ن}-6)$$

العامل الاوسط هو $\text{ن}-3 = 9 \Longrightarrow \text{ن} = 12$

$$\text{س}^2 - \text{ن} = 4 \qquad \text{س}^2 - 12 = 4 \qquad \text{س}^2 = 16$$

$$\Longrightarrow \text{س} = 4$$

∴ $\frac{\text{ل}^{\text{ن}}}{\text{ل}^{٤}} = ٢٤$

رقم ١٧ :- إذا كان

$\text{ق}^{\text{س}}_{\text{ص}} = \text{ق}^{\text{س}}_{\text{ص}+١}$ ، $\text{ق}^{\text{س}}_{\text{ص}} = ٢\,\text{ق}^{\text{س}}_{\text{ص}-١}$

فأوجد كلا من س ، ص

الحـــــــــل

$\text{ق}^{\text{س}}_{\text{ص}} = \text{ق}^{\text{س}}_{\text{ص}+١} \leftarrow$ س = ٢ص+١ ← ①

$\text{ق}^{\text{س}}_{\text{ص}} = ٢ \times \text{ق}^{\text{س}}_{\text{ص}-١}$

$\frac{\text{ق}^{\text{س}}_{\text{ص}}}{\text{ق}^{\text{س}}_{\text{ص}-١}} = ٢ \leftarrow \frac{\text{س} - \text{ص} + ١}{\text{ص}} = ٢$

٢ص = س - ص + ١ ← ٣ص = س + ١

لكن س = ٢ص + ١ ← ٣ص = ٢ص + ١ + ١

⟸ ص = ٢ ← س = ٢ × ٢ + ١ = ٥

رقم ١٨ :- $\text{ق}^{\text{ن}}_{٥} \geq \text{ق}^{\text{ن}}_{٤}$ ، ن ∈ ص+

فأوجد قيمة ن **الحـــــــــل**

$\frac{\text{ق}^{\text{ن}}_{٥}}{\text{ق}^{\text{ن}}_{٤}} \geq ١ \leftarrow \frac{\text{ن} - ٥ + ١}{٥} \geq ١$

ن - ٤ ≥ ٥ ، ن ≥ ٩ لكن العلم ≤ الدليل

٥ ≤ ن ≤ ٩

رقم ١٩ :- إذا كان $\text{ل}^{\text{ن}+٢}_{\text{ر}} : \text{ق}^{\text{ن}+٢}_{\text{ر}} = \frac{٢}{١}$

$\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+١} = \frac{٥}{٣}\,\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}}$ فما قيمة $\text{ق}^{٢\text{ن}}_{\text{ن}-\text{ر}}$

— الحل —

$\text{ل}^{\text{ن}+٢}_{\text{ر}} : \frac{\text{ل}^{\text{ن}+٢}_{\text{ر}}}{\text{ل}^{\text{ن}+٢}_{\text{ر}}} = ٢$

$\text{ل}^{\text{ن}+٢}_{\text{ر}} \times \frac{\text{ل}^{\text{ن}}}{\text{ل}^{\text{ن}+٢}_{\text{ر}}} = ٢$

$\text{ل}^{\text{ن}}_{\text{ر}} = ٢ \Leftarrow$ ر = ٢ لكن من المعطى

$\frac{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+١}}{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}}} = \frac{٥}{٣} \leftarrow \frac{\text{ق}^{\text{ن}}_{٣}}{\text{ق}^{\text{ن}}_{٢}} = \frac{٥}{٣}$

$\frac{\text{ن} - ٣ + ١}{٣} = \frac{٥}{٣} \leftarrow \frac{\text{ن} - ٢}{٣} = \frac{٥}{٣}$

ن - ٢ = ٥ ⟸ ن = ٧

$\text{ق}^{٢\text{ن}}_{\text{ن}-\text{ر}} = \text{ق}^{١٤}_{٥} = ٢٠٠٢$

رقم ٢٠ :- إثبت أن $\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}} + \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}-١} = \text{ق}^{\text{ن}+١}_{\text{ر}}$

واستخدم ذلك فى اثبات أن

$\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+٢} + ٢\,\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+١} + \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}} = \text{ق}^{\text{ن}+٢}_{\text{ر}+٢}$

الحـــــــــل

الايمن = $\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}} + \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}-١} = \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}-١}\left[\frac{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}}}{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}-١}} + ١\right]$

$$= \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}-1} \left[\frac{\text{ن}-\text{ر}+1}{\text{ر}} + \frac{\text{ر}}{\text{ر}} \right]$$

$$= \frac{\text{ن}!}{(\text{ر}-1)!\,(\text{ن}-\text{ر}+1)!} \times \frac{\text{ن}+1}{\text{ر}}$$

$$= \frac{(\text{ن}+1)\,\text{ن}!}{\text{ر}\,(\text{ر}-1)!\,(\text{ن}-\text{ر}+1)!}$$

$$= \frac{(\text{ن}+1)!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر}+1)!} = \text{ق}^{\text{ن}+1}_{\text{ر}} = \text{الأيسر}$$

المطلوب الثاني

$$\text{الأيمن} = \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+2} + \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+1} + \text{ق}^{\text{ن}+2}_{\text{ر}+2} = \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+2} + \boxed{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+1} + \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}}}$$

نستخدم المطلوب الأول

$$= \text{ق}^{\text{ن}+1}_{\text{ر}+2} + \text{ق}^{\text{ن}+1}_{\text{ر}+1} = \text{ق}^{\text{ن}+2}_{\text{ر}+2} = \text{الأيسر}$$

رقم ٢١ :- أوجد قيمة

$$\frac{\text{ق}^{18}_{4} + \text{ق}^{18}_{5}}{\text{ق}^{18}_{5} + \text{ق}^{18}_{6}}$$

الحل

بالقسمة بسطاً ومقاماً علي ق^{18}_{5}

$$\frac{\frac{\text{ق}^{18}_{4}}{\text{ق}^{18}_{5}} + 1}{1 + \frac{\text{ق}^{18}_{6}}{\text{ق}^{18}_{5}}} = \frac{\frac{18-5+1}{1} + 1}{1 + \frac{18-6+1}{6}}$$

$$\frac{\frac{5}{14} + 1}{1 + \frac{13}{6}} = \frac{\frac{19}{14}}{\frac{19}{6}} = \frac{6}{14} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

رقم ٢٢ :-

اذا كان $\text{ق}^{30}_{\text{ر}} = \text{ق}^{30}_{\text{ر}+10}$ ، $\text{ل}^{\text{ن}}_{7} = 90\ \text{ل}^{\text{ن}-2}_{5}$

فأوجد قيمة $\text{ن}-\text{ر}$

الحل

$$\text{ق}^{30}_{\text{ر}} = \text{ق}^{30}_{\text{ر}+10} \longrightarrow 2\text{ر}+10 = 30$$

$$\longrightarrow 2\text{ر} = 20 \longrightarrow \boxed{\text{ر} = 10}$$

$$\text{ل}^{\text{ن}}_{7} = 90\ \text{ل}^{\text{ن}-2}_{5}$$

$$\frac{\text{ن}!}{\text{ن}-7!} = \frac{90\ \text{ن}-2!}{\text{ن}-7!}$$

$$\text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{ن}-2! = 90\ \text{ن}-2!$$

$$\text{ن}(\text{ن}+1) = 10 \times 9$$

$$\text{ل}^{\text{ن}}_{2} = 90 \longrightarrow \text{ل}^{\text{ن}}_{2} = \text{ل}^{10}_{2}$$

$$\boxed{\text{ن} = 10}$$

$$\text{ن}-\text{ر} = 10-10 = 0 = 1$$

رقم ٢٣ :- إثبت أن

$$\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}-٢} = (\text{ن}-\text{ر}+١)\,(\text{ن}-\text{ر}+٢) : \text{ر}\,(\text{ر}-١)$$

ومن ذلك اوجد قيمة $\text{ق}^{١٥}_{١٠} : \text{ق}^{١٥}_{٨}$

الحل

$$\frac{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}}}{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}-٢}} = \frac{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}}}{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}-١}} \times \frac{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}-١}}{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}-٢}}$$

$$= \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{\text{ن}-(\text{ر}-١)+١}{\text{ر}-١}$$

$$= \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{\text{ن}-\text{ر}+٢}{\text{ر}-١}$$

$$= (\text{ن}-\text{ر}+١)\,(\text{ن}-\text{ر}+٢) : \text{ر}\,(\text{ر}-١) = \text{الأيسر}$$

$$\therefore \frac{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}}}{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}-١}} = \frac{(\text{ن}-\text{ر}+٢)(\text{ن}-\text{ر}+١)}{\text{ر} \times (\text{ر}-١)}$$

بوضع ن = ١٥ ، ر = ١٠ فى الطرفين

$$\frac{\text{ق}^{١٥}_{١٠}}{\text{ق}^{١٥}_{١٠-٢}} = \frac{(١٥-١٠+٢)\,(١٥-١٠+١)}{١٠ \times (١٠-١)}$$

$$\frac{\text{ق}^{١٥}_{١٠}}{\text{ق}^{١٥}_{٨}} = \frac{٧ \times ٦}{١٠ \times ٩} = \boxed{\frac{٧}{١٥}}$$

رقم ٢٤ :- إذا كان

$$\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}} : \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+١} : \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+٢} = ١ : ٢ : ٣$$ فما قيمة ن ، ر

الحل

$$\frac{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+١}}{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}}} = \frac{٢}{١} \leftarrow \frac{\text{ن}-\text{ر}-١+١}{\text{ر}+١} = ٢$$

$$\text{ن}-\text{ر} = ٢\text{ر}+٣ \Leftarrow \text{ن} = ٣\text{ر}+٣ \quad (١)$$

$$\frac{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+٢}}{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+١}} = \frac{٣}{٢} \leftarrow \frac{\text{ن}-(\text{ر}+٢)+١}{\text{ر}+٢} = \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{\text{ن}-\text{ر}-١}{\text{ر}+٢} = \frac{٣}{٢} \leftarrow ٢\text{ن}-٢\text{ر}-٢ = ٣\text{ر}+٦$$

$$٢\text{ن} = ٥\text{ر}+٨ \leftarrow (٢)$$

بقسمة ٢ علي ١

$$\frac{٢\text{ن}}{\text{ن}} = \frac{٥\text{ر}+٨}{٣\text{ر}+٢} \leftarrow ٦\text{ر}+٤ = ٥\text{ر}+٨$$

$$٦\text{ر} - ٥\text{ر} = ٨-٤ \qquad \text{ر} = ٤$$

لكن $\text{ن} = ٣\text{ر} + ٢ = ١٢+٢ \Leftarrow \text{ن} = ١٤$

رقم ٢٥:- إذا كان $\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}} = \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+١}$

$$\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+١} : \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}-١} = \frac{٧}{٦}$$ فما قيمة ن ، ر

الحل

$$\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}} = \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+١} \Leftarrow \text{ن} = ٢\text{ر}+١ \quad (١)$$

$$\frac{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+1}}{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}-1}} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}+1}}{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}}} \times \frac{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}}}{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}-1}}$$

$$\frac{\text{ن}-\text{ر}-1+1}{\text{ر}+1} \times \frac{\text{ن}-\text{ر}+1}{\text{ر}} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{(\text{ن}-\text{ر})(\text{ن}-\text{ر}+1)}{\text{ر}(\text{ر}+1)} = \frac{7}{6}$$

بالتعويض من (١) عن ن = ٢ر+١

$$\frac{(2\text{ر}+1-\text{ر})(2\text{ر}+1-\text{ر}+1)}{\text{ر}(\text{ر}+1)} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{(\text{ر}+1)(\text{ر}+2)}{\text{ر}(\text{ر}+1)} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{\text{ر}+2}{\text{ر}} = \frac{7}{6} \longrightarrow 6\text{ر}+12 = 7\text{ر}$$

١٢ = ٧ر - ٦ر ⟸ $\boxed{\text{ر} = 12}$

ولكن ن = ٢ر+١ = ٢٤+١ = ٢٥

رقم ٢٦ :- إثبت أن $\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}-\text{ر}} \times \text{ق}^{\text{ن}-1}_{\text{ر}}$

ومن ذلك أوجد قيمة $\text{ق}^{25}_{10} : \text{ق}^{24}_{10}$

الحـــــــــــل

$$\text{الأيسر} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}-\text{ر}} \times \frac{\lfloor\underline{\text{ن}-1}}{\text{ر}\,\lfloor\underline{\text{ن}-\text{ر}-1}}$$

$$= \frac{\lfloor\underline{\text{ن}}}{\lfloor\underline{\text{ر}}\,\lfloor\underline{\text{ن}-\text{ر}}} = \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}} = \text{الأيمن}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{ن}\,\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}}}{\text{ن}-\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}-\text{ر}}$$

بوضع ن = ٢٥ ، ر = ١٠

$$\frac{\text{ق}^{25}_{10}}{\text{ق}^{25-1}_{10}} = \frac{25}{25-10}$$

$$\frac{\text{ق}^{25}_{10}}{\text{ق}^{24}_{10}} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

رقم ٢٧ :-

كم عددا مكوناً من ثلاثة أرقام مختلفة يمكن تكوينة من مجموعة الأرقام

{ ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

الحـــــــــــل

$$\text{ل}^{6}_{3} = 120$$

رقم ٢٨ :- إثبت ان

$\frac{\lfloor 2ن}{\lfloor ن} = 2^{ن} [1 \times 3 \times 5 \times ....(2ن-1)]$

الحـــــــــــل

$\frac{\lfloor 2ن}{\lfloor ن} = 2ن (2ن-1)(2ن-2)(2ن-3)$
$(2ن-4)...6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$\frac{\lfloor 2ن}{\lfloor ن} = 2ن(2ن-1)2(ن-1)(2ن-3)$
$2(ن-2)..6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$\frac{\lfloor 2ن}{\lfloor ن} = 2^{ن} [ن(ن-1)(ن-2). 3 \times 2 \times 1]$
$\times [(2ن-1)(2ن-3)..5 \times 3 \times 1]$

أى فصل الحدود الزوجية عن الفردية

$\frac{\lfloor 2ن}{\lfloor ن} = 2^{ن} [ن(ن-1)(ن-2). 3 \times 2 \times 1]$
$\times [1 \times 3 \times 5 (2ن-1)]$

$\frac{\lfloor 2ن}{\lfloor ن} = 2^{ن} [1 \times 3 \times 5 (2ن-1)]$

$\frac{\lfloor 2ن}{\lfloor ن} = 2^{ن} [1 \times 3 \times 5..(2ن-1)]$ = الايسر

رقم ٢٩ :- إذاكان

س = { س :س ∈ ط ، ٥ ≤ س ≤ ٩ }
وكانت ص = { (أ ، ب) : أ،ب ∈ س ، أ ≠ ب }
أوجد عدد عناصر ص ؟

الحـــــــــــل

عدد العناصر ٥

$ل_2 = 20$

رقم ٣٠ :- إذا كان س { س:س ∈ ص ، -٢ ≤ س ≤ ٦ }
ع = {(أ ، ب ، ج) : أ ، ب ، ج ∈ س }
فكم عدد عناصر ع ؟

الحـــــــــــل

ع = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }
عدد عناصر ع = ٩ عناصر
يتم أخذ ثلاث عناصر من ٩ عناصر بطريقة

$ق^{9}_{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$

رقم ٣١ :- إذا كان $ل^{ن}_{8} > ل^{ن}_{7}$

فأوجد أقل قيمة للعدد ن تحقق المتباينة السابقة

الحـــــــــــل

$ل^{ن}_{8} > ل^{ن}_{7}$ = $\frac{\lfloor ن}{\lfloor (ن-8)} > \frac{\lfloor ن}{\lfloor (ن-7)}$

$\frac{1}{\lfloor (ن-8)} > \frac{1}{\lfloor (ن-7)}$ ، $\frac{1}{1} > \frac{1}{ن-7}$

ن -٧ > ١ ن > ٨ العلم ≤ الدليل
أقل قيمة للعدد ن هو = (٩)

رقم ٣٢ :- اذا كان

$ق^{7}_{1} > ق^{r}_{5}$

فما قيمة [٦ - ر] الحـــــــــــل

العلم > الدليل العلم > الدليل

$ق^{7}_{r} > 1$ | $ق^{r}_{5} > 1$

٧ > ر | ر > ٥

أى أن ر < ٧
أى أن قيمة (ر) تنحصر بين ٥ ، ٧ أى ٥ < ر < ٧
لكن ر عدد صحيح ⟸ ر = ٦
⟸ [٦ - ر] = [٦ - ٦] = [٠] = ١
ملاحظة لا يصح التساوى بين العلم والدليل هنا لأنه إذا تساويا فإن
$ق^{7}_{r} > 1$ تكون $ق^{7}_{7} > 1$

أى أن ١ > ١ وهذا خطأ

رقم ٣٣ :- إذا كان

$ق^{ن}_{r+2} \times ق^{ن}_{r} \le ق^{ن}_{r+1} \times ق^{ن}_{r-1}$

فإثبت أن ن ≤ ٢ر +١ الحـــــــــــل

$ق^{ن}_{r+2} \times ق^{ن}_{r} \le 1$

$$\frac{\text{ن}-(\text{ر}+٢)+١}{\text{ر}+٢} \times \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \geq ١$$

$$\frac{\text{ن}-\text{ر}-١}{\text{ر}+٢} \times \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \geq ١$$

$$\frac{[(\text{ن}-\text{ر})-١]\ [(\text{ن}-\text{ر})+١]}{\text{ر}^٢+٢\text{ر}} \geq ١$$

$$\frac{(\text{ن}-\text{ر})^٢-١}{\text{ر}^٢+٢\text{ر}} \geq ١$$

$$(\text{ن}-\text{ر})^٢-١ \geq \text{ر}^٢+٢\text{ر}$$

$$(\text{ن}-\text{ر})^٢ \geq \text{ر}^٢+٢\text{ر}+١$$

$$(\text{ن}-\text{ر})^٢ \geq (\text{ر}+١)^٢$$

$$\text{ن}-\text{ر} \geq \text{ر}+١$$

$$\text{ن} \geq ٢\text{ر}+١$$

رقم ٣٤ إذا كان :-

$$\text{ق}_{\text{ر}}^{\text{ن}} - \text{ق}_{٢}^{\text{ن}} = \frac{١}{٦}\ \text{ن}^٣ - \text{ن}^٢ + ٥$$

فما قيمة ن الحـــــــــل

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)}{٢\times٢} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{٢} = \frac{١}{٦}\ \text{ن}^٣ - \text{ن}^٢ + ٥$$

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)}{٦} - \frac{٣\text{ن}(\text{ن}-١)}{٦} = \frac{١}{٦}\ \text{ن}^٣ - \text{ن}^٢ + ٥$$

بالضرب × ٦ للطرفين

$$\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢) - ٣\text{ن}(\text{ن}-١) = \text{ن}^٣ - ٦\text{ن}^٢ + ٣٠$$

$$\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢-٣) = \text{ن}^٣ - ٦\text{ن}^٢ + ٣٠$$

$$(\text{ن}^٢ - \text{ن})(\text{ن}-٥) = \text{ن}^٣ - ٦\text{ن}^٢ + ٣٠$$

$$\text{ن}^٣ - ٥\text{ن}^٢ - \text{ن}^٢ + ٥\text{ن} = \text{ن}^٣ - ٦\text{ن}^٢ + ٣٠$$

$$-٦\text{ن}^٢ + ٥\text{ن} = -٦\text{ن}^٢ + ٣٠$$

$$٥\text{ن} = ٣٠ \Longleftarrow \text{ن} = ٦$$

رقم ٣٥ :- إذا كان $\frac{\text{ن}!}{٤!\,(\text{ن}-٥)!} = ٢٨٠$ فما قيمة $\text{ل}_{٥}^{\text{ن}}$

الحـــــــــل

$$\frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-٥)!} = ٢٨٠\ ٤! \ ،\ \text{ل}_{٥}^{\text{ن}} = ٢٨٠\times٢٤ \ ،\ \text{ل}_{٥}^{\text{ن}} = ٦٧٢٠$$

رقم٣٦: إذا كان (س + ص = ١٨٢)(س+ ص-٢)

(س- ص = ٣٣٦)(س- ص-٣) فما قيمة س ،ص

الحـــــــــل

(س+ ص = ١٨٢)(س+ ص-٢)

(س+ ص) (س+ص-١)(س+ص-٢) =

١٨٢ (س+ ص-٢)

(س+ ص) (س+ص- ١) =١٨٢

$$\text{س}^{٢}-\text{ص}^{٢} = \text{ل}^{٢}$$

س+ ص = ١٤ ⟵ (١)

وبالمثل (س – ص = ٣٣٦)(س- ص-٣)

(س- ص)(س-ص-١)(س-ص-٢)(س- ص-٣)

= ٣٣٦ (س- ص -٣)

س- ص س- ص ٨

$$\text{ل}_{٣} = ٣٣٦ \ ،\ \text{ل}_{٣} = \text{ل}_{٣}$$

س- ص = ٨ ⟵ (٢)

بحل المعادلتين معا

س + ص = ١٤

س- ص =٨

٢س = ٢٢

س = ١١

س+ ص =١٤ ⟵ ١١+ ص =١٤

ص = ٣

رقم ٣٧ :- إثبت (٢٥) تقبل القسمة على (١٣) (٧) (٥)

الحـــــــــل

$$\text{ق}_{١٣}^{٢٥} = \frac{٢٥!}{١٣!\ ١٢!}$$ ∴ ص أي لم يقبل القسمة على العدد ١٣ بدون باقي ∴ ١٢! يقبل القسمة على ١٣ ، ٥

كذلك (١٢) يقبل القسمة علي (٥) (٧)

بدون باقي، (٢٥) يقبل القسمة على (١٣) ، (٥)

رقم ٣٨ :- إذا كان ٢(٢ن-٤) = (ن-٤)(ن+٢)

فما قيمة ن الحـــــــــل

٢ن- ٤ (٢ن-٤)

$$\text{ق}_{\text{ن}} = \frac{(\text{ن}-٤)}{(\text{ن}-٤)}$$

لكن من المعطي نعوض في التوفيقية

الدليل = الدليل ، ←

٢ن − ن = ٤+٢

رقم ٢٩ :- إثبت أن

(ن+١) (ن+٢) × ... × ٢ن ن
= ٢

١× ٣ × ٥ × ..... (٢ن- ١)

الحـــــــــــــل

٢ن × ..... (ن+٢) (ن+١)

الايمن =

(٢ن- ١) ٥ × ٣ × ١

حيث ان الضرب عملية ابدالية

(٢ن- ١)(٢ن-٢)... (ن+٢)(ن+١)

الايمن =

١ × ٣ × ٥ ×

=

(٢ن- ١) × ... ٥×٣×١

حيث أخر حد فى التبديله يمكن الحصول كالآتى

= العلم − الدليل +١

= ..... (١)

ن (١ ×٣×٥.....(٢ن-١)

ولكن من المسألة رقم ٢٨ تم إثبات أن

ن! = ٢ ن (١×٣×٥.....(٢ن-١) ②

بالتعويض فى ١ من ٢ نجد أن

الأيمن = ٢ ن ن (١×٣×٥.....(٢ن-١))

ن (١×٣×٥.....(٢ن-١))

= ٢ ن = الأيسر

مسائل انتاج الاجابة على نظرية ذات الحدين

رقم ٣ :- استخدم مفكوك

(١+ س) ن فى إثبات أن ق ن + ق ن + ق ن ...ق ن = ٢ ن

الحـــــــــــــل

(١+س) ن = ١ + ق ن س+ق ن س٢+ ق ن س٣ + ..ق ن س ن

بوضع س = ١ نجد أن

(١+١) ن = ق ن + ق ن + ق ن + ق ن + ... ق ن

ق ن + ق ن + ق ن + ق ن + ... ق ن = ٢ ن

رقم ٤ :- أوجد الحد الخامس من النهاية فى مفكوك

(س٢ − ١/س) ٢٠

عدد حدود المفكوك ٢١

ح من النهاية هو ح من البداية

ح = ق ن (س٢)

ح = ق ٢٠ س ٤٠ ح من النهاية = ٥ : ٢١ : س ٨

رقم ٥ :- إذا كانت معاملات س٧ ، س٤ في مفكوك

(أ س٢ + ١/ن س) ١١ حسب قوي س التنازلية متساوية

فاثبت أن أ ب = ١ الحـــــــــل

نفرض أن ح ر+١ يحتوي علي س٧

ح ر+١ = ق ١١ ر (١/ن س) ر (أ س٢) ١١- ر

$س^{ر} \times س^{٢٢-٢ر} = س^{٧}$

$س^{٢٢-٣ر} = س^{٧}$

$٢٢ - ٣ر = ٧ \longrightarrow ٣ر = ١٥$

$\Leftarrow ر = ٥ \longrightarrow ح_{٦}$ يحتوي علي $س^{٢}$

$ح_{٦} = {}^{١١}ق_{٥} \left(\frac{١}{ب س}\right)^{٥} (أ س^{٢})^{٦}$

$ح_{٦} = {}^{١١}ق_{٥} \frac{١}{ب^{٥} س^{٥}} أ^{٦} س^{١٢}$

$ح_{٦} = {}^{١١}ق_{٥} \frac{أ^{٦}}{ب^{٥}} س^{٧}$

معامل $س^{٧} = {}^{١١}ق_{٥} \frac{أ^{٦}}{ب^{٥}} \longrightarrow (١)$

ثم نأتي بمعامل س٤ في المفكوك

$س^{٢٢-٣ر} = س^{٤} \longrightarrow ٢٢-٣ر = ٤$

$٣ر = ١٨ \longrightarrow \boxed{ر = ٦}$

$ح_{٧}$ يحتوي علي س٤

$ح_{٧} = {}^{١١}ق_{٦} \left(\frac{١}{ب س}\right)^{٦} (أ س^{٢})^{٥}$

$= {}^{١١}ق_{٦} \frac{١}{ب^{٦} س^{٦}} أ^{٥} س^{١٠}$

$ح_{٧} = {}^{١١}ق_{٦} \frac{أ^{٥}}{ب^{٦}} س^{٤} \longrightarrow$ معامل $س^{٤} = {}^{١١}ق_{٦} \frac{أ^{٥}}{ب^{٦}} \longrightarrow (٢)$

معامل س٧ = معامل س٤

$^{١١}ق_{٥} \frac{أ^{٦}}{ب^{٥}} = {}^{١١}ق_{٦} \frac{أ^{٥}}{ب^{٦}}$

$^{١١}ق_{٥} \frac{أ^{٦}}{ب^{٥}} = {}^{١١}ق_{٥} \frac{أ}{ب} \longrightarrow \frac{أ}{ب} = \frac{١}{أب}$ ∵ أب = ١

رقم ٦:- اذا كان فى مفكوك

$(س^{٢} - \frac{١}{س})^{ن}$ حد خالى من س فبين أن ن تقبل

القسمة على ٣

الحـــــــــــل

نفرض أن $ح_{ر+١}$ يحتوى على $س^{صفر}$

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \left(\frac{-١}{س}\right)^{ر} (س^{٢})^{ن-ر}$

$س^{-ر} \times س^{٢ن-٢ر} = س^{٠}$

$س^{٢ن-٣ر} = س^{٠}$

$٢ن - ٣ر = ٠$

$٢ن = ٣ر$

$ر = \frac{٢ن}{٣}$

← البسط يقبل القسمة على المقام بدون باق

← البسط يقبل القسمة على ٣ بدون باقى

⇐ ن تقبل القسمة على ٣

رقم ٧:- أوجد الحد الخالى من س فى مفكوك

$(٢س^{٢} - \frac{١}{س})^{١٢}$

الحـــــــــــل

$ح_{ر+١}$ يحتوى على $س^{صفر}$

$ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر} \left(\frac{-١}{س}\right)^{ر} (٢س^{٢})^{١٢-ر}$

$س^{-ر} \times س^{٢٤-٢ر} = س^{٠}$

$س^{٢٤-٣ر} = س^{٠}$

$٢٤ - ٣ر = ٠$

$\boxed{ر = ٨} \Leftarrow ح_{٩}$ هو الحد الخالى من س

$ح_{٩} = {}^{١٢}ق_{٨} \left(\frac{-١}{س}\right)^{٨} (٢س^{٢})^{٤}$

$ح_{٩} = {}^{١٢}ق_{٨} \times ٢^{٤} = ٧٩٢٠$

رقم ٨:- أوجد معامل

$س^{-١٠}$ فى مفكوك $\left(\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{٢}{س^{٢}}\right)^{١٥}$

الحـــــــــــــل

$ح_{ر+١} = ق_{ر} \left(\frac{س^{٢}}{٢}\right)^{١٥-ر} \left(\frac{-٢}{س^{٢}}\right)^{ر}$

$س^{-٢ر} \times س^{٣٠-٢ر} = س^{-١٠}$

$س^{٣٠-٤ر} = س^{-١٠}$

$٣٠ - ٤ر = -١٠$

$٤ر = ٤٠ \longrightarrow ر = ١٠$

$ح_{١١} = ق_{١٠} \left(\frac{-٢}{س^{٢}}\right)^{١٠} \left(\frac{س^{٢}}{٢}\right)^{٥}$

$ح_{١١} = ق_{١٠} \times \frac{١٠٢٤}{٣٢} \times س^{١٠}$

$ح_{١١} = ٣٠٠٣ \times ٣٢ \; س^{-١٠}$

$ح_{١١} = ٩٦٠٩٦ \; س^{-١٠}$

$\Longleftarrow$ معامل $س^{-١٠}$ = ٩٦٠٩٦

رقم ٩:-

أوجد $ح_{ر}$ من البداية ، $ح_{ر}$ من النهاية فى مفكوك $(أ + ٢س)^{ن}$

الحـــــــــــــل

$ح_{ر}$ من البداية فى مفكوك $(أ + ٢س)^{ن}$

$ح_{ر} = ق_{ر-١} \; (٢س)^{ر-١} \; أ^{ن-ر+١}$

لكن $ح_{ر}$ من النهاية فى $(أ + ٢س)^{ن}$

هو $ح_{ر}$ من البداية فى مفكوك $(٢س + أ)^{ن}$

$ح_{ر}$ من النهاية = $ق_{ر-١} \; أ^{ن-ر+١} \; (٢س)^{ر-١}$

رقم ١٠:- أوجد معامل

$س^{م}$ فى مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{٢م}$

حسب قوى س التنازلية ، م عدد صحيح موجب

الحـــــــــــــل

$ح_{ر+١} = ق_{ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} \left(س^{٢}\right)^{٢م-ر}$

$س^{-ر} \times س^{٤م-٢ر} = س^{م}$

$س^{٤م-٣ر} = س^{م}$

$\therefore ٤م - ٣ر = م$

$٣م = ٣ر \longrightarrow ر = م$

الحد الذى يشتمل على $س^{م}$ هو $ح_{م+١}$

$ح_{م+١} = ق_{م} \left(\frac{١}{س}\right)^{م} \left(س^{٢}\right)^{م}$

$= ق_{م} \; س^{-م} \times \left(س^{٢}\right)^{م}$

$ح_{م+١} = ق_{م} \; س^{م}$

$\Longleftarrow$ معامل $(س^{م})$ هو $(ق_{م}^{٢م})$

رقم ١١:- اكتب مفكوك $(٢ + س)^{٥}$ وبأخذ الحدود الثلاثة الاولى من المفكوك ووضع س = ٠,٠١

أوجد قيمة $(٢,٠٠١)^{٥}$ مقربا الناتج لخمسة أرقام عشرية

الحـــــــــــــل

$(٢ + س)^{٥} = ٣٢ + ق_{١}^{٥} س (٢)^{٤} + ق_{٢}^{٥} س^{٢} (٢)^{٣}$

$+ ق_{٣}^{٥} س^{٣} (٢)^{٢} + ق_{٤}^{٥} س^{٤} (٢) + س^{٥}$

$(٢ + س)^{٥} = ٣٢ + ٨٠س + ٨٠س^{٢} + ...$

$(٢ + ٠.٠١)^{٥} = ٣٢ + ٨٠/١٠٠٠ + ٨٠/١٠^{٦}$

$(٢.٠٠١)^{٥} = ٣٢ + ٠.٠٨ + ٠.٠٠٠٨$

$(٢.٠٠١)^{٥} = ٣٢.٠٨٠٠٨$

رقم ١٢ أوجد النسبة بين الحد المشتمل على س٥ والحد المشتمل على س٦ في مفكوك $(٢س + ٣)^{٢٠}$

الحـــــــــــــــل

ح يحتوى على س٥

$ح_{ر+١} = ق_{ر}^{٢٠} (٣)^{ر} (٢س)^{٢٠-ر}$

$س^{٢٠-ر} = س^{٥}$

$٢٠ - ر = ٥ \longrightarrow \boxed{ر = ١٥}$

$ح_{١٦}$ يحتوى على س ٥

بالمثل $س^{٢٠-ر} = س^{٦}$

$٢٠ - ر = ٦$

$\boxed{ر = ١٤}$ $ح_{١٥}$ يحتوى على س٦

$\frac{ح_{١٦}}{ح_{١٥}} = \frac{٢٠ - ١٥ + ١}{١٥} \times \frac{٣}{٢س}$

$= \frac{٦}{١٥} \times \frac{٣}{٢س}$

$\frac{ح_{١٦}}{ح_{١٥}} = \frac{٣}{٥س}$

رقم ١٣:- اكتب الحد السادس في $(٣س + ٢ص)^{٨}$ حسب قوي س التنازلية واحسب قيمته عند

$س = \frac{١}{٢}$ ، $ص = \frac{١}{٣}$

$ح_{٦} = ق_{٥}^{٨} (٢ص)^{٥} (٣س)^{٣}$

$= ٥٦ \times ٣٢ص^{٥} \times ٢٧ س^{٣}$

$= ٥٦ \times ٣٢ \times \frac{١}{٢٧ \times ٩} \times ٢٧ \times \frac{١}{٨}$

$\boxed{ح_{٦} = \frac{٢٢٤}{٩}}$

رقم ١٤ :- أكتب مفكوك $(أ - ب)^{٥}$ واستخدم المفكوك لايجاد قيمة $(٩,٥)^{٥}$ مقرباً الناتج لأقرب مئة .

الحـــــــــــــــل

$(أ - ب)^{٥} = أ^{٥} - ق_{١}^{٥} ب أ^{٤} + ق_{٢}^{٥} ب^{٢} أ^{٣} - ق_{٣}^{٥} ب^{٣} أ^{٢} +$

$ق_{٤}^{٥} ب^{٤} أ$ بوضع أ = ١٠ ، ب = $\frac{١}{٢}$ نجد أن

$(١٠ - \frac{١}{٢})^{٥} = ١٠^{٥} - ق_{١}^{٥} (\frac{١}{٢})^{١} (١٠)^{٤} +$

$ق_{٢}^{٥} (\frac{١}{٢})^{٢} (١٠)^{٣} - ق_{٣}^{٥} (\frac{١}{٢})^{٣} (١٠)^{٢} +$

$ق_{٤}^{٥} (\frac{١}{٢})^{٤} (١٠)^{١} + ...$

$= ١٠^{٥} - ٢٥٠٠٠ + ٢٥٠٠ - ١٢٥ + \frac{٥٠}{١٦}$

$= ٧٥٠٠٠ + ٢٥٠٠ - ١٢٥ = ٧٧٣٧٥$

لأقرب منه = ٧٧٤٠٠

رقم ١٥:- أوجد الحد الأوسط في مفكوك

$(٦س + \frac{١}{٢} ص)^{١٠}$ الحـــــــــــــــل

رتبه الحد الأوسط = $\frac{١٠ + ٢}{٢} = \frac{١٢}{٢} = ٦$

$ح_٦$ هو الحد الأوسط

$ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ \left(\frac{١}{٢} ص\right)^٥ (٦س)^٥$

$= ٢٥٢ \times \frac{١}{٣٢} ص^٥ \times ٦^٥ \times س^٥$

$= ٦١٢٣٦ س^٥ ص^٥$

رقم ١٦:-

أوجد معامل $س^ن$ في مفكوك $(١ + س٢)^{٢ن-١}$

واثبت أنه ضعف معامل $س^ن$ في مفكوك $(١ + س)^{٢ن}$

الحـــــــل

$ح_{ر+١} = {}^{٢ن}ق_ر \, س^{٢ن-ر} \longrightarrow س^ن = س^{٢ن-ر}$

$٢ن - ر = ن \longrightarrow ن = ر$

$ح_{ن+١} = {}^{٢ن}ق_ن \, س^ن \longrightarrow$ معامل $س^ن = {}^{٢ن}ق_ن = \frac{\lfloor ٢ن}{(\lfloor ن)^٢}$ ①

في مفكوك $(١ + س)^{٢ن-١}$

$ح_{ر+١} = {}^{٢ن-١}ق_ر \, س^ر \longrightarrow س^ر = س^ن \longrightarrow ر = ن$

$ح_{ن+١}$ يحتوي على $س^ن \longrightarrow ح_{ن+١} = {}^{٢ن-١}ق_ن \, س^ن$

$\longrightarrow$ المعامل $= {}^{٢ن-١}ق_ن = \frac{\lfloor ٢ن - ١}{\lfloor ن \, \lfloor ن-١}$

بضرب البسط والمقام × ٢ن

المعامل $= \frac{٢ن \lfloor ٢ن-١}{٢ن \lfloor ن-١ \, \lfloor ن} = \frac{\lfloor ٢ن}{٢ \lfloor ن \, \lfloor ن}$

$= \frac{١}{٢} \frac{\lfloor ٢ن}{(\lfloor ن)^٢} \longrightarrow$ ②

من ١، ٢ نجد أن معامل $س^ن$ في المفكوك الأول ضعف معامل $س^ن$ في المفكوك الثاني

رقم ١٧:- في مفكوك $(١ + س)^ن$ إذا كان

$٥ ح_٦^٢ = ١٨ ح_٤ \times ح_٨$ فأوجد قيمة ن

حيث ن عدد صحيح موجب الحـــــــل

$٥ ح_٦^٢ = ١٨ ح_٤ ح_٨$ بالقسمة على $ح_٦^٢$ للطرفين

$٥ = \frac{١٨ ح_٤}{ح_٦} \times \frac{ح_٨}{ح_٦}$

$\frac{ح_٨}{ح_٦} \times \frac{ح_٤}{ح_٦} = \frac{٥}{١٨}$

$\frac{ح_٨}{ح_٧} \times \frac{ح_٧}{ح_٦} \times \frac{ح_٤}{ح_٥} \times \frac{ح_٥}{ح_٦} = \frac{٥}{١٨}$

$\frac{(ن-٧+١)س}{٧} \times \frac{(ن-٦+١)س}{٦} \times$

$\frac{(ن-٤+١)س}{٤} \times \frac{(ن-٥+١)س}{٥} = \frac{٥}{١٨}$

$\frac{(ن-٦)}{٧} \times \frac{(ن-٥)}{٦} \times \frac{(ن-٣)}{٤} \times \frac{١}{(ن-٤)} = \frac{١}{١٨}$

$\frac{٤(ن-٥)(ن-٦)}{٧(ن-٣)(ن-٤)} = \frac{١}{٣}$

$١٢(ن^٢ - ١١ن + ٣٠) = ٧(ن^٢ - ٧ن + ١٢)$

$١٢ن^٢ - ١٣٢ن + ٣٦٠ = ٧ن^٢ - ٤٩ن + ٨٤$

$٥ن^٢ - ٨٣ن + ٢٧٦ = ٠$

$(٥ن - ٢٣)(ن - ١٢) = ٠$

$ن = \frac{٢٣}{٥} \times$ $ن = ١٢$

$\therefore ن = ١٢$

رقم ١٨:- فى مفكوك $(١ + م س)^{ن}$ إذا كان معاملا س، س٢ هى ١٢ ، ٦٣ فما قيمة كل من م ، ن

الحـــــــــل

$ح_{ر+١} = ^{ن}ق_{ر} (م س)^{ر}$

$س^{ر} = س^{١} \longrightarrow ر = ١$

$ح_{٢} = ^{ن}ق_{١} م س \longrightarrow$ المعامل $^{ن}ق_{١} م$

$^{ن}ق_{١} م = ١٢$

$\boxed{ن م = ١٢} \longrightarrow (١)$

ثم $س^{٢} = س^{٢} \longrightarrow ر = ٢$

$ح_{٣} = ^{ن}ق_{٢} م^{٢} س^{٢} \longrightarrow$ المعامل $^{ن}ق_{٢} م^{٢}$

$^{ن}ق_{٢} م^{٢} = ٦٣$

$\frac{ن(ن-١)}{٢} م^{٢} = ٦٣$

$ن(ن-١) م^{٢} = ١٢٦$ بالتعويض عن $م = \frac{١٢}{ن}$

$ن(ن-١) \times \frac{١٤٤}{ن^{٢}} = ١٢٦$

$\frac{ن-١}{ن} = \frac{١٢٦}{١٤٤} ، \frac{ن-١}{ن} = \frac{٧}{٨}$

$٨ن - ٨ = ٧ن \longrightarrow ن = ٨$

$م = \frac{١٢}{ن} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

رقم ١٩:- أ ، ب ، جـ معاملا س ، س فى مفكوك $(١ + س)^{ن}$ متساويان أثبت أن أ = ب + جـ

الحـــــــــل

$ح_{ر+١} = ^{أ}ق_{ر} س^{ر}$ ∴ $س^{ر} = س^{ب}$

∴ ر = ب

$ح_{ر+١} = ^{أ}ق_{ر} س^{ر}$	$س^{ر} = س^{جـ} \Leftarrow ر = جـ$
المعامل $^{أ}ق_{ب}$	$ح_{جـ+١} = ^{أ}ق_{جـ} س^{جـ}$ ∴ المعامل $^{أ}ق_{جـ}$

⇐ المعاملان متساويان فرضا

$^{أ}ق_{ب} = {}^{أ}ق_{جـ} \Leftarrow أ = ب + جـ$

رقم ٢٠:- إذا كان معاملات ثلاثة حدود متتالية فى مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية هى ١٥ ، ١٠٥ ، ٤٥٥ على التوالى فأوجد قيمة ن ورتب هذه الحدود

الحـــــــــل

، نفرض أن الحدود هى $ح_{ر}$ ، $ح_{ر+١}$ ، $ح_{ر+٢}$

$\frac{معامل\ ح_{ر+١}}{معامل\ ح_{ر}} = \frac{١٠٥}{١٥} ، \frac{ن-ر+١}{ر} = ٧$

$ن-ر+١ = ٧ر ، ن = ٨ر-١ \longrightarrow (١)$

$\frac{معامل\ ح_{ر+٢}}{معامل\ ح_{ر+١}} = \frac{٤٥٥}{١٠٥}$

$\frac{ن-(ر+١)+١}{ر+١} = \frac{١٣}{٣} ، \frac{ن-ر}{ر+١} = \frac{١٣}{٣}$

$٣ن - ٣ر = ١٣ر + ١٣ ، ٣ن = ١٦ر + ١٣ \longrightarrow (٢)$

بالتعويض من ١ فى ٢ نجد أن

$٣(٨ر-١) = ١٦ر + ١٣$

$٢٤ر - ٣ = ١٦ر + ١٣$

$٢٤ر - ١٦ر = ١٣ + ٣$

$٨ر = ١٦ \longrightarrow ر = ٢$

لكن $ن = ٨ر - ١ \longrightarrow ن = ١٦ - ١ = ١٥$

ترتيب الحدود هو $ح_{٢}$ ، $ح_{٣}$ ، $ح_{٤}$

رقم ٢١:-

في مفكوك $(س+٢)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية كان

$ح_{١٣} = ح_{١٢}$ ، $ح_{١٥} = \frac{٢}{٣} ح_{١٤}$

فما قيمة كل من ن ، س

الحـــــــل

$\frac{ح_{١٣}}{ح_{١٢}} = ١$ ، $\frac{ح_{١٥}}{ح_{١٤}} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{ن-١٢+١}{١٢} \times \frac{٢}{س} = ١$

$\frac{ن-١١}{٦س} = ١ \leftarrow$ ن-١١= ٦س ← (١)

$\frac{ح_{١٥}}{ح_{١٤}} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{ن-١٤+١}{١٤} \times \frac{٢}{س} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{ن-١٣}{٧س} = \frac{٢}{٣}$ ، ٣ن -٣٩ = ١٤س ← (٢)

بقسمة ١ على ٢ نجد أن $\frac{ن-١١}{٣ن-٣٩} = \frac{٦س}{١٤س}$

$\frac{ن-١١}{٣ن-٣٩} = \frac{٣}{٧}$ ، ٩ن -١١٧ = ٧ن -٧٧

٩ن-٧ن= ١١٧-٧٧ ٢ن=٤٠ ن= ٢٠

لكن من ١ ٦س = ن-١١

٦س = ٢٠ -١١ = ٩ ، $\boxed{س = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}}$

رقم ٢٢:-

إذا كان $(١+جـ س)^{ن} = ١ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + أ_٣ س^٣$

$+ أ_٤ س^٤ + ...$ حيث ن عدد صحيح موجب وكان

$أ_١ = ١٢$ ، $أ_٤ = ٤أ_٢$ أوجد قيمة كل من ن، جـ

الحـــــــل

$(١+حـ س)^{ن}$ بالطريقة المألوفة كالآتي

$(١+حـ س)^{ن} = ١ + ن_{١} حـ س + ن_{٢} حـ^٢ س^٢ + ن_{٣} حـ^٣ س^٣ + ...$

$(١+حـ س)^{ن} = ١ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + أ_٣ س^٣ + س$ للعطف

وبمساواة المعادلات المتناظرة

من المفكوكين نجد أن

$أ_١ = ن ق_١ جـ$ ، $أ_٢ = ن ق_٢ جـ^٢$ ، $أ_٣ = ن ق_٣ جـ^٣$

$أ_٤ = ن ق_٤ جـ^٤$ ، $أ_١ = ١٢$ ، $ن ق_١ جـ = ١٢$

ن جـ = ١٢ ← (١)

لكن $أ_٤ = ٤أ_٢$

$ن ق_٤ جـ^٤ = ٤ ن ق_٢ جـ^٢$ ، $\frac{ن ق_٤}{ن ق_٢} = \frac{٤جـ^٢}{جـ^٤}$

$\frac{ن ق_٤}{ن ق_٣} \times \frac{ن ق_٣}{ن ق_٢} = \frac{٤}{جـ^٢}$

$\frac{ن-٤+١}{٤} \times \frac{ن-٣+١}{٣} = \frac{٤}{جـ^٢}$

$\frac{(ن-٣)(ن-٢)}{١٢} = \frac{٤}{جـ^٢} \leftarrow$ (٢)

لكن من(١) $جـ = \frac{١٢}{ن}$ بالتعويض

$\frac{(ن-٣)(ن-٢)}{١٢} = \frac{٤ن^٢}{١٢ \times ١٢}$

$ن^2 - 5ن + 6 = \frac{ن^2}{3}$ بالضرب × ٣

$3ن^2 - 15ن + 18 = ن^2$

$2ن^2 - 15ن + 18 = 0$ ، $(2ن - 3)(ن - 6) = 0$

$ن = \frac{3}{2}$ × ، $ن = 6$ ∴ $جـ = \frac{12}{ن} = \frac{12}{6} = 2$

رقم ٢٣:-

في مفكوك $(1 + م س)^{10}$ حسب قوى س التصاعدية

$= أ + ب س + جـ س^2 + 15 س^3 + ...$

فأوجد كل من م ، أ ، ب ، جـ

الحـــــــــــل

$(1 + م س)^{10} = 1 + {}^{10}ق_1 م س + {}^{10}ق_2 م^2 س^2 +$

${}^{10}ق_3 م^3 س^3 + ... + {}^{10}ق_{10} م^{10} س^{10}$

$(1 + م)^{10} = أ + ب س + جـ س^2 + 15 س^3$

بمساواة المعاملات المتناظرة نجد أن

$أ = 1$ ، $ب = {}^{10}ق_1 م$ ، $جـ = {}^{10}ق_2 م^2$ ، $15 = {}^{10}ق_3 م^3$

$\boxed{10م = ب}$ ، $جـ = \frac{9 \times 10}{2} م^2 \longrightarrow جـ = 45م^2$ (١)

$10م = ب \longrightarrow$ (٢)

${}^{10}ق_3 م^3 = 15 \longrightarrow 120م^3 = 15 \longrightarrow م^3 = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$

$م = \frac{1}{2}$ بالتعويض في (٢) $\longrightarrow 10 \times \frac{1}{2} = ب$

$ب = 5$ ، $جـ = 45م^2 = \frac{45}{4}$

رقم ٢٤ :- في مفكوك ن

$(1 + س)$ حسب قوي س اتصاعدية إذا كان

معامل $ح_2$ = معامل $ح_6$

$1 - {}^{ن}ق_2 + {}^{ن}ق_4 - {}^{ن}ق_6 = 0$

الحل

معامل $ح_2$ = معامل $ح_6$ ومنها $ن_1 = ن_2$

∴ $ن = 1 + 5 = 6$

الأيمن $= 1 - {}^{ن}ق_2 + {}^{ن}ق_4 - {}^{ن}ق_6$

$= 1 - {}^{6}ق_2 + {}^{6}ق_4 - {}^{6}ق_6$

$= 1 - {}^{6}ق_2 + {}^{6}ق_2 - 1 =$ صفر = الأيسر

رقم ٢٥:-

في مفكوك $(1 + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إستنتج قيمة كل مم يأتى :-

أولا :-

$1 + {}^{10}ق_1 + {}^{10}ق_2 + ... {}^{10}ق_{10}$

ثانيا:-

$1 + 2 \times {}^{10}ق_1 + 2^2 \times {}^{10}ق_2 + ... 2^{10} \times {}^{10}ق_{10}$

الحـــــــــــل

$(1 + س)^{ن} = 1 + {}^{ن}ق_1 س + {}^{ن}ق_2 س^2 + {}^{ن}ق_3 س^3$

$+ ..... {}^{10}ق_{10} س^{10}$

بوضع ن = ١٠ ، س = ١

$(1 + 1)^{10} = 1 + {}^{10}ق_1 + {}^{10}ق_2 + ... {}^{10}ق_{10}$

$2^{10} = 1 + {}^{10}ق_1 + ... {}^{10}ق_2 + ... {}^{10}ق_{10}$

$1 + {}^{10}ق_1 + {}^{10}ق_2 + ... {}^{10}ق_{10} = 1024$

ثم نضع في المفكوك س = ٢ ، ن = ١٥

$(١+٢)^{١٥} = ١ + {}^{١٥}ق_{١} \times ٢ + {}^{١٥}ق_{٢} \times ٢^{٢} + {}^{١٥}ق_{٣} \times ٢^{٣}$

$\ldots\ldots {}^{١٥}ق_{ر} \times ٢^{ر}$

$(٣)^{١٥} = ١ + ٢ \times {}^{١٥}ق_{١} + ٢^{٢} \times {}^{١٥}ق_{٢} + \ldots$

$٢^{ر} \times {}^{١٥}ق_{ر} + \ldots\ldots ٢^{١٥} \times {}^{١٥}ق_{١٥}$

رقم ٢٦ :- اوجد معامل

$\left(\frac{س}{ص}\right)^{٧}$ في مفكوك $\left(\frac{٢ص}{س} - \frac{س^{٢}}{٢ص^{٢}}\right)^{١١}$

الحـــــــــل

$ح_{ر+١} = {}^{١١}ق_{ر} \left(\frac{-س^{٢}}{٢ص^{٢}}\right)^{ر} \left(\frac{٢ص}{س}\right)^{١١-ر}$

$\left(\frac{س^{٢}}{ص^{٢}}\right)^{ر} \times \left(\frac{ص}{س}\right)^{١١-ر} = \left(\frac{س}{ص}\right)^{٧}$

$\frac{س^{٢ر}}{ص^{٢ر}} \times \frac{ص^{١١-ر}}{س^{١١-ر}} = \left(\frac{س}{ص}\right)^{٧}$

$\frac{س^{٢ر}}{ص^{٢ر}} \times \frac{س^{ر-١١}}{ص^{ر-١١}} = \left(\frac{س}{ص}\right)^{٧}$

$\frac{س^{٣ر-١١}}{ص^{٣ر-١١}} = \left(\frac{س}{ص}\right)^{٧}$

$\left(\frac{س}{ص}\right)^{٣ر-١١} = \left(\frac{س}{ص}\right)^{٧}$

$\therefore ٣ر - ١١ = ٧$

$٣ر = ١٨$ ومنها $ر = ٦$

$ح_{٧}$ هو الذي يشتمل علي $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٧}$

$ح_{٧} = {}^{١١}ق_{٦} \left(\frac{-س^{٢}}{٢ص^{٢}}\right)^{٦} \left(\frac{٢ص}{س}\right)^{٥}$

$= {}^{١١}ق_{٦} \left(\frac{-١}{٢}\right)^{٦} \frac{س^{١٢}}{ص^{١٢}} (٢)^{٥} \frac{ص^{٥}}{س^{٥}}$

$ح_{٧} = {}^{١١}ق_{٦} \times \frac{١}{٦٤} \times ٣٢ \frac{س^{٧}}{ص^{٧}}$

$ح_{٧} = {}^{١١}ق_{٦} \times \frac{١}{٢} \left(\frac{س}{ص}\right)^{٧}$

$ح_{٧} = ٢٣١ \left(\frac{س}{ص}\right)^{٧}$

معامل $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٧} = ٢٣١$

رقم ٢٧ :- إذا كانت النسبة بين معاملي حدين متتالين في مفكوك (س+٢ ص)١٥ حسب قوي س التنازلية هي ١ : ٢ فاوجد رتبتي الحدين

الحـــــــــل

نفرض أن الحدين هما $ح_{ر}$ ، $ح_{ر+١}$

معامل $ح_{ر+١}$ / معامل $ح_{ر}$ $= \frac{٢}{١} \leftarrow \frac{١٥-ر+١}{ر} \times \frac{٢}{١} = \frac{٢}{١}$

$\frac{١٦-ر}{ر} = ١ \Leftarrow ر = ١٦-ر$

$٢ر = ١٦$

$ر = ٨ \Leftarrow$ الحدان هما $ح_{٨}$ ، $ح_{٩}$

رقم ٢٨ :- أثبت أنه لا يوجد حد خالي من س في

مفكوك (س^{٢} - $\frac{٢}{س}$) وأوجد الحد المشتمل على س^{٤}

الحـــــــــــــل

نفرض أن ح يحتوي على س^{ر}

ح$_{ر+١}$ = ق$^{٨}_{ر}$ ($\frac{-٢}{س}$)^{ر} (س^{٢})$^{٨-ر}$

= (-٢)^{ر} ق$^{٨}_{ر}$ س$^{١٦-٣ر}$

س$^{١٦-٣ر}$ = س^{٠} ← ١٦-٣ر = ٠ ← ر = $\frac{١٦}{٣}$

ر = $\frac{١}{٣}$ ∉ ط$^{+}$

∴ لا يوجد حد خالي من س في المفكوك

س$^{١٦-٣ر}$ = س^{٤} ← ١٦-٣ر = ٤ ← ٣ر = ١٢

ر = ٤

ح يشتمل على س^{٤} ← ح$_{٥}$ = ق$^{٨}_{٤}$ ($\frac{-٢}{س}$)^{٤} (س^{٢})^{٤}

= ٧٠ × ١٦ س^{٤}

ح$_{٥}$ = ١١٢٠ س^{٤}

رقم ٢٩ :- إذا كانت النسبة بين الحد الأوسط والحد الخامس في مفكوك (٢س +٣ص)^{١٠} تساوي ٢/٣ فأثبت أن ٥ س = ٦ ص

الحـــــــــــــل

رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٠ + ٢}{٢}$ = $\frac{١٢}{٢}$ = ٦

الحد الأوسط هو ح$_{٦}$

$\frac{ح_{٦}}{ح_{٥}}$ = $\frac{٣}{٢}$

$\frac{١٠-٥+١}{٥}$ × $\frac{٣ص}{٢س}$ = $\frac{٣}{٢}$ ← $\frac{٦ص}{٥س}$ = ١

∴ ٥س = ٦ص

رقم ٣٠ :- إذا كان ٢ ح$_{٥}$ = ح$_{٤}$ + ح$_{٦}$ في مفكوك (أ + ب)^{٨} فأوجد $\frac{أ}{ب}$ الحـــــــــل

٢ح$_{٥}$ = ح$_{٤}$ + ح$_{٦}$ بقسمة الطرفين على ح$_{٤}$

٢ = $\frac{ح_{٥}}{ح_{٤}}$ + $\frac{ح_{٦}}{ح_{٥}}$

٢ = $\frac{٤}{٨-٤+١}$ × $\frac{أ}{ب}$ + $\frac{٨-٥+١}{٥}$ × $\frac{ب}{أ}$

٢ = $\frac{٤أ}{٥ب}$ + $\frac{٤ب}{٥أ}$ بالقسمة على ٢

١ = $\frac{٢أ}{٥ب}$ + $\frac{٢ب}{٥أ}$ ← ١ = $\frac{٢أ^{٢} + ٢ب^{٢}}{٥أب}$

٢أ^{٢} + ٢ب^{٢} = ٥ أ ب ← ٢أ^{٢}-٥أب +٢ب^{٢} = ٠

(٢أ – ب) (أ – ٢ب) = ٠

٢أ = ب ← $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{١}{٢}$

أ = ٢ب ← $\frac{أ}{ب}$ = ٢

رقم ٣١ :- ضع المفكوك

(٢+ س)^{٧} +٧س٢ (٢+ س)^{٦} +

$\frac{٧×٦}{١×٢}$ س^{٤}(٢+ س)^{٥}+....س^{١٤}

على صورة مقدار ذو حدين واذا كان الحدا ن الأوسطان متساويان فأوجد قيمة س

الحـــــــــــــل

[(٢+ س)+ س٢]^{٧} = (٢+ س)^{٧} +

ق$^{٧}_{١}$(س٢)^{١} (٢+ س)^{٦} + ق$^{٧}_{٢}$(س٢)^{٢} (٢+ س)^{٥}

الحدان الأوسطان رتبتاهما $\frac{٧+١}{٢}$ ، $\frac{٧+٣}{٢}$

الحدان الأوسطان هما ح ، ح

[illegible] = ١

[illegible] × [illegible] = [illegible] = ١

س٢ = س+٢ ← س٢ − س−٢ =

(س−٢)(س+١) = ٠ ← س = ٢ ، −١

رقم ٣٢ :- اخذت ثلاث حدود متتالية في مفكوك (١+س)٣ فوجد ان نسبة مجموع معاملي الحدين الأول والثاني من هذه الحدود إلى مجموع معاملي الحدين الثاني والثالث ٥ : ٣ فما هذه الحدود الحـــــــــــــل

الحدود هي ح ، ح ، ح

معامل ح + معامل ح

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر}}{\text{معامل } ح_{ر+١} + \text{معامل } ح_{ر+٢}} = \frac{٥}{٣}$$

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر} + ١}{\text{معامل } ح_{ر+١}} = \frac{٥}{٣}$$

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر} + ١}{١ + \frac{\text{معامل } ح_{ر+٢}}{\text{معامل } ح_{ر+١}}}$$

وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على ح ر+١

$$\frac{\frac{ر}{٣٠-ر+١} + ١}{١ + \frac{٣٠-(ر+١)+١}{ر+١}} = \frac{٥}{٣}$$

$$\frac{\frac{ر}{٣١-ر} + ١}{١ + \frac{٣٠-ر}{ر+١}} = \frac{٥}{٣}$$

$$\frac{\frac{ر+٣١-ر}{٣١-ر}}{\frac{ر+١+٣٠-ر}{ر+١}} = \frac{٥}{٣}$$

$$\frac{\frac{٣١}{٣١-ر}}{\frac{٣١}{ر+١}} = \frac{٥}{٣}$$

$$\frac{ر+١}{٣١-ر} = \frac{٥}{٣}$$

٣ر+٣ = ١٥٥ − ٥ر ← ٨ر = ١٥٢

ر = ١٥٢/٨ = ١٩

⇐ الحدود هي ح ، ح ، ح
١٩ ٢٠ ٢١

رقم ٣٣ :- اكتب مفكوك (١ − س)^٨ (١ + س)^٨

الحل (١ − س)^٨ (١ + س)^٨ = (١ − س٢)^٨

(١ − س٢)^٨ = ١ − ق١ س٢ + ق٢ س٤ − ق٣ س٦

+ ق٤ س٨ − ق٥ س١٠ + ق٦ س١٢ − ق٧ س١٤

= ١ − ٨س٢ + ٢٨س٤ − ٥٦س٦ + ٧٠س٨

− ٥٦س١٠ + ٢٨س١٢ − س١٤

رقم ٣٤ :- أكتب مفكوك $(1+\sqrt{1-س^2})^5 + (1-\sqrt{1-س^2})^5$

الحـــــــــل

$[1+\sqrt{1-س^2}]^5 + [1-\sqrt{1-س^2}]^5$

= ٢ (مجموع الحدود الفردية فقط)

= ٢ [ح + ح + ح]
١ ٣ ٥

= ٢ [$1^5 ق_2$ (١- س٢) + $ق_4^5$ (١- س٢)٢]

= ٢ [١ + ١٠ (١- س٢) + ٥ (١- ٢س٢ + س٤)]

= ٢ [١ + ١٠ - ١٠س٢ + ٥ - ١٠ س٢ + ٥س٤]

= ٢ (١٦ - ٢٠ س٢ + ٥س٤)

رقم ٣٥ :- باستخدام نظرية ذات الحدين اثبت أن

$3^{2ن}$ - ٨ن - ١ تقبل القسمة علي ٦٤

الحـــــــــل

$3^{2ن} = (1+8)^ن = 1 + ق_1^ن 8 + ق_2^ن 8^2 + ق_3^ن 8^3 + ...8^ن$]

$3^{2ن} = 1 + 8ن + ق_2^ن 64 + 64 \times ق_3^ن 8^3 + ...8^ن$

$3^{2ن} - 8ن - 1 = ق_2^ن 64 + 64 \times ق_3^ن 8 + ...8^ن$

$3^{2ن} - 8ن - 1 = 64 [ق_2^ن + ق_3^ن 8 + ...8^ن]$

$3^{2ن}$ - ٨ن - ١ تقبل القسمة علي ٦٤

رقم ٣٦ :- في مفكوك $(أ + ب)^ن$ إذا كان ل هو مجموع الحدود الفردية الرتبة ، م هي مجموع الحدود الزوجية الرتبة فاثبت أن

أولا :- $ل^2 - م^2 = (أ^2 - ب^2)^ن$

ثانيا :- $4 ل م = (أ + ب)^{2ن} - (أ - ب)^{2ن}$ الحـــــل

.....

$ل = أ^ن + ن_2 أ^{ن-2} ب^2 + ن_4 أ^{ن-4} ب^4 + ...$

$م = ق_1^ن أ ب^{ن-1} + ق_3^ن أ^3 ب^{ن-3}$

ل + م = مجموع حدود المفكوك كله

$ل + م = (أ + ب)^ن \Leftarrow (1)$

$ل - م = (أ - ب)^ن \Leftarrow (2)$ بالضرب

$(ل + م)(ل - م) = (أ + ب)^ن (أ - ب)^ن$

$ل^2 - م^2 = [(أ + ب)(أ - ب)]^ن$

$ل^2 - م^2 = (أ^2 - ب^2)^ن$ وهو المطلوب أولا

لكن $(ل - م)^2 = (ل + م)^2 - 4ل م$

$4ل م = (ل + م)^2 - (ل - م)^2$

$4ل م = [(أ + ب)^ن]^2 - [(أ - ب)^ن]^2$

$4ل م = (أ + ب)^{2ن} - (أ - ب)^{2ن}$ ثانيا

رقم ٣٧ :- بين أن الفرق بين معاملي $س^{ر+1}$ ، $س^ر$ في مفكوك $(1 + س)^{ن+1}$ يساوي الفرق بين معاملي $س^{ر+1}$ ، $س^{ر-1}$ في مفكوك $(1+س)^ن$

الحـــــــــل

$ح_{ر+1} = ق_ر^{ن+1} س^ر$ ← المعامل $ق_ر^{ن+1}$

$ح_{ر+2} = ق_{ر+1}^{ن+1} س^{ر+1}$ المعامل $ق_{ر+1}^{ن+1}$

$ق_{ر+1}^{ن+1} - ق_ر^{ن+1} = \frac{\lfloor ن+1}{\lfloor ر+1 \lfloor ن-ر} - \frac{\lfloor ن+1}{\lfloor ر \lfloor ن-ر+1}$

$= \frac{\lfloor ن+1}{(ر+1)\lfloor ر \lfloor ن-ر} - \frac{\lfloor ن+1}{\lfloor ر+1 \lfloor (ن-ر+1) \lfloor ن-ر}$

$$\frac{\lfloor ن+1}{\lfloor ر \lfloor ن-ر} \left[\frac{1}{ر+1} - \frac{1}{ن-ر+1} \right]$$

$$\frac{\lfloor ن+1}{\lfloor ر \lfloor ن-ر} \cdot \left[\frac{ن-ر+1-ر-1}{(ر+1)(ن-ر+1)} \right]$$

$$\frac{(ن-2ر) \lfloor ن+1}{(ر+1) \lfloor ر \lfloor (ن-ر+1) \lfloor ن-ر}$$

$$ق^{ن+1}_{ر+1} - ق^{ن+1}_{ر} = \frac{(ن-2ر) \lfloor ن+1}{\lfloor ر+1 \lfloor ن-ر+1} \quad (1)$$

أما بالنسبة لمفكوك $(1+س)^ن$

$$ح_ر = ق^ن_{ر-1} \, س^{ر-1} \longleftarrow \text{المعامل } ق^ن_{ر-1}$$

$$ح_{ر+2} = ق^ن_{ر+1} \, س^{ر+1} \longleftarrow \text{المعامل } ق^ن_{ر+1}$$

$$ق^ن_{ر+1} - ق^ن_{ر-1} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر+1 \lfloor ن-ر-1} - \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر-1 \lfloor ن-ر+1}$$

$$= \frac{\lfloor ن}{(ر+1) ر \lfloor ر-1 \lfloor ن-ر-1} - \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر-1 (ن-ر+1)(ن-ر) \lfloor ن-ر-1}$$

بأخذ عامل مشترك

$$= \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر-1 \lfloor ن-ر-1} \left[\frac{1}{ر(ر+1)} - \frac{1}{(ن-ر)(ن-ر+1)} \right]$$

$$= \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر-1 \lfloor ن-ر-1} \left[\frac{(ن-ر)(ن-ر+1) - ر(ر+1)}{ر(ر+1)(ن-ر)(ن-ر+1)} \right]$$

$$= \frac{\lfloor ن \, (ن^2 - 2ن ر + ر^2 + ن - ر - ر^2 - ر)}{(ر+1) ر \lfloor ر-1 (ن-ر+1)(ن-ر) \lfloor ن-ر-1}$$

$$= \frac{\lfloor ن \left[(ن^2 + ن) - (2ن ر + 2ر) \right]}{\lfloor ر+1 \lfloor ن-ر+1}$$

$$= \frac{\lfloor ن \left[ن(ن+1) - 2ر(ن+1) \right]}{\lfloor ر+1 \lfloor ن-ر+1}$$

$$= \frac{(ن+1) \lfloor ن \, (ن-2ر)}{\lfloor ر+1 \lfloor ن-ر+1}$$

$$ق^ن_{ر+1} - ق^ن_{ر+1} = \frac{(ن-2ر) \lfloor ن+1}{\lfloor ر+1 \lfloor ن-ر+1} \quad (2)$$

من ١ ، ٢ ينتج المطلوب

رقم٣٨:- إثبت أن الحد الأوسط فى مفكوك

$$(1+س)^{2ن} = \frac{1 \times 3 \times 5 \ldots (2ن-1)}{1 \times 2 \times 3 \ldots ن} (2س)^ن$$

الحـــــــــل

رتبة الحد الأوسط هو $\frac{2ن+2}{2} = ن+1$

$$ح_{ن+1} = ق^{2ن}_{ن} \, س^ن = \frac{\lfloor 2ن}{\lfloor ن \lfloor ن} س^ن \quad (1)$$

لكن من المسألة رقم ٢٨ تم إثبات ان :-

$$\frac{\lfloor 2ن}{\lfloor ن} = 2^ن \left[1 \times 3 \times 5 \ldots (2ن-1) \right]$$

بالتعويض في (1)

$$ح_{ن+1} = \frac{2^ن (1 \times 3 \times 5 \ldots (2ن-1))}{\lfloor ن} س^ن$$

$$ح_{ن+1} = \frac{2^ن (1 \times 3 \times 5 \ldots (2ن-1))}{ن(ن-1)(ن-2) \ldots 3 \times 2 \times 1} س^ن$$

$$ح_{ن+1} = \frac{1 \times 3 \times 5 \ldots (2ن-1)}{1 \times 2 \times 3 \ldots ن} (2س)^{2ن}$$

رقم ٣٩:- أوجد معامل

س٣ في $(1 + س + س^2)^6$

الحـــــــــل

نقوم بايجاد مفكوك $[1 + (س + س^2)]^6$

ثم نحصل منه علي معامل س٣

$$[(1 + (س + س^2))]^6 = 1 + ق^6_1 (س + س^2)$$

$$+ ق^6_2 (س + س^2)^2 + ق^6_3 (س + س^2)^3$$

+ حدود بعد ذلك ليس بها $س^3$

[١+(س+س٢)]^{٦} = ١+ ٦(س+س٢)
+١٥(س٢+٢س٣+س٤)+٢٠(س٣+٣س^{٤} +٣س^{٥} +س^{٦})

[١+(س+س٢)]^{٦} = ١+٦س +٦س٢+١٥س٢+٣٠س٣
+ ١٥ س٤+ ٢٠س٣ +٦٠س٤ + ٦٠س٥ + ٢٠س٦
=١+٦س+٢١س٢ +٥٠س٣ +١٥س٤ +٦٠س٤
+٦٠س٥ +٢٠ س٦+.....

يتبين من المفكوك (١+ س+ س٢)^{٦} أن معامل س٣ = ٥٠

رقم ٤٠:- إذا علم أن ح في مفكوك

(٢س + $\frac{١}{س^{٢}}$)^{ن} خالي من س فأوجد قيمة ص التي

تجعل هذا الحد مساوياً الحد الثاني في مفكوك (١+ص٣)^{٣٠}

الحـــــــــــل

ح$_{٣}$ = ق$^{ن}_{٢}$ ($\frac{١}{س^{٢}}$)^{٢} (٢س)$^{ن-٢}$ ← س$^{-٤}$ × س$^{ن-٢}$ = س^{٠}

س$^{ن-٦}$ = س^{٠} ← ن-٦=٠ ← ن = ٦

ح في مفكوك (٢س + $\frac{١}{س^{٢}}$)^{٦} = ح$_{٢}$ في مفكوك (١+ص٣)^{٣٠}

ق$^{٦}_{٢}$ ($\frac{١}{س^{٢}}$)^{٢} (٢س)^{٤} = ق$^{٣٠}_{١}$ (ص٣)^{١}

١٥ × ١٦ = ٣٠ ص٣ ← ص٣ = ٨ ← ص= ٢

رقم ٤١ :- في مفكوك

س^{٥} (س٣ + $\frac{١}{س}$)^{١٢} أوجد الحد المشتمل علي س٩

الحـــــــــــل

نفرض أن (س٣ + $\frac{١}{س}$)^{١٢} يحتوي علي س٤ ثم نضربة

× س٥ فيكون معامل س٩

ح$_{ر+١}$ = ق$^{١٢}_{ر}$ ($\frac{١}{س}$)^{ر} (س٣)$^{١٢-ر}$

س^{٣٦} × س$^{-٣ر}$ = س^{٤}

س$^{٣٦-٤ر}$ = س^{٤}

٣٦ – ٤ر = ٤ ← ٤ر=٣٢ ⟸ ر = ٨

ح$_{٩}$ في (س٣ + $\frac{١}{س}$)^{١٢} يحتوي علي س^{٤}

ح$_{٩}$ = ق$^{١٢}_{٨}$ ($\frac{١}{س}$)^{٨} (س٣)^{٤}

ح$_{٩}$ = ٤٩٥ س^{٤} ⟸ معامل س٤ = ٤٩٥

معامل س٩ في المفكوك كله = معامل س٥ ×
معامل س٤ = ١× ٤٩٥ = ٤٩٥

رقم ٤٢:- أوجد معامل

$\frac{١}{س^{٥}}$ في مفكوك $\frac{١}{س^{٣}}$ (س+ $\frac{١}{س^{٢}}$)^{١٠}

الحـــــــــــل

إيجاد معامل س$^{-٢}$ في مفكوك(س + $\frac{١}{س^{٢}}$)^{١٠}

ح$_{ر+١}$ = ق$^{١٠}_{ر}$ ($\frac{١}{س^{٢}}$)^{ر} س$^{١٠-ر}$

س$^{-٢ر}$ × س$^{١٠-ر}$ = س$^{-٢}$

س$^{١٠-٣ر}$ = س$^{-٢}$

١٠-٣ر = -٢ ٣ر = ١٢ ر = ٤

ح$_{٥}$ = ق$^{١٠}_{٤}$ ($\frac{١٠}{س^{٢}}$)^{٤} (س)^{٦}

ح$_{٥}$ = ٢١٠ س$^{-٢}$ معامل $\frac{١}{س^{٢}}$ هو ٢١٠

معامل $\frac{١}{س^{٥}}$ = معامل $\frac{١}{س^{٣}}$ × معامل $\frac{١}{س^{٢}}$

= ١ × ٢١٠

∴ معامل $\frac{١}{س^{٥}}$ = ٢١٠

رقم ٤٣:- في مفكوك $(\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}})^{٣\text{ن}}$

اثبت أن الحد الخالي من س= معامل الحد الذى يحتوى على $\text{س}^{٣\text{ن}}$
إذا كان ن = ٦ فأوجد نسبة الحد الخالي من س إلى معامل الحد الأوسط

الحـــــــــــــل

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = \text{ق}^{٣\text{ن}}_{\text{ر}} (\frac{١}{\text{س}})^{\text{ر}} (\text{س}^{٢})^{٣\text{ن}-\text{ر}}$ $\quad \text{س}^{٦\text{ن}-٢\text{ر}} = \text{س}^{٠}$

$\text{س}^{٦\text{ن}-٣\text{ر}} = \text{س}^{٠} \Leftarrow ٦\text{ن}-٣\text{ر} = ٠ \Leftarrow \text{ر} = ٢\text{ن}$

$\text{ح}_{٢\text{ن}+١}$ هو الحد الخالي من س

$\text{ح}_{٢\text{ن}+١} = \text{ق}^{٣\text{ن}}_{٢\text{ن}} \times (\frac{١}{\text{س}})^{٢\text{ن}} (\text{س}^{٢})^{\text{ن}}$

$\text{ح}_{٢\text{ن}+١} = \text{ق}^{٣\text{ن}}_{٢\text{ن}} \times \frac{١}{\text{س}^{٢\text{ن}}} \times \text{س}^{٢\text{ن}}$

$\text{ح}_{٢\text{ن}+١} = \text{ق}^{٣\text{ن}}_{٢\text{ن}} = \text{ق}^{٣\text{ن}}_{\text{ن}}$ بالتبسيط للتوفيقة (١)

$\text{س}^{٦\text{ن}-٣\text{ر}} = \text{س}^{٣\text{ن}} \Leftarrow ٦\text{ن}-٣\text{ر} = ٣\text{ن} \Leftarrow \text{ر} = \text{ن}$

$\text{ح}_{\text{ن}+١}$ يحتوى على $\text{س}^{٣\text{ن}} \Leftarrow \text{ح}_{\text{ن}+١} = \text{ق}^{٣\text{ن}}_{\text{ن}} (\frac{١}{\text{س}})^{\text{ن}} (\text{س}^{٢})^{٢\text{ن}}$

$\text{ح}_{\text{ن}+١} = \text{ق}^{٣\text{ن}}_{\text{ن}} \text{س}^{٣\text{ن}}$ معامل $\text{س}^{٣\text{ن}} = \text{ق}^{٣\text{ن}}_{\text{ن}}$ (٢) من (١)، (٢) يجد

الحد الخالي من س = معامل الحد الذى يحتوى على س
عند ن = ٦ يكون ح الخالي من س هو $\text{ح}_{١٣}$

ويكون الحد الأوسط = $\frac{٣\text{ن}+٢}{٢} = \frac{٢٠}{٢}$

∴ الحد الأوسط هو $\text{ح}_{١٠}$

$\frac{\text{الحد الخالي من س}}{\text{معامل الحد الأوسط}} = \frac{\text{معامل } \text{ح}_{١٣}}{\text{معامل } \text{ح}_{١٠}} = \frac{\text{ق}^{١٨}_{١٢}}{\text{ق}^{١٨}_{٩}} = \frac{٢١}{٥٥}$

رقم ٤٤:-

أ- في مفكوك $(١+\text{س})^{\text{ن}}$ إثبت أن:-

$\frac{\text{ح}_{\text{ر}+٢}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{(\text{ن}-\text{ر}+١)(\text{ن}-\text{ر})}{\text{ر}\,(\text{ر}+١)} \text{س}^{٢}$

ب:- في مفكوك $(١+\text{م س})^{\text{ن}}$ إذا كان نسبة معامل ح : ح هي ٨ : ٥

معامل $\text{ح}_{٧}$ = ١١٢ معامل $\text{ح}_{٣}$

فإثبت أن ن =٨ ثم أوجد قيمة م

الحـــــــــــــل

الأيمن = $\frac{\text{ح}_{\text{ر}+٢}}{\text{ح}_{\text{ر}+١}} \times \frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}}$

$= \frac{\text{ن}-(\text{ر}+١)+١}{\text{ر}+١} \times \text{س} \times \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \text{س}$

$= \frac{(\text{ن}-\text{ر})(\text{ن}-\text{ر}+١)}{\text{ر}(\text{ر}+١)} \text{س}^{٢}$

ب:- $\frac{\text{معامل } \text{ح}_{٧}}{\text{معامل } \text{ح}_{٥}} = \frac{٨}{٥}$

$\frac{\text{معامل } \text{ح}_{٧}}{\text{معامل } \text{ح}_{٦}} \times \frac{\text{معامل } \text{ح}_{٦}}{\text{معامل } \text{ح}_{٥}} = \frac{٨}{٥}$

$\frac{(\text{ن}-٦+١)\,\text{م}}{٦} \times \frac{(\text{ن}-٥+١)\,\text{م}}{٥} = \frac{٨}{٥}$

$(\text{ن}-٥)(\text{ن}-٤)\,\text{م}^{٢} = ٤٨$ (١)

$\frac{\text{معامل } \text{ح}_{٣}}{\text{معامل } \text{ح}_{١}} = ١١٢$

$$\frac{\text{معامل } ح_{٣}}{\text{معامل } ح_{٢}} \times \frac{\text{معامل } ح_{٢}}{\text{معامل } ح_{١}} = ١١٢$$

$$\frac{ن - ٢ + ١}{٢} \times م \times \frac{ن - ١ + ١}{١} \; م = ١١٢$$

ن(ن-١) م٢ = ٢٢٤ (٢)

بقسمة ١ علي ٢ نجد أن

$$\frac{(ن-٥)(ن-٤)\, م^{٢}}{ن\,(ن-١)\, م^{٢}} = \frac{٤٨}{٢٢٤}$$

$$\frac{ن^{٢} - ٩ن + ٢٠}{ن^{٢} - ن} = \frac{٣}{١٤}$$

١٤ن٢ − ١٢٦ن + ٢٨٠ = ٣ن٢ − ٣ن

١١ن٢ − ١٢٣ن + ٢٨٠ = ٠ ← (١١ن − ٣٥)(ن − ٨) = ٠

ن = $\frac{٣٥}{١١}$ ✗ ص+ مرفوضة ، ن − ٨ = ٠ ← ن = ٨

من المعادلة ١ نجد أن

(ن-٥) (ن-٤) م٢ = ٤٨

(٨-٥) (٨-٤) م٢ = ٤٨ ١٢م٢ = ٤٨

م٢ = ٤ م = ± ٢

رقم ٤٥ :- إذا كانت الحدود $ح_{٢}$، $ح_{٣}$ ، $ح_{٤}$ في مفكوك

(س+ ص)^{ن} هي ٢٤٠ ، ٧٢٠ ، ١٠٨٠ فأوجد قيمة

س ، ص ، ن

الحـــــــــــل

$$\frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = \frac{٧٢٠}{٢٤٠} \leftarrow \frac{(ن-٢+١)}{٢} \; \frac{ص}{س} = ٣$$

(ن-١) ص = ٦س (١)

$$\frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = \frac{١٠٨٠}{٧٢٠} \leftarrow \frac{(ن-٣+١)}{٣} \times \frac{ص}{س} = \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{(ن-٢)\, ص}{٣\, س} = \frac{٣}{٢}$$

(٢ن − ٤) ص = ٩ س ← (٢)

من ١ و ٢ نجد أن

$$\frac{(ن-١)\, ص}{(٢ن-٤)\, ص} = \frac{٦س}{٩س} \leftarrow \frac{ن-١}{٢ن-٤} = \frac{٢}{٣}$$

٤ن − ٨ = ٣ن − ٣ ٤ن − ٣ن = ٥ ن = ٥

بالتعويض في ١ عن ن = ٥

٤ص = ٦س ص = $\frac{٣س}{٢}$ لكن $ح_{٢}$ = ٢٤٠

$^{٥}ق_{١}$ ص س٤ = ٢٤٠ ← $\frac{٣س}{٢}$ س٤ = ٤٨

$$س^{٥} = \frac{٤٨ \times ٢}{٣} = ٣٢ \qquad س^{٥} = ٢^{٥}$$

← س = ٢

ص = $\frac{٣}{٢}$ ، س = $\frac{٣}{٢}$ × ٢ = ٣

س = ٢ ، ص = ٣ ، ن = ٥

رقم ٤٦ :- أوجد معامل س٦ في مفكوك

$$(س + \frac{١}{س})^{٩} (س - \frac{١}{س})^{٩}$$ **وأثبت أن**

هذا المفكوك لا يشتمل علي $س^{-٣}$

الحـــــــــــل

$$(س + \frac{١}{س})^{٩} (س - \frac{١}{س})^{٩} = (س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}})^{٩}$$

نفرض أن $ح_{ر+١}$ يشتمل علي س٦

$$ح_{ر+١} = ق_{ر} (\frac{-١}{س^{٢}})^{ر} (س^{٢})^{٩-ر}$$

$س^{-٢ر} \times س^{١٨-٢ر} = س^{٦} \leftarrow س^{١٨-٤ر} = س^{٦}$

١٨ − ٤ر = ٦ ٤ر = ١٢ ← ر = ٣

$ح_{٤}$ يشتمل على س٦

$$ح_{٤} = ق_{٣}^{٩} (\frac{-١}{س^{٢}})^{٣} (س^{٢})^{٦} \qquad ح_{٤} = -٨٤ س^{٦}$$

معامل س^٦ = -٨٤

١٨-٤ر = -٣

س = س ← ١٨-٤ر = -٣

٤ر = ١٨+٣ ← ٤ر = ٢١

ر = ٢١/٤ ، ن = ٥

المفكوك لا يشتمل على س^-٣

رقم ٤٧ :- إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك (أس + ب)^(ن+١) حيث ن ∈ ص+ متساويان فما قيمة س

الحـــــــــل

رتبة الحدين الأوسطين (ن+١+١)/٢ ، (ن+١+٣)/٢

= (ن+٢)/٢ ، (ن+٤)/٢

الحدان الأوسطان ح_((ن/٢)+١) ، ح_((ن/٢)+٢)

ح_((ن/٢)+١) = ح_((ن/٢)+٢)

ح_((ن/٢)+٢) / ح_((ن/٢)+١) = ١

(ن+١) - ((ن/٢) + ١) + ١ / ((ن/٢) + ١) × ب/أس = ١

ن+١ - (ن/٢) / ((ن/٢) + ١) × ب/أس = ١

٢ن+٢-ن / (ن+٢) × ب/أس = ١

(ن+٢)/(ن+٢) × ب/أس = ١

أ س = ب س = ب/أ

رقم ٤٨ :- في مفكوك (أ س^٢ + ١/أس)^١١ إذا كان معاملا س^٧ ، س^٤ متساويين فأوجد قيمة أ

الحـــــــــل

ح_(ر+١) = ق_ر^١١ (١/أس)^ر (أ س^٢)^(١١-ر)

-ر + ٢٢-٢ر = ٧ س^٢٢-٣ر = س^٧

س × س = س

٢٢-٣ر = ٧ ٣ر = ١٥ ← ر = ٥

ح_٦ تشتمل علي س^٧

ح_٦ = ق_٥^١١ (١/أس)^٥ (أ س^٢)^٦ = ق_٥^١١ أ^٦ س^٧

معامل س^٧ = ق_٥^١١ أ^٦ (١)

٢٢-٣ر = ٤ ٢٢-٣ر = ٤ ٣ر = ١٨ ر = ٦

ح_٧ تشتمل علي س^٤

ح_٧ = ق_٦^١١ (١/أس)^٦ (أ س^٢)^٥

∴ ح_٧ = ق_٥^١١ (١/أ^٥) س^٤

معامل س^٤ = ق_٥^١١ (١/أ^٥) (٢)

من ١ ، ٢ نجد أن

ق_٥^١١ أ^٢ = ق_٥^١١ (١/أ^٣) أ^٢ = ١ أ = ± ١

رقم ٤٩:- في مفكوك

(١+ أس)^٨ حسب قوى س التصاعدية إذا كان ح٢ = ٤

ومعامل ح٥ = ١١٢٠ فما قيمة أ ، س

الحـــــــــــــــــــــــــــــــــل

ح٢ = ق١^٨ أس ٨ أس = ٤

أس = ١/٢ (١)

معامل ح٥ = ١١٢٠

ق٤^٨ أ^٤ = ١١٢٠ ٧٠ أ^٤ = ١١٢٠

أ^٤ = ١٦ أ = ± ٢ بالتعويض في ١

± س^٢ = ١/٢ ومنها س = ± ١/٤

رقم ٥٠:- إذا كان الحد السابع في مفكوك

(س^٣/٢^٢ − ٢^٣/س^٢)^ن هو نفس الحد الخالي من س

فأوجد قيمة ن ثم إحسب قيمة هذا الحد

الحـــــــــــــــــــــــــــــــــل

ح٧ = ق٦^ن (−٢^٣/س^٢)^٦ (س^٣/٢^٢)^(ن-٦)

س^١٢ × س^(٣ن-١٨) = س^(٣ن-٣٠) س^٠ = س

ن − ٣٠ = ٠ ← ٣ن = ٣٠ ← ن = ١٠

ح٧ = ق٦^١٠ (−٢^٣/س^٢)^٦ (س^٣/٢^٢)^٤

= ق٦^١٠ × ٨/س^١٢ × س^١٢/٤ = ٢١٠ × ٢ = ٤٢٠

---

٥ :- أوجد مفكوك (أ + ب^٢)^ن + (أ − ب^٢)^ن

ث أ ، ب ، ن ∈ ص+ ، ن عدد زوجي ثم أوجد الحد الأوسط لهذا المفكوك في أبسط صورة

وإذا كان أ = ٥ ، ب = ٢٠ فأثبت أن :-

(أ + ب^٢)^ن + (أ − ب^٢)^ن يقبل القسمة علي ٥

(أ + ب^٢)^ن + (أ − ب^٢)^ن

= ٢(ح١ + ح٣ + ح٥ الحدود الفردية الرتبة)

= ٢ (أ^ن + ق٢^ن (ب^٢)^٢ أ^(ن-٢)

+ ق٤^ن (ب^٢)^٤ أ^(ن-٤))

= ٢ (أ^ن + ق٢^ن ب^٢ أ^(ن-٢) + ق٤^ن ب^٤ أ^(ن-٤))

عدد حدود الفكوك الأول زوجي وعدد حدود المفكوك الثاني زوجي وعند إيجاد مفكوك المقدارين معاً يكون العدد الكلي = ن من الأول + ن من الثاني

عدد حدود = ٢ن

ح الأوسط = (٢ن+٢)/٢ = ن + ١

ح^(ن+١) = ق^ن^ن ب^٢ن أ^ن

بالتعويض في المفكوك عن أ = ٥ ، ب = ٢٠

٢ [٥^ن + ق٢^ن × ٢٠ × ٥^(ن-١)

+ ق٤^ن × ٤٠٠ × ٥^(ن-٢)]

وبأخذ عامل مشترك ٥ من المفكوك

٢ × ٥^(ن-١) [٥^ن + ق٢^ن × ٤ × ٥^(ن-١)

+ ق٤^ن × ٨٠ × ٥^(ن-٢) .....]

المفكوك يقبل القسمة علي ٥

رقم ٥٢ :- أوجد مفكوك

$$\left[\frac{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢} + ١}{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١} + \text{س}\right]^{٦}$$

الحـــــــل

$$\left[\frac{\text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٢} + ١ - \text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١} + \text{س}\right]^{٦}$$

$$\left[\frac{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢} - \text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١} + \text{س}\right]^{٦}$$

$$\left[\frac{(\text{س}^{٢} + ١ + \text{س})(\text{س}^{٢} + ١ - \text{س})}{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١} + \text{س}\right]^{٦}$$

$$[\text{س}^{٢} + ١ - \text{س} + \text{س}]^{٦} = [\text{س}^{٢} + ١]^{٦} \text{ ثم نفكه}$$

$$(\text{س}^{٢} + ١)^{٦} = (\text{س}^{٢})^{٦} + {}^{٦}\text{ق}_{١}(\text{س}^{٢})^{٥} + {}^{٦}\text{ق}_{٢}(\text{س}^{٢})^{٤}$$

$$+ {}^{٦}\text{ق}_{٣}(\text{س}^{٢})^{٣} + {}^{٦}\text{ق}_{٤}(\text{س}^{٢})^{٢} + {}^{٦}\text{ق}_{٥}\,\text{س}^{٢} + (١)^{٦}$$

$$(\text{س}^{٢} + ١)^{٦} = \text{س}^{١٢} + ٦\,\text{س}^{١٠} + ١٥\,\text{س}^{٨} + ٢٠\,\text{س}^{٦}$$

$$+ ١٥\,\text{س}^{٤} + ٦\,\text{س}^{٢} + ١$$

رقم ٥٣ :- إثبت أن معامل الحد الذى يشتمل على $\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٤}\,\text{ع}^{٥}$ فى مفكوك $(\text{س} + \text{ص} + \text{ع})^{١٢}$ هو $\frac{\lfloor ١٢}{\lfloor ٣ \; \lfloor ٤ \; \lfloor ٥}$

الحـــــــل

نفرض أن $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ يحتوى على $\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٤}\,\text{ع}^{٥}$

فى مفكوك $[\text{ع} + (\text{س} + \text{ص})]^{١٢}$

$$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{س} + \text{ص})^{\text{ر}}\,\text{ع}^{١٢-\text{ر}}$$

$$= \text{ع}^{٥} \qquad ١٢ - \text{ر} = ٥ \qquad \text{ر} = ٧$$

$\therefore$ $\text{ح}_{٨}$ يحتوى على $\text{ع}^{٥}$

$$\text{ح}_{٨} = {}^{١٢}\text{ق}_{٧}\,(\text{س} + \text{ص})^{٧}\,\text{ع}^{٥} \longrightarrow (١)$$

ثم نفرض أن $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ يحتوى على $\text{ص}^{٤}$ فى مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{٧}$

$$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{٧}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{ص}^{\text{ر}}\,\text{س}^{٧-\text{ر}}$$

$$\text{ص}^{\text{ر}} = \text{ص}^{٤} \longrightarrow \text{ر} = ٤$$

$$\text{س}^{٧-\text{ر}} = \text{س}^{٣} \longrightarrow \text{ر} = ٤$$

أي أن $\text{ح}_{٥}$ فى مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{٧}$ يحتوى على $\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٤}$

$$\text{ح}_{٥} = {}^{٧}\text{ق}_{٤}\,\text{ص}^{٤}\,\text{س}^{٣}$$

$\text{ح}_{٨}$ فى مفكوك $[\text{ع} + (\text{س} + \text{ص})]^{١٢}$ من ١ نجد أن

حيث $\text{ح}_{٨} = {}^{١٢}\text{ق}_{٧} \times \text{ح}_{٥}$ من مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{٧}\,\text{ع}^{٥}$

$$\text{ح}_{٨} = {}^{١٢}\text{ق}_{٧} \times {}^{٧}\text{ق}_{٤}\,\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٤}\,\text{ع}^{٥}$$

المعامل هو ${}^{١٢}\text{ق}_{٧} \times {}^{٧}\text{ق}_{٤}$

$$\text{المعامل} = {}^{١٢}\text{ق}_{٧} \times {}^{٧}\text{ق}_{٤} = \frac{\lfloor ١٢}{\lfloor ٥ \; \lfloor ٧} \times \frac{\lfloor ٧}{\lfloor ٤ \; \lfloor ٣}$$

$$= \frac{\lfloor ١٢}{\lfloor ٥ \; \lfloor ٤ \; \lfloor ٣}$$

رقم ٥٤:- أوجد عدد الحدود التي قيمتها أعداد صحيحه في مفكوك $(\sqrt{٣} + \sqrt[٤]{٥})^{١٢٤}$

الحـــــــــــل

$$(\sqrt{٣} + \sqrt[٤]{٥})^{١٢٤} = (\sqrt{٣})^{١٢٤} + ق_{١}^{١٢٤} (\sqrt{٣})^{١٣٤} (\sqrt[٤]{٥})^{١}$$

$$+ ق_{٢}^{١٢٤} (\sqrt[٤]{٥})^{٢} (\sqrt{٣})^{١٢٢} + ق_{٣}^{١٢٤} (\sqrt[٤]{٥})^{٣} (\sqrt{٣})^{١٢١}$$

$$+ ق_{٤}^{١٢٤} (\sqrt[٤]{٥})^{٤} (\sqrt{٣})^{١٢٠}$$

نلاحظ في المفكوك أن الحدود ح ،ح ،ح ، ح ، ح ...ح
١ ٥ ٩ ١٣ ١٧ ١٢٥
هي أعداد صحيحة فقط وغيرها غير صحيح وهي تمثل م ح
فيها أ = ١ ، د = ٤ ، ح = ١٢٥ = ل حيث أن عدد
ن حدود المفكوك ١٢٥

ح = أ + (ن-١) د ← ١٢٥ = ١+(ن-١) × ٤
١٢٤ = ٤ (ن-١) ← ٣١= ن-١ ← ن= ٣٢ حداً

رقم ٥٥ :- اثبت أن

$$ق_{٠}^{٢ن} + ق_{١}^{٢ن} ..... ق_{ن}^{٢ن} = \frac{\lfloor ٢ن}{(\lfloor ن)^{٢}}$$

الحـــــــــــل

$$(١+س)^{٢ن} = (١+س)^{ن} (س+١)^{ن}$$ ثم نوجد مفكوك الطرفين كالآتي :- أي نعك الطرف الأيمن ونفك الأيسر ونساويهما

$$١ + ق_{١}^{٢ن} س + ق_{٢}^{٢ن} س^{٢} + ... ق_{ن}^{٢ن} س$$

$$= (١+ ق_{١}^{ن} س + ق_{٢}^{ن} س^{٢} + ق_{٣}^{ن} س^{٣})(س^{ن} + ق_{١}^{ن} س^{ن-١}$$

$$+ ق_{٢}^{ن} س^{ن-٢})$$ ثم نساوى معامل $س^{ن}$ للطرفين

$$ق_{ن}^{٢ن} س^{ن} = ق_{٠}^{ن} ق_{ن}^{ن} س^{ن} + ق_{١}^{ن} ق_{ن-١}^{ن} س^{ن}$$

$$+ ق_{٢}^{ن} ق_{ن-٢}^{ن} س^{ن}$$

$$ق_{ن}^{٢ن} س^{ن} = [ق_{٠}^{ن} ق_{ن}^{ن} + ق_{١}^{ن} ق_{ن-١}^{ن} ..... ق_{ن}^{ن} ق_{٠}^{ن}] س^{ن}$$

$$ق_{٠}^{ن} ق_{ن}^{ن} + ق_{١}^{ن} ق_{ن-١}^{ن} .... ق_{ن}^{ن} ق_{٠}^{ن} = ق_{ن}^{٢ن}$$

$$ق_{١}^{ن} ق_{٢}^{ن} + ق_{٢}^{ن} ق_{٣}^{ن} .... ق_{ن}^{ن} ق_{٢}^{ن} = \frac{\lfloor ٢ن}{(\lfloor ن)^{٢}}$$

رقم ٥٦:- أوجد معامل س٩ فى المقدار

$$[(٢+س)^{١٠} + (٢+س)^{٩}(١+س) + (٢+س)^{٨}(١+س)^{٢} + ... + (١+س)^{١٠}]$$

الحـــــــــــل

نلاحظ أن المقدار الموضح هو عبارة عن متتابعة هندسية فيها أ = $(٢+س)^{١٠}$

عدد الحدود = ن - ١ + ١ = ١١

$$ر = \frac{١+س}{٢+س} \quad ن = ١١$$

$$جـ = \frac{أ[ر^{ن} - ١]}{ر - ١}$$

$$جـ = \frac{(٢+س)^{١٠}\left[\left(\frac{١+س}{٢+س}\right)^{١١} - ١\right]}{\frac{١+س}{٢+س} - ١}$$

$$جـ = \frac{(٢+س)^{١٠}\left[\frac{(١+س)^{١١}}{(٢+س)^{١١}} - ١\right]}{\frac{١+س-٢-س}{٢+س}}$$

$$جـ = \frac{(٢+س)^{١١}\left[\left(\frac{١+س}{٢+س}\right)^{١١} - ١\right]}{}$$

$$جـ = (٢+س)^{١١} \left[١ - \frac{(١+س)^{١١}}{(٢+س)^{١١}} \right]$$

ثم نفك القوس

$جـ = (٢+س)^{١١} - (١+س)^{١١}$ ثم نأتي بمعامل س٩ من المفكوك الأول والثاني

إيجاد معامل س٩ في مفكوك $(٢+س)^{١١}$

$ح_{ر+١} = {}^{١١}ق_{ر}\, س^{ر}\, ٢^{١١-ر} \longrightarrow س^{ر} = س^{٩} \longrightarrow ر = ٩$

$ح_{١٠} = {}^{١١}ق_{٩}\, س^{٩} \times ٢^{٢} \longrightarrow ح_{١٠} = ٤ \times ٥٥\, س^{٩} = ٢٢٠\, س^{٩}$

معامل س٩ في المفكوك الأول = ٢٢٠

إيجاد معامل س٩ في المفكوك (١+ س)

$ح_{ر+١} = {}^{١١}ق_{ر}\, س^{ر}\, (١)^{١١-ر} \longrightarrow س^{ر} = س^{٩} \longrightarrow ر = ٩$

$ح_{١٠} = {}^{١١}ق_{٩}\, س^{٩} = {}^{١١}ق_{٢}\, س^{٩} \qquad ح_{١٠} = ٥٥\, س^{٩}$

معامل س٩ في المفكوك الثاني = ٥٥

معامل س٩ في المفكوك كله = ٢٢٠ – ٥٥ = ١٦٥

مسائل مختارة من امتحانات الثانوية العامة ص ٣٤

٤١ مصر – دور أول ٢٠٠٢

إذا كان ${}^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ ، ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{٢٤}ل_{ر}$

فأوجد كل من ن ، ر الحـــــــل

${}^{ن}ق_{٣} = ١٢٠ \longrightarrow {}^{ن}ل_{٣}$

$\frac{{}^{ن}ل_{٣}}{\lfloor ٣} = ١٢٠$

${}^{ن}ل_{٣} = ١٢٠ \lfloor ٣ \longrightarrow {}^{ن}ل_{٣} = ٧٢٠$

${}^{ن}ل_{٣} = ١٠ \times ٩ \times ٨ \longrightarrow {}^{ن}ل_{٣} = {}^{١٠}ل_{٣} \longrightarrow ن = ١٠$

$${}^{٢٤}ق_{ر} = {}^{ن}ل_{ر} \Longleftarrow \frac{{}^{٢٤}ل_{ر}}{\lfloor ر} = {}^{ن}ل_{ر}$$

$\lfloor ر = ٢٤ \therefore \lfloor ر = \lfloor ٤ \qquad ر = ٤$

رقم ٢:- مصر دور أول ٢٠٠٢

في مفكوك

$$\left(س^{٢} + \frac{٢}{س} \right)^{٦}$$

أوجد أولاً :- قيمة الحد الخالي من س

أوجد ثانياً:- النسبة بين قيمة الحد الخالي من س ومعامل الحد الأوسط

الحـــــل أولاً :-

نفرض ح يشتمل علي س

$ح_{ر+١}$

$$ح_{ر+١} = {}^{٦}ق_{ر} \left(\frac{٢}{س} \right)^{ر} (س^{٢})^{٦-ر}$$

$س^{-ر} \times س^{١٢-٢ر} = س^{٠}$

$س^{١٢-٣ر} = س^{٠} \longrightarrow ١٢ - ٣ر = ٠ \longrightarrow ر = ٤$

$ح_{٥}$ هو الحد الخالي من س

$$ح_{٥} = {}^{٦}ق_{٤} \left(\frac{٢}{س} \right)^{٤} (س^{٢})^{٢}$$

$$= ١٥ \times \frac{١٦}{س^{٤}} \times س^{٤} = ٢٤٠$$

ثانياً:- رتبة الحد الأوسط $= \frac{٦+٢}{٢} = ٤$

الحد الأوسط هو $ح_{٤}$

معامل $ح_{٥}$

معامل $ح_{٤}$

$$= \frac{٦-٤+١}{٤} \times \frac{٢}{١} = \frac{٣}{٢}$$

٣- مصر دور ثاني ٢٠٠٢

إذا كان $ق_{٣}^{ن-٣} = ٣٥$ ، $ل_{٢}^{م+ن} = ٢١٠$

فأوجد قيمة $أ_{ن-م}$

الحـــــــــل

$ق_{٣}^{ن-٣} = ٣٥ \longrightarrow \frac{ل_{٣}^{ن-٣}}{\lfloor ٣} = ٣٥$

$ل_{٢}^{ن-٣} = ٥ \times \lfloor ٣ \longrightarrow ل_{٢}^{ن-٣} = ٢١٠$

$ل_{٣}^{ن-٣} = ٧ \times ٦ \times ٥ \longrightarrow ل_{٣}^{ن-٣} = ل_{٣}^{٧}$

$ن-٣ = ٧ \Longrightarrow ن = ١٠$

لكن $ل_{٢}^{م+ن} = ٢١٠ \longrightarrow ل_{٢}^{م+ن} = ١٥ \times ١٤$

$ل_{٢}^{م+ن} = ل_{٢}^{١٥} \longrightarrow م+ن = ١٥ \longrightarrow م+١٠ = ١٥$

$\Longrightarrow م = ٥$

$أ_{ن-م} = أ_{١٠-٥} = أ_{٥} = ١٢٠$

٤- مصر دور ثاني ٢٠٠٢

في مفكوك $(س + \frac{١}{٢س})^{١٣}$ اوجد اولاً قيمة معامل $س^{-١}$

ثانياً :- قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين في المفكوك متساويين . الحـــــــــل

أولاً :- $ح_{ر+١} = ق_{ر}^{١٣} (\frac{١}{٢س})^{ر} (س)^{١٣-ر}$

$س^{-ر} \times س^{١٣-ر} = س^{-١}$

$١٣-٢ر = -١$

$٢ر = ١٤ \Longrightarrow ر = ٧$

$ح_{٨}$ يحتوي علي $س^{-١}$ $\quad ح_{٨} = ق_{٧}^{١٣} (\frac{١}{٢س})^{٧} س^{٦}$

$= ق_{٧}^{١٣} (\frac{١}{٢}) س^{-١} \longrightarrow$ معامل $س^{-١} = ق_{٧}^{١٣} (٢)^{-٧}$

ثانياً :- رتبة الحدين الأوسطين

$\frac{١٣+١}{٢} ، \frac{١٣+٣}{٢}$

الحدان الأوسطان هما $ح_{٧} ، ح_{٨}$

$\frac{ق_{٧}^{١٣}}{ق_{٨}^{١٣}} = ١ \quad \frac{١٣-٧+١}{٧} \times \frac{\frac{١}{٢س}}{س} = ١$

$\frac{٧}{٧} \times \frac{١}{٢س^{٢}} = ١ \longrightarrow ٢س^{٢} = ١$

$س^{٢} = \frac{١}{٢} \qquad س = \pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$

٥- (مصر – أغسطس ١٩٩٨)

أوجد الحد المشتمل علي $س^{١٢}$ في مفكوك

$(س^{٢} - \frac{١}{س})^{١٢}$ ثم أوجد النسبة بين معامل هذا

الحد والحد الأوسط الحـــــــــل

$ح_{ر+١} = ق_{ر}^{١٢} (\frac{-١}{س})^{ر} (س^{٢})^{١٢-ر}$

$س^{-ر} \times س^{٢٤-٢ر} = س^{١٢}$

$٢٤ - ٣ر = ١٢$

$٣ر = ١٢ \Longrightarrow ر = ٤$

$ح_{٥}$ هو الذي يحتوي علي $س^{١٢}$

$ح_{٥} = ق_{٤}^{١٢} (\frac{-١}{س})^{٤} (س^{٢})^{٨} = ٤٩٥ س^{١٢}$

الحد الأوسط هو $ح_{٧}$

$\frac{\text{معامل } ح_{٧}}{\text{معامل } ح_{٦}} = \frac{\text{معامل } ح_{٧}}{\text{معامل } ح_{٦}} \times$

$$= \frac{١٢ - ٦ + ١}{٦} \times -١ \times \frac{١٢ - ٥ + ١}{٥} \times -١$$

$$= \frac{٧}{٦} \times \frac{٨}{٥} = \frac{٢٨}{١٥} = \frac{\text{معامل } ح_٧}{\text{معامل } ح_٥}$$

$$\frac{\text{معامل } ح_٥}{\text{معامل } ح_٧} = \frac{١٥}{٢٨}$$

رقم ٦:- مصر مايو ١٩٩٨

أ:- إذا كان $ل^{ن}_{٤} = ٣٦٠$ ، $ل_{ر} = ٢٤$

فما قيمة $ق^{٢ن}_{ر}$

ب:- في مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{س})^{٩}$ حسب قوي س التنازلية

أولاً :- أوجد الحد الخالي من س

ثانياً:- إذا كانت النسبة بين الحد الخالي من س والحد السادس $= \frac{٢}{٣}$ فأوجد قيمة س الحقيقية

الحـــــــــل

(أ) $ل^{ن}_{٤} = ٣٦٠ \leftarrow ل^{ن}_{٤} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣$

$ل^{ن}_{٤} = ل^{٦}_{٤}$ $\boxed{ن = ٦}$

$ل_{ر} = ٢٤$ $ل_{ر} = ل_{٤}$ $\boxed{ر = ٤}$

$ق^{٢ن}_{ر} = ق^{١٢}_{٤} = ٤٩٥$

ب:- $ح_{ر+١} = ق^{٩}_{ر} (\frac{١}{س})^{ر} (س^٢)^{٩-ر} \Leftarrow س^{٩-ر} \times س^{-ر} = س^{١٨-٢ر}$

$س^{١٨-٣ر} = س^{صفر} \Leftarrow ١٨ - ٣ر = ٠$

$\therefore ر = ٦$

$ح_٧$ هو الحد الخالي من س

$\frac{ح_٧}{ح_٦} = \frac{٢}{٣} \Leftarrow \frac{٩-٦+١}{٦} \times \frac{١}{س^٢} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{٤}{٦} \times \frac{١}{س^٣} = \frac{٢}{٣}$ $س^٣ = ١$

$\therefore س = ١$

رقم ٧:- مصر مايو ١٩٩٧

أ- إذا كان $ل^{٥}_{ر} = ٦٠$ $ل^{ن}_{ن} = ١٢٠$

فأوجد قيمة $ق^{ن}_{ر}$

ب- أوجد الحد الخالى من س فى مفكوك $(٩س^٢ + \frac{١}{٣س})^{٩}$ ثم إثبت أن الحدين الأوسطين متساويان عندما $س = \frac{١}{٣}$

الحـــــــــل

$ل^{٥}_{ر} = ٥ \times ٤ \times ٣ \leftarrow ل^{٥}_{ر} = ل^{٥}_{٣}$ $\boxed{ر = ٣}$

$ل^{ن}_{ن} = ١٢٠ \leftarrow ل^{ن}_{ن} = ل^{٥}_{٥}$ $\boxed{ن = ٥}$

$ق^{ن}_{ر} = ق^{٥}_{٣} = ١٠$

الحد الثانى ب

$ح_{ر+١} = ق^{٩}_{ر} (\frac{١}{٣س})^{ر} (٩س^٢)^{٩-ر}$

$-ر \quad ١٨-٢ر \quad ٠ \qquad ١٨-٣ر \quad ٠$

$س \times س = س \leftarrow س = س$

$١٨-٣ر = ٠ \leftarrow ر = ٦$

$ح_٧$ هو الحد الخالى من س

$ح_٧ = ق^{٩}_{٦} (\frac{١}{٣س})^{٦} (٩س^٢)^{٣}$ $ح_٧ = ٨٤$

الحدان الأوسطان رتبتاهما $\frac{٩+١}{٢}$ ، $\frac{٩+٣}{٢}$

الحدان الأوسطان هما $ح_٥$ ، $ح_٦$

$$\frac{ح_٦}{ح_٥} = \frac{٥-٥+١}{٥} \times \frac{١}{٢٧ س^٢}$$

$$\frac{ح_٦}{ح_٥} = \frac{٥}{٥} \times \frac{١}{٢٧ س^٣} = \frac{١}{٢٧ س^٣}$$

عندما س = $\frac{١}{٣}$

$$\frac{ح_٦}{ح_٥} = \frac{١}{٢٧ \times \frac{١}{٢٧}} = ١$$

أي أن $ح_٦ = ح_٥$ عندما س = $\frac{١}{٣}$

رقم ٨:- مصر مايو ١٩٩٧

في مفكوك (١ + س)^٨ إذا كان $ح_٤$ يساوي ٧

فأوجد قيمة س ثم أوجد النسبة بين الحد السادس في هذا المفكوك والحد الأوسط

$ح_٤ = ٧ \leftarrow ق^٨_٣ س^٣ = ٧ \leftarrow ٥٦ س^٣ = ٧$

$س^٣ = \frac{١}{٨} \leftarrow س = \frac{١}{٢}$

الحد الأوسط رتبته $\frac{٨+٢}{٢} = ٥$

$ح_٥$ هو الحد الأوسط

$$\frac{ح_٦}{ح_٥} = \frac{٨-٥+١}{٥} \times \frac{١}{٢} = \frac{٤}{١٠} = \frac{٢}{٥}$$

رقم ٩:- مصر أغسطس /١٩٩٩

في مفكوك $(س + \frac{١}{س^٢})^ن$ حسب قوى س التنازلية

وجد أن الحد الخامس هو الحد الخالي من س

فأوجد قيمة ن ثم أوجد معامل الحد الأوسط

الحـــــــــــــل

$ح_٥ = ق^ن_٤ (\frac{١}{س^٢})^٤ س^{ن-٤} \Leftarrow س^{-٨} \times س^{ن-٤} = س^٠$

$س^{ن-١٢} = س^٠$ ن-١٢ = ٠ ن = ١٢

رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٢+٢}{٢}$ = ٧

$ح_٧$ هو الحد الأوسط

$ح_٧ = ق^{١٢}_٦ (\frac{١}{س^٢})^٦ س^٦$

معامل الحد الأوسط = $ق^{١٢}_٦$ = ٩٢٤

رقم ١٠ :- مصر اغسطس ١٩٩٦

اثبت أنه لايوجد حد خالي من س في مفكوك

$(س^٢ - \frac{١}{س})^{١٤}$ ثم أوجد النسبة بين الحدين

السابع والسادس في هذا المفكوك عند س = -١

الحـــــــــــــل

نفرض أن $ح_{ر+١}$ يحتوي علي س٠

$ح_{ر+١} = ق^{١٤}_ر (\frac{-١}{س})^ر (س^٢)^{١٤-ر}$

$س^{-ر} \times س^{٢٨-٢ر} = س^٠ \leftarrow ٢٨-٣ر = ٠$

٣ر = ٢٨ ، ر = $\frac{٢٨}{٣}$ = ٩ $\frac{١}{٣}$

∴ ∄ ص+ إذا لايوجد حد خالي من س في المفكوك

$$\frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = \frac{١٤-٦+١}{٦} \times \frac{-١}{س^{٣}}$$

$$= \frac{٩}{٦} \times \frac{-١}{-١} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$$

رقم ١١:- مصر دور أول ٢٠٠٤

في مفكوك $\left(س^{ك} + \frac{١}{س}\right)^{٦}$ حيث ك عدد صحيح موجب

أوجد ١:- قيم ك التي تجعل للمفكوك حداً خالياً من س
٢:- النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل الحد الأوسط
وذلك لأكبر قيم ك التي حصلت عليها أولاً

الحـــــــــل

$$ح_{ر+١} = ق_{ر}\left(\frac{١}{س}\right)^{ر}\left(س^{ك}\right)^{٦-ر}$$

$$س^{٦ك-ك ر} \times س^{-ر}$$

$$س^{٦ك-ك ر-ر} = س^{٠} \longrightarrow ٦ك - ك ر - ر = ٠$$

$$٦ك - ك ر = ر \longrightarrow ك(٦-ر) = ر$$

$$ك = \frac{ر}{٦-ر} \qquad ك \in ص^{+}$$

البسط ≤ المقام $\qquad ر \le ٦-ر$

$$٢ر \le ٦ \longrightarrow ر \le ٣$$

وأيضاً المقام > ٠ $\longrightarrow ٦-ر > ٠ \longrightarrow ر < ٦$

$ر \in [٣ ، ٦]$ قيم ر = ٣، ٤، ٥

عندها قيم ك = ١، ٢، ٥

وعند ك = ٥ اذا الحد الخالي من س هو $ح_{٦}$

$$\frac{ح_{٦}}{معامل\ ح_{٤}} = \frac{٦ق٥}{٦ق٣} = \frac{٣}{١٠}$$

الأعداد المركبة أسئلة انتاج الاجابة

رقم ١:- ضع علي الصورة أ + ب ت العدد المركب

$$ع = \frac{١+٢ت}{٤+٣ت}$$

الحـــــــــل

$$ع = \frac{(١+٢ت)(٤-٣ت)}{(٤+٣ت)(٤-٣ت)} = \frac{٤-٣ت+٨ت+٦}{١٦-٩ت^{٢}}$$

$$= \frac{١٠+٥ت}{٢٥} = \frac{١٠}{٢٥} + \frac{٥}{٢٥}ت$$

$$ع = \frac{٢}{٥} + \frac{١}{٥}ت$$

رقم ٢- إذا كان أ = ٤- ت ، ب = ٣+ ت ، جـ = - ت

فأوجد $\frac{أ-ب}{ب-جـ}$ **الحـــــــــل**

$$أ - ب = (٤-ت) - (٣+ت) = ٤-ت-٣-ت$$

$$ب-جـ = (٣+ت) - (-ت) = ٣+ت+ت$$

$$= \frac{(١-٢ت)(٣-٢ت)}{(٣+٢ت)(٣-٢ت)}$$

$$= \frac{٣-٢ت-٦ت-٤}{٩-٤ت^{٢}} = \frac{-١-٨ت}{١٣} = \frac{-١}{١٣}(١+٨ت)$$

رقم ٣- عددان مركبان مترافقان مجموعهما ٨ وحاصل ضربهما ٢٥ أوجد هذين العددين

الحـــــــــل

$$ع_{١} + ع_{٢} = ٨ \quad ، \quad ع_{١}ع_{٢} = ٢٥$$

$$ع_{٢} = ٨ - ع_{١} \longrightarrow ع_{١}(٨-ع_{١}) = ٢٥$$

$$٨ع_{١} - ع_{١}^{٢} = ٢٥ \qquad ع_{١}^{٢} - ٨ع_{١} + ٢٥ = ٠$$

ثم نحل بالقانون $ع = \frac{٨ \pm \sqrt{٦٤ - ٤ \times ١ \times ٢٥}}{٢ \times ١}$

$$ع = \frac{٨ \pm \sqrt{٦٤-١٠٠}}{٢} = \frac{٨ \pm \sqrt{-٣٦}}{٢}$$

$ع_{١} = \frac{٨ \pm \sqrt{٣٦ت^{٢}}}{٢} = \frac{٨ \pm ٦ت}{٢}$

$ع_{١} = \frac{٨ + ٦ت}{٢} = ٤ + ٣ت$

$ع_{٢} = \frac{٨ - ٦ت}{٢} = ٤ - ٣ت$

$ع_{١} = ٨ - (٤ + ٣ت) = ٤ - ٣ت$

$ع_{٢} = ٨ - (٤ - ٣ت) = ٤ + ٣ت$

العددان هما ٤ + ٣ت ، ٤ - ٣ت

رقم ٥:- إذا كان

$س + ت ص = (أ + ب ت)^{ن}$ فاثبت أن

$س^{٢} + ص^{٢} = (أ^{٢} + ب^{٢})^{ن}$

الحل

$س + ص ت = (أ + ب ت)^{ن}$ (١)

$س - ص ت = (أ - ب ت)^{ن}$ (٢)

بضرب × ٢ نجد أن

$(س + ص ت)(س - ص ت)$

$= (أ + ب ت)^{ن} (أ - ب ت)^{ن}$

$س^{٢} - ص^{٢} ت^{٢} = (أ^{٢} - ب^{٢} ت^{٢})^{ن}$

$س^{٢} + ص^{٢} = (أ^{٢} + ب^{٢})^{ن}$

رقم ٦:- إذا كان

$ع = \frac{١}{١ + ت ظا \theta}$ حيث $\theta \in [\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$

وجد العدد ع على الصورة المثلثية

الحل

$ع = \frac{١}{١ + ت ظا \theta} = \frac{١}{١ + \frac{ت جا \theta}{جتا \theta}}$ بالضرب في جتا θ مقاما ومقاما

$= \frac{جتا \theta}{جتا \theta + ت جا \theta}$ بالضرب في المرافق

$\frac{جتا \theta (جتا \theta - ت جا \theta)}{(جتا \theta + ت جا \theta)(جتا \theta - ت جا \theta)}$

$ع = \frac{جتا \theta (جتا \theta - ت جا \theta)}{جتا^{٢} \theta + جا^{٢} \theta}$

$ع = جتا \theta (جتا \theta - ت جا \theta)$

$ع = جتا \theta [جتا (٢\pi - \theta) + ت جا (٢\pi - \theta)]$

رقم ٦:- إذا كان $ل = \frac{٢ + ت}{١ + ت}$ ، $م = \frac{١ + ٢ت}{١ + ت}$

فاثبت أن ل ، م كميتان مترافقتان ثم احسب قيمة

$\frac{١٥ (ل^{٢} + م^{٢})}{٨ ل م (ل + م)}$

الحل

$ل \times م = \frac{(٢ + ت)(١ + ٢ت)}{(١ + ت)(١ + ت)}$

$ل \times م = \frac{٢ + ٥ت - ٢}{١ + ٢ت - ١} = \frac{٥ت}{٢ت} = \frac{٥}{٢}$ (١)

$ل + م = \frac{٢ + ت}{١ + ت} + \frac{١ + ٢ت}{١ + ت}$

$ل + م = \frac{٣ + ٣ت}{١ + ت} = \frac{٣ (١ + ت)}{١ + ت} = ٣$ (٢)

من (١) ، (٢) فإن العدد والمجموع لهما مترافقان

$ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢ ل م = ٩ - ٢ \times \frac{٥}{٢} = ٤$

$المقدار = \frac{١٥ (ل^{٢} + م^{٢})}{٨ ل م (ل + م)} = \frac{١٥ \times ٤}{٨ \times \frac{٥}{٢} \times ٣} = ١$

رقم ٧:- أوجد معادلة من الدرجة الثانية في س إذا كانت معاملاتها حقيقية وأحد جذريها $(٢ - \sqrt{٣} ت)$

الحل

الجذر الأول $= (٢ - \sqrt{٣} ت)$

معاملاتها حقيقية يكون عندها الجذران مترافقان

∴ الجذر الآخر = ٢ + √٣ ت

مجموع الجذرين = (٢ - √٣ ت) + (٢ + √٣ ت)

مجموع الجذرين = ٤

حاصل ضرب الجذرين = (٢ - √٣ ت) (٢ + √٣ ت)

= ٤ - ٣ت٢ = ٤ + ٣ = ٧

س٢ - (مجموع الجذرين) س + حاصل الضرب = ٠

س٢ - ٤س + ٧ = ٠

رقم ٨ :- بفرض أن س ، ص ∈ ح وكان

$$\frac{\text{س} + \text{ت ص}}{\text{٢} - \text{ت}} + \frac{\text{٣س} + \text{ت ص}}{\text{٢} + \text{ت}} = \frac{\text{٢٣}}{\text{٥}}$$

فأوجد قيمة كل من س ، ص

$$\frac{(\text{س} + \text{ت ص})(\text{٢} + \text{ت}) + (\text{٣س} + \text{ت ص})(\text{٢} - \text{ت})}{(\text{٢} - \text{ت})(\text{٢} + \text{ت})} = \frac{\text{٢٣}}{\text{٥}}$$

$$\frac{\text{س} + \text{س ت} + \text{ت ص} - \text{ت ص} + \text{٣س} - \text{٣س ت} + \text{٢ص ت} + \text{ص}}{(\text{٢} - \text{ت})(\text{٢} + \text{ت})} = \frac{\text{٢٣}}{\text{٥}}$$

$$\frac{(\text{٤س} - \text{ص}) + (-\text{٢س} + \text{٦ص})\text{ت}}{\text{٤} - \text{ت}^2} = \frac{\text{٢٣}}{\text{٥}}$$

$$\frac{(\text{٤س} - \text{ص}) + (-\text{٢س} + \text{٦ص})\text{ت}}{\text{٥}} = \frac{\text{٢٣}}{\text{٥}}$$

(٤س - ص) + (-٢س + ٦ص) ت = ٢٣

٤س - ص = ٢٣ (١)

-٢س + ٦ص = ٠ (٢)

بضرب المعادلة الثانية × ٢ وجمعها على الأولي

٤س - ص = ٢٣

-٤س + ٢٤ ص = ٠

٢٣ص = ٢٣ ، ص = ١

بالتعويض نجد أن س = ٣

رقم ٩ :- إذا كان س + ص ت + ٢ / س - ص ت - ١ = ١ + ٤ ت / ت - ١

أوجد قيمة كل من س ، ص الحـــــــل

س + ص ت + ٢ / س - ص ت - ١ = ١ + ٤ ت / ت - ١

(س + ص ت + ٢)(ت - ١)

= (س - ص ت - ١)(١ + ٤ ت)

س ت - س - ص - ص ت + ٢ت - ٢

= س + ٤س ت - ص ت + ٤ ص - ١ - ٤ت

(- س - ص - ٢) + (س + ٢) ت

= (س + ٤ ص - ١) + (٤س - ٤) ت

س + ٢ = ٤س - ٤ ، ٣س = ٦ ، س = ٢

- س - ص - ٢ = س + ٤ص - ١

٢س + ٥ص + ١ = ٠ ، ٥ + ٥ص = ٠

ص = -١

رقم ١٠ :- إذا كان

س + ت ص = ٢ / ١ - √٣ ت

فأوجد قيمة كل من س ، ص ثم أوجد الجذر التربيعي للمقدار ٢ / ١ - √٣ ت بالطريقة الجبرية

الحـــــــل

س + ت ص = ٢ / ١ - √٣ ت بالضرب في المرافق

س + ت ص = ٢ (١ + √٣ ت) / (١ - √٣ ت)(١ + √٣ ت)

س + ت ص = ٢ (١ + √٣ ت) / ١ + ٣

س + ت ص = ١ + √٣ ت / ٢

س + ت ص = ١/٢ + √٣/٢ ت

س = ١/٢ ، ص = √٣/٢

الجذر = ٢ (١ + √٣ ت) / (١ - √٣ ت) (١ + √٣ ت)

= ٢ (١ + √٣ ت) / ١ + ٣

ع = $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

ض أن أ + ب ت = $\sqrt{\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}}$

بيع الطرفين (أ + ب ت)^{٢} = $\left(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}\right)$

أ^{٢} - ب^{٢} + ٢ أ ب ت = $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

أ^{٢} - ب^{٢} = $\frac{١}{٢}$ (١) ٢ أ ب = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (٢)

= $\frac{\sqrt{٣}}{٤\text{أ}}$ بالتعويض في (١)

أ^{٢} - $\frac{٣}{١٦\text{أ}^{٢}}$ = $\frac{١}{٢}$ بالضرب × ١٦ أ^{٢}

أ^{٤} - ٣ = ٨ أ^{٢} ١٦ أ^{٤} - ٨ أ^{٢} - ٣ = ٠

(أ^{٢} + ١) (٤ أ^{٢} - ٣) = ٠ ← ٤ أ^{٢} = ٣

أ^{٢} = $\frac{٣}{٤}$ ← أ = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

أ^{٢} = -١ ← أ^{٢} = $\frac{-١}{٤}$ (×)

= $\frac{\sqrt{٣}}{٤\text{أ}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٤ \times \pm\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$ = ± $\frac{١}{٢}$

$\sqrt{\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}}$ = ± $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}\text{ت}\right)$

= ± $\frac{١}{٢}$ (√٣ + ت)

رقم ١١:- إذا كان

$\sqrt{\frac{١٨ + \text{ت}}{٢ + ٣\text{ت}}}$ = س + ص ت

فأوجد قيمة كل من س ، ص الحـــــل

$\sqrt{\frac{(١٨ + \text{ت})(٢ - ٣\text{ت})}{(٢ - ٣\text{ت})(٢ + ٣\text{ت})}}$ = س + ص ت

$\sqrt{\frac{٣٦ - ٥٤\text{ت} + ٢\text{ت} + ٣}{٤ + ٩}}$ = س + ص ت

$\sqrt{\frac{٣٩ - ٥٢\text{ت}}{١٣}}$ = س + ص ت

$\sqrt{٣ - ٤\text{ت}}$ = س + ص ت بالتربيع

$\sqrt{(٣ - ٤\text{ت})^{٢}}$ = (س + ص ت)^{٢}

٣ - ٤ت = س^{٢} - ص^{٢} + ٢س ص ت

س^{٢} - ص^{٢} = ٣ (١)

٢س ص = - ٤ ومنها ص = $\frac{-٢}{\text{س}}$ (٢)

بالتعويض فى ١

س^{٢} - $\frac{٤}{\text{س}^{٢}}$ = ٣ ، س^{٤} - ٤ = ٣ س^{٢}

س^{٤} - ٣س^{٢} - ٤ = ٠

(س^{٢} - ٤)(س^{٢} + ١) = ٠

س^{٢} = ٤ س = ± ٢

س^{٢} = -١ (×)

ص = $\frac{-٢}{\text{س}}$ = $\frac{-٢}{\pm ٢}$ = ∓ ١

$\sqrt{٣ - ٤\text{ت}}$ = ± (٢ - ت)

رقم ١٢ :- أوجد في ك مجموعة الحل للمعادلة

$(1+ت)\,ع + (1-3ت)\,\bar{ع} = 2 + 2ت$

حيث $\bar{ع}$ مرافق ع

الحـــــــــــل

نفرض أن ع = س + ص ت فإن

$\bar{ع}$ = س − ص ت

$(1-ت)(س + ص ت) + (1-3ت)(س - ص ت) = 2 + 2ت$

س + ص ت + س ت − ص ت + س − ص ت

−3س ت − 3ص = 2 + 2ت

2س − 4ص − 2س ت = 2 + 2ت

−2س = 2 ⟵ $\boxed{س = -1}$

2س − 4ص = 2 ⟵ −2 − 4ص = 2

−4ص = 4 ⟵ $\boxed{ص = -1}$

ع = س + ص ت ⟵ ع = −1 − ت

رقم ١٣ :- أوجد مجموعة حل المعادلة

$ع^2 = 2\bar{ع}\,ت + 1$ حيث ع عدد مركب $\bar{ع}$ مرافق ع

الحـــــــــــل

ع = س + ص ت ، $\bar{ع}$ = س − ص ت

$ع^2 = 2ت\,\bar{ع} + 1$

$(س + ص ت)^2 = 2ت(س - ص ت) + 1$

$س^2 - ص^2 + 2س ص ت = 2س ت + 2ص + 1$

$س^2 - ص^2 = 2ص + 1$ (1)

2س ص = 2س (2)

2س ص − 2س = 0 ⟵ 2س (ص − 1) = 0

س = 0 ، ص = 1

بالتعويض في 1 : $س^2 - ص^2 = 2ص + 1$

$0 - ص^2 = 2ص + 1$ ⟵ $ص^2 + 2ص + 1 = 0$

$(ص + 1)^2 = 0$ ⟵ ص = −1 (0 ، −1)

$س^2 - ص^2 = 2ص + 1$ عند ص = 1

$س^2 - 1 = 2 + 1$ ⟵ $س^2 = 4$ ⟵ س = ± 2

(2 ، 1) ، (−2 ، 1) ، (0 ، −1)

ع = س + ص ت ⟵ ع = 2 + ت

ع = −2 + ت ، ع = −ت

∴ مجموعة الحل {−ت ، −2 + ت ، 2 + ت}

رقم ١٤ :- إذا كان ع = أ + ب ت

$س = \frac{ع + 2ت}{ع - ت}$ أوجد ع عندما يكون س عدداً حقيقياً

الحـــــــــــل

$س = \frac{أ + ب ت + 2ت}{أ + ب ت - ت}$ الضرب × المرافق

$س = \frac{[أ + (ب+2)ت][أ - (ب-1)ت]}{[أ + (ب-1)ت][أ - (ب-1)ت]}$

$س = \frac{أ^2 - أ(ب-1)ت + أ(ب+2)ت - (ب+2)(ب-1)ت^2}{أ^2 + (ب-1)^2}$

$س = \frac{أ^2 + (ب+2-ب+1)أت + ب^2 + ب - 2}{أ^2 + (ب-1)^2}$

$س = \frac{أ^2 + 3أت + ب^2 + ب - 2}{أ^2 + (ب-1)^2}$

$س = \frac{(أ^2 + ب^2 + ب - 2)}{أ^2 + (ب-1)^2} + \frac{3أت}{أ^2 + (ب-1)^2}$

∴ س عدد حقيقي إذا التخيلي ينعدم

$\frac{3أت}{أ^2 + (ب-1)^2} = 0$ ⟵ 3أ = 0 ⟵ $\boxed{أ = 0}$

ع = أ + ب ت ⟵ ع = ب ت

رقم ١٥ :- إذا كان $ع_1 ، ع_2 \in ك$ فأوجد مجموعة الحل للمعادلتين

$3ع_1 - ع_2 = 34$ (1)

$ع_1 - 2ع_2 = 3ت$

الحـــــــــــل

بضرب المعادلة الأولى × 2 وطرحها من الثانية

$6ع_1 - 2ع_2 = 68$

$\ominus\ ع_1 \oplus 2ع_2 = 3ت \ominus \oplus$

$5ع_1 = 65 + 10ت$

ع = ١٣ + ٢ت بالتعويض عن (١)

٣(١٣ + ٢ت) − ع = ٣٤

٣٩ + ٦ت − ع = ٣٤

ع = ٥ + ٦ت

رقم ١٦:- اثبت أن

(١ + √٣ ت)(١ + ت)(جتا θ + ت جا θ)

= ٢√٢ [جتا (٧ط/١٢ + θ) + ت جا (٧ط/١٢ + θ)]

الحل:- نحول (١ + √٣ ت) للصورة المثلثية وكذلك ١ + ت

١ + √٣ ت = ٢ (جتا ط/٣ + ت جا ط/٣)

١ + ت = √٢ (جتا ط/٤ + ت جا ط/٤)

الطرف الايمن (١ + √٣ ت)(١ + ت)(جتا θ + جا θ)

= ٢√٢ (جتا ط/٣ + ت جا ط/٣)(جتا ط/٤ + ت جا ط/٤) ×

(جتا θ + ت جا θ)

الأيمن = ٢√٢ [جتا (ط/٣ + ط/٤ + θ) +

+ ت جا (ط/٣ + ط/٤ + θ)]

= ٢√٢ [جتا (٧ط/١٢ + θ) + ت جا (٧ط/١٢ + θ)] =

الأيسر

رقم ١٧:- أوجد قيمة

(١ + ٢ت)^٥ − (١ − ٢ت)^٥

الحل

(١ + ٢ت)^٥ − (١ − ٢ت)^٥ = ٢ [مجموع الحدود الزوجية]

= ٢ [ح٢ + ح٤ + ح٦]

(١ + ٢ت)^٥ − (١ − ٢ت)^٥ = ٢ [ق٥،١ (٢ت) + ق٥،٣ (٢ت)^٣ + ق٥،٥ (٢ت)^٥]

= ٢ [٥ × ٢ت + ١٠ × ٨ت^٣ + ٣٢ت^٥]

= ٢ [١٠ت − ٨٠ت + ٣٢ت]

= ٢ × −٣٨ت = −٧٦ت

رقم ١٨:- احسب جـ إذا كان

(٢ − ت)(١ + ت)^٥ − (٥ + ت)(١ + ت) + جـ = صفر

حيث جـ ∈ ك.

الحل:-

(٢ − ت)(١ + ت)^٥ (١ + ت)^٢ (١ + ت) − (٥ + ت) × (١ + ت) = −جـ

(٢ − ت)(٢ت)(١ + ت) − (٥ + ت)(١ + ت) = −جـ

−٤(٢ − ت)(١ + ت) − (٥ + ت)(١ + ت) = −جـ

٤(٢ − ت)(١ + ت) + (٥ + ت)(١ + ت) = جـ

(١ + ت)(٨ − ٤ت + ٥ + ت) = جـ

(١ + ت)(١٣ − ٣ت) = جـ

١٣ − ٣ت + ١٣ت + ٣ = جـ

جـ = ١٦ − ١٠ت

رقم ١٩:- إحسب مقياس وسعة كل من العددين المركبين ع١ = √٣ − ت ، ع٢ = ١ − ت

ومن ذلك ضع ع = ع١/ع٢ على الصورة المثلثية

(ب) − استخدم النتيجة السابقة في حساب

جتا ط/١٢ ، جا ط/١٢

الحل

ع١ = √٣ − ت ل = √٤ = ٢

نضع في الربع الرابع

جتا θ = √٣/٢ ، جا θ = −١/٢

θ = ٣٦٠ − ٣٠ = ٣٣٠ط/١٨٠ = ١١ط/٦

$ع_1 = ٢(جتا \frac{١١ط}{٦} + ت جا \frac{١١ط}{٦})$

المقياس = ٢ والسعة $\frac{١١ط}{٦}$

$ع_2 = ١ - ت$ ، $ل = \sqrt{٢}$

$جتا\ \theta = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $جا\ \theta = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$

$\theta = ٣٦٠ - ٤٥ = \frac{٣١٥ط}{١٨٠} = \frac{٧ط}{٤}$

$ع_2 = \sqrt{٢}(جتا \frac{٧ط}{٤} + ت جا \frac{٧ط}{٤})$

المقياس = $\sqrt{٢}$ والسعة $\frac{٧ط}{٤}$

$ع = \frac{ع_1}{ع_2}$

$ع = \frac{٢[جتا \frac{١١ط}{٦} + ت جا \frac{١١ط}{٦}]}{\sqrt{٢}\ جتا[\frac{٧ط}{٤} + ت جا \frac{٧ط}{٤}]}$

$ع = \sqrt{٢}[جتا(\frac{١١ط}{٦} - \frac{٧ط}{٤}) + ت جا(\frac{١١ط}{٦} - \frac{٧ط}{٤})]$

$ع = \sqrt{٢}[جتا \frac{ط}{١٢} + ت جا \frac{ط}{١٢}]$ ← (١)

لكن $ع = \frac{ع_1}{ع_2}$ $ع = \frac{\sqrt{٣} - ت}{١ - ت}$ بالضرب في المرافق للمقام

$ع = \frac{(\sqrt{٣} - ت)(١ + ت)}{(١ - ت)(١ + ت)}$

$\frac{\sqrt{٣} + \sqrt{٣}ت - ت + ١}{}$

$ع = \frac{(\sqrt{٣} + ١)}{٢} + \frac{(\sqrt{٣} - ١)ت}{٢}$ (٢)

من ١ ، ٢ نجد أن

$\sqrt{٢}(جتا \frac{ط}{١٢} + ت جا \frac{ط}{١٢}) =$

$\frac{\sqrt{٣} + ١}{٢} + \frac{(\sqrt{٣} - ١)ت}{٢}$ بالضرب في $\sqrt{٢}$ للطرفين

$جتا \frac{ط}{١٢} + ت جا \frac{ط}{١٢} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}} + \frac{(\sqrt{٣} - ١)ت}{٢\sqrt{٢}}$

$جتا \frac{ط}{١٢} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$

$جا \frac{ط}{١٢} = \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$

رقم ٢٠ :- عين مقياس وسعة العدد

$ع = \frac{١ + ت ظا\theta}{١ - ت ظا\theta}$ حيث $\theta \neq \frac{ط}{٢} + ك ط$ ،

ك ∈ ص

الحـــــــــل

$ع = \frac{١ + ت \frac{جا\theta}{جتا\theta}}{١ - ت \frac{جا\theta}{جتا\theta}}$ بالضرب × جتا θ

$ع = \frac{جتا\theta + ت جا\theta}{جتا\theta - ت جا\theta}$ بالضرب × مرافق المقـ

$ع = \frac{(جتا\theta + ت جا\theta)(جتا\theta + ت جا\theta)}{}$

$$ع = \frac{جتا^2 \theta - جا^2 \theta + ٢ ت جا \theta جتا \theta}{جتا^2 \theta + جا^2 \theta}$$

$$ع = \frac{جتا ٢\theta + ت جا ٢\theta}{١}$$

ع = جتا ٢θ + ت جا ٢θ

المقياس = ١ ، والسعة ٢θ

رقم ٢١ :- إذا كان $ع_١$ = جتا θ - ت جا θ

$ع_٢$ = ٥ (جا ٢θ + ت جتا ٢θ)

حيث θ]$\frac{ط}{٢}$ ، ط[، جا θ = $\frac{٣}{٥}$ فاوجد $\frac{ع_٢}{ع_١}$

علي الصورة الجبرية ؟ الحـــــــــل

$ع_١$ = جتا (٢ط - θ) + ت جا (٢ط - θ)

$ع_٢$ = ٥ [جتا ($\frac{ط}{٢}$ - ٢θ) + ت جا ($\frac{ط}{٢}$ - ٢θ)]

$$\frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{٥[جتا (\frac{ط}{٢} - ٢\theta) + ت جا(\frac{ط}{٢} - ٢\theta)]}{جتا (٢ط - \theta) + ت جا (٢ط - \theta)}$$

$$\frac{ع_٢}{ع_١} = ٥[جتا(\frac{ط}{٢} - ٢\theta - ٢ط + \theta) + ت جا(\frac{ط}{٢} - ٢\theta - ٢ط + \theta)]$$

$$\frac{ع_٢}{ع_١} = ٥[جتا(\frac{-٣ط}{٢} - \theta) + ت جا(\frac{-٣ط}{٢} - \theta)]$$

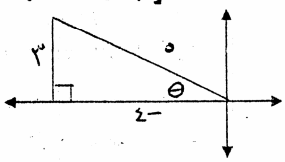
يتم إضافة ٢ط إلي السعة فيكون

$$\frac{ع_٢}{ع_١} = ٥[جتا(\frac{٣ط}{٢} - \theta) + ت جا(\frac{٣ط}{٢} - \theta)]$$

$$\frac{ع_٢}{ع_١} = ٥[جتا(\frac{ط}{٢} - \theta) + ت جا(\frac{ط}{٢} - \theta)]$$

= ٥ [جا θ + ت جتا θ]

بالتعويض نجد أن



$$\frac{ع_٢}{ع_١} = ٥ [\frac{٣}{٥} + ت \times \frac{-٤}{٥}] = ٣ - ٤ ت$$

رقم ٢٢:- إثبت أن

$$\frac{(١ + ت\sqrt{٣})^{٥} \times (جتا \theta + ت جا \theta)}{(-١ + ت)^{٤}}$$

$$= ٨[جتا(\frac{٢ط}{٣} + \theta) + ت جا (\frac{٢ط}{٣} + \theta)]$$

الحـــــــــل

$١ + \sqrt{٣}\, ت = (١ ، \sqrt{٣})$ يقع في الربع الأول

ل = ٢ جتا θ = $\frac{١}{٢}$ ، جا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore \theta = \frac{٦٠ ط}{١٨٠} = \frac{ط}{٣}$

$(١ + \sqrt{٣}\, ت) = ٢[جتا \frac{ط}{٣} + ت جا \frac{ط}{٣}]$

$(١ + \sqrt{٣}\, ت)^{٥} = [٢(جتا \frac{ط}{٣} + ت جا \frac{ط}{٣}]^{٥}$

$(١ + \sqrt{٣}\, ت)^{٥} = ٣٢[جتا \frac{٥ط}{٣} + ت جا \frac{٥ط}{٣}]$ ①

$-١ + ت = (-١ ، ١)$ ل = $\sqrt{٢}$ يقع في الربع الثاني

$\theta = ١٨٠ - ٤٥ = \frac{١٣٥ط}{٤} = \frac{٣ط}{٤}$

$(-١ + ت) = \sqrt{٢}\left(جتا\frac{٣ط}{٤} + ت جا\frac{٣ط}{٤}\right)$

$(-١ + ت)^٤ = \left[\sqrt{٢}\left(جتا\frac{٣ط}{٤} + جا\frac{٣ط}{٤}\right)\right]^٤$

$(-١ + ت)^٤ = ٤(جتا ٣ط + ت جا ٣ط)$ (٢) نفس ١ و ٢

$٣٢\left[جتا\frac{٥ط}{٣} + ت جا\frac{٥ط}{٣}\right]$

الطرف الأيمن $= \frac{\quad}{٤(جتا ٣ط + ت جا ٣ط)} \times (جتا\theta + ت جا\theta)$

الأيمن $= ٨\left[جتا\left(\frac{٥ط}{٣} + \theta - ٣ط\right) + ت جا\left(\frac{٥ط}{٣} + \theta - ٣ط\right)\right]$

$= ٨\left[جتا\left(\frac{-٤ط}{٣} + \theta\right) + ت جا\left(\frac{-٤ط}{٣} + \theta\right)\right]$

بإضافة ٢ط إلى السعة نجد أن

$= ٨\left[جتا\left(٢ط - \frac{٤ط}{٣} + \theta\right) + ت جا\left(٢ط - \frac{٤ط}{٣} + \theta\right)\right]$

$= ٨\left[جتا\left(\frac{٢ط}{٣} + \theta\right) + ت جا\left(\frac{٢ط}{٣} + \theta\right)\right] =$ الأيسر

رقم ٢٣ :- ضع العدد $ع = \frac{١ + ت\sqrt{٣}}{١ + ت}$ على الصورة المثلثية ثم

اثبت أن $\left(\frac{١ + ت\sqrt{٣}}{١ + ت}\right)^٦ = ٨ت$

الحـــــــــــل

نحول كل من البسط والمقام إلى الصورة المثلثية

$١ + \sqrt{٣}ت = (١، \sqrt{٣})$ يقع في الربع الأول

$جا\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\theta = \frac{٦ط}{١٨٠} = \frac{ط}{٣}$

$(١ + \sqrt{٣}ت) = ٢\left(جتا\frac{ط}{٣} + ت جا\frac{ط}{٣}\right)$

$١ + ت = \sqrt{٢}\left(جتا\frac{ط}{٤} + ت جا\frac{ط}{٤}\right)$

$ع = \frac{٢\left(جتا\frac{ط}{٣} + ت جا\frac{ط}{٣}\right)}{\sqrt{٢}\left(جتا\frac{ط}{٤} + ت جا\frac{ط}{٤}\right)}$

$ع = \sqrt{٢}\left[جتا\left(\frac{ط}{٣} - \frac{ط}{٤}\right) + ت جا\left(\frac{ط}{٣} - \frac{ط}{٤}\right)\right]$

$ع = \sqrt{٢}\left[جتا\frac{ط}{١٢} + ت جا\frac{ط}{١٢}\right]$

$ع^٦ = \left[\sqrt{٢}\left(جتا\frac{ط}{١٢} + ت جا\frac{ط}{١٢}\right)\right]^٦$

$ع^٦ = ٨\left(جتا\frac{ط}{٢} + ت جا\frac{ط}{٢}\right)$

$\left(\frac{١ + ت\sqrt{٣}}{١ + ت}\right)^٦ = ٨(٠ + ت) = ٨ت$

رقم ٢٤ :- إذا كان $ع = جتا\frac{٢ط}{٣} + ت جا\frac{٢ط}{٣}$

$ع_٢ = جتا\frac{ط}{٦} + ت جا\frac{ط}{٦}$ فاوجد المقدار

والسعة الأساسية للعدد $\left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right)^٧$ حيث

$$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{\text{جتا}\frac{٢ط}{٣} + ت\ \text{جا}\frac{٢ط}{٣}}{\text{جتا}\frac{ط}{٦} + ت\ \text{جا}\frac{ط}{٦}}$$

$$\frac{ع_1}{ع_2} = \text{جتا}\left(\frac{٢ط}{٣} - \frac{ط}{٦}\right) + ت\ \text{جا}\left(\frac{٢ط}{٣} - \frac{ط}{٦}\right)$$

$$\frac{ع_1}{ع_2} = \text{جتا}\frac{ط}{٢} + ت\ \text{جا}\frac{ط}{٢}$$

$$\left[\frac{ع_1}{ع_2}\right]^{٧} = \left[\text{جتا}\frac{ط}{٢} + ت\ \text{جا}\frac{ط}{٢}\right]^{٧}$$

$$= \text{جتا}\frac{٧ط}{٢} + ت\ \text{جا}\frac{٧ط}{٢}$$ بطرح ٢ط

$$= \text{جتا}\frac{٣ط}{٢} + ت\ \text{جا}\frac{٣ط}{٢}$$

المقياس = ١ ، والسعة = $\frac{٣ط}{٢}$

قد د ٢ :- إذا كان $ع_1 = ١ - \sqrt{٣}\ ت$

$ع_2 = \text{جتا}\ \theta + ت\ \text{جا}\ \theta$ ، $ع_3 = \left(\text{جتا}\frac{\theta}{٢} - ت\ \text{جا}\frac{\theta}{٢}\right)^{٢}$

كانت $ع = \frac{ع_1 ع_2}{ع_3}$ حيث $ت^{٢} = -١$

وجد المقياس والسعة الأساسية للعدد ع ثم أوجد الجذرين التربيعين للعدد ع عندما $\theta = \frac{ط}{٦}$

الحـــــــــــــل

$ع_1 = ١ - \sqrt{٣}\ ت$ ثم نحوله للصورة المثلثية (الربع الرابع)

$ل = \sqrt{١ + ٣} = \sqrt{٤} = ٢$

$ع_1 = ٢\left(\text{جتا}\frac{٥ط}{٣} + ت\ \text{جا}\frac{٥ط}{٣}\right)$

$ع_2 = \text{جتا}\theta + ت\ \text{جا}\ \theta$

$ع_3 = \left(\text{جتا}\frac{\theta}{٢} - ت\ \text{جا}\frac{\theta}{٢}\right)^{٢}$

$ع_3 = \left(\text{جتا}\frac{-\theta}{٢} + ت\ \text{جا}\frac{-\theta}{٢}\right)^{٢}$

$ع_3 = \text{جتا}(-\theta) + ت\ \text{جا}(-\theta)$

$$ع = \frac{ع_1 ع_2}{ع_3}$$

$$ع = \frac{٢\left(\text{جتا}\frac{٥ط}{٣} + ت\ \text{جا}\frac{٥ط}{٣}\right)\left(\text{جتا}\theta + ت\ \text{جا}\theta\right)}{\text{جتا}(-\theta) + ت\ \text{جا}(-\theta)}$$

$$ع = ٢\left[\text{جتا}\left(\frac{٥ط}{٣} + \theta + \theta\right) + ت\ \text{جا}\left(\frac{٥ط}{٣} + \theta + \theta\right)\right]$$

$$ع = ٢\left[\text{جتا}\left(\frac{٥ط}{٣} + ٢\theta\right) + ت\ \text{جا}\left(\frac{٥ط}{٣} + ٢\theta\right)\right]$$

المقياس = ٢ ، والسعة = $\frac{٥ط}{٣} + ٢\theta$

عند $\theta = \frac{ط}{٦}$ يكون

$$ع = ٢\left[\text{جتا}\left(\frac{٥ط}{٣} + \frac{ط}{٣}\right) + ت\ \text{جا}\left(\frac{٥ط}{٣} + \frac{ط}{٣}\right)\right]$$

$$ع = ٢\left[\text{جتا}\ ٢ط + ت\ \text{جا}\ ٢ط\right]$$

وبطرح ٢ط من السعة يكون

$$ع = ٢\left[\text{جتا}\ ٠ + ت\ \text{جا}\ ٠\right] = ٢(١ + ٠) = ٢$$ ①

$\therefore$ ع = ٢

$\therefore$ $\sqrt{ع} = \pm\sqrt{٢}$

ويمكن الحصول عليها باستخدام نظرية دي موافر من الآتي :-

$ع^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}\,[\text{جتا}\,٢ط ر + ت\,\text{جا}\,٢ط ر]^{\frac{١}{٢}}$

$ع^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}\,[\text{جتا}\,\frac{٢ط ر}{٢} + ت\,\text{جا}\,\frac{٢ط ر}{٢}]$

$ع^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}\,[\text{جتا}\,ط ر + ت\,\text{جا}\,ط ر]$ عند ر = ٠

الجذر الأول $= \sqrt{٢}\,[\text{جتا}\,٠ + ت\,\text{جا}\,٠]$

$= \sqrt{٢}\,(١ + ٠) = \sqrt{٢}$

عند ر = ١

الجذر الثاني $= \sqrt{٢}\,[\text{جتا}\,ط + ت\,\text{جا}\,ط]$

$= \sqrt{٢}\,[-١ + ٠] = -\sqrt{٢}$

الجذران هما $\pm\sqrt{٢}$

رقم ٢٦ :- ضع العدد (-١ - ت) علي الصورة المثلثية ثم أوجد $\sqrt[٣]{-١ - ت}$

الحـــــــــل

-١ - ت = (-١ ، -١) في الربع الثالث

ل = $\sqrt{٢}$ ، جتاθ = -١ / $\sqrt{٢}$ ، جاθ = -١/$\sqrt{٢}$

$\theta = ١٨٠ + ٤٥ = \frac{٢٢٥ط}{١٨٠} = \frac{٥ط}{٤}$

$(-١ - ت) = \sqrt{٢}\,(\text{جتا}\,\frac{٥ط}{٤} + ت\,\text{جا}\,\frac{٥ط}{٤})$

$(-١ - ت)^{\frac{١}{٣}} = [\sqrt{٢}\,(\text{جتا}\,\frac{٥ط}{٤} + ت\,\text{جا}\,\frac{٥ط}{٤})]^{\frac{١}{٣}}$

$(-١ - ت)^{\frac{١}{٣}} = (\sqrt{٢})^{\frac{١}{٣}}\,[\text{جتا}\,\frac{٥ط}{٤} + ٢ط ر + ت\,\text{جا}\,\frac{٥ط}{٤} + ٢ط ر]^{\frac{١}{٣}}$

$= (٢^{\frac{١}{٢}})^{\frac{١}{٣}}\,[\text{جتا}\,\frac{٥ط + ٨ط ر}{٤} + ت\,\text{جا}\,\frac{٥ط + ٨ط ر}{٤}]^{\frac{١}{٣}}$

$= ٢^{\frac{١}{٦}}\,[\text{جتا}\,\frac{٥ط + ٨ط ر}{١٢} + ت\,\text{جا}\,\frac{٥ط + ٨ط ر}{١٢}]$

عند ر = ٠

الجذر الأول $= ٢\,[\text{جتا}\,\frac{٥ط}{١٢} + ت\,\text{جا}\,\frac{٥ط}{١٢}]^{\frac{١}{٦}}$

عند ر = ١

الجذر الثاني $= ٢\,[\text{جتا}\,\frac{١٣ط}{١٢} + ت\,\text{جا}\,\frac{١٣ط}{١٢}]^{\frac{١}{٦}}$

عند ر = ٢

الجذر الثالث $= ٢\,[\text{جتا}\,\frac{٢١ط}{١٢} + ت\,\text{جا}\,\frac{٢١ط}{١٢}]^{\frac{١}{٦}}$

رقم ٢٧ :- أوجد بالصورة المثلثية مجموعة حل المعادلة

$ع^{٤} + ١٦ت = ٠$

الحـــــــــل

$ع^{٤} = -١٦ت = (٠ ، -١٦)$

يقع على محور الصادات السالب

$\theta = \frac{٣ط}{٢}$ ، ل = ١٦

$ع^{٤} = ١٦(\text{جتا}\,\frac{٣ط}{٢} + ت\,\text{جا}\,\frac{٣ط}{٢})$

$ع = ٢(\text{جتا}\,\frac{٣ط}{٢} + ت\,\text{جا}\,\frac{٣ط}{٢})^{\frac{١}{٤}}$

$ع = ٢(\text{جتا}\,\frac{٣ط + ٤ط ر}{٢} + ت\,\text{جا}\,\frac{٣ط + ٤ط ر}{٢})^{\frac{١}{٤}}$

$ع = ٢(\text{جتا}\,\frac{٣ط + ٤ط ر}{٨} + ت\,\text{جا}\,\frac{٣ط + ٤ط ر}{٨})$

عند ر = ٠ يكون الجذر الأول =

$(\text{جتا}\,\frac{٣ط}{٨} + ت\,\text{جا}\,\frac{٣ط}{٨})$

عند ر = ١ الجذر الثاني $= \text{جتا}\,\frac{٧ط}{٨} + ت\,\text{جا}\,\frac{٧ط}{٨}$

عند ر=٢ الجذر الثالث =

$$٢\left[\text{جتا}\frac{١١ط}{٨} + ت\ \text{جا}\frac{١١ط}{٨}\right]$$

عند ر= ٣ الجذر الرابع =

$$٢\left[\text{جتا}\frac{١٥ط}{٨} + ت\ \text{جا}\frac{١٥ط}{٨}\right]$$

رقم ٢٨:- أوجد على الصورة المثلثية القيم المختلفة

للعدد ج = $(١+ت)^{\frac{٤}{٣}}$

الحـــــــــــــل

$$١+ت = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{ط}{٤} + ت\ \text{جا}\frac{ط}{٤}\right)$$

$$(١+ت)^{٤} = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{ط}{٤} + ت\ \text{جا}\frac{ط}{٤}\right)^{٤}$$

$$(١+ت)^{٤} = ٤\left(\text{جتا}\ ط + ت\ \text{جا}\ ط\right)$$

$$(١+ت)^{\frac{٤}{٣}} = ٤^{\frac{١}{٣}}\left(\text{جتا}\ ط + ت\ \text{جا}\ ط\right)^{\frac{١}{٣}}$$

$$(١+ت)^{\frac{٤}{٣}} = \sqrt[٣]{٤}\left(\text{جتا}\ ط + ٢ط\ ر + ت\ \text{جا}\ ط + ٢ط\ ر\right)^{\frac{١}{٣}}$$

$$(١+ت)^{\frac{٤}{٣}} = \sqrt[٣]{٤}\left(\text{جتا}\frac{ط + ٢ط\ ر}{٣} + ت\ \text{جا}\frac{ط + ٢ط\ ر}{٣}\right)$$

ر= ٠ الجذر الاول = $\sqrt[٣]{٤}\left[\text{جتا}\frac{ط}{٣} + ت\ \text{جا}\frac{ط}{٣}\right]$

ر= ١ الجذر الثاني = $\sqrt[٣]{٤}\left(\text{جتا}\ ط + ت\ \text{جا}\ ط\right)$

ر=٢ الجذر الثالث = $\sqrt[٣]{٤}\left(\text{جتا}\frac{٥ط}{٣} + ت\ \text{جا}\frac{٥ط}{٣}\right)$

---

(٢٩) إذا كان ع = جتا θ + ت جا θ

$ع_١ = \frac{١+ع}{١-ع}$ فأثبت أن ع = ت ظا $\frac{θ}{٢}$

الحـــــــل

$$ع_١ = \frac{١+\text{جتا}\ θ + ت\ \text{جا}\ θ}{١-\text{جتا}\ θ - ت\ \text{جا}\ θ}$$

$$ع_١ = \frac{١+٢\text{جتا}^{٢}\frac{θ}{٢} - ١ + ٢ت\ \text{جا}\frac{θ}{٢}\ \text{جتا}\frac{θ}{٢}}{١-\left(١-٢\text{جا}^{٢}\frac{θ}{٢}\right) - ٢ت\ \text{جا}\frac{θ}{٢}\ \text{جتا}\frac{θ}{٢}}$$

$$ع_١ = \frac{٢\ \text{جتا}^{٢}\frac{θ}{٢} + ٢ت\ \text{جا}\frac{θ}{٢}\ \text{جتا}\frac{θ}{٢}}{٢\ \text{جا}^{٢}\frac{θ}{٢} - ٢ت\ \text{جا}\frac{θ}{٢}\ \text{جتا}\frac{θ}{٢}}$$

$$ع_١ = \frac{٢\ \text{جتا}\frac{θ}{٢}\left[\text{جتا}\frac{θ}{٢} + ت\ \text{جا}\frac{θ}{٢}\right]}{٢\ \text{جا}\frac{θ}{٢}\left[\text{جا}\frac{θ}{٢} - ت\ \text{جتا}\frac{θ}{٢}\right]}$$

$$ع_١ = \text{ظتا}\frac{θ}{٢}\left[\frac{\text{جتا}\frac{θ}{٢} + ت\ \text{جا}\frac{θ}{٢}}{\text{جا}\frac{θ}{٢} - ت\ \text{جتا}\frac{θ}{٢}}\right]$$

بضرب البسط والمقام × ت

$$ع_١ = \frac{ت\ \text{ظتا}\frac{θ}{٢}\left(\text{جتا}\frac{θ}{٢} + ت\ \text{جا}\frac{θ}{٢}\right)}{ت\left(\text{جا}\frac{θ}{٢} - ت\ \text{جتا}\frac{θ}{٢}\right)}$$

$$ع_1 = \frac{ت\ ظتا\frac{\theta}{2}\left(جتا\frac{\theta}{2} + ت\ جا\frac{\theta}{2}\right)}{ت\ جا\frac{\theta}{2} - ت\ جتا\frac{\theta}{2}}$$

$$ع_1 = \frac{ت\ ظتا\frac{\theta}{2}\left(جتا\frac{\theta}{2} + ت\ جا\frac{\theta}{2}\right)}{\left(جتا\frac{\theta}{2} + ت\ جا\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$ع_1 = ت\ ظتا\frac{\theta}{2}$$

رقم ٣٠:- إذا كان $ص = \left(\frac{أ^2}{1 + ت\sqrt{3}}\right)$ ، $ع = \frac{أ^2}{1 - ت\sqrt{3}}$

فاثبت أن $(ص - ع)^{م} + 3\ أ^{م}\ أ^{م} = 0$

حيث م عدد صحيح موجب فردي

الحـــــــــل

$$ص = \frac{أ^2\ (1 - \sqrt{3}\ ت)}{(1 + \sqrt{3}\ ت)\ (1 - \sqrt{3}\ ت)} = \frac{أ^2(1 - \sqrt{3}\ ت)}{1 + 3}$$

$ص = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\ ت)$ بالمثل $ع = \frac{1}{2}أ\ (1 + \sqrt{3}\ ت)$

وذلك بالضرب في المرافق وبالطرح نجد أن

$$ص - ع = \frac{1}{2}أ\ (1 - \sqrt{3}\ ت) - \frac{1}{2}أ\ (1 + \sqrt{3}\ ت)$$

$$ص - ع = \frac{1}{2}أ\ (1 - \sqrt{3}\ ت - 1 - \sqrt{3}\ ت) = -\sqrt{3}\ أ\ ت$$

بتربيع الطرفين

$$(ص - ع)^2 = 3\ أ^2\ ت^2 = -3\ أ^2$$

$$(ص - ع)^{م} = (-3\ أ^2)^{م} = -3^{م}\ أ^{2م}$$

$$\therefore (ص - ع)^{م} + 3^{م}\ أ^{2م} = صفر$$

رقم ٣١ :- باستخدام نظرية ديموافر أوجد قيمة $\frac{جا\ 5س}{جا\ س}$ بدلالة جتا س .

الحـــــــــل

جتا 5س + ت جا 5س = (جتا س + ت جا س)^5

ثم نفك الطرف الأيسر بذات الحدين كالآتي :-

جتا 5س + ت جا 5س = جتا^{5}س + $^5ق_1$ ت جا س جتا^{4}س -

$^5ق_2$ ت^2 جا^{2}س جتا^{3}س + $^5ق_3$ ت^3 جا^{3}س جتا^{2}س +

$^5ق_4$ ت^4 جا^{4}س جتا س + ت^5 جا^{5}س = جتا^{5}س

+ 5ت جا س جتا^{4}س − 10 جا^{2}س جتا^{3}س

− 10ت جا^{3}س جتا^{2}س + 5جا^{4}س جتا س + ت جا^{5}س

بمساواة الجزء التخيلي في الأيمن بالجزء التخيلي في الأيسر

جا 5س = 5جا س جتا^{4}س − 10جا^{3}س جتا^{2}س + جا^{5}س

بالقسمة علي جا س

$$\frac{جا\ 5س}{جا\ س} = 5\ جتا^4س - 10\ جا^2س\ جتا^2س + جا^4س$$

$$= 5\ جتا^4س - 10\ جتا^2س\ (1 - جتا^2س) + (1 - جتا^2س)^2$$

$$= 5\ جتا^4س - 10\ جتا^2س + 10\ جتا^4س + 1 - 2\ جتا^2س + جتا^4س$$

$$\frac{جا\ 5س}{جا\ س} = 16\ جتا^4س - 12\ جتا^2س + 1$$

رقم ٣٢:- أوجد $(1 + ت)^{ن}$ علي كل من الصورة الجبرية والمثلثية واستنتج من ذلك قيمتي

٢ : ن اذا كان :-

$$\text{أ} + \text{ب ت} = (\text{١} + \text{ت})^{\text{ن}}$$

الحل

$$\text{أ} + \text{ب ت} = \sqrt{\text{٢}}\left[\text{جتا}\frac{\text{ن ط}}{\text{٤}} + \text{ت جا}\frac{\text{ن ط}}{\text{٤}}\right]$$

$$(\text{أ} + \text{ب ت})^{\text{ن}} = (\sqrt{\text{٢}})^{\text{ن}}\left[\text{جتا}\frac{\text{ن ط}}{\text{٤}} + \text{ت جا}\frac{\text{ن ط}}{\text{٤}}\right] \quad (\text{١})$$

$$(\text{أ} - \text{ب ت})^{\text{ن}} = \text{١} + \text{ق}_{\text{١}}^{\text{ن}}\text{ت} + \text{ق}_{\text{٢}}^{\text{ن}}\text{ت}^{\text{٢}} + \text{ق}_{\text{٣}}^{\text{ن}}\text{ت}^{\text{٣}} + \text{ق}_{\text{٤}}^{\text{ن}}\text{ت}^{\text{٤}}$$

$$(\text{أ} + \text{ب ت})^{\text{ن}} = \text{١} + \text{ق}_{\text{١}}^{\text{ن}}\text{ت} - \text{ق}_{\text{٢}}^{\text{ن}} - \text{ق}_{\text{٣}}^{\text{ن}}\text{ت} + \text{ق}_{\text{٤}}^{\text{ن}}$$

$$(\sqrt{\text{٢}})^{\text{ن}}\left[\text{جتا}\frac{\text{ن ط}}{\text{٤}} + \text{ت جا}\frac{\text{ن ط}}{\text{٤}}\right] = \text{١} + \text{ق}_{\text{١}}^{\text{ن}}\text{ت}$$

$$\text{ق}_{\text{٢}}^{\text{ن}} - \text{ق}_{\text{٣}}^{\text{ن}}\text{ت} + \text{ق}_{\text{٤}}^{\text{ن}} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{أ} + \text{ب ت} = \text{جتا}\frac{\text{ن ط}}{\text{٤}} = \text{١} - \frac{\text{ق}_{\text{٢}}^{\text{ن}}}{\text{٢}} + \frac{\text{ق}_{\text{٤}}^{\text{ن}}}{\text{٤}} - \frac{\text{ق}_{\text{٦}}^{\text{ن}}}{\text{٦}} + \frac{\text{ق}_{\text{٨}}^{\text{ن}}}{\text{٨}} - \ldots\ldots$$

$$\text{ب} = \text{جا}\frac{\text{ن ط}}{\text{٤}} = \text{ق}_{\text{١}}^{\text{ن}} - \frac{\text{ق}_{\text{٣}}^{\text{ن}}}{\text{٣}} + \frac{\text{ق}_{\text{٥}}^{\text{ن}}}{\text{٥}} - \frac{\text{ق}_{\text{٧}}^{\text{ن}}}{\text{٧}} + \ldots\ldots$$

[illegible] س = جتا ٢٠ + ت جا ٢٠

ص = جتا ١٥ + ت جا ١٥

[illegible] الصورة أ + ب ت للعدد المركب س^٣ ص^٤

الحل

$$\text{س}^{\text{٣}} = (\text{جتا ٢٠} + \text{ت جا ٢٠})^{\text{٣}}(\text{جتا ١٥} + \text{ت جا ١٥})^{\text{٤}}$$

$$= (\text{جتا ٦٠} + \text{ت جا ٦٠})(\text{جتا ٦٠} + \text{ت جا ٦٠})$$

$$= \text{جتا ١٢٠} + \text{ت جا ١٢٠}$$

[illegible]

[illegible] س + ص ت = ١ + ب ت

[illegible] = ١ (ب^٢ − أ^٢)

الحل

الحل

$$\sqrt[\text{٥}]{\text{س} + \text{ص ت}} = \text{أ} + \text{ب ت}$$

$$(\text{س} + \text{ص ت}) = (\text{أ} + \text{ب ت})^{\text{٥}}$$

$$\text{س} + \text{ص ت} = \text{أ}^{\text{٥}} + \text{ق}_{\text{١}}^{\text{٥}}\text{ب ت أ}^{\text{٤}} + \text{ق}_{\text{٢}}^{\text{٥}}\text{ب}^{\text{٢}}\text{ت}^{\text{٢}}\text{أ}^{\text{٣}}$$

$$+ \text{ق}_{\text{٣}}^{\text{٥}}\text{ب}^{\text{٣}}\text{ت}^{\text{٣}}\text{أ}^{\text{٢}} + \text{ق}_{\text{٤}}^{\text{٥}}\text{ب}^{\text{٤}}\text{ت}^{\text{٤}}\text{أ} + \text{ب}^{\text{٥}}\text{ت}^{\text{٥}}$$

$$\text{س} + \text{ص ت} = \text{أ}^{\text{٥}} + \text{٥ب أ}^{\text{٤}}\text{ت} - \text{١٠ب}^{\text{٢}}\text{أ}^{\text{٣}}$$

$$- \text{١٠ب}^{\text{٣}}\text{أ}^{\text{٢}}\text{ت} + \text{٥ب}^{\text{٤}}\text{أ ت}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٥}}\text{ت}^{\text{٥}}$$

س = أ^٥ − ١٠ ب^٢ أ^٣ + ٥ ب^٤ أ بالقسمة على أ

$$\frac{\text{س}}{\text{أ}} = \text{أ}^{\text{٤}} - \text{١٠ب}^{\text{٢}}\text{أ}^{\text{٢}} + \text{٥ب}^{\text{٤}} \quad (\text{١})$$

ص = ٥ب أ^٤ − ١٠ ب^٣ أ^٢ + ب^٥ بالقسمة على ب

$$\frac{\text{ص}}{\text{ب}} = \text{٥أ}^{\text{٤}} - \text{١٠ب}^{\text{٢}}\text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٤}} \quad (\text{٢})$$

من ١ ، ٢ نجد أن

$$\frac{\text{س}}{\text{أ}} - \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = \text{٤ب}^{\text{٤}} - \text{٤أ}^{\text{٤}} = \text{٤}(\text{ب}^{\text{٤}} - \text{أ}^{\text{٤}})$$

رقم ٣٥ :- إذا كان س ، ص ∈ ك فأثبت ان

$$|\text{س} + \text{ص}|^{\text{٢}} + |\text{س} - \text{ص}|^{\text{٢}} = \text{٢}(|\text{س}|^{\text{٢}} + |\text{ص}|^{\text{٢}})$$

الحل

نفرض أن س = أ + ب ت

ص = جـ + د ت

|س + ص| معناه طول العدد المركب ز (مثلا)

س + ص = (أ + جـ) + (ب + د) ت

$$|\text{س} + \text{ص}| = \sqrt{(\text{أ} + \text{جـ})^{\text{٢}} + (\text{ب} + \text{د})^{\text{٢}}}$$

$$|\text{س} + \text{ص}|^{\text{٢}} = (\text{أ} + \text{جـ})^{\text{٢}} + (\text{ب} + \text{د})^{\text{٢}}$$

س − ص = (أ − جـ) + (ب − د) ت

|س − ص| = √((أ − جـ)² + (ب − د)²)

|س − ص|² = (أ − جـ)² + (ب − د)² (٢)

الطرف الأيمن = |س + ص|² + |س − ص|²

= (أ + جـ)² + (ب + د)² + (أ − جـ)² + (ب − د)²

= ٢أ² + ٢جـ² + ٢ب² + ٢د²

= ٢(أ² + جـ² + ب² + د²)

= ٢(|س|² + |ص|²) = الأيسر .

رقم ٣٦:- إذا كان د + هـ ت أحد جذرى المعادلة أ س٢ + ب س + جـ = ٠ فإثبت أن أ هـ٢ = أ د٢ + ب د + جـ

الحل

الجذر المعطى هو د + هـ ت

الجذر الآخر هو د − هـ ت

مجموع الجذرين = −ب/أ ⇐ ٢د = −ب/أ

ب = −٢أد (١)

حاصل الضرب = جـ/أ ⇐ (د + هـ ت)(د − هـ ت) = جـ/أ

د² + هـ² = جـ/أ ⇐ أ د² + أ هـ² = جـ

أ هـ² = جـ − أ د² (٢)

الأيسر = أ د² + ب د + جـ = أ د² − ٢أ د² + جـ

= جـ − أ د² (٣)

من ٢ ، ٣ نجد أن أ هـ² = أ د² + ب د + جـ

رقم ٣٧:- إذا كان

س + ص ت = ٢٢ / (١ − ت √٢١)

نأخذ √(٤س − ٢ص ت) حيث س، ص ع — الحل

س + ص ت = ٢٢(١ + ت √٢١) / (١ − ت √٢١)(١ + ت √٢١)

س + ص ت = ٢٢(١ + ت √٢١) / ٢٢

س + ص ت = ١ + ت √٢١

(س + ص ت)² = (١ + ت √٢١)²

س٢ − ص٢ + ٢س ص ت = −٢٠ + ٢ √٢١ ت

س٢ − ص٢ = −٢٠ (١)

٢س ص = ٢ √٢١

ص = √٢١ / س (٢)

بالتعويض فى ١ نجد أن

س² − ٢١/س² = −٢٠ ، س⁴ − ٢١ = −٢٠س٢

س⁴ + ٢٠س٢ − ٢١ = ٠

(س٢ + ٢١)(س٢ − ١) = ٠

س٢ = ١ ⇐ س = ± ١

س٢ = −٢١ مرفوضة

ص = √٢١ / س = √٢١ / (± ١) = ± √٢١

√(٤س − ٢ص ت) = ± √(٤ − ٢ √٢١ ت)

= ± √(٧ − ٢ √٢١ ت − ٣)

= ± √(٧ − ٢ √٢١ ت + ٣ت²)

= ± √((√٧ − √٣ ت)²)

= ± (√٧ − √٣ ت)

رقم ٣٨:- احسب باستخدام نظرية ديموافر قيمة

(−١ + جتا ٥/٦ + ت جا ٥/٦)

الحل

$1 + \text{جتا}\frac{\text{ط}}{2} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{2} = 1 + \text{جتا } 90 + \text{ت جا } 90$

$1 + \text{جتا}\frac{\text{ط}}{2} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{2} = 1 + 0 + \text{ت}$

$1 + \text{جتا}\frac{\text{ط}}{2} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{2} = 1 + \text{ت}$ يحول إلي الصورة المثلثية

$1 + \text{جتا}\frac{\text{ط}}{2} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{2} = \sqrt{2}\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{4} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{4}\right)$

$\left(1 + \text{جتا}\frac{\text{ط}}{2} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{2}\right)^6 = 2^3\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{4} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{4}\right)^6$

$= 8\left[\text{جتا}\frac{3\text{ط}}{2} + \text{ت جا}\frac{3\text{ط}}{2}\right]$

$= 8\left[0 + \text{ت} \times -1\right]$

$= -8\text{ت}$

رقم ٣٩ :- أ- إذا كانت ن ∈ ص فاحسب قيمة $\text{ت}^{4\text{ن}+3}$

ب- باستخدام نظرية ديموافر أوجد $\sqrt[3]{\text{ت}}$

الحـــــــــل

$\text{ت}^{4\text{ن}+3} = \text{ت}^{4\text{ن}} \times \text{ت}^3 = (\text{ت}^4)^{\text{ن}} \times \text{ت}^3$

$= (1)^{\text{ن}} \times -\text{ت} = -\text{ت}$

ب- $\sqrt[3]{\text{ت}}$ نحول ت إلي الصورة المثلثية

ت = (٠ ، ١) تقع علي محمور الصادات الموجب

$\theta = \frac{\text{ط}}{2}$ ، ر = ١

$\text{ت} = \text{جتا}\frac{\text{ط}}{2} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{2}$

$(\text{ت})^{\frac{1}{3}} = \left[\text{جتا}\frac{\text{ط}}{2} + 2\text{ط ر} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{2} + 2\text{ط ر}\right]^{\frac{1}{3}}$

$\text{ت}^{\frac{1}{3}} = \left[\text{جتا}\frac{\text{ط} + 4\text{ط ر}}{2} + \text{ت جا}\frac{\text{ط} + 4\text{ط ر}}{2}\right]^{\frac{1}{3}}$

$\text{ت}^{\frac{1}{3}} = \text{جتا}\frac{\text{ط} + 4\text{ط ر}}{6} + \text{ت جا}\frac{\text{ط} + 4\text{ط ر}}{6}$

ثم نضع ر = ٠ ، ١ ، ٢

عند ر = ٠ الجذر الأول $= \text{جتا}\frac{\text{ط}}{6} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{6}$

عند ر = ١ الجذر الثاني $= \text{جتا}\frac{5\text{ط}}{6} + \text{ت جا}\frac{5\text{ط}}{6}$

عند ر = ٢ الجذر الثالث $= \text{جتا}\frac{9\text{ط}}{6} + \text{ت جا}\frac{9\text{ط}}{6}$

وبالتعويض عن ط = ١٨٠ نجد أن الجذور هي

$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\text{ت}$ ، $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\text{ت}$ ، $-\text{ت}$

رقم ٤٠ :- إذا كان $\text{ع}_1 = 1 + \sqrt{3}\,\text{ت}$

$\text{ع}_2 = \text{ت} - \sqrt{3}$ ، $\text{ع}_3 = 512\,\text{ت}$ وكان

$\text{ع} = \frac{\text{ع}_1\text{ع}_2^{11}}{\text{ع}_3}$ فأوجد سعة ع ، |ع| ، $\sqrt[3]{\text{ع}}$

الحـــــــــل

$\text{ع}_1 = 1 + \sqrt{3}\,\text{ت}$ نحوله للصورة المثلثية

ل = ٢ ، جتا θ = $\frac{1}{2}$

$\text{ع}_1 = 2\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{3} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{3}\right)$

$\text{ع}_2 = -\sqrt{3} + \text{ت}$ نحوله أيضا للصورة المثلثية

$\text{ع}_2 = 2\left(\text{جتا}\frac{5\text{ط}}{6} + \text{ت جا}\frac{5\text{ط}}{6}\right)$

$\text{ع}_3 = 512\,\text{ت} = (0 ، 512)$ يقع علي محور الصادات الموجب

$\text{ع}_3 = 512\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{2} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{2}\right)$

$\therefore \text{ع} = \frac{\text{ع}_1\text{ع}_2^{11}}{\text{ع}_3}$

$$ع = \frac{٢(\text{جتا}\frac{ط}{٣} + ت\ \text{جا}\frac{ط}{٣})[٢(\text{جتا}\frac{٥ط}{٦} + ت\ \text{جا}\frac{٥ط}{٦})]}{٥١٢(\text{جتا}\frac{ط}{٢} + ت\ \text{جا}\frac{ط}{٢})}$$

$$ع = \frac{٢(\text{جتا}\frac{ط}{٣} + ت\ \text{جا}\frac{ط}{٣})[٢٠٤٨(\text{جتا}\frac{٥ط}{٦} + ت\ \text{جا}\frac{٥ط}{٦})]}{٥١٢(\text{جتا}\frac{ط}{٢} + ت\ \text{جا}\frac{ط}{٢})}$$

$$ع = \frac{٨[\text{جتا}\frac{٧٥ط}{٦} + ت\ \text{جا}\frac{٧٥ط}{٦}]}{\text{جتا}\frac{ط}{٢} + ت\ \text{جا}\frac{ط}{٢}} = \frac{٨[\text{جتا}\frac{١٩ط}{٢} + ت\ \text{جا}\frac{١٩ط}{٢}]}{\text{جتا}\frac{ط}{٢} + ت\ \text{جا}\frac{ط}{٢}}$$

$$ع = ٨[\text{جتا}(\frac{١٩ط}{٢} - \frac{ط}{٢}) + ت\ \text{جا}(\frac{١٩ط}{٢} - \frac{ط}{٢})]$$

$$ع = ٨[\text{جتا}٩ط + ت\ \text{جا}٩ط]$$

$$ع = ٨[\text{جتا}ط + ت\ \text{جا}ط]$$

$|ع| = ٨$ ، والسعة = ط

$$\sqrt[٣]{ع} = ٢[\text{جتا}ط + ٢ط\,ر + ت\ \text{جا}ط + ٢ط\,ر]^{\frac{١}{٣}}$$

$$\sqrt[٣]{ع} = ٢[\text{جتا}\frac{ط + ٢ط\,ر}{٣} + ت\ \text{جا}\frac{ط + ٢ط\,ر}{٣}]$$

عند ر = ٠ الجذر الأول = $٢[\text{جتا}\frac{ط}{٣} + ت\ \text{جا}\frac{ط}{٣}]$

عند ر = ١ الجذر الثانى = $٢[\text{جتا}ط + ت\ \text{جا}ط]$

عند ر = ٢ الجذر الثالث = $٢[\text{جتا}\frac{٥ط}{٣} + ت\ \text{جا}\frac{٥ط}{٣}]$

---

(٤١) اثبت أن

$$ت[(١ - ت)^{ن} - (١ + ت)^{ن}] = ٢^{\frac{ن+٢}{٢}}\ \text{جا}\frac{ن ط}{٤}$$

— الحل —

$$١ - ت = \sqrt{٢}\,[\text{جتا}(٢ط - \frac{ط}{٤}) + ت\ \text{جا}(٢ط - \frac{ط}{٤})]$$

$$١ - ت = \sqrt{٢}(\text{جتا}\frac{ط}{٤} + ت\ \text{جا}\frac{ط}{٤})$$

$$١ + ت = \sqrt{٢}\,[\text{جتا}\frac{ط}{٤} + ت\ \text{جا}\frac{ط}{٤}]$$

الأيمن = $ت[(١ - ت)^{ن} - (١ + ت)^{ن}]$

$$= ت[\sqrt{٢}(\text{جتا} - \frac{ط}{٤} + ت\ \text{جا} - \frac{ط}{٤})]^{ن}$$

$$- [\text{جتا}\frac{ط}{٤} + ت\ \text{جا}\frac{ط}{٤}]^{ن}$$

$$= ت[(\sqrt{٢})^{ن}(\text{جتا}\frac{-ن ط}{٤} + ت\ \text{جا}\frac{-ن ط}{٤})$$

$$- (\sqrt{٢})^{ن}(\text{جتا}\frac{ن ط}{٤} + ت\ \text{جا}\frac{ن ط}{٤})]$$

$$ت(\sqrt{٢})^{ن}(\text{جتا}\frac{ن ط}{٤} - ت\ \text{جا}\frac{ن ط}{٤}$$

$$- \text{جتا}\frac{ن ط}{٤} - ت\ \text{جا}\frac{ن ط}{٤})$$

الأيمن = $ت \times ٢^{\frac{١}{٢}ن}[-٢ت\ \text{جا}\frac{ن ط}{٤}]$

$$= -٢ت^{٢} \times ٢^{\frac{١}{٢}ن}\ \text{جا}\frac{ن ط}{٤}$$

$$= ٢ \times ٢^{\frac{١}{٢}ن}\ \text{جا}\frac{ن ط}{٤}$$

$$= ٢^{\frac{ن+٢}{٢}}\ \text{جا}\frac{ن ط}{٤}$$

رقم ٤٢ :- إذا كانت

س = $\frac{٢ت}{١+\sqrt{٣}ت}$ أوجد قيمة $س^{ن}$ لكل ن ∈ ص+

الحـــــــــــــــــــــــــــــــل

س = $\frac{٢ت(١-\sqrt{٣}ت)}{(١+\sqrt{٣}ت)(١-\sqrt{٣}ت)}$

س = $\frac{٢(ت+\sqrt{٣})}{١-٣ت^{٢}}$ = $\frac{٢(\sqrt{٣}+ت)}{٤}$

س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت

ل = ، جتاθ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جاθ = $\frac{١}{٢}$

θ = $\frac{٣٠ط}{١٨٠}$ = $\frac{ط}{٦}$

س = جتا$\frac{ط}{٦}$ + ت جا$\frac{ط}{٦}$

$س^{ن}$ = (جتا$\frac{ط}{٦}$ + ت جا$\frac{ط}{٦}$)^{ن}

$س^{ن}$ = جتا$\frac{ن ط}{٢}$ + ت جا$\frac{ن ط}{٢}$

عند ن = ١ فان $س^{ن}$ = جتا$\frac{ط}{٢}$ + ت جا$\frac{ط}{٢}$

= ٠ + ت = ت

عند ن = ٢ فان $س^{ن}$ = جتا ط + ت جا ط = -١ + ٠ = -١

عند ن = ٣ فان $س^{ن}$ = جتا$\frac{٣ط}{٢}$ + ت جا$\frac{٣ط}{٢}$

عند ن = ٣ فان $س^{ن}$ = ٠ - ت = -ت

عند ن = ٤ فان $س^{ن}$ = جتا٢ط + ت جا ٢ط

= ١ + ٠ = ١

عند ن = ٥ فان $س^{ن}$ تكرر نفسها عند ن = ١

عند ن = ٦ ان $س^{ن}$ تكرر نفسها عند ن = ٢

وعلي ذلك نجد أن قيمة $س^{ن}$ تظل قيمتها

هي ± ١ ، ± ت

رقم ٤٣ :- إذا كانت

س + $\frac{١}{س}$ = ٢ جتاθ فاثبت أن

$س^{ن} - \frac{١}{س^{ن}}$ = ٢ن جاناθ

الحـــــــــــــــــــــــــــــــل

س = جتاθ + ت جاθ

$س^{ن}$ = (جتاθ + ت جاθ)^{ن}

$س^{ن}$ = جتانθ + ت جانθ (١)

$\frac{١}{س^{ن}}$ = $\frac{١}{جتاθ + ت جاθ}$ = $\frac{جتا٠ + ت جا٠}{جتاθ + ت جاθ}$

$\frac{١}{س^{ن}}$ = جتا -θ + ت جا-θ

$(\frac{١}{س})^{ن}$ = (جتا -θ + ت جا-θ)^{ن}

$(\frac{١}{س^{ن}})$ = جتا -نθ + ت جا – نθ

$\frac{١}{س^{ن}}$ = جتانθ - ت جا نθ (٢)

بطرح المعادلتين ١ ، ٢ نجد أن

$$س_{ن} - \frac{١}{س_{ن}} = ٢ ت جا ن \theta$$

رقم ٤٤ :- أوجد الصورة الجبرية لكل من الأعداد الآتية

(أ) :- $ع_{١} = ٢ هـ^{\frac{ط ت}{٣}}$ ، (ب) $ع_{٢} = \sqrt{٣} هـ^{\frac{٥ط ت}{٦}}$

(جـ) :- $ع_{٣} = ٤ هـ^{\frac{٤ط ت}{٣}}$ ، (د) $ع_{٤} = \sqrt{٢} هـ^{\frac{٧ط ت}{٤}}$

الحـــــل

(أ) $ع_{١} = ٢ هـ^{\frac{ط ت}{٣}} = ٢(جتا \frac{ط}{٣} + ت جا \frac{ط}{٣})$

$ع_{١} = ٢(جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)$

$= ٢(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت) = ١ + \sqrt{٣} ت$

(ب) $ع_{٢} = \sqrt{٣} هـ^{\frac{٥ط ت}{٦}} = \sqrt{٣}(جتا \frac{٥ط}{٦} + ت جا \frac{٥ط}{٦})$

$ع_{٢} = \sqrt{٣}(جتا ١٥٠ + ت جا ١٥٠)$

$ع_{٢} = \sqrt{٣}[-\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} ت] = \frac{-٣}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$

(جـ) $ع_{٣} = ٤ هـ^{\frac{٤ط ت}{٣}} = ٤[جتا \frac{٤ط}{٣} + ت جا \frac{٤ط}{٣}]$

$= ٤[جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠]$

$ع_{٣} = ٤[-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت] = -٢ - ٢\sqrt{٣} ت$

(د) $ع_{٤} = \sqrt{٢} هـ^{\frac{٧ط}{٤}} = \sqrt{٢}[جتا \frac{٧ط}{٤} + ت جا \frac{٧ط}{٤}]$

$= \sqrt{٢}[جتا ٣١٥ + ت جا ٣١٥]$

$ع_{٤} = \sqrt{٢}[\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} ت] = ١ - ت$

رقم ٤٥ :- ضع الناتج في كل مما يأتي على الصورة الاسية والصورة المثلثية

(أ) $٢ هـ^{\frac{ط}{٦}} \times ٣ هـ^{\frac{٢ط}{٣}}$

(ب) $٤ هـ^{\frac{٧ط ت}{٤}} / ٢ هـ^{\frac{٥ط ت}{٣}}$

$٣\sqrt{٣} هـ^{\frac{٧ط ت}{١٥}} \times \sqrt{٢} هـ^{\frac{٤ط ت}{٥}}$

(جـ) $هـ^{\frac{ط ت}{٦}} \times ٢ هـ^{\frac{٢ط ت}{٣}}$

الحـــــل

(أ) $٢ هـ^{\frac{ط ت}{٦}} \times ٣ هـ^{\frac{٢ط ت}{٣}} = ٦ هـ^{\frac{٥ط ت}{٦}}$

$= ٦(جتا \frac{٥ط}{٦} + ت جا \frac{٥ط}{٦})$

(ب) $\frac{٤ هـ^{\frac{٧ط ت}{٤}}}{٢ هـ^{\frac{٥ط}{٣}}} = ٢ هـ^{(\frac{٧ط}{٤} - \frac{٥ط}{٣}) ت}$

$= ٢ هـ^{\frac{ط ت}{١٢}} = ٢(جتا \frac{ط}{١٢} + ت جا \frac{ط}{١٢})$

$٦ \times هـ^{\frac{٧ط ت}{١٥} + \frac{٤ط ت}{٥}} \quad ٣ هـ^{\frac{١٩ط ت}{١٥}}$

(جـ) $\frac{٢ هـ^{\frac{ط ت}{٦} + \frac{٢ط ت}{٣}}}{٣ هـ^{\frac{١٩ط ت}{١٥}}} = \frac{٢}{٣} هـ^{\frac{٥ط ت}{٦} - \frac{١٣ط ت}{٣٠}}$

رقم ٤٦:- ضع ناتج فى كل مما يأتي على الصورة الجبرية

) ع = ٣(جتا $\frac{٢ط}{٣}$ + ت جا $\frac{٢ط}{٣}$) × $هـ^{\frac{ط}{٦}ت}$

ع = ٢(١- ت) $هـ^{\frac{ط}{٢}ت}$

الحـــــــــــــــــــل

ع = ٦(جتا $\frac{٢ط}{٣}$ + ت جا $\frac{٢ط}{٣}$)(جتا $\frac{ط}{٦}$ + ت جا $\frac{ط}{٦}$)

= ٦ [جتا ($\frac{٢ط}{٣}$ + $\frac{ط}{٦}$)+ ت جا($\frac{٢ط}{٣}$ + $\frac{ط}{٦}$)

= ٦ (جتا $\frac{٥ط}{٦}$ + ت جا $\frac{٥ط}{٦}$)=٦(جتا ١٥٠+ ت جا ١٥٠)

= ٦(- $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت)= -٣$\sqrt{٣}$ + ٣ ت

) ع = ٢(جتا $\frac{٧ط}{٤}$ + ت جا $\frac{٧ط}{٤}$) $هـ^{\frac{ط}{٢}ت}$

ع= ٢(جتا $\frac{٧ط}{٤}$ + ت جا $\frac{٧ط}{٤}$)(جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$)

ع= ٢ (- جتا $\frac{٧ط}{٤}$ - ت جا $\frac{٧ط}{٤}$)(جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$)

ع= ٢ [جتا(ط+ $\frac{٧ط}{٤}$)+ت جا(ط + $\frac{٧ط}{٤}$)×(جتا $\frac{ط}{٢}$ +ت جا $\frac{ط}{٢}$)

ع= ٢[جتا $\frac{١١ط}{٤}$ + ت جا $\frac{١١ط}{٤}$](جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$)

ع= [جتا($\frac{١١ط}{٤}$ + $\frac{ط}{٢}$)+ ت جا ($\frac{١١ط}{٤}$ + $\frac{ط}{٢}$)]

ع= ٢[جتا $\frac{١٣ط}{٤}$ + ت جا $\frac{١٣ط}{٤}$]

ع= ٢(جتا ($\frac{١٣ط}{٤}$ - ٢ط)+ ت جا ($\frac{١٣ط}{٤}$ - ٢ط)

ع= ٢(جتا $\frac{٥ط}{٤}$ + ت جا $\frac{٥ط}{٤}$)

ع = ٢(جتا٢٢٥+ ت جا ٢٢٥)

ع = ٢[- $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ - ت $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$]

ع= -$\sqrt{٢}$ -$\sqrt{٢}$ ت

رقم ٤٧:- إذا كان

$ع_١$ = ٤(جتا $\frac{٥ط}{٣}$ + ت جا $\frac{٥ط}{٣}$)

$ع_٢$ = ت ، $ع_٣$ = -$\sqrt{٣}$ + ت

ضع العدد ع = $\frac{ع_١}{ع_٢ ع_٣}$

علي الصورة المثلثية والصورة الأسية

الحـــــــــــــــــــل

$ع_١$ = ٤(جتا $\frac{٥ط}{٣}$ + ت جا $\frac{٥ط}{٣}$)

$ع_٢$ = ت يقع علي محور الصادات الموجب

$ع_٢$ = [جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$]

$ع_٣$ = - $\sqrt{٣}$ + ت ، ل = ٢ ، جتاθ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

$ع_٣$ = ٢[جتا $\frac{٥ط}{٦}$ + ت جا $\frac{٥ط}{٦}$]

ع = $\frac{ع_١}{ع_٢ ع_٣}$

$$ع = \frac{٤\left[جتا\frac{هـ ط}{٣} + ت\,جا\frac{هـ ط}{٣}\right]}{٢\left(جتا\frac{ط}{٢} + ت\,جا\frac{ط}{٢}\right)\left(جتا\frac{هـ ط}{٦} + ت\,جا\frac{هـ ط}{٦}\right)}$$

$$ع = ٢جتا\left(\frac{هـ ط}{٣} - \frac{ط}{٢} - \frac{هـ ط}{٦}\right) + ت\,جا\left(\frac{هـ ط}{٣} - \frac{ط}{٢} - \frac{هـ ط}{٦}\right)$$

$$ع = \left[جتا\frac{٢ط}{٦} + ت\,جا\frac{٢ط}{٦}\right] = ٢\left(جتا\frac{ط}{٣} + ت\,جا\frac{ط}{٣}\right)$$

$$ع = ٢هـ^{\frac{ط}{٣}ت}$$

رقم ٤٨:- إذا كان $ع_١ = \frac{\sqrt{٦} - ت\sqrt{٢}}{٢}$

$ع_٢ = ١ - ت$ ضع العدد $ع = \frac{ع_١}{ع_٢}$ على الصورة الأسية

الحـــــــــل

$$ع = \frac{\sqrt{٦}}{٢} - \frac{ت\sqrt{٢}}{٢} = \frac{\sqrt{٢}\times\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\sqrt{٢}\,ت}{٢}$$

$$ع_١ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{\sqrt{٢}}ت \quad ، \quad ل = \sqrt{٢}$$

$$جتا\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \quad ، \quad \theta = ٣٦٠ - ٣٠ = ٣٣٠$$

$$\theta = \frac{٣٣٠ط}{١٨٠} = \frac{١١ط}{٦}$$

$$ع = \sqrt{٢}\left[جتا\frac{١١ط}{٦} + ت\,جا\frac{١١ط}{٦}\right]$$

$$ع_١ = ١ - ت = \sqrt{٢}\left[جتا\frac{٧ط}{٤} + ت\,جا\frac{٧ط}{٤}\right]$$

$$ع_٢ = \frac{ع_١}{\sqrt{٢}\left[جتا\frac{٧ط}{٤} + ت\,جا\frac{٧ط}{٤}\right]} = \frac{\sqrt{٢}\left[جتا\frac{١١ط}{٦} + ت\,جا\frac{١١ط}{٦}\right]}{\sqrt{٢}\left[جتا\frac{٧ط}{٤} + ت\,جا\frac{٧ط}{٤}\right]}$$

$$ع = جتا\left(\frac{١١ط}{٦} - \frac{٧ط}{٤}\right) + ت\,جا\left(\frac{١١ط}{٦} - \frac{٧ط}{٤}\right)$$

$$ع = جتا\frac{ط}{١٢} + ت\,جا\frac{ط}{١٢}$$

$$ع = هـ^{\frac{ط}{١٢}ت}$$

رقم ٤٩:- ضع العدد $ع = \frac{\sqrt{٣} + ت}{\sqrt{٣} - ت}$

على الصورة الأسية ومن ثم أوجد $\sqrt[٣]{ع}$

الحـــــــــل

$$ع = \frac{(\sqrt{٣} + ت)(\sqrt{٣} + ت)}{(\sqrt{٣} - ت)(\sqrt{٣} + ت)}$$

$$ع = \frac{٣ + ٢\sqrt{٣}\,ت - ١}{٣ - ت^٢} = \frac{٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت}{٤}$$

$$ع = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت \quad ، \quad ل = ١$$

$$جتا\theta = \frac{١}{٢} \quad ، \quad \theta = \frac{٦٠ط}{١٨٠} = \frac{ط}{٣}$$

$$ع = جتا\frac{ط}{٣} + ت\,جا\frac{ط}{٣}$$

$$ع = هـ^{\frac{ط}{٣}ت}$$

$ع^{\frac{1}{3}} = [هـ^{(\frac{ط}{3} + 2ط ر)ت}]^{\frac{1}{3}}$

$ع^{\frac{1}{3}} = [هـ^{\frac{(ط + 6ط ر)}{3} ت}]^{\frac{1}{3}}$

$ع^{\frac{1}{3}} = هـ^{\frac{(ط + 6ط ر)}{9} ت}$

عند ر = ٠ الجذر الأول = $هـ^{\frac{ط}{9} ت}$

عند ر = ١ الجذر الثاني = $هـ^{\frac{7ط}{9} ت}$

عند ر = ٢ الجذر الثالث = $هـ^{\frac{13ط}{9} ت}$

رقم ٥٠:- إذا كانت $ع = هـ^{\frac{ط}{6} ت}$ فضع ع علي الصورة المثلثية ثم أوجد $ع^{3}$ في الصورة الجبرية

الحل

$ع = هـ^{\frac{ط}{6} ت} = جتا\frac{ط}{6} + ت جا\frac{ط}{6} ت$

$ع^{3} = (جتا\frac{ط}{6} + ت جا\frac{ط}{6} ت)^{3}$

$ع^{3} = جتا\frac{3ط}{6} + ت جا\frac{3ط}{6} ت$

$ع^{3} = جتا\frac{ط}{2} + ت جا\frac{ط}{2} ت$

$ع^{3} = ٠ + ت = ت$

رقم ٥١:- إذا كانت $ع_1 = جتا\frac{7ط}{4} - ت جا\frac{7ط}{4}$)

$ع_2 = -1 + ت$ ، $ع_3 = جا٦٠ + ت جتا٦٠$

أوجد العدد $\frac{ع_1^{4} \times ع_2^{2}}{ع_3^{5}}$

الحل

$ع_1 = جتا(2ط - \frac{7ط}{4}) + ت جا(2ط - \frac{7ط}{4})$

$ع_1 = جتا\frac{ط}{4} + ت جا\frac{ط}{4}$

$ع_1^{4} = (جتا\frac{ط}{4} + ت جا\frac{ط}{4})^{4} = (جتا ط + ت جا ط)$

$ع_2 = -1 + ت$ نحوله إلى الصورة المثلثية

$ع_2 = \sqrt{2}[جتا\frac{3ط}{4} + ت جا\frac{3ط}{4}]$

$ع_2^{2} = [\sqrt{2}(جتا\frac{3ط}{4} + ت جا\frac{3ط}{4})]^{2}$

$ع_2 = 2(جتا\frac{3ط}{2} + ت جا\frac{3ط}{2})$

$ع_3 = جا٦٠ + ت جتا٦٠ = جتا٣٠ + ت جا٣٠$

$ع_3^{5} = (جتا\frac{ط}{6} + ت جا\frac{ط}{6})^{5}$

$ع_3^{5} = جتا\frac{5ط}{6} + ت جا\frac{5ط}{6}$

$$ع = \frac{ع^{٤} \times ع^{٢}}{ع^{٣}}$$

$$ع = \frac{(\text{جتا } ط + ت \text{ جا } ط) \times ٢(\text{جتا } \frac{٣ط}{٢} + ت \text{ جا } \frac{٣ط}{٢})}{\text{جتا } \frac{٥ط}{٦} + ت \text{ جا } \frac{٥ط}{٦}}$$

$$ع = ٢[\text{جتا}(ط + \frac{٣ط}{٢} - \frac{٥ط}{٦}) + ت \text{ جا}(ط + \frac{٣ط}{٢} - \frac{٥ط}{٦})]$$

$$ع = ٢[\text{جتا } \frac{١٠ط}{٦} + ت \text{ جا } \frac{١٠ط}{٦}]$$

$$ع = ٢[\text{جتا } \frac{٥ط}{٣} + ت \text{ جا } \frac{٥ط}{٣}]$$

$$= ٢ هـ^{\frac{٥ط}{٣} ت}$$

$$ع = ٢[\text{جتا } ٣٠٠ + ت \text{ جا } ٣٠٠] = ٢[\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت]$$

$$ع = ١ - \sqrt{٣} ت$$

رقم ٥٢ :- أوجد الجذرين التربيعين لكل مما يأتى على الصورة الأسية والصورة الجبرية

(أ) $ع = ٤ هـ^{\frac{٥ط}{٣} ت}$ (ب) $ع = ٢(\text{جتا } ١٢٠ + ت \text{ جا } ١٢٠)$

(جـ) $ع = ١ - \sqrt{٣} ت$

الحـــــــــل

(أ) $$ع^{\frac{١}{٢}} = ٢[هـ^{(\frac{٥ط}{٣} + ٢ط ر) ت}]^{\frac{١}{٢}}$$

$$ع = ٢[هـ^{\frac{٥ط + ٦ط ر}{٣} ت}]^{\frac{١}{٢}}$$

$$ع^{\frac{١}{٢}} = ٢ هـ^{(\frac{٥ط + ٦ط ر}{٦}) ت}$$

عند ر = ٠ الجذر الأول = $٢ هـ^{\frac{٥ط}{٦}}$

الجذر الأول = $٢[\text{جتا } \frac{٥ط}{٦} + ت \text{ جا } \frac{٥ط}{٦}]$

$= ٢[\text{جتا } ١٥٠ + ت \text{ جا } ١٥٠]$

$= ٢(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} ت)$

$= -\sqrt{٣} + ت$

عند ر = ١ الجذر الثانى = $٢ هـ^{\frac{١١ط}{٦} ت}$

الجذر الثانى = $٢[\text{جتا } \frac{١١ط}{٦} + ت \text{ جا } \frac{١١ط}{٦}]$

$= ٢[\text{جتا } ٣٣٠ + ت \text{ جا } ٣٣٠]$

$= ٢[\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} ت]$

$= \sqrt{٣} - ت$

(ب) $ع = ٢(\text{جتا } ١٢٠ + ت \text{ جا } ١٢٠)$

$ع = ٢(\text{جتا } \frac{٢ط}{٣} + ت \text{ جا } \frac{٢ط}{٣})$

$ع = ٢ هـ^{\frac{٢ط}{٣}}$

$$ع^{\frac{١}{٢}} = ٢[هـ^{(\frac{٢ط}{٣} + ٢ط ر) ت}]^{\frac{١}{٢}}$$

$$ع^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}[هـ^{(\frac{٢ط + ٦ط ر}{٣}) ت}]^{\frac{١}{٢}}$$

$$ع = \frac{\frac{ع^{٢}}{٢} \times \frac{ع}{٢}}{ع^{٣}}$$

$$ع = \frac{(\text{جتا } ط + ت \text{ جا } ط) \times ٢(\text{جتا } \frac{٣ط}{٢} + ت \text{ جا } \frac{٣ط}{٢})}{\text{جتا } \frac{ط}{٦} + ت \text{ جا } \frac{ط}{٦}}$$

$$ع = ٢[\text{جتا } (ط + \frac{٣ط}{٢}) - \frac{٥ط}{٦}) + ت \text{ جا } (ط + \frac{٣ط}{٢} - \frac{٥ط}{٦})]$$

$$ع = ٢[\text{جتا } \frac{١٠ط}{٦} + ت \text{ جا } \frac{١٠ط}{٦}]$$

$$ع = ٢[\text{جتا } \frac{٥ط}{٣} - ت \text{ جا } \frac{٥ط}{٣}]$$

$$= ٢ \times \frac{١}{٢} - ت \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$ع = ٢[\text{جتا } ٣٠٠ + ت \text{ جا } ٣٠٠] = ٢[\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت]$$

$$ع = ١ - \sqrt{٣} ت$$

ب) أوجد الجذرين التربيعيين لكل مما يلي على الصورة الأسية والصورة الجبرية

ب) $ع = ٢(\text{جتا } ١٢٠ + ت \text{ جا } ١٢٠)$

$$ع^{\frac{١}{٢}} = ٢[\text{جتا } \frac{ط}{٣} + ٢ط ر) ت]^{\frac{١}{٢}}$$

$$ع = ٢[\text{جتا } \frac{٢ط}{٣} + ت \text{ جا } \frac{٢ط}{٣})$$

$$ع^{\frac{١}{٢}} = ٢[\text{جتا } \frac{٢ط}{٣} + ٢ط ر) ت]^{\frac{١}{٢}}$$

$$ع^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}[\text{جتا } (\frac{٢ط + ٦ط ر}{٣}) ت]^{\frac{١}{٢}}$$

$$ع = ٢[\text{جتا } (\frac{٢ط + ٦ط ر}{٣}) ت]^{\frac{١}{٢}}$$

$$ع^{\frac{١}{٢}} = ٢ \text{ هـ}^{(\frac{٢ط + ٦ط ر}{٦}) ت}$$

عند ر = ٠ الجذر الأول = $٢ \text{ هـ}^{\frac{٥ط}{٦}}$

الجذر الأول = $٢[\text{جتا } \frac{٥ط}{٦} + ت \text{ جا } \frac{٥ط}{٦}]$

$= ٢[\text{جتا } ١٥٠ + ت \text{ جا } ١٥٠]$

$= ٢(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} ت)$

$= -\sqrt{٣} + ت$

عند ر = ١ الجذر الثاني = $٢ \text{ هـ}^{\frac{١١ط}{٦} ت}$

الجذر الثاني = $٢[\text{جتا } \frac{١١ط}{٦} + ت \text{ جا } \frac{١١ط}{٦}]$

$= ٢[\text{جتا } ٣٣٠ + ت \text{ جا } ٣٣٠]$

$= ٢[\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} ت]$

$= \sqrt{٣} - ت$

رقم ٥٣:- أوجد علي الصورة الأسية الجذور التكعيبية للعدد ع = ٤ − ٤ √(٣) ت

الحـــــــــــل

ل = √(١٦ + ٤٨) = √(٦٤) = ٨

جتاθ = ١/٢ ، جاθ = −√(٣)/٢

θ = ٣٦٠ − ٦٠ = ٣٠٠ط/١٨٠ = ٥ط/٣

ع = ٨ (جتا ٥ط/٣ + ت جا ٥ط/٣)

ع^(١/٣) = ٢[جتا(٥ط/٣ + ٢ط ر)+ ت جا(٥ط/٣ + ٢ط ر)]^(١/٣)

ع^(١/٣) = ٢[جتا (٥ط + ٦ط ر)/٣ + ت جا (٥ط + ٦ط ر)/٣]^(١/٣)

ع^(١/٣) = ٢[جتا (٥ط + ٦ط ر)/٩ + ت جا (٥ط + ٦ط ر)/٩]^(١/٣)

ع^(١/٣) = ٢ ((٥ط + ٦ط ر)/٩) ت

ع = ٢ هـ^(٥ط/٩ ت)

عند ر = ٠ الجذر الأول = ٢ هـ^(١١ط/٩ ت)

عند ر = ١ الجذر الثاني = ٢ هـ^(١٧ط/٩ ت)

عند ر = ٢ الجذر الثالث = ٢ هـ

رقم ٥٤:- أوجد حلول المعادلة س^٥ + ٣٢ = ٠ علي الصورة الأسية علما بأن س ∈ ح

الحـــــــــــل

س^٥ = ٣٢ (جتا ط + ت جا ط)

س = ٢ [جتا ط + ت جا ط]^(١/٥)

س = ٢ [جتا (ط + ٢ط ر)/٥ + ت جا (ط + ٢ط ر)/٥]

س = ٢ هـ^((ط + ٢ط ر)/٥ ت)

عند ر = ٠ الجذر الأول = ٢ هـ^(ط/٥ ت)

عند ر = ١ الجذر الثاني = ٢ هـ^(٣ط/٥ ت)

عند ر = ٢ الجذر الثالث = ٢ هـ^(٧ط/٥ ت)

عند ر = ٣ الجذر الرابع = ٢ هـ^(٩ط/٥ ت)

عند ر = ٤ الجذر الخامس = ٢ هـ

رقم ٥٥:- أوجد علي الصورة الأسية للمقادير

(١ + √(٣) ت)^(٤/٣)

الحـــــــــــل

(١ + √(٣) ت) = ٢ (جتا ط/٣ + ت جا ط/٣)

(١ + √(٣) ت)^٤ = ١٦ (جتا ٤ط/٣ + ت جا ٤ط/٣)

(١ + √(٣) ت)^(٤/٣) = [١٦ (جتا ٤ط/٣ + ت جا ٤ط/٣)]^(١/٣)

= ٣√(١٦) (جتا (٤ط + ٢ط ر)/٣ + ت جا (٤ط + ٢ط ر)/٣)^(١/٣)

٣√(١٦) (جتا (٤ط + ٦ط ر)/٣ + ت جا (٤ط + ٦ط ر)/٣)^(١/٣)

$\sqrt[3]{١٦}\left(\text{جتا}\frac{٤ط + ٦ط ر}{٩} + ت\ \text{جا}\frac{٤ط + ٦ط ر}{٩}\right)$

د ر = ٠ الجذر الأول = $\sqrt[3]{١٦}\left(\text{جتا}\frac{٤ط}{٩} + ت\ \text{جا}\frac{٤ط}{٩}\right)$

د ر = ١ الجذر الثاني = $\sqrt[3]{١٦}\left(\text{جتا}\frac{١٠ط}{٩} + ت\ \text{جا}\frac{١٠ط}{٩}\right)$

د ر = ٢ الجذر الثالث = $\sqrt[3]{١٦}\left(\text{جتا}\frac{١٦ط}{٩} + ت\ \text{جا}\frac{١٦ط}{٩}\right)$

رقم ٥٦:- إثبت أن

$$\frac{٣ + ٥ω + ٣ω^٢}{١ - ٢ω - ٤ω^٢} - \frac{٣ + ٥ω^٢ + ٣ω}{١ - ٢ω^٢ - ٤ω} = \frac{-٢}{١٩}$$

الحـــــــــــل

$$\text{أيمن} = \frac{٣ + ٥ω - ٣ - ٣ω}{١ - ٢ω + ٤ + ٤ω} + \frac{-٣ω^٢ + ٥ω^٢ + ٢}{١ + ٢ω + ٢ - ٤ω}$$

$$= \frac{٢ω}{٥ + ٢ω} + \frac{٢ω^٢}{٣ - ٢ω}$$

$$= \frac{٢ω(٣ - ٢ω) + ٢ω^٢(٥ + ٢ω)}{(٥ + ٢ω)(٣ - ٢ω)}$$

$$\frac{٦ω - ٤ω^٢ + ١٠ω^٢ + ٤ω^٣}{١٥ - ١٠ω + ٦ω - ٤ω^٢}$$

$$= \frac{٦ω + ٦ω^٢ + ٤}{١٥ - ٤ω - ٤ω^٢} = \frac{-٦ + ٤}{١٥ + ٤} = \frac{-٢}{١٩} = \text{الأيسر}$$

رقم ٥٧:- إثبت أن

$$\left[\frac{٤ + ٢ω + ٢ω^٢}{ω^٢ - ٢} + \frac{ω - ١}{٣ + ω + ٢ω^٢}\right]^٢ = ٤$$

الحـــــــــــل

$$\left[\frac{٤ - ω - ١ + ٢ω}{-١ - ω - ٢} + \frac{ω - ١}{٣ + ω - ٢ - ٢ω}\right]^٢$$

$$\text{لأيمن}\left[\frac{(٣ + ω)}{-(٣ + ω)} \quad \frac{ω - ١}{ω - ١}\right]^٢$$

$$[-١ - ١]^٢ = [-٢]^٢ = ٤$$

رقم ٥٨:- إثبت أن

$$(أ + بω + أω^٢)(أ + بω^٢ + أω^٤) = (ب - أ)^٣$$

الحـــــــــــل

الإيمن = $(-أ + بω)(-أ ω^٢ + ب ω^٢)$

$= ω(ب - أ)\ ω^٢(ب - أ)$

$= ω^٣(ب - أ)^٣ = (ب - أ)^٣ = \text{الأيسر}$

رقم ٥٩:- إثبت أن $\frac{٥ - ٤ω + ١١ω^٢}{١ - ٢ω + ٣ω^٢} = ٣$

$$\text{الأيمن} = \frac{٥ - ٤ω - ١١ω}{١ - ٢ω - ٣ω}$$

$$= \frac{-٦ - ١٥ω}{-٢ - ٥ω} = \frac{٣(-٢ - ٥ω)}{(-٢ - ٥ω)} = ٣ = \text{الأيسر}$$

رقم ٦٠:- إثبت $\frac{س + ωص}{ω^٢س + ص} + \frac{ع ω^٢ + ل}{ع + ωل} = -١$

$$\text{الأيمن} = \frac{ω^٣س + ωص}{ω^٢س + ص} + \frac{ع ω^٢ + ω^٣ل}{ع + ωل}$$

$$= \frac{ω(ω^٢س + ص)}{(ω^٢س + ص)} + \frac{ω^٢(ع + ωل)}{(ع + ωل)}$$

$= ω + ω^٢ = -١ = \text{الأيسر}$

رقم ٦١:- إثبت أن

$$\frac{١ + ٨ω + ω^٢}{١ - ω + ٢ω^٢} + \frac{١ + ω + ٨ω^٢}{١ + ٢ω - ω^٢} = \pm ٣$$

$$\text{الأيمن} = \frac{٨ω - ω}{١ - ω - ٢ω^٢} - \frac{-ω^٢ + ٨ω^٢}{١ + ٢ω + ١ + ω}$$

$$= \frac{\text{٧س}}{\text{س}^{-١}-\text{٣}} - \frac{\text{٧س}^{٢}}{\text{س}^{٢}+\text{٣}}$$

$$= \text{٧س}\left[\frac{١}{\text{س}^{-١}-\text{٣}} - \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+\text{٣}}\right]$$

$$= -\text{٧س}\left[\frac{١}{\text{س}^{١}+\text{٣}} + \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+\text{٣}}\right]$$

$$= -\text{٧س}\left[\frac{\text{٢}+\text{٣س}+\text{س}+\text{٣س}^{٢}}{(\text{س}^{١}+\text{٣})(\text{س}^{٢}+\text{٣})}\right]$$

$$= -\text{٧س}\left(\frac{\text{٢}+\text{٤س}+\text{٣س}^{٢}}{\text{٢}+\text{٣س}^{٢}+\text{٦س}+\text{٩س}^{٢}}\right)$$

$$= -\text{٧س}\left(\frac{\text{٢}+\text{٤س}-\text{٣}-\text{٣س}^{٢}}{\text{٢}+\text{٩س}^{٢}+\text{٩س}^{٢}}\right)$$

$$= -\text{٧س}\left(\frac{-\text{١}+\text{س}^{٢}}{\text{٢}-\text{٩}}\right)$$

$$= \frac{-\text{٧س}(\text{س}^{٢}-\text{١})}{-\text{٧}} = -\text{س}^{٣}+\text{س}$$

$$= \text{س}^{٣}-\text{س} = \pm\sqrt{\text{٣}}\ \text{ت}$$

رقم ٦٢:- إثبت أن

$$\left(\left(\frac{\text{١}}{\text{٦س}^{٤}+\text{٤}} - \frac{\text{١}}{\text{٦س}^{٤}+\text{٢}}\right)\times\left(\frac{\text{١}}{\text{٧س}^{٥}+\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٧س}^{٥}+\text{٥}}\right)\right) = \frac{-\text{٣}}{\text{٢٦}}$$

الحـــــــــــل

$$\text{الأيمن} = \left[\frac{\text{٦س}^{٤}+\text{٢}-\text{٦س}^{٤}-\text{٤}}{(\text{٦س}^{٤}+\text{٤})(\text{٦س}^{٤}+\text{٢})}\right]\left[\frac{\text{٧س}^{٥}+\text{٥}-\text{٧س}^{٥}-\text{٢}}{(\text{٧س}^{٥}+\text{٢})(\text{٧س}^{٥}+\text{٥})}\right]$$

$$= \left[\frac{\text{٦}(\text{س}^{٤}-\text{س}^{٤})}{\text{٣٦س}^{٨}+\text{٢٤س}^{٤}+\text{٢٤س}^{٤}+\text{١٦}}\right]\times\left[\frac{\text{٧}(\text{س}^{٥}-\text{س}^{٥})}{\text{٤٩س}^{١٠}+\text{٣٥س}^{٥}+\text{٣٥س}^{٥}+\text{٢٥}}\right]$$

$$= \left[\frac{\text{٦}(\pm\sqrt{\text{٣}}\ \text{ت})}{\text{٣٦}+\text{٢٤}-\text{١٦}}\right]\left[\frac{\text{٧}(\pm\sqrt{\text{٣}}\ \text{ت})}{\text{٤٩}+\text{٣٥}-\text{٢٥}}\right]$$

$$= \frac{\text{٧}\times\text{٦}\sqrt{(\pm\text{٣}\ \text{ت})^{٢}}}{\text{٣٩}\times\text{٢٨}} = \frac{\text{٧}\times\text{٦}\times\text{٣}\ \text{ت}^{٢}}{\text{٣٩}\times\text{٢٨}}$$

$$= \frac{-\text{٣}}{\text{٢٦}} = \text{الأيسر}$$

رقم ٦٣:- إثبت أن

$$\left[\text{٥}-\frac{\text{٥}}{\text{س}^{٢}+\text{١}} + \frac{\text{٣}}{\text{س}^{٢}}\right]^{٦} = \text{٦٤}$$

الحـــــــــــل

$$\text{الأيمن}\left[\text{٥}-\frac{\text{٥س}^{٣}}{\text{س}^{٣}+\text{س}} + \frac{\text{٣س}^{٣}}{\text{س}^{٢}}\right]^{٦}$$

$$= \left(\text{٥}+\text{٥س}^{٢}+\text{٣س}^{٣}\right)^{٦} = \left(-\text{٥س}^{٢}+\text{٣س}^{٣}\right)^{٦}$$

$$= \left(-\text{٢س}^{٢}\right)^{٦} = \text{٦٤س}^{١٢} = \text{٦٤}$$

رقم ٦٤:- إثبت أن

$$\left[\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}+\text{١}}\right]^{٤} + \left[\frac{\text{س}^{٢}+\text{١}}{\text{س}}\right]^{٤} = \frac{\text{٨٢س}^{٢}}{\text{٩}}$$

الحـــــــــــل

$$\text{الأيمن}\left[\left(\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}+\text{١}}\right)^{٢}\right]^{٢} + \left[\left(\frac{\text{س}^{٢}+\text{١}}{\text{س}}\right)^{٢}\right]^{٢}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٤}+\text{٢س}^{٢}+\text{١}}\right]^{٢} + \left[\frac{\text{س}^{٤}+\text{٢س}^{٢}+\text{١}}{\text{س}^{٢}}\right]^{٢}$$

$$= \left(\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}-\text{٤}}\right)^{٢} + \left(\frac{\text{س}^{٢}-\text{٤}}{\text{س}^{٢}}\right)^{٢}$$

$$= \left(\frac{\text{س}^{٢}}{-\text{٣}}\right)^{٢} + \left(\frac{-\text{٣}}{\text{س}^{٢}}\right)^{٢}$$

$$= \frac{\text{س}^{٤}}{\text{٩}} + \frac{\text{٩}}{\text{س}^{٤}} = \frac{\text{س}^{٤}}{\text{٩}} + \frac{\text{٩}}{\text{س}^{٤}}$$

$$= \frac{\text{س}^{٨}+\text{٨١}}{\text{٩س}^{٤}} = \frac{\text{٨١}+\text{١}}{\text{٩س}^{٤}} = \frac{\text{٨٢س}^{٢}}{\text{٩س}^{٢}} = \frac{\text{٨٢س}^{٢}}{\text{٩}}$$

رقم ٦٥:- إذا كانت س = ٢ω - ٣ω^٢
ص = ٣ + ٥ω^٢
فأوجد كلاً من س + ص ، س ص ثم
أثبت $\frac{س^٣ + ص^٣}{س^٢ + ص^٢} = \frac{٥٦}{٢٧}$

الحـــــــــــــل

س + ص = ٢ω - ٣ω^٢ + ٣ + ٥ω^٢
س + ص = ٣ + ٢ω + ٢ω^٢
س + ص = ٣ - ٢ = ١
س ص = (٢ω - ٣ω^٢)(٣ + ٥ω^٢)
= ٦ω + ١٠ω^٣ - ٩ω^٢ - ١٥ω^٤
= ٦ω + ١٠ - ٩ω^٢ - ١٥ω
= ١٠ - ٩ω - ٩ω^٢ = ١٠ + ٩ = ١٩

س^٢ + ص^٢ = (س + ص)^٢ - ٢س ص
= (١)^٢ - ٢ × ١٩ = ١ - ٣٨ = -٣٧

المقدار = $\frac{س^٣ + ص^٣}{س^٢ + ص^٢}$ تحليل مجموع مكعبين للبسط

= $\frac{(س + ص)(س^٢ + ص^٢ - س ص)}{س^٢ + ص^٢}$

= $\frac{١ (-٣٧ - ١٩)}{-٣٧} = \frac{-٥٦}{-٣٧} = \frac{٥٦}{٣٧}$

رقم ٦٦:- أثبت أن
(٢ + ٣ω + ٢ω^٢)(٢ + ٣ω^٢ + ٢ω^٤)(٢ + ٣ω^٤ + ٢ω^٨)
.....إلى ن من العوامل = ١

الحـــــــــــــل

الأيمن
(٢ + ٣ω + ٢ω^٢)(٢ + ٣ω^٢ + ٢ω^٤)(ω^٢ + ٣ω^٤ + ٢ω^٨) :
= (ω^٣ - ω^٢)(ω^٣ - ω^٢)(ω^٣ - ω^٢)
= ω × ω^٢ × ω × ω^٣.....إلى ن من العوامل
= (ω × ω^٢)^ن إلى ن من العوامل لأننا أخذنا كل حدين معاً
= (ω^٣)^ن = ω^٣ن = ١

---

(٦٧) إذا كان (١ - ت)(س + ص ت) = ١٩ ($\frac{١}{٣ - ٢ت}$ + $\frac{١}{٥ + ٣ت}$) فما قيمة س ، ص

الحل

بفك الأقواس للطرف الأيمن نجد أن
س + ص ت - س ت + ص =
[$\frac{٥ + ٣ت + ٢ت - ٣ت^٢}{(٣ - ٢ت)(٥ + ٣ت)}$] ١٩

(س + ص) + (ص - س)ت = $\frac{١٩ × ٧}{١٠ + ٦ت - ١٥ت - ٩ت^٢}$

(س + ص) + (ص - س)ت = $\frac{١٩ × ٧}{١٠ - ٩ت - ٩ت^٢}$

(س + ص) + (ص - س)ت = $\frac{١٩ × ٧}{١٠ + ٩}$ = ٧

(س + ص) + (ص - س)ت = ٧
س + ص = ٧ (١)
- س + ص = ٠ (٢) بالجمع
٢ص = ٧ ⟸ ص = ٣.٥ ، س = ٣.٥

رقم ٦٨:- أوجد مجموعة حل المعادلة
س^٢ - ٢ωس - ω = ٠ الحـــــــــــــل
س^٢ - ٢ωس + ١ - ١ - ω = ٠ وذلك بإضافة ١ ثم طرحه
س^٢ - ٢ωس + ١ + ω^٢ = ٠
(س^٢ - ٢ωس + ω^٢) = -١ ∴ (س - ω)^٢ = ت^٢
س - ω = ±ت ⟸ س - ω = ت
س = ω + ت
س - ω = -ت ⟸ س = ω - ت

رقم ٦٩:- إذا كان ١ ، ω ، ω^٢ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فكون المعادلة التي جذورها
[١ - (١ + ω)^-١] ، [١ - (١ + ω^٢)^-١]

الحـــــــــــــل

الجذر الأول [١ - (-ω^٢)^-١]
[١ - $\frac{١}{-ω^٢}$]^-١ = [١ + $\frac{١}{ω^٢}$]^-١
= (١ + ω)^-١ = (-ω^٢)^-١ = $\frac{-١}{ω^٢}$ = -ω

الجذر الثاني = [١ - (١+ω)^-١]^-١

الجذر الثاني [١ - (- ω)^-١]^-١

[١ - ١/ω]^-١ = (١ + ١/ω)^-١

الجذر الثاني = (١+ω٢)^-١ = (- ω)^-١ = ١/(-ω)

= ω٣/(-ω) = - ω٢

مجموع الجذرين = - ω- ω٢ = ١

حاصل ضرب الجذرين = - ω × - ω٢ = ω٣ = ١

المعادلة هي

س٢ - (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

س٢ - س + ١ = ٠

رقم ٧٠:- إذا كانت ω أحد الجذرين التكعيبيين المركبين للواحد الصحيح فأوجد قيمة :-

أولاً:- ω - ω٢

ثانياً:- [(أ+بω+ω٢ جـ)/(جـ+ω٢ب) - (جـ+ω٢ب)/(أ+بω+ω٢جـ)]^٢

الحـــــــــل

أولاً:- ω - ω٢ = ± √٣ ت

ثانياً:- [(أ+بω+ω٢جـ)/(ω٢أ+ب+ωجـ) - (جـ+ω٢ب)/(ب+ωجـ)]^٢

[(أ+بω+ω٢جـ)/(أω٢+ب+ωجـ) - (جـ+ω٢ب)/(ب+جـω)]^٢

= (ω-ω٢)^٢ = (± √٣ ت)^٢ = ٣ت^٢ = ٣ × -١ = -٣

رقم ٧١ :- برهن علي أن أولاً

جتاθ = (هـ^تθ + هـ^-تθ)/٢

جاθ = (هـ^تθ - هـ^-تθ)/٢ت

الطرف الأيسر = (هـ^تθ + هـ^-تθ)/٢

= ١/٢ [هـ^تθ + ١/٢ هـ^-θت = ١/٢ [هـ^θت + هـ^-θت]

= ١/٢ [جتاθ + ت جاθ + جتا -θ+ ت جا -θ]

= ١/٢ [جتاθ + ت جاθ + جتا θ- ت جا θ]

= ١/٢ × ٢ جتاθ = جتاθ = الأيمن

ثانياً الأيسر :- (هـ^تθ - هـ^-تθ)/٢ت

١/٢ت [هـ^تθ - هـ^-تθ]

١/٢ت [(جتاθ+ت جاθ) – (جتا-θ+ت جا-θ)]

١/٢ت [جتاθ + ت جاθ - جتاθ- ت جا-θ]

١/٢ت [جتاθ + ت جاθ - جتاθ+ ت جاθ]

١/٢ت × ٢ت جاθ = جاθ = الأيمن

رقم ٧٢:- ع ، ع١ عددان مركبان

ع = س + ص ت

فاذا كان ع = ع١ + ١/ع١

ع١ = ل هـ^تθ

أوجد كلا من س ، ص بدلا له ل ، θ

الحـــــــــل

ع = س + ص ت ، ع١ = ل هـ^تθ

= س + ص ت

$$ع_١ + \frac{١}{ع_١} = س + ص ت$$

$$ل هـ^{ت\theta} + \frac{١}{ل هـ^{ت\theta}} = س + ص ت$$

$$ل هـ^{ت\theta} + \frac{١}{ل} هـ^{-ت\theta} = س + ص ت$$

$$ل(جتا\theta + ت جا\theta) + \frac{١}{ل}(جتا-\theta + ت جا-\theta)$$

$$= س + ص ت$$

$$ل جتا\theta + ل ت جا\theta + \frac{١}{ل} جتا\theta - \frac{١}{ل} ت جا\theta$$

$$= س + ص ت$$

$$(ل جتا\theta + \frac{١}{ل} جتا\theta) + (ل جا\theta - \frac{١}{ل} جا\theta) ت$$

$$= س + ص ت$$

$$س = ل جتا\theta + \frac{١}{ل} جتا\theta$$

$$س = جتا\theta (ل + \frac{١}{ل})$$

$$ص = ل جا\theta - \frac{١}{ل} جا\theta$$

$$ص = جا\theta (ل - \frac{١}{ل})$$

رقم ٧٣:- إذا كان $أ هـ^{٢ ت\theta} + ب هـ^{-٢ ت\theta} = ٤ جتا ٢\theta - ٦ ت جا ٢\theta$

حيث أ ، ب ∈ ح فما قيمة كلا من أ ، ب

الحـــــــــل

$$أ هـ^{٢ ت\theta} + ب هـ^{-٢ ت\theta} = ٤ جتا ٢\theta - ٦ ت جا ٢\theta$$

$$أ[جتا ٢\theta + ت جا ٢\theta] + ب[جتا-٢\theta + ت جا-٢\theta] = ٤ جتا ٢\theta - ٦ ت جا ٢\theta$$

$$أ جتا ٢\theta + ت أ جا ٢\theta + ب جتا ٢\theta - ب ت جا ٢\theta = ٤ جتا ٢\theta - ٦ ت جا ٢\theta$$

$$أ جتا ٢\theta + ب جتا ٢\theta = ٤ جتا ٢\theta$$

$$أ + ب = ٤ \quad (١)$$

$$أ جا ٢\theta - ب جا ٢\theta = -٦ جا ٢\theta$$

$$أ - ب = -٦ \quad (٢)$$

بجمع المعادلتين ١ ، ٢ نجد أن

$$٢أ = -٢ \Longleftarrow أ = -١$$

$$أ + ب = ٤ \Longleftarrow -١ + ب = ٤ \Longleftarrow ب = ٥$$

رقم ٧٤:- حل المعادلة فى مجموعة الاعداد المركبة

$$(٢س+٣)^٦ - ٩(٢س+٣)^٣ + ٨ = ٠$$

الحـــــــــل

$$[(٢س+٣)^٣ - ١][(٢س+٣)^٣ - ٨] = ٠$$

$$(٢س+٣)^٣ - ١ = ٠$$

$$[(٢س+٣)-١][(٢س+٣)^٢ + (٢س+٣) + ١] = ٠$$

$$(٢س+٣-١)(٤س^٢ + ١٢س + ٩ + ٢س + ٣ + ١) = ٠$$

$$(٢س+٢)(٤س^٢ + ١٤س + ١٣) = ٠$$

$$\therefore ٢س + ٢ = ٠ \qquad س = -١$$

$(٤س^٢ + ١٤س + ١٣) = ٠$ ثم نحل بالقانون

$$س = \frac{-١٤ \pm \sqrt{١٩٦ - ٤ \times ٤ \times ١٣}}{٢ \times ٤}$$

$$س = \frac{-١٤ \pm \sqrt{-١٢}}{٨} = \frac{-١٤ \pm ٢\sqrt{٣}\, ت}{٨}$$

$$س = \frac{٢(-٧ \pm \sqrt{٣}\, ت)}{٨} = \frac{-٧ \pm \sqrt{٣}\, ت}{٤}$$

$$س = \frac{-١ + \sqrt{٣}\, ت - ٦}{٤}$$

$$س = \frac{-١ + \sqrt{٣}\, ت}{٢ \times ٢} - \frac{٦}{٤}$$

$$س = \frac{١}{٢} \omega - \frac{٣}{٢} = \frac{٢\omega - ٣}{٢}$$

$$واما أنا \ س = \frac{-٧ - \sqrt{٣}\, ت}{٤}$$

$$س = \frac{-١ - \sqrt{٣}\,ت - ٦}{٤} = \frac{-١ - \sqrt{٣}\,ت}{٤} - \frac{٦}{٤}$$

$$س = \frac{-١ - \sqrt{٣}\,ت}{٢ \times ٢} - \frac{٣}{٢}$$

$$س = \frac{١}{٢}\omega - \frac{٣}{٢} = \frac{\omega - ٣}{٢}$$

الجذور من القوس الأول هي

-١ ، $\frac{\omega^{٢} - ٣}{٢}$ ، $\frac{\omega - ٣}{٢}$ أما بالنسبة للقوس الثاني

$$(٢س + ٣)^{٣} - ٨ = ٠$$

$$[(٢س+٣) - ٢][(٢س+٣)^{٢} + ٢(٢س+٣) + ٤] = ٠$$

$$(٢س + ١)(٤س^{٢} + ١٦س + ١٩) = ٠$$

إما أن ٢س + ١ = ٠ $\qquad س = -\frac{١}{٢}$

إما أن (٤س٢+١٦س+١٩) = ٠

<u>فنلجأ إلي حلها بالقانون كما سبق</u>

$$س = \frac{-١٦ \pm \sqrt{٢٥٦ - ١٦ \times ١٩}}{٢ \times ٤}$$

$$س = \frac{-١٦ \pm \sqrt{-٤٨}}{٨} = \frac{-١٦ \pm ٤\sqrt{٣}\,ت}{٨}$$

$$س = \frac{-٤ \pm \sqrt{٣}\,ت}{٢} = \frac{-٤ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}$$

$$= \frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢} - \frac{٣}{٢} = \omega^{٢} - \frac{٣}{٢}$$

$$س = \frac{٢\omega^{٢} - ٣}{٢} \qquad س = \frac{-٤ - \sqrt{٣}\,ت}{٢}$$

$$= \frac{-١ - \sqrt{٣}\,ت}{٢} - \frac{٣}{٢} = \omega - \frac{٣}{٢} = \frac{٢\omega - ٣}{٢}$$

ثم نجمع جذور القوس الأول مع القوس الثاني

$$\left\{-١ ، \frac{\omega^{٢} - ٣}{٢} ، \frac{\omega - ٣}{٢} ، -\frac{١}{٢} ، \frac{٢\omega - ٣}{٢} ، \frac{٢\omega^{٢} - ٣}{٢}\right\}$$

<u>حل آخر</u>

$$[(٢س+٣)^{٣} - ٨][(٢س + ٣)^{٣} - ١] = ٠$$

$(٢س + ٣)^{٣} = ٨$ نحولة للصورة المثلثية

$(٢س + ٣) = [\sqrt[٣]{٨}$ (جتا٠ + ت جا٠)$]^{\frac{١}{٣}}$ وبأخذ الجذور

=(٢س +٣) = ٢ × الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

٢س + ٣ = ٢ × ١ $\qquad$ س = -١/٢

٢س + ٣ = $٢\omega^{٢}$ $\qquad س = \frac{٢\omega^{٢} - ٣}{٢}$

٢س+٣ = ٢ω $\qquad س = \frac{٢\omega - ٣}{٢}$

أما عند القوس الثاني

$$(٢س+٣)^{٣} = ١$$

٢س + ٣ = (جتا٠ + ت جا٠)$^{\frac{١}{٣}}$

٢س + ٣ = الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

٢س+٣ = ١ $\qquad$ س = -١

٢س + ٣ = $\omega^{٢}$ $\qquad س = \frac{\omega^{٢} - ٣}{٢}$

٢س+٣ = ω $\qquad س = \frac{\omega - ٣}{٢}$

الجذور هي

$$\left\{-١ ، \frac{\omega^{٢} - ٣}{٢} ، \frac{\omega - ٣}{٢} ، -\frac{١}{٢} ، \frac{٢\omega - ٣}{٢} ، \frac{٢\omega^{٢} - ٣}{٢}\right\}$$

<u>رقم ٧٥:</u>- إثبت أن

$(١ - \omega)^{٣ن} = (\omega - ١)^{٣ن}$ حيث ن عدد صحيح موجب فردي

<u>الحـــــــــل</u>

الأيمن = $(1 - \omega^2)^{3ن}$. بتعويض كان ω^2

$= [1 - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} ت)]^{3ن}$

$= [1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} ت]^{3ن}$

$= [\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} ت]^{3ن}$ نحوله للصورة المثلثية

$ل = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}}$ ، $جتا\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = 360 - 30 = 330 = \frac{33}{18}ط = \frac{11}{6}ط$

الأيمن $= (1 - \omega^2)^{3ن} = [\sqrt{3}(جتا \frac{11ط}{6} + ت جا \frac{11ط}{6})]^{3ن}$

$= (\sqrt{3})^{3ن} [جتا \frac{11ط}{2} + ت جا \frac{11ط}{2}]^{3ن}$ بطرح 4 من السعة

$= (\sqrt{3})^{3ن} [جتا \frac{3ن ط}{2} + ت جا \frac{3ن ط}{2}]$

الطرف الأيسر $= (\omega - 1)^{3ن}$ بعوض $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} ت$

$= (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} ت - 1)^{3ن}$

$= (-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} ت)^{3ن}$ نحوله للصورة المثلثية

$ل = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}}$ ، $جتا\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = 180 + 30 = \frac{210}{180}ط = \frac{7}{6}ط$

الطرف الأيسر $= [\sqrt{3}(جتا \frac{7ط}{6} + ت جا \frac{7ط}{6})]^{3ن}$

$= (\sqrt{3})^{3ن} [جتا \frac{21ط}{2} + ت جا \frac{21ط}{2}]$

$= (\sqrt{3})^{3ن} [جتا \frac{3ن ط}{2} + ت جا \frac{3ن ط}{2}]$ الطرفان متساويان

حل آخر

الأيسر $= (1 - \omega)^{3ن} = [(1 - \omega)^3]^{ن}$

$= [(1 - \omega)(1 + \omega^2 - 2\omega)]^{ن}$

$= [(1 - \omega)(-3\omega)]^{ن} = [3(\omega - \omega^2)]^{ن}$

$= 3^{ن} (\pm\sqrt{3} ت)^{ن} = (\pm 3\sqrt{3} ت)^{ن}$ (1)

الأيمن $= (1 - \omega^2)^{3ن} = [(1 - \omega^2)^3]^{ن}$

$[(1 - 2\omega^2 + \omega^4)(1 - \omega^2)]^{ن}$

$= [-3\omega^2(1 - \omega^2)]^{ن} = [3(-\omega^2 + \omega^4)]^{ن}$

$= [3(-\omega^2 + \omega)]^{ن} = [3(\omega - \omega^2)]^{ن}$

$= (3 \times \pm\sqrt{3} ت)^{ن} = (\pm 3\sqrt{3} ت)^{ن}$

الطرفان متساويان

رقم ٧٦:- إذا كان ١ ، ω ، ω^2 هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فاثبت أن

$$[\frac{أ + 1}{أ + (أ^2 + 1)\omega + أ\omega^2}]^6$$

لا يتوقف علي قيمة أ الحـــــــــل

$$[\frac{أ + 1}{أ + 2أ\omega + \omega + أ\omega^2}]^6 \quad \because 1 + أ\omega + أ\omega^2 = 0$$

$$[\frac{أ + 1}{-أ\omega + 2أ\omega + \omega}]^6$$

$$[\frac{أ + 1}{أ\omega + \omega}]^6 = [\frac{أ + 1}{\omega(أ + 1)}]^6$$

$$= (\frac{1}{\omega})^6 = \frac{1}{\omega^6} = 1$$

نظرا لأنه تم حذف أ من البسط والمقام بالاختصار فمهما كانت قيمة أ فان أ + ١ في البسط سوف تحذف مع أ + ١ في المقام ولا يتبقي أ علي الإطلاق المقدار لا يتوقف علي قيمة أ

رقم ٧٧:- حل المعادلة

$$\left(\frac{1+\text{ت س}}{1-\text{ت س}}\right)^{4} = \frac{1+\text{ت س}}{1-\text{ت س}} \quad \text{حيث س} \in \text{ح}$$

الحـــــــــــل

$$\left[\frac{1+\text{ت س}}{1-\text{ت س}}\right]^{4} - \left(\frac{1+\text{ت س}}{1-\text{ت س}}\right) = 0$$

$$\frac{1+\text{ت س}}{1-\text{ت س}}\left[\left(\frac{1+\text{ت س}}{1-\text{ت س}}\right)^{3} - 1\right] = 0$$

إما أن $\frac{1+\text{ت س}}{1-\text{ت س}} = 0 \Leftarrow 1+\text{ت س} = 0$

$$\text{س} = \frac{-1}{\text{ت}} = \frac{\text{ت}^{2}}{\text{ت}} = \text{ت} \quad (1)$$

إما أن $\left(\frac{1+\text{ت س}}{1-\text{ت س}}\right)^{3} = 1 \Leftarrow \frac{1+\text{ت س}}{1-\text{ت س}} = (1)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{1+\text{ت س}}{1-\text{ت س}}$ = الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

إما أن $\frac{1+\text{ت س}}{1-\text{ت س}} = \frac{-1+\sqrt{3}\,\text{ت}}{2}$ (الجذر الأول)

$2 + 2\text{س ت} = (-1+\sqrt{3}\,\text{ت})(1-\text{ت س})$

$2 + 2\text{س ت} = -1 + \text{ت س} + \sqrt{3}\,\text{ت} + \sqrt{3}\,\text{س}$

$\text{ت س} - \sqrt{3}\,\text{س} = -1 + \sqrt{3}\,\text{ت} - 2$ بالضرب × −1

$\sqrt{3}\,\text{س} - \text{ت س} = 3 - \sqrt{3}\,\text{ت}$

$\text{س}(\sqrt{3} - \text{ت}) = \sqrt{3}(\sqrt{3} - \text{ت})$

$\text{س} = \sqrt{3} \Leftarrow (2)$

إما أن $\frac{1+\text{ت س}}{1-\text{ت س}} = \frac{-1-\sqrt{3}\,\text{ت}}{2}$ (الجذر التكعيبي الثاني)

$2 + 2\text{ت س} = -1 - \sqrt{3}\,\text{ت} + \text{ت س} - \sqrt{3}\,\text{س}$

$\text{ت س} + \sqrt{3}\,\text{س} = -3 - \sqrt{3}\,\text{ت}$

$\text{س}(\sqrt{3} + \text{ت}) = -\sqrt{3}(\sqrt{3} + \text{ت})$

$\text{س} = -\sqrt{3} \Leftarrow (3)$

إما أن $\frac{1+\text{ت س}}{1-\text{ت س}} = 1$ وهو الجذر التكعيبي الثالث

$1 + \text{ت س} = 1 - \text{ت س} \qquad 2\text{ت س} = 0$

$\text{س} = 0 \Leftarrow (4)$ ∴ مجموعة الحل $\{0, \text{ت}, \pm\sqrt{3}\}$

رقم ٧٨ :- حل المعادلة

$$\text{س} = 1 + \omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}}$$

حيث ω هي أحد الجذور التكعيبية للواحد

الحـــــــــــل

$\text{س} = 1 + \omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}}$ بالضرب في $\omega^{\text{س}}$ مرة أخرى

مرة أخرى $\omega^{2\text{س}}$ نجد $\omega^{\text{س}} = \omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}} + \omega^{3\text{س}}$

∴ $\omega^{\text{س}} = \omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}} + 1$ بالضرب × $\omega^{2\text{س}}$

$\omega^{2\text{س}} = \omega^{2\text{س}} + \omega^{3\text{س}} + \omega^{4\text{س}}$

$\omega^{2\text{س}} = \omega^{2\text{س}} + \omega^{\text{س}} + 1$

مما سبق يمكن وضع المعادلات كالآتي :-

$1 = \omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}} \quad (1)$

$\omega^{\text{س}} = 1 + \omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}} \quad (2)$

$\omega^{2\text{س}} = 1 + \omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}} \quad (3)$

بجمع المعادلات الثلاث

$\text{س}(1 + \omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}}) = 3(1 + \omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}})$

$\text{س} = 3$

رقم ٧٩:- س=١+جتاθ+جتا٢θ+.....+جتانθ

ص= جاθ+جا٢θ+..... جانθ

فأثبت أن س+ص= هو مجموع متتابعة هندسية اساسها = عدد مركب مقياسه الواحد الصحيح ومن ثم استنتج قيمة س ، ص عند

$\theta = \frac{\pi}{3}$ ، ن = ١٨

الحـــــــــــل

س+ ص ت =١ + (جتاθ + ت جاθ)

+(جتا٢θ + ت جا٢θ)

س+ ص ت = ١+(جتا θ + ت جا θ)

+(جتا θ + ت جا θ)^{2}+(جتا θ+ت جا θ)^{3}

+ ..... (جتا θ + ت جا θ)^{ن}

وهي تمثل متتابعة هندسية فيها أ = ١ وأساسها ر = جتا θ + ت جا θ ومقياس الأساس هو ١ وعدد الحدود ن

$$\text{جـ} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١} = \frac{(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)^{\text{ن}} - ١}{\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta - ١}$$

عند $\theta = \frac{\text{ط}}{٢}$ ، ن = ١٨ يكون

$$\text{جـ} = \frac{\left(\text{جتا}\,\frac{\text{ط}}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{\text{ط}}{٢}\right)^{١٨} - ١}{\text{جتا}\,\frac{\text{ط}}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{\text{ط}}{٢} - ١}$$

$$\text{س} + \text{ص ت} = \frac{(٠ + \text{ت})^{١٨} - ١}{٠ + \text{ت} - ١} = \frac{\text{ت}^{١٨} - ١}{\text{ت} - ١}$$

$$\text{س} + \text{ص ت} = \frac{\text{ت}^{٢} - ١}{\text{ت} - ١} = \frac{-١ - ١}{\text{ت} - ١} = \frac{-٢}{\text{ت} - ١}$$

$$\text{س} + \text{ص ت} = \frac{-٢(\text{ت} + ١)}{(\text{ت} - ١)(\text{ت} + ١)} = ١ + \text{ت}$$

س = ١ ، ص = ١

[illegible] من امتحانات الثانوية العامة ص ٧٦

رقم ـ مصر – دور أول ٢٠٠٢

إثبت أن $\left(\frac{\omega}{1-\omega} - \omega^{2}\right)^{2} = \frac{-4}{3}$

الحل

$$\text{الأيمن} = \left(\frac{\omega - \omega^{2} + \omega^{3}}{1 - \omega}\right)^{2}$$

$$= \left(\frac{\omega - \omega^{2} + 1}{1-\omega}\right)^{2} = \left(\frac{-\omega^{2} - \omega^{2}}{1-\omega}\right)^{2} = \left(\frac{-2\omega^{2}}{1-\omega}\right)^{2}$$

$$= \frac{4\omega^{4}}{1 - 2\omega + \omega^{2}} = \frac{4\omega}{-\omega - 2\omega} = \frac{4\omega}{-3\omega} = \frac{-4}{3}$$

= الأيسر

رقم ٢ :- مصر – دور أول ٢٠٠٢

ضع العدد $\text{ع} = \frac{-٨}{١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}}$ على الصورة المثلثية

ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع في الصورة الأسية

الحل

$$\text{ع} = \frac{-٨(١ - \sqrt{٣}\,\text{ت})}{(١ + \sqrt{٣}\,\text{ت})(١ - \sqrt{٣}\,\text{ت})} = \frac{-٨(١ - \sqrt{٣}\,\text{ت})}{١ + ٣}$$

$$= \frac{-٨(١ - \sqrt{٣}\,\text{ت})}{٤} = -٢ + ٢\sqrt{٣}\,\text{ت} \quad \text{في الربع الثاني}$$

ل = ٤ ، $\text{جتا}\,\theta = \frac{-١}{٢}$ ، $\text{جا}\,\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$$\theta = ١٨٠ - ٦٠ = \frac{١٢٠\,\text{ط}}{١٨٠} = \frac{٢\text{ط}}{٣}$$

$$\text{ع} = ٤\left(\text{جتا}\,\frac{٢\text{ط}}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{٢\text{ط}}{٣}\right)$$

$$\text{ع} = ٤\,\text{هـ}^{\frac{٢\text{ط}}{٣}\text{ت}}$$

$$\text{ع} = \left[٢\,\text{هـ}^{\left(\frac{٢\text{ط}}{٣} + ٢\text{ط ر}\right)\text{ت}}\right]^{\frac{١}{٢}}$$

$$\text{ع}^{\frac{١}{٢}} = \left[٢\,\text{هـ}^{\left(\frac{٢\text{ط} + ٦\text{ط ر}}{٣}\right)\text{ت}}\right]^{\frac{١}{٢}}$$

$$\text{ع}^{\frac{١}{٢}} = ٢\,\text{هـ}^{\frac{٢\text{ط} + ٦\text{ط ر}}{٦}\text{ت}}$$

عند ر = ٠ الجذر الأول = $٢\,\text{هـ}^{\frac{\text{ط}}{٣}\text{ت}}$

عند ر = ١ الجذر الثاني = $٢\,\text{هـ}^{\frac{٤\text{ط}}{٣}\text{ت}}$

رقم ٣:- مصر دور ثاني ٢٠٠٢

اثبت أن $\frac{2ت}{3}$ هي أحد الجذرين التربيعيين للمقدار

$$\frac{1 - 3\omega - 3\omega^2}{1 + 10\omega + 10\omega^2}$$

الحـــــــــل

$$\frac{1 - 3\omega - 3\omega^2}{1 + 10\omega + 10\omega^2} = \frac{1 + 3}{1 - 10} = \frac{4}{-9}$$

$$\sqrt{\frac{1 - 3\omega - 3\omega^2}{1 + 10\omega + 10\omega^2}} = \sqrt{\frac{-4}{9}} = \sqrt{\frac{4ت^2}{9}}$$

$$= \pm \frac{2ت}{3}$$ أحد الجذور $= \frac{2ت}{3}$

رقم ٤:- مصر دور ثاني ٢٠٠٢

برهن أن $ى = \frac{\pi}{2} - 2\theta$ أو بأية طريقة أخري

اثبت أن $\left[\frac{1 + جا ى - ت\ جتا ى}{1 + جا ى + ت\ جتا ى}\right]^{ن} = جتا ن\left(\frac{\pi}{2} - ى\right) + ت\ جا ن\left(\frac{\pi}{2} - ى\right)$

الحـــــــــل

برهن أن $ى = \frac{\pi}{2} - 2\theta$

$$\left[\frac{1 + جا\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) - ت\ جتا\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}{1 + جا\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) - ت\ جتا\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}\right]^{ن}$$

$$= \left[\frac{1 + جتا 2\theta + ت\ جا 2\theta}{1 + جتا 2\theta - ت\ جا 2\theta}\right]^{ن}$$

$$\left[\frac{1 + 2جتا^2\theta - 1 + 2جا\theta\ جتا\theta}{1 + 2جتا^2\theta - 1 - 2جا\theta\ جتا\theta}\right]^{ن}$$

$$\left[\frac{2جتا^2\theta + 2جا\theta\ جتا\theta}{2جتا^2\theta - 2جا\theta\ جتا\theta}\right]^{ن}$$

$$= \left[\frac{2جتا\theta\ (جتا\theta + جا\theta)}{2جتا\theta\ (جتا\theta - جا\theta)}\right]^{ن}$$

$$= \left[\frac{جتا\theta + ت\ جا\theta}{جتا\theta - ت\ جا\theta}\right]^{ن}$$

$$= \left[جتا 2\theta + ت\ جا 2\theta\right]^{ن}$$ لكن $2\theta = \frac{\pi}{2} - ى$

$$= \left[جتا\left(\frac{\pi}{2} - ى\right) + ت\ جا\left(\frac{\pi}{2} - ى\right)\right]^{ن}$$

$$= جتا ن\left(\frac{\pi}{2} - ى\right) + ت\ جا ن\left(\frac{\pi}{2} - ى\right)$$

رقم ٥:- مصر مايو ١٩٩٥

إذا كان $1، \omega، \omega^2$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

فاثبت أن $\frac{1 - \omega ت}{\omega + ت} - \frac{ت}{\omega - ت} + \omega^2 = 0$

الحـــــــــل

الأيمن =

$$\frac{(1 - \omega ت)(\omega - ت) - ت(\omega + ت)}{(\omega + ت)(\omega - ت)} + \omega^2$$

$$\frac{\omega - ت - \omega^2 ت - \omega ت + 1}{\omega^2 + 1} + \omega^2$$

$$\frac{1 - ت(1 + \omega + \omega^2)}{-\omega} + \omega^2 = \frac{-1 + 0}{-\omega} + \omega^2 =$$

$$= \frac{-\omega^3}{-\omega} + \omega^2 = -\omega^2 + \omega^2 = 0$$

رقم ٦ :- مصر مايو ٩٥

إذا كان

$ع = \left(\frac{١+ت}{١-ت}\right)^{٥}$ ضع ع علي الصورة المثلثية

ثم أوجد الجذور التربيعية للعدد ع

الحـــــــــــل

$\frac{(١+ت)}{(١-ت)} = \frac{(١+ت)(١+ت)}{(١-ت)(١+ت)}$

$\frac{١+ت}{١-ت} = \frac{١+٢ت-١}{١-ت^{٢}} = \frac{٢ت}{٢} = ت$

$\frac{١+ت}{١-ت} = ت$ تقع علي محور الصادات الموجب

$\theta = \frac{ط}{٢}$

$\frac{١+ت}{١-ت} = جتا\frac{ط}{٢} + ت\,جا\frac{ط}{٢}$

$\left(\frac{١+ت}{١-ت}\right)^{٥} = \left(جتا\frac{ط}{٢} + ت\,جا\frac{ط}{٢}\right)^{٥}$

$ع = جتا\frac{٥ط}{٢} + ت\,جا\frac{٥ط}{٢} = جتا\frac{ط}{٢} + ت\,جا\frac{ط}{٢}$

$ع^{\frac{١}{٢}} = \left[جتا\left(\frac{ط}{٢} + ٢ط ر\right) + ت\,جا\left(\frac{ط}{٢} + ٢ط ر\right)\right]^{\frac{١}{٢}}$

$ع^{\frac{١}{٢}} = \left[جتا\frac{ط + ٤ط ر}{٢} + ت\,جا\frac{ط + ٤ط ر}{٢}\right]^{\frac{١}{٢}}$

$ع^{\frac{١}{٢}} = جتا\frac{ط + ٤ط ر}{٤} + ت\,جا\frac{ط + ٤ط ر}{٤}$

عند ر = ٠ الجذر الأول = $جتا\frac{ط}{٤} + ت\,جا\frac{ط}{٤}$

عند ر = ١ الجذر الثاني = $جتا\frac{٥ط}{٤} + ت\,جا\frac{٥ط}{٤}$

رقم ٧:- مصر أغسطس ٩٨ إثبت أن

$\frac{٢ + ω}{٢ω - ω^{٢}} + \frac{٢ + ٢ω}{٢ω^{٢} - ω} = \frac{٣}{٧}$

الحـــــــــــل الأيمن=

$\frac{(٢+ω)(٢ω-٢)+(ω-٢ω)(٢+٢ω)}{(٢ω-ω^{٢})(٢ω^{٢}-ω)}$

$\frac{٤ω^{٢}-٢ω+٢-ω^{٢}+٤ω-٢ω^{٢}+٢-ω}{٤-٢ω^{٢}-٢ω^{٢}+ω}$

$= \frac{٤ + ω + ω^{٢}}{٢ + ٥} = \frac{٤ - ١}{٧} = \frac{٣}{٧}$ = الأيسر

رقم ٨:- مصر أغسطس ١٩٩٨ إذا كان

$ع = \frac{٢}{\sqrt{٣} + ت}$ ضع ع علي الصورة المثلثية

ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع

الحـــــــــــل

$ع = \frac{٢(\sqrt{٣} - ت)}{(\sqrt{٣} + ت)(\sqrt{٣} - ت)}$

$ع = \frac{٢(\sqrt{٣} - ت)}{٣ - ت^{٢}} = \frac{٢(\sqrt{٣} - ت)}{٤}$

$ع = \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}ت$ ل = ١

$جتا\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\theta = ٣٦٠ - ٣٠ = ٣٣٠$

$\theta = \frac{٣٣٠ ط}{١٨٠} = \frac{١١ط}{٦}$

$ع = جتا\frac{١١ط}{٦} + ت\,جا\frac{١١ط}{٦}$

$ع^{\frac{١}{٣}} = \left[جتا\left(\frac{١١ط}{٦} + ٢ط ر\right) + ت\,جا\left(\frac{١١ط}{٦} + ٢ط ر\right)\right]^{\frac{١}{٣}}$

$$ع^{\frac{1}{3}} = \left[جتا \frac{11ط + 12ط ر}{6} + ت جا \frac{11ط + 12ط ر}{6} \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$ع^{\frac{1}{3}} = جتا \frac{11ط + 12ط ر}{18} + ت جا \frac{11ط + 12ط ر}{6}$$

عند ر = ٠ الجذر الأول = $جتا \frac{11ط}{6} + ت جا \frac{11ط}{6}$

عند ر = ١ الجذر الثاني = $جتا \frac{23ط}{6} + ت جا \frac{23ط}{6}$

عند ر = ٢ الجذر الثالث = $جتا \frac{35ط}{6} + ت جا \frac{35ط}{6}$

رقم ٩ :- مصر مايو ١٩٩٧ إثبت أن

$$\left(1 + 2\omega - \frac{2}{\omega} \right) \left(1 - \omega^2 + \frac{2}{\omega} \right) + \frac{1}{\omega^2} = 1$$

الحـــــــــــل

$$الأيمن = \left(-\omega - \frac{2\omega^2}{\omega} \right) \left(1 - \omega^2 + \frac{2\omega^2}{\omega} \right) + \frac{\omega^3}{\omega^2}$$

$$= (-\omega - 2\omega^2)(1 - \omega^2 + 2\omega^2) + \omega$$
$$= (-\omega - 2\omega^2)(1 + \omega^2) + \omega$$
$$= (-\omega - 2\omega^2)(-\omega) + \omega$$
$$= \omega^2 + 2\omega^3 + \omega$$
$$= \omega^2 + 2 + \omega$$
$$= (\omega^2 + \omega) + 2$$
$$= -1 + 2 = 1 = الأيسر$$

رقم :- إذا كان $ع = \frac{-4}{1 - \sqrt{3}\, ت}$ اكتب ع علي الصورة المثلثية

ثم إثبت أن $ع^6 = 64$

الحـــــــــــل

$$ع = \frac{-4(1 + \sqrt{3}\, ت)}{(1 - \sqrt{3}\, ت)(1 + \sqrt{3}\, ت)}$$

$$ع = \frac{-4(1 + \sqrt{3}\, ت)}{1 + 3} = -1 - \sqrt{3}\, ت$$

$$ع = 2 \left(جتا \frac{4ط}{3} + ت جا \frac{4ط}{3} \right)$$

$$ع^6 = \left[2 \left(جتا \frac{4ط}{3} + ت جا \frac{4ط}{3} \right) \right]^6$$

$$ع^6 = 64 (جتا 8ط + ت جا 8ط)$$

$$ع^6 = 64 (جتا 0 + ت جا 0)$$

$$ع^6 = 64 (1 + 0) = 64$$

رقم ١٠ :- مصر مايو ١٩٩٩ إذا كانت

$$ع_1 = \left(جتا \frac{5ط}{6} + ت جا \frac{5ط}{6} \right)$$

$$ع_2 = \left(جتا \frac{ط}{2} + ت جا \frac{ط}{2} \right)$$ ضع $ع_1 ع_2$ علي الصورة الجبرية ثم أوجد الجذور التربيعية للعدد $ع_1 ع_2$ في الصورة الأسيه

— الحل —

$$ع_1 ع_2 = 4 \left(جتا \frac{5ط}{6} + ت جا \frac{5ط}{6} \right) \left(جتا \frac{ط}{2} + ت جا \frac{ط}{2} \right)$$

$$ع_1 ع_2 = 4 \left[جتا \left(\frac{5ط}{6} + \frac{ط}{2} \right) + ت جا \left(\frac{5ط}{6} + \frac{ط}{2} \right) \right]$$

$$ع_1 ع_2 = 4 (جتا 240 + ت جا 240)$$

$$ع_1 ع_2 = 4 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} ت \right)$$

$$ع_1 ع_2 = -2 - 2\sqrt{3}\, ت$$

لكن $ع_1 ع_2 = 4 \left(جتا \frac{4ط}{3} + ت جا \frac{4ط}{3} \right)$

$$ع_1 ع_2 = 4 هـ^{\frac{4ط}{3} ت}$$

$$(ع_1 ع_2)^{\frac{1}{2}} = 2 \left[هـ^{\left(\frac{4ط}{3} + 2ط ن \right) ت} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{ع_1 ع_2} = ٢ [هـ^{\frac{(٤ط + ٦ط ر)}{٣} ت}]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{ع_1 ع_2} = ٢ هـ^{\frac{(٤ط + ٦ط ر) ت}{٦}}$$

$$\frac{٤ط ت}{٦}$$

عند ر = ٠ الجذر الأول = ٢ هـ

$$\frac{١٠ط ت}{٦}$$

عند ر = ١ الجذر الثاني = ٢ هـ

رقم ١١ :- مصر أغسطس ١٩٩٩ إذا كان

$$ع = \frac{٢ (١ + ت)}{ت - ١}$$ ضع العدد ع علي الصورة المثلثية

ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع في الصورة الأسية

الحل

$$ع = \frac{٢ (١ + ت)(ت + ١)}{(ت - ١) (ت + ١)} = \frac{٢ (١ + ت)^2}{ت^2 - ١}$$

$$= \frac{٢ (١ + ٢ت - ١)}{-٢} = -٢ت$$ يقع علي محور الصادات السالب

$$\theta = \frac{٣ط}{٢}$$

$$ع = ٢ (جتا \frac{٣ط}{٢} + ت جا \frac{٣ط}{٢})$$

$$ع^{\frac{1}{2}} = \sqrt{٢} [جتا \frac{٣ط}{٢} + ٢ ط ر + ت جا \frac{٣ط}{٢} + ٢ط ر]^{\frac{1}{2}}$$

$$ع^{\frac{1}{2}} = \sqrt{٢} [جتا \frac{٣ط + ٤ط ر}{٢} + ت جا \frac{٣ط + ٤ط ر}{٢}]$$

$$ع^{\frac{1}{2}} = \sqrt{٢} [جتا \frac{٣ط + ٤ط ر}{٤} + ت جا \frac{٣ط + ٤ط ر}{٤}]$$

$$\frac{٣ط + ٤ط ر}{٤} ت$$

$$ع = \sqrt{٢} هـ^{\frac{٣ط}{٤} ت}$$

عند ر = ٠ الجذر الأول = $\sqrt{٢}$ هـ

$$\frac{٧ط}{٤} ت$$

عند ر = ١ الجذر الثاني = $\sqrt{٢}$ هـ

رقم ١٢ :- مصر دور ثاني ٢٠٠٣

إذا كان $ع_1 = ١ - \sqrt{٣} ت$ ، $ع_2 = ١ + ت$

فأوجد العدد $ع = \frac{ع_1}{ع_2}$ في الصورة الأسية ثم

إثبت أن $ع^{١٢}$ عدد حقيقي

الحل

$ع = ١ - \sqrt{٣} ت$ نحوله للصورة المثلثية

$$ع = ٢ (جتا \frac{٥٠ط}{٣} + ت جا \frac{٥٠ط}{٣})$$

$ع_2 = ١ + ت$ نحوله للصورة المثلثية

$$ع_2 = \sqrt{٢} (جتا \frac{ط}{٤} + ت جا \frac{ط}{٤})$$

لكن $ع = \frac{ع_1}{ع_2}$

$$ع = \frac{٢ (جتا \frac{٥٠ط}{٣} + ت جا \frac{٥٠ط}{٣})}{\sqrt{٢} (جتا \frac{ط}{٤} + ت جا \frac{ط}{٤})}$$

$$ع = \sqrt{٢} [جتا (\frac{٥٠ط}{٣} - \frac{ط}{٤}) + ت جا (\frac{٥٠ط}{٣} - \frac{ط}{٤})]$$

$$ع = \sqrt{٢} [جتا \frac{١٧ط}{١٢} + ت جا \frac{١٧ط}{١٢}]$$

$$ع = \sqrt{٢}\, هـ^{\frac{١٧ط ت}{١٢}}$$

$$ع^{١٢} = \left[\sqrt{٢}\left(هـ^{\frac{١٧ط ت}{١٢}}\right)\right]^{١٢}$$

$$ع^{١٢} = ٦٤\, هـ^{١٧ط ت}$$

$$ع^{١٢} = ٦٤\, هـ^{ط ت}$$

$$ع^{١٢} = ٦٤\,(جتا\, ط + ت\, جا\, ط)$$

$$ع^{١٢} = ٦٤\,(-١ + ٠) = -٦٤$$ عدد حقيقي

رقم ١٣:- مصر دور ثاني ٢٠٠٣

إذا كان $ع = \dfrac{\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} + ت}$

فأوجد ① المقياس والسعة للعدد ع

② الجذور التكعيبية للعدد المركب ع في الصورة الأسية

الحـــــــل

$$ع = \frac{\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} + ت}$$ بالضرب في مرافق المقام

$$ع = \frac{(\sqrt{٣} - ت)(\sqrt{٣} - ت)}{(\sqrt{٣} + ت)(\sqrt{٣} - ت)}$$

$$ع = \frac{٣ - ٢\sqrt{٣}\, ت + ت^{٢}}{٣ - ت^{٢}}$$

$$ع = \frac{٣ - ٢\sqrt{٣}\, ت - ١}{٣ + ١} = \frac{٢ - ٢\sqrt{٣}\, ت}{٤}$$

$$= \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\, ت \qquad ل = ١$$

$$جتا\, ه = \frac{١}{٢} \qquad ه = ٣٦٠ - ٦٠ = \frac{-٣ط}{١٨٠}$$

$$ه = \frac{٥ط}{٣} \qquad \therefore ع = هـ^{\frac{٥ط}{٣} ت}$$

المقياس = ١ والسعة $\frac{٥ط}{٣}$

$$ع = \left[هـ^{\frac{١}{٣}\left(\frac{٥ط}{٣} + ٢ط ر\right) ت}\right]^{\frac{١}{٣}}$$

$$ع = \left[هـ^{\frac{١}{٣}\left(\frac{٥ط + ٦ط ر}{٣}\right) ت}\right]^{\frac{١}{٣}}$$

$$ع = \left[هـ^{\left(\frac{٥ط + ٦ط ر}{٩}\right) ت}\right]$$

عند ر = ٠ الجذر الأول = $هـ^{\frac{٥ط ت}{٩}}$

عند ر = ١ الثاني = $هـ^{\frac{١١ط ت}{٩}}$

عند ر = ٢ الثالث = $هـ^{\frac{١٧ط ت}{٩}}$

والله المستعان والموفق

مع تحيات المنوفي للرياضيات

أسئلة إنتاج الاجابة علي المحددات

رقم ١:- اثبت بدون فك المحدد ان

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٧ \\ ١ & ٤ & -٢ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٧ \\ ٢ & ١ & -٤ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٧ \\ ١ & ٢ & ٦ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٤ & ٥ & ٧ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ -٢ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$$

الحـــــــل

بجمع المحدد الأول علي الثاني وترك الثالث

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٧ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٤ & ٥ & ٧ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ -٢ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٧ & ٥ & ٧ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ٢ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$$

لأن $ع_{١} = ع_{٣}$

رقم ٢:- اثبت بدون فك المحدد أن

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & -٢ \\ ٦ & -٣ & ٩ \\ ١ & ٥ & ١ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -٢ & ١ & -٣ \\ ٩ & ٦ & ٣ \\ ١ & ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ٠$$

بتدبيل ص$_2$ مكان ص$_1$ للمحدد الثاني

٣	٢	١		٩	٦	٣
٦	-٣	٩	+	-٢	١	-٣
١	٤	٥		١	٤	٥

	٣	٢	١		٣	٢	١
٣	٢	-١	٣	+ ٣	-٢	١	-٣
	١	٤	٥		١	٤	٥

بأخذ -١ عامل مشترك من ص$_2$ للمحدد الثاني

	٣	٢	١		٣	٢	١
٣	٢	-١	٣	- ٣	٢	-١	٣
	١	٤	٥		١	٤	٥

المحدد الأول هو نفسه المحدد الثاني فيكون الناتج = ٠

رقم ٣:- بدون فك المحدد اثبت أن

س-ع	س- ص	ص
س-ع	ص	س- ص
- ع	س – ص	س+ ص

= س(٢س-ع)(٢ص- س)

جمع الأعمدة الثلاثة علي العمود الأول

٢س – ع	س- ص	ص
٢س – ع	ص	س – ص
٢س – ع	س – ص	س + ص

(٢س – ع) | ١ | س – ص | ص | ع$_3$ + ع$_2$
| ١ | ص | س – ص |
| ١ | س – ص | س + ص |

(٢س – ع) | ١ | س | ص |
| ١ | س | س – ص |
| ١ | ٢س | س + ص |

س (٢س – ع) | ١ | ١ | ص | - ص+ص
| ١ | ١ | س – ص | ١ ٢
| ١ | ٢ | س + ص | - ص+ ص
١ ٣

س (٢س – ع) | ١ | ١ | ص |
| ٠ | ٠ | س -٢ص |
| ٠ | ١ | س |

بتبديل ص$_2$ مكان ص$_3$

- س (٢س – ع) | ١ | ١ | ص |
| ٠ | ١ | س |
| ٠ | ٠ | س -٢ص |

- س(٢س-ع) (س – ٢ص)
= س (٢س – ع) (٢ص – س) = الأساسي

رقم ٤:- اثبت أن

س	ص	ع	١
ص	ع	س	١
ع	س	ص	١

=(س– ص)(ص-ع)(ع- س)

الحـــــــــــــــــل

بضرب ص$_1$ × -١ ثم جمعها علي ص$_2$ ، ص$_3$

س	ص	ع	١
ص- س	ع (س- ص)	٠
ع – س	ص(س –ع)	٠

ثم أخذ عامل مشترك

(س- ص)(ع – س) | س | ص | ع | ١
| -١ | ع | ٠
| ١ | - ص | ٠

ثم ص$_2$ + ص$_3$ نجد أن

(س – ص)(ع – س) | س | ص | ع | ١
| -١ | ع | ٠
| ٠ | ع – ص | ٠

بتبديل ع$_1$ مكان ع$_3$

- (س – ص)(ع – س) | ١ | ص | ع | س
| ٠ | ع | -١
| ٠ | ع – ص | ٠

ثم بتبديل ع$_2$ مكان ع$_3$

(س – ص) (ع – س) | ١ | س | ص | ع
| ١ | -١ | ع
| ٠ | ٠ | ع – ص

= (س – ص) (ع- س) × -١ (ع – ص)
= (س – ص) (ع – س) (ص – ع)

رقم ٥:- إثبت بدون فك المحدد أن

أ^3	ب حـ	أ ب^2
ب أ^2	حـ أ	ب^3
حـ أ^2	أ ب	حـ ب^2

= صفر

الحـــــــــــــــــل

بأخذ عامل مشترك أ^2 من ع$_1$ ، ب^2 من ع$_3$

أ^2 ب^2 | أ | ب حـ | أ |
| ب | حـ أ | ب |
| حـ | أ ب | حـ |

= أ^2 ب^2 × ٠ = ٠

لأن ع$_1$ = ع$_3$

رقم ٦ :- إثبت بدون فك المحدد أن

أ - ب - جـ	٢أ	٢أ
٢ب	ب - جـ - أ	٢ب
٢جـ	٢ جـ	جـ - ب - أ

= (أ + ب + جـ)٣

الحـــــــــــل

بجمع الصفوف الثلاثة علي الصف الأول

أ + ب + جـ	أ + ب + جـ	أ + ب + جـ
٢ب	ب - جـ - أ	٢ب
٢ب	٢جـ	جـ - ب - أ

(أ + ب + جـ) | ١ ١ ١ ؛ ٢ب ب - جـ - أ ٢ب ؛ ٢جـ ٢جـ جـ - ب - أ |

- ع + ع - ع + ع
١ ٢ ١ ٣

(أ + ب + جـ) | ١ ٠ ٠ ؛ ٢ب - (أ + ب + جـ) ٠ ؛ ٢جـ ٠ - (أ + ب + جـ) |

= (أ + ب + جـ) (أ + ب + جـ) (أ + ب + جـ)

= (أ + ب + جـ)٣

رقم ٧:- بدون فك المحدد أوجد قيمة

س + ص	ع	م + ع
ص + ع	س	م + س
ع + س	ص	م + ص

الحـــــــــــل

بجمع العمود الثاني علي العمود الأول

س + ص + ع	ع	م + ع
س + ص + ع	س	م + س
س + ص + ع	ص	م + ص

(س + ص + ع) | ١ ع م + ع ؛ ١ س م + س ؛ ١ ص م + ص | - ع٢ + ع٣

(س + ص + ع) | ١ ع م ؛ ١ س م ؛ ١ ص م |

م (س + ص + ع) | ١ ع ١ ؛ ١ س ١ ؛ ١ ص ١ | ع١ = ع٢ المحدد = ٠

م (س + ص + ع) × ٠ = ٠

رقم ٨ :- إذا كان | س ص ع ؛ ل م ن ؛ ك ط هـ | = ١٠

فأوجد القيمة العددية للمحدد

٢س	٢ص	٢ع
٥ل + س	٥م + ص	٥ن + ع
٧ك - ٣ل	٧ط - ٣م	٧هـ - ٣ن

الحـــــــــــل

بأخذ ٢ عامل مشترك من ص١ ثم ضربه في -١

وجمعه علي ص٢

٢ | س ص ع ؛ ٥ل + س ٥م + ص ٥ن + ع ؛ ٧ك - ٣ل ٧ط - ٣م ٧هـ - ٣ن |

٢ | س ص ع ؛ ٥ل ٥م ٥ن ؛ ٧ك - ٣ل ٧ط - ٣م ٧هـ - ٣ن |

٢ × ٥ | س ص ع ؛ ل م ن ؛ ٧ك - ٣ل ٧ط - ٣م ٧هـ - ٣ن |

٣ ص٢ + ص٣

١٠ | س ص ع ؛ ل م ن ؛ ٧ك ٧ط ٧هـ |

٧٠ | س ص ع ؛ ل م ن ؛ ك ط هـ |

= ٧٠ × ١٠ قيمة المحدد = ٧٠٠

رقم ٩:- إثبت بدون فك المحدد أن

أ	ب	١
أ٢	ب٢	أ + ب
أ٣	ب٣	أ٢ + أ ب + ب٢

= ٠

الحـــــــــــل

بأخذ عامل مشترك من ع١ ، ع٢ فقط

أ ب | ١ ١ ١ ؛ أ ب أ + ب ؛ أ٢ ب٢ أ٢ + أ ب + ب٢ | -ع١ + ع٢ ؛ -ع١ + ع٢ ؛ ٣

أ ب | ١ ٠ ٠ ؛ أ ب - أ ب ؛ أ٢ ب - أ٢ ب (أ + ب) |

بأخذ عامل مشترك من ع٢ ، ع٣ نجد أن

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & أ+ب & أ^2+ب^2 \end{vmatrix} \quad أ^2 (ب - أ)$$

$$ب^2 (ب - أ) \times 0 = 0 \text{ لأن } ع_2 = ع_3$$

رقم ١٠ :- إثبت بدون فك المحدد أن

$$\begin{vmatrix} ص & س & س \\ س & ص & س \\ س & س & ص \end{vmatrix} = (ص + 2س)(ص - س)^2$$

الحـــــــــل

جمع الصفوف الثلاثة علي الصف الأول

$$\begin{vmatrix} ص + 2س & ص + 2س & ص + 2س \\ س & ص & س \\ س & س & ص \end{vmatrix}$$

$$(ص + 2س) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ س & ص & س \\ س & س & ص \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} ع_1 + ع_2 \\ ع_1 + ع_3 \end{matrix}$$

$$(ص + 2س) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ س & ص - س & 0 \\ س & 0 & ص - س \end{vmatrix}$$

$$(ص + 2س)(ص - س)^2$$

رقم ١١ :- إثبت ان

$$\begin{vmatrix} 1 & س & س^2 \\ أ & 1 & س \\ ب & جـ & 1 \end{vmatrix} = (1 - جـ س)(1 - أ س)$$

الحـــــــــل

$$- س ع_1 + ع_2 \; ، \; - س^2 ع_1 + ع_3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ أ & 1 - أ س & س - أ س^2 \\ ب & جـ - ب س & 1 - ب س^2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} ع_2 \times - س \text{ ثم} \\ \text{الجمع علي } ع_3 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ أ & 1 - أ س & 0 \\ & & 1 - جـ س \end{vmatrix} = 1(1 - أ س)(1 - جـ س)$$

رقم ١٢ :- بدون فك المحدد إثبت أن

$$\begin{vmatrix} س + أ & ب & جـ \\ أ & س + ب & جـ \\ أ & ب & س + جـ \end{vmatrix} = س^3 + (أ + ب + جـ) س^2$$

الحـــــــــل

بضرب ص × -١ ثم الجمع علي ص٢ ، ص٣

$$\begin{vmatrix} س + أ & ب & جـ \\ - س & س & 0 \\ - س & 0 & س \end{vmatrix}$$

بجمع الأعمدة الثلاثة علي العمود الأول

$$\begin{vmatrix} س + أ + ب + جـ & ب & جـ \\ 0 & س & 0 \\ 0 & 0 & س \end{vmatrix}$$

$$= (س + أ + ب + جـ) س^2$$

$$= س^3 + (أ + ب + جـ) س^2$$

رقم ١٣ :- إثبت أن

$$\begin{vmatrix} س^2 + 1 & س ص & س \\ س ص & ص^2 + 1 & ص ع \\ س ع & ص ع & ع^2 + 1 \end{vmatrix} = س^2 + ص^2 + ع^2 + 1$$

الحـــــــــل

نقسم المحدد إلي مجموع محددين كالآتي :-

$$\begin{vmatrix} س^2 س ص & س ع \\ س ص & ص^2 + 1 & ص ع \\ س ع & ص ع & ع^2 + 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & س ص & س ع \\ 0 & ص^2 + 1 & ص ع \\ 0 & ص ع & ع^2 + 1 \end{vmatrix}$$

بأخذ س عامل مشترك من ص١ ، ع١

$$س^2 \begin{vmatrix} 1 & ص & ع \\ ص & ص^2 + 1 & ص ع \\ ع & ص ع & ع^2 + 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & س ص & س ع \\ 0 & ص^2 + 1 & ص ع \\ 0 & ص ع & ع^2 + 1 \end{vmatrix}$$

$$- ص ع_1 + ع_2 \; ، \; - ع ع_1 + ع_3$$

$$س^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ص & 1 & 0 \\ ع & 0 & 1 \end{vmatrix} + (ص^2 + 1)(ع^2 + 1) - ص^2 ع^2$$

$س^2 \times 1 + ص^2 ع^2 + ص^2 + ع^2 + 1 - ص^2 ع^2$

$= س^2 + ص^2 + ع^2 + 1 =$ الأيسر

رقم ١٤: إثبت أن لكل أ، ب، جـ ∈ ح فان جذر المعادلة

$$\begin{vmatrix} أ - س & ب \\ ب & جـ - س \end{vmatrix} = 0$$ تكون أعداد حقيقية

الحـــــــل

$(أ - س)(جـ - س) - ب^2 = 0$

$أ جـ - أ س - س جـ + س^2 - ب^2 = 0$

$س^2 - (أ + جـ) س + أ جـ - ب^2 = 0$

ويحل هذه المعادلة بالقانون

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2 أ}$$

$$س = \frac{(أ + جـ) \pm \sqrt{(أ + جـ)^2 - 4 (أ جـ - ب^2)}}{2}$$

$$س = \frac{أ + جـ \pm \sqrt{أ^2 + 2 أ جـ + جـ^2 - 4 أ جـ + 4 ب^2}}{2}$$

$$س = \frac{أ + جـ \pm \sqrt{أ^2 - 2 أ جـ + جـ^2 + 4 ب^2}}{2}$$

$$س = \frac{أ + جـ \pm \sqrt{(أ - جـ)^2 + 4 ب^2}}{2}$$

تحت الجذر كمية مربعة فهي موجبه دائماً إذا س جذورها حقيقية

رقم ١٥:- إذا كانت ت^2 = - ١ فاثبت أن

$$\begin{vmatrix} 2 + 3ت & 4 + 5ت \\ -4 + 5ت & 2 - 3ت \end{vmatrix} = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

الحـــــــل

الأيمن = $(2 + 3ت)(2 - 3ت) - (-4 + 5ت)(4 + 5ت)$

$= (2 + 3ت)(2 - 3ت) + (4 - 5ت)(4 - 5ت)$

$= 4 - 9ت^2 + 16 - 25ت^2 = 4 + 9 + 16 + 25$

$= 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 =$ الأيســـر

رقم ١٦:- إثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 + أ^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + ب & 1 \\ 1 & 1 & 1 + جـ \end{vmatrix} = أ ب جـ \left(\frac{1}{أ} + \frac{1}{ب} + \frac{1}{جـ} + 1\right)$$

الحـــــــل

بتقسيم المحدد إلى مجموع محددين كالآتي:-

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + ب & 1 \\ 1 & 1 & 1 + جـ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} أ^2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 + ب & 1 \\ 0 & 1 & 1 + جـ \end{vmatrix}$$

- ع + ع ، - ع + ع مع بقاء المحدد الثاني كما هو

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & ب & 0 \\ 1 & 0 & جـ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} أ^2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 + ب & 1 \\ 0 & 1 & 1 + جـ \end{vmatrix}$$ بالفك

$$= ب جـ + أ^2 \begin{vmatrix} 1 + ب & 1 \\ 1 & 1 + جـ \end{vmatrix}$$

$= ب جـ + أ^2 [(1 + ب)(1 + جـ) - 1]$

$= ب جـ + أ^2 (1 + جـ + ب + ب جـ - 1)$

$= ب جـ + أ^2 (جـ + ب + ب جـ)$

$= ب جـ + أ جـ + أ ب + أ ب جـ$

$= أ ب جـ \left(\frac{1}{أ} + \frac{1}{ب} + \frac{1}{جـ} + 1\right) =$ الأيسر

رقم ١٧:- بدون فك المحدد اثبت أن

$$\begin{vmatrix} أ + ب + 2جـ & أ & ب \\ جـ & 2أ + ب + جـ & ب \\ جـ & أ & أ + 2ب + جـ \end{vmatrix}$$

الحـــــــل

بجمع الأعمدة الثلاثة علي العمود الأول

$$\begin{vmatrix} 2أ + 2ب + 2جـ & أ & ب \\ 2أ + 2ب + 2جـ & 2أ + ب + جـ & ب \\ 2أ + 2ب + 2جـ & أ & أ + 2ب + جـ \end{vmatrix}$$

$$= 2(أ + ب + جـ) \begin{vmatrix} 1 & أ & ب \\ 1 & 2أ + ب + جـ & ب \\ 1 & أ & أ + 2ب + جـ \end{vmatrix}$$

- ص١ + ص٢ ثم - ص١ + ص٣

$$2(أ + ب + جـ) \begin{vmatrix} 1 & أ & ب \\ 0 & أ + ب + جـ & 0 \\ 0 & 0 & أ + ب + جـ \end{vmatrix}$$

$2(أ + ب + جـ)(أ + ب + جـ)(أ + ب + جـ) =$

$2(أ + ب + جـ)^3$

رقم ١٨:- باستخدام خصائص المحددات اثبت أن

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

الحـــــــل

بتدوير المحدد الأول ثم ابدال ع مكان ع١ وترك ع٢ كما هو

$$\begin{vmatrix} ٦ & ٧ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & -٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٧ \\ ٣ & ٤ & ٢ \\ -٤ & ٣ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} ٢ & ٧ & ٦ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ -٤ & ٣ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٧ \\ ٣ & ٤ & ٢ \\ -٤ & ٣ & ٣ \end{vmatrix}$$

بابدال ع مكان ع وترك المحدد الثاني كما هو

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٧ & ٦ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ -٤ & ٣ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٧ \\ ٣ & ٤ & ٢ \\ -٤ & ٣ & ٣ \end{vmatrix}$$

ببجمع ع من الأول علي ع من الثاني

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١٠ & ٧ \\ ٣ & ٥ & ٢ \\ -٤ & ٥ & ٣ \end{vmatrix} = ٥ \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ٧ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ -٤ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$$

رقم ١٩ :- بدون فك المحدد اثبت أن

$$\begin{vmatrix} ٠ & أ & ب \\ -أ & ٠ & جـ \\ -ب & -جـ & ٠ \end{vmatrix} = ٠$$

الحـــــــــــل

بأخذ عامل مشترك أ من ع ٢ وأخذ عامل مشترك ب من ع ٣

$$أب \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ -أ & ٠ & \frac{جـ}{ب} \\ -ب & -\frac{جـ}{أ} & ٠ \end{vmatrix}$$

ثم أخذ عامل مشترك ١/ ب من ص وأخذ عامل مشترك ١/أ من ص

$$\frac{أب}{أب} \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ -أب & ٠ & جـ \\ -أب & -جـ & ٠ \end{vmatrix}$$

بضرب ص٣ في - ١ ثم الجمع علي ص٢

$$\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ٠ & جـ & جـ \\ -أب & -جـ & ٠ \end{vmatrix} = جـ \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \\ -أب & -جـ & ٠ \end{vmatrix}$$

= جـ × ٠ لأن ص١ = ص٢ = ٠

رقم ٢٠ :- إثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ أ & ب & جـ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & أ & أ^٢ \\ ١ & ب & ب^٢ \end{vmatrix}$$

الأيمن بتدوير المحدد نجد أن

$$\begin{vmatrix} ١ & أ & ب\,جـ \\ ١ & ب & أ\,جـ \\ ١ & جـ & أ\,ب \end{vmatrix}$$

بضرب ص في أ ١

بضرب ص في ب ٢

بضرب ص في جـ ٣

$$\frac{١}{أ\,ب\,جـ} \begin{vmatrix} أ & أ^٢ & أ\,ب\,جـ \\ ب & ب^٢ & أ\,ب\,جـ \\ جـ & جـ^٢ & أ\,ب\,جـ \end{vmatrix}$$

ثم أخذ عامل مشترك من ع ٣

$$\frac{أ\,ب\,جـ}{أ\,ب\,جـ} \begin{vmatrix} أ & أ^٢ & ١ \\ ب & ب^٢ & ١ \\ جـ & جـ^٢ & ١ \end{vmatrix}$$

ع٣ مكان ع١

$$- \begin{vmatrix} ١ & أ^٢ & أ \\ ١ & ب^٢ & ب \\ ١ & جـ^٢ & جـ \end{vmatrix}$$

بابدال ع مكان ع ٢ ٣

$$\begin{vmatrix} ١ & أ & أ^٢ \\ ١ & ب & ب^٢ \\ ١ & جـ & جـ^٢ \end{vmatrix} = \text{الأيسر}$$

رقم ٢١ :- أوجد قيمة جـ التي تجعل (س-٢) أحد عوامل المحدد

$$\begin{vmatrix} س + ١ & ١ & -٣ \\ ٢ & ٥ & س - ١ \\ ١ & -٤ & س + جـ \end{vmatrix}$$

الحـــــــــــل

∴ س − ٢ أحد العوامل

∴ س − ٢ = ٠ ومنها س = ٢

٣	١	−٣	
٢	٥	١	= ٠ بابدال ع مكان ع
١	−٤	٢ + جـ	

١	٣	−٣	
٥	٢	١	− = ٠ بالضرب × −١
−٤	١	جـ + ٢	

١	٣	−٣	−٣ ع + ع
٥	٢	١	= ٠ ٢ ١
−٤	١	جـ + ٢	٣ ع + ع
			١ ٣

بأخذ ١٣ عامل مشترك من ص

١	٠	٠	
٥	−١٣	١٦	= ٠
−٤	١٣	جـ − ١٠	

	١	٠	٠
١٣	٥	−١	١٦ = ٠
	−٤	١	جـ − ١٠

بضرب ع ١ × ١٦ والجمع علي ع ٣

	١	٠	٠
١٣	٥	−١	٠ = ٠
	−٤	١	جـ + ٦

١٣ × ١ × −١ (جـ + ٦) = ٠

−١٣ (جـ + ٦) = ٠ ⟸ جـ + ٦ = ٠ جـ = −٦

رقم ٢٢ :- اثبت أن س = ١ أحد جذور المعادلة

س+٣	٤ −س	٥	
س+٥	س + ١	س− ٧	= ٠
٤	٣	٣س + ٢	

الحـــــــــــــل

لإثبات أن س = ١ أحد الجذور للمعادلة فاذا عوضنا به في المحدد نجد أنه يحقق المعادلة أي عند وضع س = ١ في الطرف الأيمن يكون قيمة المحدد = ٠

عند س = ١ يكون

٤	٣	٥	
٦	٢	−٦	= ٠
٤	٣	٥	

عناصر ص١ = عناصر ص٣ ∴ المحدد ينعدم

س = ١ أحد جذور المعادلة

رقم ٢٣ :- اثبت أن

+س	س	س

= (أ + ب + جـ + س) س + أ ب جـ

الحـــــــــــــل

بتقسيم المحدد إلي مجموع محددين كالاتي :-

أ	س	س	س
٠	ب+ س	س	س
٠	س	جـ+س	س

+

س	س	س	س
س	ب + س	س	س
س	س	جـ + س	س

أ	١	س	س
٠	ب+س	س	س
٠	س	جـ+س	س

+ س

١	س	س	س
١	ب+س	س	س
١	س	جـ+س	س

يتم تقسيمة إلي محددين

أ	١	س	س
٠	س	س	س
٠	س	جـ+س	س

+ أ

أ	١	س	س
٠	ب	س	س
٠	٠	س+جـ	س

يتم تقسيمة إلي محددين

أ	١	س	س
٠	س	س	س
٠	س	جـ+س	س

+ س

١	س	س	س
١	س	س	س
١	س	جـ+س	س

+ س

١	٠	س	س
١	ب	س	س
١	٠	س+جـ	س

١	س	س	س
٠	س	س	س
٠	٠	جـ	جـ

= أ + أ ب (س+جـ)

١	٠	٠	٠
١	ب	٠	٠
١	٠	جـ	جـ

+ س [٠ +

]

= أ (س جـ + ب س + ب جـ) + س ب جـ

أ س جـ + أ ب س + أ ب جـ + س ب جـ

أ ب س + أ س جـ + س ب جـ + أ ب جـ

(أ ب + أ جـ + ب جـ) س + أ ب جـ

رقم ٢٤ :- اثبت أن

أ	س	س	
س	ب	س	= ٢ س^{٣} − (أ + ب + جـ) س^{٢}
س	س	جـ	+ أ ب جـ

الحـــــــــــــل

بضرب ع١ × −س/أ واضافته علي ص٢ ، ص٣

أ	٠	٠	
س	ب − س^{٢}/أ	س − س^{٢}/أ	ثم نفرم بفك المحدد والصف الأول
س	س − س^{٢}/أ	جـ − س^{٢}/أ	

أ [(ب − س^{٢}/أ) (جـ − س^{٢}/أ) − (س − س^{٢}/أ) (س − س^{٢}/أ)]

(أ ب − س^{٢}) (جـ − س^{٢}/أ) − (أ س − س^{٢}) (س − س^{٢}/أ)

أ ب جـ − ب س^{٢} − جـ س^{٢} + س^{٤}/أ − أ س^{٢} + س^{٣} − س^{٣}/أ

أ ب جـ − ب س² − جـ س² − أ س² + ٢ س³

= ٢ س³ − (أ + ب + جـ) س² + أ ب جـ = الأيسر

رقم ٢٥ :- اثبت أن

$$\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ ب & جـ & أ \\ جـ & أ & ب \end{vmatrix} = ٣ أ ب جـ - أ^٣ - ب^٣ - جـ^٣$$

الحـــــــــــل

بجمع الصفوف الثلاثة علي الصف الأول

$$\begin{vmatrix} أ+ب+جـ & أ+ب+جـ & أ+ب+جـ \\ ب & جـ & أ \\ جـ & أ & ب \end{vmatrix}$$

$$(أ + ب + جـ) \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ب & جـ & أ \\ جـ & أ & ب \end{vmatrix} \begin{matrix} -ع_١ + ع_٢ \\ -ع_١ + ع_٣ \end{matrix}$$

$$(أ + ب + جـ) \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ب & جـ - ب & أ - ب \\ جـ & أ - جـ & ب - جـ \end{vmatrix}$$ بالفك

(أ + ب + جـ) [(جـ − ب) (ب − جـ) − (أ − ب) (أ − جـ)]

(أ + ب + جـ) [٢ ب جـ − جـ² − ب² − أ² + أ جـ + أ ب − ب جـ]

(أ + ب + جـ) [(ب جـ + أ جـ + أ ب) − أ² − ب² − جـ²] ثم الفك

أ ب جـ + أ² جـ + أ² ب − أ³ − أ ب² − أ جـ² + ب² جـ

+ أ ب جـ + ب² أ − أ² ب − ب³ − ب جـ² + أ جـ²

+ أ ب جـ − أ² جـ − جـ ب² − جـ³

= ٣ أ ب جـ − أ³ − ب³ − جـ³ = الأيسر

رقم ٢٦ :- أوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١+ت \\ ٠ & ١ & ت \\ ١-ت & -ت & ١ \end{vmatrix}$$

(الحـــــــــــل) $-ع_١ + ع_٣$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ت \\ ٠ & ١ & ت \\ ١-ت & -ت & ت \end{vmatrix} = ت \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ١-ت & -ت & ١ \end{vmatrix}$$

ت [١ (١ − ت) + ١ (ت − ١)]

= ت (١ + ت + ت − ١) = ت (٢ت) = ٢ ت² = − ٢

رقم ٢٧ :- باستخدام خواص المحددات اثبت

$$\begin{vmatrix} س & أ & ب \\ أ & س & ب \\ ب & ب & س \end{vmatrix} = (س - أ)(س - ب)(س + أ + ب)$$

— الحل —

نجمع الأعمدة الثلاثة عدا العمود الأول

$$\begin{vmatrix} س + أ + ب & أ & ب \\ س + ب + أ & س & ب \\ س + أ + ب & ب & س \end{vmatrix}$$

$$(س + أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & أ & ب \\ ١ & س & ب \\ ١ & ب & س \end{vmatrix}$$

$-ص_١ + ص_٢$

$-ص_١ + ص_٣$

$$(س + أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & أ & ب \\ ٠ & س - أ & ٠ \\ ٠ & ب - أ & س - ب \end{vmatrix}$$

$$(س + ب + أ)(س - أ) \begin{vmatrix} ١ & أ & ب \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ب - أ & س - ب \end{vmatrix}$$

بضرب ص₂ × (أ − ب) وجمعها على ص٣

$$(س + أ + ب)(س - أ) \begin{vmatrix} ١ & أ & ب \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & س - ب \end{vmatrix}$$

= (س + أ + ب) (س − أ) (س − ب)

(٢٨) هنفس المسأله رقم ٩ ثم أضرب الرموز

رقم ٢٩ :- إذا كان س أحد عوامل المحدد

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٢ك \\ ١ & ك & س \\ س+٣ & س+٢ & ٢ك \end{vmatrix}$$

فأوجد قيمة ك بدون فك المحدد

الحـــــــــــل

س أحد عوامل المحدد

س هي أحد جذور المعادلة س = ٠

عند وضع س = ٠ في المحدد فانه ينعدم

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٢ك \\ ١ & ك & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٢ك \end{vmatrix} = ٠$$

بضرب ص₁ × − ١ وجمعة علي ص٣

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٢ك \\ ١ & ك & ٠ \\ -١ & -١ & ٠ \end{vmatrix}$$ بضرب ع₁ × −١ + ع₂

$$\begin{vmatrix} ٤ & -١ & ٢ك \\ ١ & ك-١ & ٠ \\ -١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

بتبديل ع₁ مكان ع٣ نحصل علي :-

$$-\begin{vmatrix} ٢ك & -١ & ٤ \\ ٠ & ك-١ & ١ \\ ٠ & ٠ & -١ \end{vmatrix} = ٠$$

$-٢ك(ك-١) \times -١ = صفر$

$٢ك(ك-١) = ٠ \therefore ك = صفر ، ك = ١$

رقم ٣٠ :- إثبت بدون فك المحدد أن

$$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ أ & ب & جـ \\ ب جـ & جـ أ & أ ب \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & أ & أ^٢ \\ ١ & ب & ب^٢ \\ ١ & جـ & جـ^٢ \end{vmatrix}$$

هي نفس المسألة رقم ٢٠ حرفياً

رقم ٣١ بدون فك المحدد اوجد مجموعة حل المعادلة

$$\begin{vmatrix} ١ & ٧ & ٤ \\ ٠ & ١ & س \\ ١ & س^٢ - ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٠$$

الحـــــــــــل

بضرب ص١ × -١ والجمع علي ص٣

$$\begin{vmatrix} ١ & ٧ & ٤ \\ ٠ & ١ & س \\ ٠ & س^٢ - ٩ & ٠ \end{vmatrix} = ٠$$

يتبديل ع مكان ع ٢ ، ٣

$$- \begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٧ \\ ٠ & س & ١ \\ ٠ & ٠ & س^٢ - ٩ \end{vmatrix} = ٠$$ وبالفك

$- س (س^٢ - ٩) = ٠ \quad - س (س-٣)(س+٣) = ٠$

$س = ٠ \quad ، \quad س = ٣ \quad ، \quad س = -٣$

مجموعة الحـل { ٠ ، ٣ ، -٣ }

رقم ٣٢ :- باستخدام خصائص المحددات اثبت

$$\begin{vmatrix} أ & أ - ١ & أ - ١ \\ أ^٢ & أ^٢ + ١ & أ^٢ \\ أ^٣ & أ^٣ & أ^٣ + ١ \end{vmatrix} = أ + أ^٢ + أ^٣$$

الحـــــــــــل

بجمع الصفوف الثلاثة علي الصف الأول

$$\begin{vmatrix} أ + أ^٢ + أ^٣ & أ + أ^٢ + أ^٣ & أ + أ^٢ + أ^٣ \\ أ^٢ & أ^٢ + ١ & أ^٢ \\ أ^٣ & أ^٣ & أ^٣ + ١ \end{vmatrix}$$

$$(أ + أ^٢ + أ^٣) \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ أ^٢ & أ^٢ + ١ & أ^٢ \\ أ^٣ & أ^٣ & أ^٣ + ١ \end{vmatrix}$$

بضرب ع١ × -١ ثم الجمع علي ع٢ ثم ع٣

$$(أ + أ^٢ + أ^٣)^٣ \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ أ & ١ & ٠ \\ أ^٣ & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

$= (أ + أ^٢ + أ^٣)^٣ \times ١ = أ + أ^٢ + أ^٣$

٣٣ :- اثبت بدون فك المحدد أن

$$\begin{vmatrix} ١ & (س+٢) & (س+١)(س+٢) \\ ١ & (س+٣) & (س+٢)(س+٣) \\ ١ & (س+٤) & (س+٣)(س+٤) \end{vmatrix} = ٢$$

الحـــــــــــل

بضرب ص١ × -١ ثم الجمع علي ص٢، ص٣

$$\begin{vmatrix} ١ & (س+٢) & (س+١)(س+٢) \\ ٠ & ١ & ٢س+٤ \\ ٠ & ٢ & ٤س+١٠ \end{vmatrix}$$

بضرب ص٢ × -٢ ثم الجمع علي ص٣

$$\begin{vmatrix} ١ & س+٢ & (س+١)(س+٢) \\ ٠ & ١ & ٢س+٤ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$$

= ١ × ١ × ٢ = ٢ = الأيسر

رقم ٣٤ :- إذا كان

$$\begin{vmatrix} أ^٢ - ١ & أ^٢ & أ \\ ب^٢ - ١ & ب^٢ & ب \\ جـ^٢ - ١ & جـ^٢ & جـ \end{vmatrix} = ٠$$

وكان أ ، ب ، جـ ثلاثة أعداد مختلفة فاثبت أن

أ ب جـ = ٠

الحـــــــــــل

يتم تقسيم المحدد في رأس المسأله إلى محددين

$$\begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1 \\ ب^2 & ب & 1 \\ جـ^2 & جـ & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & أ^2 & أ \\ -1 & ب^2 & ب \\ -1 & جـ^2 & جـ \end{vmatrix} = 0$$

نبدل ع مكان ع

$$أ\,ب\,جـ \begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1 \\ ب^2 & ب & 1 \\ جـ^2 & جـ & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} أ^2 & 1 & أ \\ ب^2 & 1 & ب \\ جـ^2 & 1 & جـ \end{vmatrix} = 0$$

نبدل ع مكان ع ٣

$$ب\,جـ \begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1 \\ ب^2 & ب & 1 \\ جـ^2 & جـ & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1 \\ ب^2 & ب & 1 \\ جـ^2 & جـ & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ثم نأخذ المحدد عامل مشترك

$$\begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1 \\ ب^2 & ب & 1 \\ جـ^2 & جـ & 1 \end{vmatrix} (أ\,ب\,جـ - 1) = 0$$

إما أن

$$\begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1 \\ ب^2 & ب & 1 \\ جـ^2 & جـ & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وهذا مستحيل لأن أ ، ب ، جـ ثلاثة أعداد مختلفة فلا يمكن أن يتساوي عناصر صفين أو عمودين فيتبقي الإحتمال الآخر وهو (أ ب جـ - ١) = ٠ ∴ أ ب جـ = ١

باستخدام طريقة كرامر حل كل من مجموعات المعادلات الآتية

رقم ٣٥:- ٢س + ٣ ص- ع = ٠

س + ع -٣ص = ٢

ص + ع + ٢ = ٠

الحـــــــــــل

المهم هو ترتيب المجاهيل

٢س + ٣ص – ع = ٠

س - ٣ص + ٢ع = ٢

ص + ع = -٢

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -14$$

$$\Delta\,س = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -14$$

$$\Delta\,ص = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

$$\Delta\,ع = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14$$

$$س = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{-14}{-14} = 1$$

$$ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{14}{-14} = -1$$

$$ع = \frac{\Delta ع}{\Delta} = \frac{14}{-14} = -1$$

مسائل مختارة من إمتحانات الثانوية العامة

رقم ١:- مصر دور أول ٢٠٠١

إذا كان (س-١) أحد عوامل المحدد

$$\begin{vmatrix} س-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & س+1 \\ -1 & 1 & س+ك \end{vmatrix}$$

فما قيمة ك

الحـــــــــــل

س-١ أحد عوامل المحدد س-١ = ٠

س = ١ ينعدم قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1+ك \end{vmatrix}$$

بتبديل ع مكان ع ١ ، ٢

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1+ك \end{vmatrix} = 0 \quad -ع_1 + ع_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & ك \end{vmatrix} = 0 \quad -ع_2 + ع_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & ك+1 \end{vmatrix} = 0$$

$-1 \times 1(\text{ك}+1) = 0$ ومنها $\text{ك} = -1$

رقم ٢:- مصر دور ثاني ٢٠٠١

بدون فك المحدد اثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^2+1 & (\text{س}+1)^2 \\ \text{ص} & \text{ص}^2+1 & (\text{ص}+1)^2 \\ \text{ع} & \text{ع}^2+1 & (\text{ع}+1)^2 \end{vmatrix} = 0$$

الحـــــــــــل

الأيمن

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^2+1 & \text{س}^2+2\text{س}+1 \\ \text{ص} & \text{ص}^2+1 & \text{ص}^2+2\text{ص}+1 \\ \text{ع} & \text{ع}^2+1 & \text{ع}^2+2\text{ع}+1 \end{vmatrix} = 0$$

$-2\text{ع}_1 + \text{ع}_2$ نجد أن

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^2+1 & \text{س}^2+1 \\ \text{ص} & \text{ص}^2+1 & \text{ص}^2+1 \\ \text{ع} & \text{ع}^2+1 & \text{ع}^2+1 \end{vmatrix} = 0$$

لأن $\text{ع}_2 = \text{ع}_3$ = الأيسر

رقم ٣:- مصر دور أول ٢٠٠٢

بدون فك المحدد اثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{أ}-\text{أب} & 1 & \text{ب}-3 \\ \text{أب}-\text{أجـ} & \text{ب} & \text{جـ}-3\text{ب} \\ \text{أجـ}-\text{أ} & \text{جـ} & 1-3\text{جـ} \end{vmatrix} = 0$$

الحـــــــــــل

بأخذ $-\text{أ}$ عامل مشترك من العمود الأول

$$-\text{أ} \begin{vmatrix} \text{ب}-1 & 1 & \text{ب}-3 \\ \text{جـ}-\text{ب} & \text{ب} & \text{جـ}-3\text{ب} \\ 1-\text{جـ} & \text{جـ} & 1-3\text{جـ} \end{vmatrix}$$

بضرب ع_2 في ٢ وإضافته إلي ع_3

$$-\text{أ} \begin{vmatrix} \text{ب}-1 & 1 & \text{ب}-1 \\ \text{جـ}-\text{ب} & \text{ب} & \text{جـ}-\text{ب} \\ 1-\text{جـ} & \text{جـ} & 1-\text{جـ} \end{vmatrix}$$

$\text{أ} \times 0 = 0$ لأن $\text{ع}_1 = \text{ع}_3$

رقم ٤:- مصر دور ثاني ٢٠٠٢

بدون فك المحدد اثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ} \\ 1 & \text{ب} & \text{أ} \\ 1 & \text{أ} & -\text{ب} \end{vmatrix} = \text{أ}^2 - \text{ب}^2$$

الحـــــــــــل

$-\text{ص}_1 + \text{ص}_2$ ، $-\text{ص}_1 + \text{ص}_3$

الأيمن

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ} \\ 0 & \text{ب}-\text{أ} & 0 \\ 0 & 0 & -(\text{أ}+\text{ب}) \end{vmatrix}$$

$= 1(\text{ب}-\text{أ}) \times -(\text{أ}+\text{ب})$

$= (\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}+\text{ب})$

$= \text{أ}^2 - \text{ب}^2$ = الأيسر

رقم ٥:- بدون فك المحدد اثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \text{س} \\ -2\text{س}+2\text{س}^2 & 1+2\text{س}^2 & 2\text{س}^3 \\ -3\text{س}+3\text{س}^2 & 3\text{س}^2 & 1+3\text{س}^3 \end{vmatrix}$$

$= 1 + 2\text{س} + 3\text{س}^2$

الحـــــــــــل

$-\text{ع}_1 + \text{ع}_2$ ، $-\text{س}\,\text{ع}_1 + \text{ع}_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2\text{س}+2\text{س}^2 & 1+2\text{س} & 2\text{س}^2 \\ -3\text{س}+3\text{س}^2 & 3\text{س} & 1+3\text{س}^2 \end{vmatrix}$$

بضرب $\text{ع}_2 \times -\text{س}$ وإضافته إلي ع_3

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2\text{س}+2\text{س}^2 & 1+2\text{س} & -\text{س} \\ -3\text{س}+3\text{س}^2 & 3\text{س} & 1 \end{vmatrix}$$

بضرب $\text{ص}_3 \times \text{س}$ ثم إضافته إلي ص_2

$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ -٢س - س^٢ + ٣س^٣ & ١ + ٢س + ٣س^٢ & ٠ \\ -٢س + ٣س^٢ & ٣س & ١ \end{vmatrix}$$

= حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

$١ \times (١ + ٢س + ٣س^٢) = ١ + ٢س + ٣س^٢$ = الأيسر

رقم ٦ :- مصر أغسطس ١٩٩٨

بدون فك المحدد إثبت ان

$$\begin{vmatrix} أ & -ب & -جـ \\ ب & ١ & ٠ \\ جـ^٢ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = أ + ب^٢ + جـ^٣$$

الحـــــــــــــــــل

بضرب $ص_٢ \times$ ب ثم الجمع علي $ص_١$

وضرب $ص_٣ \times$ جـ ثم الجمع علي $ص_١$ أيضاً

$$\begin{vmatrix} أ + ب^٢ + جـ^٣ & ٠ & ٠ \\ ب & ١ & ٠ \\ جـ^٢ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = أ + ب^٢ + جـ^٣ = \text{الأيسر}$$

رقم ٧ :- مصر مايو ١٩٩٨

باستخدام خصائص المحددات اثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١ & أ & ب جـ \\ ١ & ب & جـ أ \\ ١ & جـ & أ ب \end{vmatrix} = (أ - ب)(ب - جـ)(جـ - أ)$$

الحـــــــــــــــــل

$- ص_١ + ص_٢ ، - ص_١ + ص_٣$

$$\begin{vmatrix} ١ & أ & ب جـ \\ ٠ & ب - أ & جـ (أ - ب) \\ ٠ & جـ - أ & ب (أ - جـ) \end{vmatrix}$$

بأخذ عامل مشترك من $ص_٢ ، ص_٣$

$$(أ - ب)(جـ - أ) \begin{vmatrix} ١ & أ & ب جـ \\ ٠ & -١ & جـ \\ ٠ & ١ & -ب \end{vmatrix}$$

بجمع $ص_٢$ علي $ص_٣$

$$(أ - ب)(جـ - أ) \begin{vmatrix} ١ & أ & ب جـ \\ ٠ & -١ & جـ \\ ٠ & ٠ & جـ - ب \end{vmatrix}$$

$(أ - ب)(جـ - أ) \times -١ \ (جـ - ب)$

$= (أ - ب)(ب - جـ)(جـ - أ)$

رقم ٨ :- مصر مايو ١٩٩٩

بدون فك المحدد اثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١ & ب جـ & جـ أ + أ ب \\ ١ & جـ أ & ب + ب جـ \\ ١ & أ ب & جـ + جـ أ \end{vmatrix} = ٠$$

الحـــــــــــــــــل

$- ص_١ + ص_٢ ، - ص_١ + ص_٣$

$$\begin{vmatrix} ١ & ب جـ & جـ أ + أ ب \\ ٠ & جـ(أ - ب) & جـ(ب + أ) \\ ٠ & ب(أ - جـ) & ب(جـ - أ) \end{vmatrix}$$

وبأخذ عامل مشترك من $ص_٢ ، ص_٣$ نجد أن

$$ب جـ(أ - ب)(أ - جـ) \begin{vmatrix} ١ & ب جـ & جـ أ + أ ب \\ ٠ & ١ & -١ \\ ٠ & ١ & -١ \end{vmatrix}$$

$ب جـ (أ - ب)(أ - جـ) \times ٠ = ٠$ وذلك لأن

$ص_٢ = ص_٣$

رقم ٩ :- مصر أغسطس ١٩٩٩ بدون فك المحدد

اثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١ & ب & جـ \\ ب & ١ + ب^٢ & ب جـ \\ جـ & ب جـ & ١ + جـ^٢ \end{vmatrix} = ١$$

الحـــــــــــــــــل

بضرب $ع_١$ في – ب ثم إضافته إلي $ع_٢$

ضرب $ع_١$ في – جـ ثم إضافته إلي $ع_٣$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ب & ١ & ٠ \\ جـ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١ \times ١ \times ١ = ١$$

رقم ١٠ : مصر دور ثاني ٢٠٠٢
حل المعادلات الآتيه باستخدام طريقة كرامر

س + ص + ع = ٢
س − ٣ص + ع = ٦
٣س + ٢ص + ع = ٣

الحـــــــــل

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & -٣ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & -٤ & ٠ \\ ٣ & -١ & -٢ \end{vmatrix} = ٨$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٦ & -٣ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٤ & -٤ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = ٨$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٦ & ١ \\ ٣ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٤ & ٠ \\ ٣ & -٤ & -٢ \end{vmatrix} = -٨$$

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ١ & -٣ & ٦ \\ ٣ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & -٤ & ٤ \\ ٣ & -١ & -٣ \end{vmatrix} = ١٦$$

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = ١ \text{ ، } ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = -١ \text{ ، } ع = ٢$$

رقم ١١ : مصر ١٩٨٨ اثبت أن
س = ٥ هي أحد جذور المعادلة

$$\begin{vmatrix} س & -١٠ & ٣ \\ ٥ & -٢س & س-٢ \\ -٧ & ٣س & س+٤ \end{vmatrix} = ٠$$

بالتعويض عن س = ٥ نجد أنه يحقق المعادلة

$$\text{الأيمن} \begin{vmatrix} ٥ & -١٠ & ٣ \\ ٥ & -١٠ & ٣ \\ -٧ & ١٥ & ٩ \end{vmatrix} = ٠$$

لأن عناصر $ص_{١}$ = عناصر $ص_{٢}$

س = ٥ هي أحد جذور المعادلة

الهندسه الفراغية

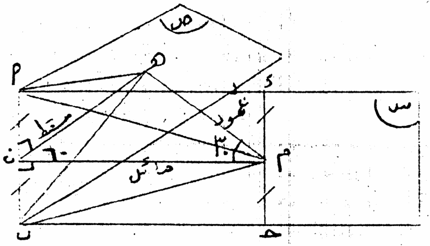
المجموعة الأولي ثالثا :- أسئلة انتاج الإجابة

من رقم ١ : رقم ٣٩ قد تم حلها في الدليل إلي جانب أن التمارين مكررة والأفكار متشابهة وبعد تفكير طويل اقتنعت أنا مصلحة الطالب هو البدء بمسائل لم تكن محلولة من رقم ٤٠ فصاعداً .

رقم ٤٠ : - س ، ص مستويان ، س ∩ ص = $\overleftrightarrow{أ ب}$ رسم المربع أ ب جـ د في المستوي س ، ن منتصف $\overline{أ ب}$ ، م منتصف $\overline{جـ د}$ ورسم $\overleftarrow{م هـ}$ ⊥ ص يقطعة في هـ

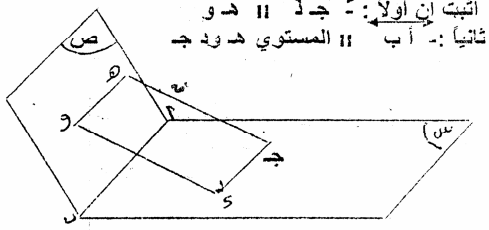
أولاً :- اثبت أن $\overleftrightarrow{أ ب}$ ⊥ المستوي ن م هـ

ثانياً :- إذا كان ق (هـ - $\overleftrightarrow{أ ب}$ - م) = ٦٠°
فاثبت أن المستوي أ م هـ ⊥ ب م هـ



م ن // جـ ب ويساويه في المربع
م ن ⊥ أ ب
المائل م ن ⊥ أ ب في المستوي ص
المسقط هـ ن ⊥ أ ب
أ ب ⊥ م ن ، هـ ن
أ ب ⊥ هـ م ن وهو المطلوب أولا
∠ هـ م ن هى مقياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويان هـ أ ب ، أ ب م =
∴ ق (هـ م ن) = ٣٠°
هـ ن = $\frac{١}{٢}$ م ن لكن أ ب = م ن (الضلع مربع)
هـ ن = $\frac{١}{٢}$ أ ب ، هـ ن ⊥ أ ب
∴ ق (ب هـ أ) = ٩٠°
هـ ب ⊥ أ هـ رقم ①
م هـ ⊥ ص م هـ ⊥ هـ ب
هـ ب ⊥ م هـ رقم ②
هـ ب ⊥ كل من أ هـ ، م هـ
هـ ب ⊥ المستوي هـ أ م
هـ ب ⊂ المستوي هـ م ن
المستوي أ م هـ ، ب م هـ متعامدان

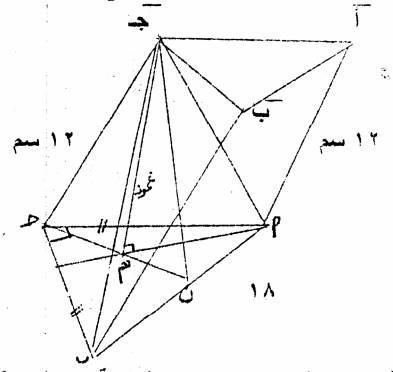
رقم ٤١ :- س ، ص مستويان متقاطعان في أ ب
جـ د ⊂ س بحيث جـ د ∥ ص ، هـ و ⊂ ص
بحيث هـ و ∥ س
اثبت أن أولاً :- جـ د ∥ هـ و
ثانياً :- أ ب ∥ المستوي هـ و د جـ



جـ د ∥ المستوي ص ومار بالمستقيم جـ د المستوي س الذي قطع المستوي ص في أ ب
جـ د ∥ أ ب وبالمثل هـ و ∥ أ ب
جـ د ∥ هـ و وهو المطلوب أولاً
جـ د ، هـ و متوازيان يكونان مستوي
أ ب ∥ جـ د في المستوي جـ د هـ و
أ ب ∥ المستوي هـ و د جـ

رقم ٤٢ : أ ب جـ أ ب جـ منشور ثلاثي طول حرفة ١٢سم قاعدته △ أ ب جـ ، جـ أ = جـ ب ، أ ب = ١٨ سم
ق (أ جـ ب) = ٩٠° جـ م ⊥ القاعدة ، م نقطة تلاقي متوسطات المثلث أ ب جـ
أوجد أولاً :- قياس زاوية ميل الحرف جـ جـ علي القاعدة أ ب جـ
ثانياً :- قياس الزوايا الزوجية (جـ - أ ب - جـ)

الحـــــــــل



الزاوية بين مستقيم ومستوي هي الزاوية بين المستقيم ومسقطة علي المستوي ∴ (جـ جـ م) هي زاوية ميل جـ جـ علي المستوي القاعدة أ ب ج
جـ ن متوسط ⊥ القاعدة
أ جـ = ب جـ = ١٨ جا ٤٥ = ٩ √٢ سم

جـ ن = $\frac{٩\sqrt{٢} \times ٩\sqrt{٢}}{١٨}$ = ٩ سم

م جـ = ٩ × $\frac{٢}{٣}$ = ٦ سم

جتا جـ جـ م = $\frac{٦}{١٢}$ = $\frac{١}{٢}$

جـ جـ يميل علي القاعدة أ ب جـ بزاوية ٦٠°
المسقط م ن ⊥ أ ب
المائل جـ ن ⊥ أ ب
∴ (جـ ن م) هي مقياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين جـ أ ب ، جـ أ ب
جـ م = ١٢ جا ٦٠ = ٦ √٣

ن م = $\frac{١}{٣}$ جـ ن = $\frac{١}{٣}$ × ٩ = ٣

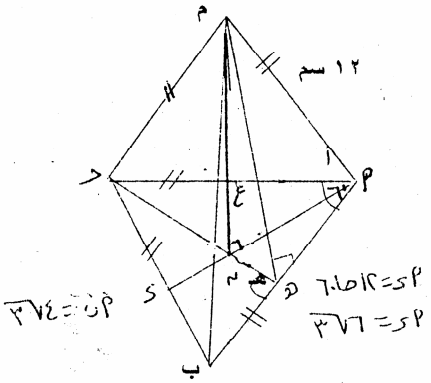
ظا جـ ن جـ = $\frac{٦\sqrt{٣}}{٣}$ = ٢ √٣

ق (جـ - أ ب - جـ) = ٥٢° ٣٥َ ٥٧َ

رقم ٤٣ : - م أ ب جـ هرم ثلاثي منتظم طول حرفة ١٢ سم أوجد أ – إرتفاع الهرم
ب- قياس الزاوية بين أي حرف ومستوي القاعدة
جـ - قياس الزاوية الزوجية بين أي وجه جانبي ومستوي القاعدة

الحـــــــــل

ارتفاع أي وجه جانبي ثابت لا يتغير



م هـ = هـ جـ = ١٢ جا ٦٠ = ٦ √٣
هـ ن = ١/٣ هـ جـ = ١/٣ × ٦ √٣
∴ هـ ن = ٢ √٣
ع ارتفاع الهرم = √(١٠٨ − ١٢) = √٩٦

م ن = ع = $\sqrt{٩٦}$ = ٤ $\sqrt{٦}$

زاوية ميل الحرف م أ مثلاً علي القاعدة هي الزاوية م أ ن

ظا م أ ن = $\frac{٤\sqrt{٦}}{٤\sqrt{٣}}$ = $\sqrt{٢}$

ق (م أ ن) = ٨ ٤٤ ٥٥٤

د م هـ جـ هي الزاوية الزوجية بين أي وجه جانبي والقاعدة

ظا م هـ ن = $\frac{٤\sqrt{٦}}{٢\sqrt{٢}}$ = ٢ $\sqrt{٣}$

ق (م هـ ن) = ٣٢ ٥٧٠

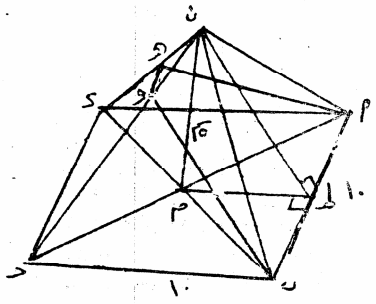
رقم ٤٤ :- أ ب جـ د مربع طول ضلعة ١٠ سم م نقطة تقاطع قطرية رسم م ن عمودي علي مستوي المربع أ ب جـ د حيث م ن = ٥ سم

أولاً :- أثبت أن المستويان ن أ م ، ن ب م متعامدان

ثانياً :- قياس الزاوية الزوجية (ن – أ ب – جـ)

ثالثاً :- إذا رسم المستوي أ ب و هـ يقطع ن جـ في و ، ن د في هـ فأثبت أن الشكل أ ب و هـ شبه منحرف

الحـــــــــل



١٠ سم

الشكل أ ب جـ د مربع القطران متعامدان

ب د ⊥ م أ رقم (١)

ن د ⊥ مستوي المربع أ ب جـ د

ن م ⊥ م ب رقم (٢)

من ١ ، ٢ نجد أن ب م ⊥ م أ ، م ن

ب م ⊥ المستوي م أ ن

لكن ب م ⊂ المستوي م أ ن

المستوي م أ ن ⊥ ب م ن #

نسقط العمود م ط ⊥ أ ب ثم نصل ن ط فيكون المسقط م ط ⊥ أ ب

∴ المائل ن ط ⊥ أ ب

د ن م ط هي مقياس الزاوية المنوية للزاوية الزوجية بين المستويين ن أ ب أ ب جـ

ب جـ = ١٠ سم و ط م = ٥ سم

ظا ن ط م = $\frac{٥}{٥}$ = ١

ق (ن – أ ب – جـ) = ٤٥ المطلوب

أ ب ∥ جـ د الواقع في المستوي ن د جـ

أ ب ∥ ن د جـ وقد مر بالمستقيم المستوي الذي قطع المستوي ن د جـ في و هـ

و هـ ∥ أ ب لكن و هـ ≠ د جـ

و هـ ≠ أ ب ولكنه يوازيه

الشكل أ ب و هـ شبة منحرف

مسائل مختارة من إمتحانات الثانوية العا

رقم ١ :- مصر مايو ١٩٩٦

م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعة ٤٠ سم

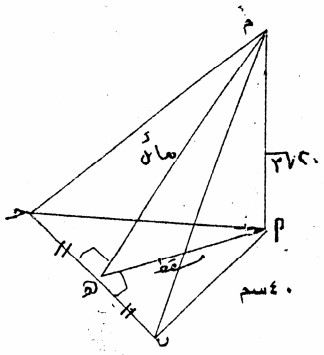
أ م ⊥ المستوي أ ب جـ

أ م = ٢٠ $\sqrt{٣}$ سم هـ منصف ب جـ

أولاً :- اثبت أن المستوي م أ هـ ⊥ المست أ ب جـ

ثانياً :- احسب قياس الزاوية الزوجية (م – ب جـ – أ)

الحـــــــــل



أ هـ متوسط في△ أ ب جـ المتساوي الأضلاع المسقط أ هـ ⊥ ب جـ

∴ المائل م هـ عمودي علي ب جـ

ب جـ ⊥ كل من هـ أ ، هـ م

ب جـ ⊥ المستوي هـ أ م

تمرين ب حـ د المستوي أ ب حـ

لمستوي هـ أ م ⊥ المستوي أ ب جـ

م أ هـ هي مقياس الزاوية المستوية للزاوية

زوجية بين المستويين م ب جـ ، أ ب جـ

هـ = ٤٠ جا ٦٠ = ٢٠ √٣

ظا أ هـ م = ٢٠ √٣ / ٢٠ √٣ = ١

ق (م – ب جـ – أ) = ٤٥°

رقم ٢ :- مصر أغسطس ١٩٩٦

م أ ب جـ هرم ثلاثي أخذت النقط س ، ص ، ع علي الأحرف م أ ، م ب ، م جـ بحيث كان

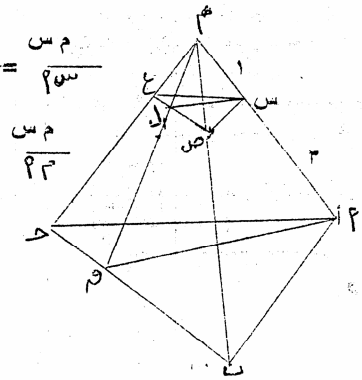
م س / س أ = م ص / ص ب = م ع / ع جـ = ١ / ٣

اثبت أن المستوي س ص ع ∥ المستوي أ ب جـ

وإذا فرضت النقطة ق ∈ ب جـ ورسمت م ق

قطعت ص ع في ل اثبت أن أ ق = ٤ س ل

الحـــــــل



م س / س أ = ١ / ٣

م س / م أ = ١ / ٤

م س / س أ = م ص / ص ب س ص ∥ أ ب

بالمثل م ص / ص ب = م ع / ع جـ ص ع ∥ ب جـ

بالمثل س ع ∥ أ ب

لأضلاع المتناظره في المستويين س ص ع ، أ ب جـ متوازيه

المستوي س ص ع ∥ المستوي أ ب جـ وقطعهما

المستوي م أ ق في س ل ، أ ق

س ل ∥ أ ق △ م س ل ~ △ م أ ق

م س / م أ = س ل / أ ق = ١ / ٤ ∴ أ ق = ٤ س ل

رقم ٣ :- مصر مايو ١٩٩٧

س ، ص مستويان متوازيان م نقطة خارجهما

رسمت المستقيمات م أ ب ، م جـ د ، م هـ و

فقطعت المستوي س في أ ، جـ ، هـ والمستوي

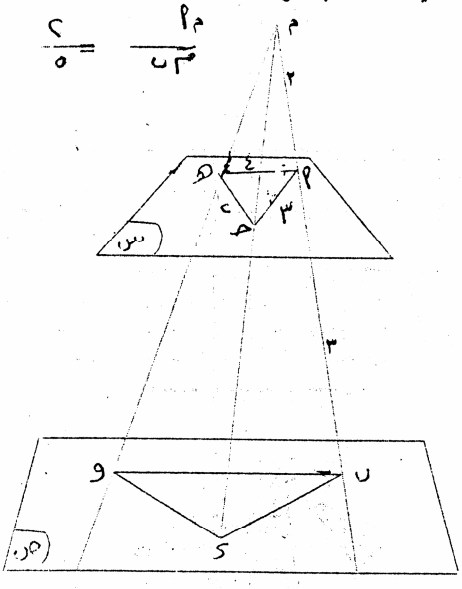
ص في ب ، د ، و فاذا كان م أ / م ب = ٢ / ٥

أ جـ = ٣سم ، جـ هـ = ٢ سم ، أ هـ = ٤سم

فاثبت أن △ أ جـ هـ ~ △ ب د و ثم احسب

محيط المثلث ب د و

م أ / م ب = ٢ / ٥



المستوي س ∥ المستوي ص

وقطعهما المستوي م ب د في أ جـ ، ب د

أ جـ ∥ ب د وبالمثل أيضاً جـ هـ يوازي د و

أ هـ ∥ ب و الزاوية المتناظرة متساوية نظرية

△ أ جـ هـ ~ △ ب د و

أ جـ / ب د = جـ هـ / د و = أ هـ / ب و = ٢ / ٥

٣ / ب د = ٢ / د و = ٤ / ب و = ٢ / ٥

٣ / ب د = ٢ / ٥ ∴ ب د = ٧,٥

$\frac{٢}{٥} = \frac{٢}{٥}$ د و = ٥ سم

$\frac{٢}{٥} = \frac{٢}{٥}$ ب و = ١٠ سم

محيط △ ب د و = ٧,٥ + ٥ + ١٠ = ٢٢,٥ سم

رقم ٤ :- مصر مايو ١٩٩٧

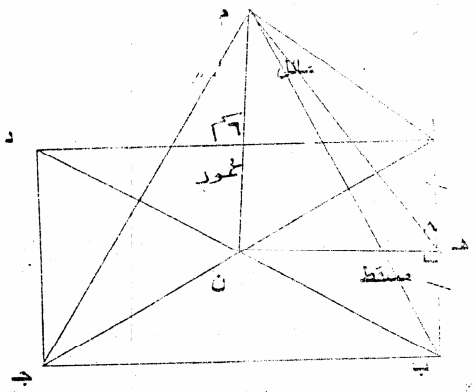
أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٢سم تتقاطع قطراه في و ، م ن ⊥ المستوي أ ب جـ وكان م ن = ٦ سم، هـ منتصف أ ب

أولا :- اثبت أن المستوي م أ جـ ⊥ المستوي أ ب جـ د

ثانياً:- اثبت أن أ ب ⊥ المستوي م ن هـ

ثالثاً:- أوجد قياس الزاوية الزوجية (م ـ أ ب ـ د)

الحـــــــل



١٢ سم

م ن ⊥ المستوي أ ب جـ د (معطي)

م ن ⊂ المستوي م أ جـ

المستوي م أ جـ ⊥ المستوي أ ب جـ د (أولاً)

ن هـ متوسط في △ ن أ ب المتساوي الساقين

المسقط ن هـ ⊥ أ ب المائل م هـ ⊥ أ ب

أ ب ⊥ كل من هـ م، هـ ن أ ب ⊥ المستوي م هـ ن (ثانياً)

∴ (م هـ ن) هي مقياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين م أ ب ، أ ب د

حيث ب جـ = ١٢ سم ⟸ ن هـ = ٦ سم

ظا م هـ ن = $\frac{٦}{٦}$ = ١

ق (م ـ أ ب ـ د) = ٤٥° (ثالثاً)

رقم ٥:- مصر ـ دور أول ـ ٢٠٠٢

ب جـ د مربع تقاطع قطراه في م ، هـ ∉ لمستوي المربع بحيث كان هـ م = م ب وكان △ هـ أ ب متساوي الأضلاع

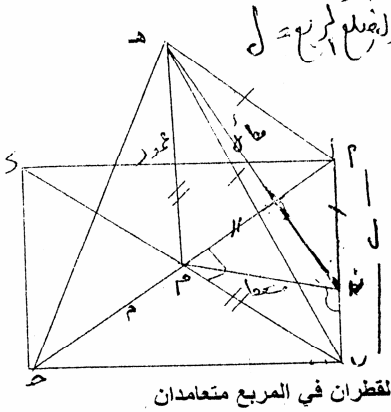
أولاً:- اثبت هـ م ⊥ م ب

ثانياً:- المستوي هـ أ جـ ⊥ أ ب جـ د

ثالثاً:- قياس الزاوية الزوجية بين أ ب هـ ، أ ب جـ

الحـــــــل

نفرض أن طول ضلع المربع = ل



القطران في المربع متعامدان

(أ ب)^2 = (أ م)^2 + (م ب)^2

ق (هـ م ب) = ٩٠° هـ م ⊥ م ب

وكذلك (هـ أ)^2 = (م أ)^2 + (م هـ)^2

هـ م ⊥ م أ هـ م ⊥ مستوي المربع

لكن هـ م ⊂ المستوي هـ أ جـ

المستوي هـ أ جـ ⊥ المستوي أ ب جـ د

نسقط العمود هـ م ⊥ أ ب ثم نصل م ن

المائل هـ ن ⊥ أ ب المسقط م ن ⊥ أ ب

∴ (هـ ن م) هي مقياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين أ ب هـ ، أ ب جـ

نفرض أن طول ضلع المربع ل

فيكون هـ ب = ل وهو وتر في △ هـ ب م المتساوي الساقين هـ م = ل جا ٤٥

هـ م = $\frac{ل}{\sqrt{٢}}$ ، ن م = $\frac{١}{٢}$ ل

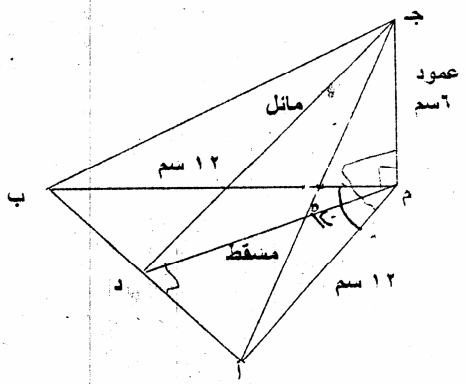
ظا (هـ ـ أ ب ـ جـ) = $\frac{ل}{\sqrt{٢}} \div \frac{١}{٢}$ ل

$\frac{ل}{\sqrt{٢}} \times \frac{٢}{ل} = \sqrt{٢}$

رقم ٦ :- مصر دور ثاني ٢٠٠٢

م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه م جـ ⊥ كل من م أ ، م ب
وقياس الزاوية الزوجية بين المستويين م جـ أ ، م جـ ب
يساوي ١٢٠° وكان م أ = م ب = ١٢ سم ، م جـ = ٦ سم
أولاً:- اثبت م جـ ⊥ المستوي م أ ب
ثانياً:- أوجد محيط △ أ ب جـ
ثالثاً:- احسب قياس الزاوية الزوجية التي حرفها $\overleftrightarrow{أ ب}$

الحـــــــــل



جـ م ⊥ م ب ، م أ ⟸ جـ م ⊥ المستوي م أ ب
الزاوية المحصورة بين العمودين علي خط التقاطع هي ،
الزاوية الزوجية بين م جـ أ ، م جـ ب
د (أ م ب) = ١٢٠°
ثم نسقط العمود م د ⊥ أ ب ثم نصل جـ د
المسقط م د ⊥ أ ب المائل جـ د ⊥ أ ب
د م جـ هي مقياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية
بين المستويين جـ أ ب ، م أ ب والتي علي الحرف $\overleftrightarrow{أ ب}$
د أ م د = د (ب م د) = ٦٠°
م د = ١٢ جتا ٦٠ = ١٢ × $\frac{1}{2}$ = ٦
أ د = ١٢ جا ٦٠ = ٦$\sqrt{3}$ أ ب = ١٢$\sqrt{3}$

(أ جـ)^2 = (ب جـ)^2 = ٣٦ + ١٤٤ = ١٨٠
أ جـ = ب جـ = $\sqrt{180}$ = ٦$\sqrt{5}$
محيط △ أ ب جـ = ٦$\sqrt{5}$ + ٦$\sqrt{5}$ + ١٢$\sqrt{3}$

١٢$\sqrt{5}$ + ١٢$\sqrt{3}$ = ١٢ ($\sqrt{5}$ + $\sqrt{3}$) = ٤٧,٦ .

ظا جـ د م = $\frac{6}{6}$ = ١

ق (جـ - $\overleftrightarrow{أ ب}$ - م) = ٤٥°

حل نموذج ١ ص١٥٧

أولاً :- الجبر :- السؤال الأول

أ :- إذا كان الحد الأوسط في مفكوك (١+س)^8 = ٧٠ فأوجد قيم س الحقيقية

الحـــــــــل

رتبة الحد الأوسط = $\frac{8+2}{2}$ = ٥

ح$_5$ = ^{8}ق$_4$ س^4 ٧٠ = ٧٠ س^4

س^4 = ١ س = ± ١

ب:- إذا كانت ١ ، ω ، ω^2 هي الجذور التكعيبية

فاثبت (١ − $\frac{1}{\omega}$)^2 + (١ + $\frac{1}{\omega^2}$)^2 + ٤ ω^2 = − ١

الحـــــــــل

الأيمن = (١ - ω^2)^2 + (١ + ω)^2 + ٤ ω^2
= ١ - ٢ω^2 + ω^4 + (- ω^2)^2 + ٤ω^2
= ١ - ٢ω^2 + ω + ω^4 + ω^2 = ١ + ٢ω + ٢ω^2
= ١ − ٢ = − ١ = الأيسر

رقم ٢ :- أ- إثبت أن

^{ن}ق$_{ر}$ = $^{ن-١}$ق$_{ر-١}$ × $\frac{ن - ر}{ر}$

من ثم احسب قيمة

$\frac{^{1000}ق_{999} - ^{999}ق_{998}}{^{1000}ق_{998}}$

الحل :

الأيمن = $\frac{ن!}{(ن-ر)!\,ر!}$ − $\frac{(ن-1)!}{(ن-ر-1)!\,ر!}$

= ١ − $\frac{(ن-1)!}{(ن-ر-1)!\,ر!}$ ÷ $\frac{ن!}{(ن-ر)!\,ر!}$

= ١ − $\frac{(ن-1)!}{(ن-ر-1)!\,ر!}$ × $\frac{(ن-ر)!\,ر!}{ن!}$

$= ١ - \frac{\text{ل}_{ن-١} \times \text{ل}_{ر-١}}{\text{ل}_{ر-١} \quad \text{ل}_{ن-١}}$

$= ١ - \frac{ر}{ن} = \frac{ن - ر}{ن}$ = الأيسر

$\text{ق}_{ر}^{ن} - \text{ق}_{ر-١}^{ن-١} = \frac{ن - ر}{ن}$

بوضع ن = ١٠٠٠ ، ر = ١٠٠ في الطرفين

$\frac{\text{ق}_{١٠٠}^{١٠٠٠} - \text{ق}_{٩٩}^{٩٩٩}}{١٠٠٠} = \frac{١٠٠٠ - ١٠٠}{١٠٠٠} = ٠,٩$

$\text{ق}_{١٠٠}$

---

٢ :- ب- إذا كان $\text{ع}_١ = \frac{٦ + ٤ت}{١+ت}$ ، $\text{ع}_٢ = \frac{٢٦}{٥-ت}$

فبين أن $\text{ع}_١$ ، $\text{ع}_٢$ مترافقان ثم أوجد الجذور التربيعية للعدد

$٤(\text{ع}_١ - \text{ع}_٢)$

الحـــــــــل

$\text{ع}_١ = \frac{٢(٣ + ٢ت)(١ - ت)}{(١+ت)(١-ت)} = \frac{٢(٣-٣ت+٢ت+٢)}{٢}$

$\text{ع}_١ = ٥ - ت$ رقم (١)

$\text{ع}_٢ = \frac{٢٦(٥ + ت)}{(٥ - ت)(٥ + ت)} = \frac{٢٦(٥ + ت)}{٢٥ - ت^٢}$

$\text{ع}_٢ = \frac{٢٦(٥+ت)}{٢٦} = ٥ + ت$ (٢)

$\text{ع}_١ ، \text{ع}_٢$ مترافقان $٤(\text{ع}_١ - \text{ع}_٢) = ٤(٥ - ت - ٥ - ت)$

$٤(\text{ع}_١ - \text{ع}_٢) = -٨ت$ تقع على المحور الصادات

$\text{ظا}\,\theta = \frac{٣ط}{٢}$

$٤(\text{ع}_١ - \text{ع}_٢) = ٨\left(\text{جتا}\frac{٣ط}{٢} + ت\,\text{جا}\frac{٣ط}{٢}\right)$

$\sqrt{٤(\text{ع}_١ - \text{ع}_٢)} = ٢\sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{٣ط}{٢} + ٢ط\,ر + ت\,\text{جا}\frac{٣ط}{٢} + ٢ط\,ر\right)^{\frac{١}{٢}}$

$= ٢\sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{٣ط + ٤ط\,ر}{٢} + ت\,\text{جا}\frac{٣ط + ٤ط\,ر}{٢}\right)^{\frac{١}{٢}}$

$= ٢\sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{٣ط + ٤ط\,ر}{٤} + ت\,\text{جا}\frac{٣ط + ٤ط\,ر}{٤}\right)$

بوضع ر = ٠ الجذر الأول $= ٢\sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{٣ط}{٤} + ت\,\text{جا}\frac{٣ط}{٤}\right)$

بوضع ر = ١ الجذر الثاني $= ٢\sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{٧ط}{٤} + ت\,\text{جا}\frac{٧ط}{٤}\right)$

رقم ٣ : - أ – بدون فك المحدد اثبت أن

$\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ ١ & ب & ٢ \\ ١ & ٢ & -ب \end{vmatrix} = (أ + ب)(أ - ب)$

تم حلها في المسألة رقم ٤ مصر دور ثاني ٢٠٠٢ بالنموذج

ب:- في مفكوك

$\left(٢\text{س}^٢ + \frac{١}{٢\text{س}}\right)^٩$

إذا كان معامل س٦ = الحد الخالي من س فاحسب قيمة أ

الحـــــــــل

نفرض أن ح ر+١ يشتمل علي س٦

$\text{ح}_{ر+١} = \text{ق}_{ر}^{٩}\left(\frac{١}{٢\text{س}}\right)^{ر}(٢\text{س}^٢)^{٩-ر}$

- ر ١٨ - ٢س ٦ ١٨ - ٣ر ٦

س × ر = س ⟸ س = س

١٨ - ٣ ر = ٦ ٣ر = ١٢ ر = ٤

ح هو الحد الذي يشتمل علي س٦

ح = ق (١/٢س)^٤ (أ س٢)^٥

ح = ق ١/١٦ أ^٥ س^٦ معامل س^٦ هو ١٢٦ أ^٥/١٦

١٨ - ٣ر

س = س ر = ٦

الحد الخالي من س هو ح

ح = ق (١/٢س)^٦ (أ س٢)^٣ = ق × ١/٦٤ أ^٣ = ٨٤ أ^٣/٦٤

معامل س٦ = الحد الخالي من س

١٢٦ أ^٥/١٦ = ٨٤ أ^٣/٦٤ ⟸ ٦ أ^٢ = ١ أ = ± ١/√٦

ثانياً :- الهندسة الفراغية

أولاً:- أكمل :-- أ- إذا كان مستقيم عمودياً علي كل من مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما فانه يكون عمودياً علي مستويهما

ب- الزاوية بن مستقيم ومستوي هي الزاوية بين المستقيم ومسقطة علي المستوي

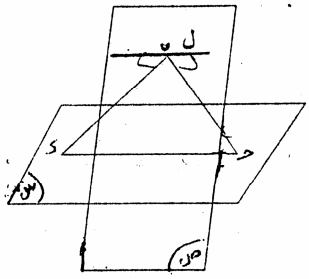
جـ- إذا قطع مستو مستويين متوازيين فخطا تقاطعه معهما يكونان متوازيان

د- إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً علي مستوي ثالث كان خط تقاطعهما عموديا علي المستوي الثالث

ثانياً:- س،ص مستويين متعامدان المستقيم ل يقع في ص رسم من النقطة ب ∈ ل المستقيمات ب جـ ، ب د عموديين علي ل ويلاقيان المستوي س في جـ ، د علي الترتيب

اثبت ان جـ د ⊥ ص

الحـــــل



ل ⊥ كل من ب جـ ، ب د

ل ⊥ المستوي ب جـ د

ل ⊥ كل مستقيم في المستوي ب جـ د

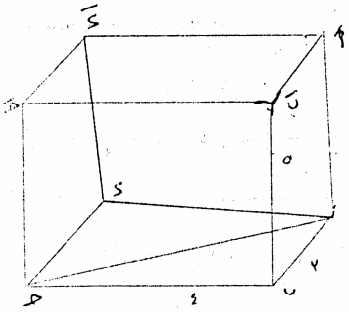
ل ⊥ جـ د ل ∈ المستوي ص

جـ د ⊥ كل مستقيم في المستوي ص

جـ د ⊥ المستوي ص

رقم ٢ : أ ب جـ د أَ بَ جَ دَ متوازي مستطيلات أطوال ثلاثة أحرف متلاقية في رأس منه ٣ سم ٤ سم ، ١٢ سم احسب طول $\overline{\text{أ جـ}}$ وقياس الزاوية بين $\overline{\text{أ جـ}}$ والمستوي أَ بَ جَ دَ

الحـــــل



$\overline{\text{أ جَ}}$ هو قطر متوازى المستطيلات

أ جَ = √((٣)^٢ + (٤)^٢ + (١٢)^٢) = √١٦٩

أ جَ = ١٣ ، المستوي أ ب جـ د ∥ $\overline{\text{أَ بَ جَ دَ}}$

المستوي أ ب جـ د ∩ $\overline{\text{أَ بَ جَ دَ}}$ = Φ

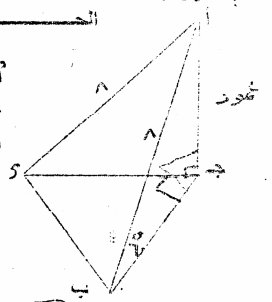
أ جـ ⊂ أ ب جـ د أ جـ ∩ المستوي $\overline{\text{أَ بَ جَ دَ}}$ = Φ

أ جـ ∥ $\overline{\text{أَ بَ جَ دَ}}$

الزاوية بين أ جـ والمستوي $\overline{\text{أَ بَ جَ دَ}}$ = صفر

رقم ٣ :- جـ أ عمودية على مستوى المثلث ب جـ د
بحيث كان أ ب = ٨ سم ، أ د = ٨ سم
ق (ب جـ د) = ٩٠° ، ق (أ ب جـ) = ٦٠°
احسب طول ب د

الحـــــــــل



أحد المستويين
∴ أ جـ عمودي على كل
المستقيمات الواقعة
في المستوى ب د جـ
∴ أ جـ ⊥ ب جـ

أ جـ = ٨ جتا ٦٠ = ٤ $\sqrt{٣}$
جـ د = $\sqrt{٦٤ - ٤٨}$ = ٤ سم
ب جـ = ٨ جتا ٦٠ = ٤ سم

(ب د)^{٢} = ١٦ + ١٦ = ٣٢ ب د = ٤ $\sqrt{٢}$

نموذج رقم ٢ ص ١٥٩
س١ :- أ اثبت أن ١٩ ($\frac{١}{٢ - ٣\omega}$ + $\frac{١}{٥ + ٣\omega}$) = ٧

الحـــــــــل

الأيمن = ١٩ ($\frac{٥ + ٣\omega^{٢} + ٢ - ٣\omega^{٢}}{(٢ - ٣\omega^{٢})(٥ + ٣\omega^{٢})}$)

= ١٩ ($\frac{٧}{١٠ + ٦\omega^{٢} - ١٥\omega^{٢} - ٩\omega^{٤}}$)

= $\frac{١٩ \times ٧}{١٠ - ٩\omega^{٢} - ٩\omega}$ = $\frac{١٩ \times ٧}{١٠ + ٩}$ = ٧

رقم ب :- في مفكوك (١ + أ س)^{٨} إذا كان ح$_{٢}$ = ٤
معامل ح$_{٥}$ = ١١٢٠ فأوجد قيمة أ ، س

الحـــــــــل

ح$_{٢}$ = ٤
^{٨}ق$_{١}$ أ س = ٤ ٨ أ س = ٤ أ س = $\frac{١}{٢}$

ح$_{٥}$ = ^{٨}ق$_{٤}$ أ^{٤} س^{٤} = ٧٠ أ^{٤} س^{٤} ٧٠ أ^{٤} = ١١٢٠

أ^{٤} = $\frac{١١٢٠}{٧٠}$ = ١٦ أ^{٤} = (± ٢)^{٤}

أ = ± ٢ لكن أ س = $\frac{١}{٢}$

± ٢ س = $\frac{١}{٢}$ س = ± $\frac{١}{٤}$

رقم ٢ :- أ
في مفكوك (٤س^{٢} + $\frac{١}{٢س}$)^{١٥}

أولاً :- أوجد الحد الخالي من س
ثانياً :- قياس التي تجعل الحدين الأوسطين متساويين

الحـــــــــل

ح$_{ر+١}$ يحتوي علي س٠

ح$_{ر+١}$ = ^{١٥}ق$_{ر}$ ($\frac{١}{٢س}$)^{ر} (٤س^{٢})$^{١٥-ر}$

س$^{-ر}$ × س$^{٣٠ - ٢ر}$ = س^{٠} ⟸ س$^{٣٠ - ٣ر}$ = س^{٠}
٣٠ - ٣ر = ٠ ر = ١٠

ح$_{١١}$ هو الحد الخالي من س

رتبة الحدين الأوسطين = $\frac{١٥+١}{٢}$ ، $\frac{١٥+٣}{٢}$

الحدين الأوسطين هما ح$_{٨}$ ، ح$_{٩}$

ح$_{٩}$ = ح$_{٨}$ $\frac{ح_{٩}}{ح_{٨}}$ = ١

$\frac{١٥ - ٨ + ١}{٨}$ × $\frac{\frac{١}{٢س}}{٤س^{٢}}$ = ١

$\frac{٨}{٨}$ × $\frac{س^{٣}}{٨}$ = ١ ∴ س^{٣} = ٨
∴ س = ٢

رقم ٢:- إذا كان $ع_١ = ١ - \sqrt{٣}\ ت$

$ع_٢ = ١ + ت$ ، $ع = \frac{ع_١}{ع_٢}$

ضع ع على الصورة الأسية ثم اثبت أن

$ع^{١٢} + ٢٤ = ٠$

الحـــــــــــــل

$ع_١ = ١ - \sqrt{٣}\ ت$

$ع_٢ = ١ + ت$

$ع = \frac{١ - \sqrt{٣}\ ت}{١ + ت}$

$ع = \frac{\sqrt{٢}\left(\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\ ت\right)}{\sqrt{٢}\left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\ ت\right)}$

$ع = \frac{\sqrt{٢}\left(جتا\frac{٥ط}{٣} + ت\ جا\frac{٥ط}{٣}\right)}{\sqrt{٢}\left(جتا\frac{ط}{٤} + ت\ جا\frac{ط}{٤}\right)}$

$ع = \frac{\sqrt{٢}\left(جتا\frac{٥ط}{٣} + ت\ جا\frac{٥ط}{٣}\right)}{\sqrt{٢}\left(جتا\frac{ط}{٤} + ت\ جا\frac{ط}{٤}\right)}$

$ع = \sqrt{٢}\left(جتا\left(\frac{٥ط}{٣} - \frac{ط}{٤}\right) + ت\ جا\left(\frac{٥ط}{٣} - \frac{ط}{٤}\right)\right)$

$ع = \sqrt{٢}\left(جتا\frac{١٧ط}{١٢} + ت\ جا\frac{١٧ط}{١٢}\right)$

$ع^{١٢} = \left[\sqrt{٢}\left(جتا\frac{١٧ط}{١٢} + ت\ جا\frac{١٧ط}{١٢}\right)\right]^{١٢}$

$ع^{١٢} = ٦٤\left(جتا\ ١٧ط + ت\ جا\ ١٧ط\right)$

$ع^{١٢} = ٦٤\left(جتا\ ط + ت\ جا\ ط\right)$

$= ٦٤(-١ + ٠) = -٦٤$

$ع^{١٢} + ٦٤ = ٠$

رقم ٣:- أ باستخدام خواص المحددات في اثبات أن

$$\begin{vmatrix} س+ص+٢ & س & ص \\ ١ & ص+٢س+١ & ص \\ ١ & س & س+٢ص+١ \end{vmatrix} = ٢\ (س+ص+ع)^٣$$

تم حلها سابقاً وهي المسألة رقم ١٧ في المحددات مع إختلاف الرموز

رقم ٣:- ب إذا علم أن الحد الثالث في مفكوك

$\left(٢س + \frac{١}{س^٢}\right)^ن$ حسب قوي س التنازلية

خالي من س فأوجد قيمة ص التي تجعل هذا الحد مساويا للحد الثاني في مفكوك $(١ + ص^٣)^{٣٠}$

الحـــــــــــــل

هي نفس المسألة رقم ٤٠ في نظرية ذات الحدين

ثانياً: الهندسة الفراغية

السؤال الأول أكمل

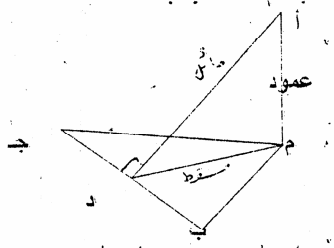
أ :- إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط التقاطع فان هذا المستقيم يكون عمودى على المستوى الآخر .

ب:- الزاوية المستوية لزاوية زوجية هي الزاوية الحادثة من التقاء العامل والمسقط على خط تقاطع المستويين

جـ:- يكون مستقيم عمودياً على مستوي إذا كان عموديا على مستقيمين متقاطعين في مستوي

ثانياً :- م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه الأحرف $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م جـ}$ متعامدة مثني مثني $\overline{أ د} \perp \overline{ب جـ}$ عند د

اثبت $\overline{م د} \perp \overline{ب جـ}$



$\overline{أ م} \perp \overline{م جـ}$ ، $\overline{أ م} \perp \overline{م ب}$

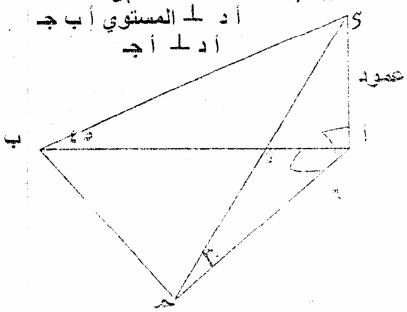
$\overline{أ م} \perp$ المستوي م ب جـ

العامل $\overline{أ د} \perp \overline{ب جـ}$

المسقط $\overline{م د} \perp \overline{ب جـ}$

رقم ٢:- أ ب جـ مثلث فيه أ جـ = ٦ سم
ق (أ) = ٩٠° رسمت أ د ⊥ مستوي المثلث
أ ب جـ ، ق (أ جـ د) = ٣٠°
ق (أ ب د) = ٤٥°
احسب أولاً:- طول ب د
ثانياً:- ق (هـ ب ، أ جـ ، د) الحـــــــــل

أ د ⊥ المستوي أ ب جـ
أ د ⊥ أ جـ

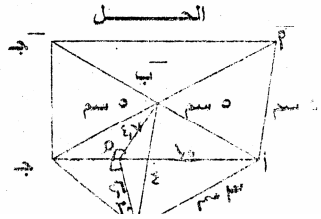


ظا ٣٠ = أ د / ٦ = ١ / √٣ = أ د / ٦

أ د = ٦ / √٣ = ٢√٣

△ أ د ب قائم في أ ومتساوي الساقين
أ ب = ب د = ٢√٣
د ب = √(١٢ + ١٢) = ٢√٦
د أ ⊥ أ جـ ، ب أ ⊥ أ جـ
الزاوية المحصورة بين العمودين علي خط تقاطع المستويين هي الزاوية الزوجية بينهم
د أ ب هي الزاوية الزوجية بين المستويين ب أ جـ ، د أ جـ
ق (ب ← أ جـ ← د) = ٩٠° أي أن المستويان متعامدان

رقم ٣:- أ ب جـ أ ب جـ منشور ثلاثي قائم فيه المثلث أ ب جـ متساوي الأضلاع طول ضلعة ٣ سم
أ أ = ٤سم احسب
أولاً:- قياسات زوايا △ أ ب جـ
ثانياً:- قياس الزاوية بين المستويين أ ب جـ ، أ ب جـ
الحـــــــــل



نسقط العمود ب هـ علي أ جـ فينصفه ثم نصل ب هـ فيكون ب هـ ⊥ أ جـ
د ب هـ ب هي مقياس الزاوية الزوجية المطلوبه
أي وجه جانبي = ٥سم
△ ب أ جـ متساوي الساقيين

جتا أ = (٢٥ + ٩ − ٢٥) / (٢ × ٥ × ٣) = ٠,٣
ق (أ) = ق (جـ) = ٧٢° ٣٣′

ق (أ ب جـ) = ١٨٠° − ٧٢° ٣٣′ = ١٤٥° ٢٧′
ب هـ = ٣ جتا ٣٠ = ٢,٦
ب هـ = √(٢٥ − ٢,٢٥) = √٢٢,٧٥ = ٤,٧٦
د ب هـ ب هي مقياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين أ ب جـ ، أ ب جـ

جتا ب هـ ب = (٤,٧)² + (٢,٦)² − (٤)² / (٢ × ٤,٧ × ٢,٦)

ق (ب هـ ب) = ٥٥٧°

نموذج ٣ :- ص١٦٢
أولاً:- الجبر السؤال الأول
أ:- إذا كان م+ن ن-١
ل = ٣٨٠ ، ق = ٤
٢ ٣
فما قيمة م ، ن الحـــــــــل
م + ن م + ن ٢٠
ل = ٣٨٠ ل = ٢٠ × ١٩ = ل
٢ ٢ م
م + ن = ٢٠ (١)
ن-١ق = ٤ ن-١ ل ٣ / ل ٣ = ٤
٣ ٣
ن-١
ل = ٤ ل ٣ = ٢٤ = ٤ × ٣ × ٢
٣ ٣
ن-١ ل = ٤ ل ٣ ن-١ = ٤ ن = ٥
٣ ٣
بالتعويض في ١
نجد أن م + ٥ = ٢٠ ⟸ م = ١٥

نموذج ٣: السؤال الأول ب

إذا كان ع = جتا $\frac{\text{ط}}{٣}$ + ت جا $\frac{\text{ط}}{٣}$

أوجد ع + ١ على الصورة الأسية

الحـــــــــل

ع = جتا $\frac{١٨٠}{٣}$ + ت جا $\frac{١٨٠}{٣}$ = جتا ٦٠ + ت جا ٦٠

ع = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

ع + ١ = ١ + $\frac{٣}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

ع + ١ = $\frac{٣}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

ن = $\sqrt{\frac{٩}{٤} + \frac{٣}{٤}}$ = $\sqrt{\frac{١٢}{٤}}$ = $\sqrt{٣}$

جتاθ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جاθ = $\frac{١}{٢}$

θ = $\frac{٣٠\text{ط}}{١٨٠}$ = $\frac{\text{ط}}{٦}$

$\frac{\text{ط}}{٦}$ ت

ع + ١ = $\sqrt{٣}$ هـ

رقم ٢:- باستخدام خواص المحددات اثبت أن

$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{س} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{س} \end{vmatrix}$ = (س − أ)(س − ب)(س + أ + ب)

تم حلها في مسائل المحددات رقم ٢٧

رقم ب:- اثبت أن

$\left(\frac{\text{س}^٢ + \text{س}٢ + ٤}{\text{س}^٢ - ٢} - \frac{\text{س} - ١}{\text{س}^٢ + \text{س} + ٣}\right)^٢$ = ٤

الأيمن = $\left(\frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ١ + ٤}{\text{س}^٢ - ٢} - \frac{\text{س} - ١}{\text{س}^٢ + \text{س} + ٣}\right)^٢$

= $\left(\frac{\text{س}^٢ + \text{س} + ٣}{\text{س}^٢ - ٢} - \frac{\text{س} - ١}{\text{س}^٢ + \text{س} + ٣}\right)^٢$ = (١ − ١)^٢ = ٤

رقم ٣:- أ

في مفكوك $\left(\frac{٢}{\text{س}} + \frac{\text{س}^٣}{٣}\right)^٩$

إذا كان الحدان الأوسطان متساويان في قيمة س

الحـــــــــل

رتبة الحدان الأوسطان $\frac{٩+١}{٢}$ ، $\frac{٩+٣}{٢}$

الحدان الأوسطان هما ح٥ ، ح٦

ح٦ = ح٥ ، $\frac{\text{ح}_٦}{\text{ح}_٥}$ = ١

$\frac{٩-٥+١}{٥}$ × $\frac{\frac{\text{س}^٣}{٣}}{\frac{٢}{\text{س}}}$ = ١

$\frac{\text{س}^٤}{٦}$ = ١ ، س^٤ = ٦ ، س = ± $\sqrt[٤]{٦}$

رقم ب :- حل مجموعة المعادلات الآتيه بطريقة كرامر

س + ص = ٠

٢س − ص + ع = ٠

٣س + ص − ع = ٠

الحـــــــــل

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٠ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٣ & ١ & -١ \end{vmatrix}$ = ٥

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & -١ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{vmatrix}$ = ٠

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ١ \\ ٣ & ٠ & -١ \end{vmatrix}$ = ٠

$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٠ \\ ٢ & -١ & ٠ \\ ٣ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$ = ٠

س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ = $\frac{٠}{٥}$ = ٠ ، ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ = ٠

ع = $\frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta}$ = $\frac{٠}{٥}$ = ٠ ، مجموعة الحل {٠ ، ٠ ، ٠}

ثانياً:- الهندسة الفراغية

١- أكمل مايلي أولاً :-

أ- إذا وازي مستقيم مستوي معلوم وكان عمودياً علي مستوي آخر فان المستويين يكونان متعامدان

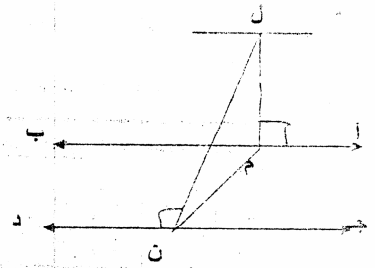
ب- إذا كان المستويان س ، ص متعامدان وكان أ ب مستقيماً في المستوي س وعمودياً علي خط التقاطع للمستويين فانه يكون عمودياً علي المستوي الآخر

جـ- إذا كان أ ب مستقيماً ، س مستوي فان مستوي ص يكون عمودياً علي س إذا كان أ ب ⊂ ص ، وعمودياً علي خط التقاطع

د- إذا وازي مستقيمان متقاطعان مستوي معلوماً وكان عمودين علي مستويين متقاطعين فان خط تقاطع المستويين يكون عمودياً علي المستوي المعلوم

تمرين :- $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ مستقيمان متوازيان ، نقطة ل خارجهما رسم $\overleftrightarrow{ل م}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـ د}$ قطعة في ن اثبت أن المستوي ل م ن ⊥ كل من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$

الحـــــــــل



المستقيم العمودي علي أحد مستقيمين متوازيين فهو عمودي علي الآخر

$\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$ ، ل م ⊥ $\overleftrightarrow{أب}$ ⟸ ل م ⊥ $\overleftrightarrow{جـ د}$

ل ن ⊥ $\overleftrightarrow{جـ د}$ ⟸ ل ن ⊥ $\overleftrightarrow{أب}$

$\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ كل من ل م ، ل ن ⟸ $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ المستوي ل م ن

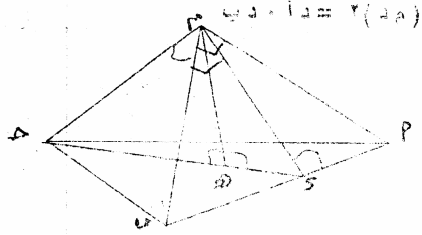
بالمثل $\overleftrightarrow{جـ د}$ ⊥ المستوي ل م ن

ل م ن ⊥ كل من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$

تمرين ٢:- م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه $\overline{أم}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م جـ}$ متعامده مثني مثني ، م هـ ⊥ مستوي القاعدة أ ب جـ حيث م هـ ∩ سطح △ أ ب جـ = { هـ } ، رسم $\overleftarrow{جـ هـ}$ بحيث كان $\overleftarrow{جـ هـ}$ ∩ $\overline{أب}$ = { د }

اثبت أن ١- (م د)٢ = د هـ . د جـ

٢- (م د)٢ = د أ . د ب



م جـ ⊥ م ب ، م أ ⊥ م جـ ⊥ المستوي م أ ب

م جـ ⊥ م د △ جـ م د قائم الزاوية في م

م هـ ⊥ د جـ باستخدام اقليدس

(م د)٢ = د هـ . د جـ

بالمثل في △ م أ ب فيه ⊂ أ م ب = ٩٠°

م هـ ⊥ المستوي أ ب جـ

م هـ ⊥ أ ب ، م جـ ⊥ أ ب

أ ب ⊥ المستوي م جـ د

أ ب ⊥ م د

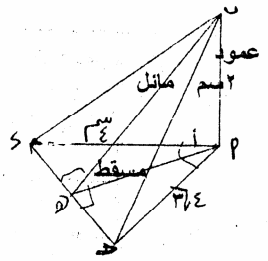
باستخدام قاعدة اقليدس في △أ م د يكون

(م د)٢ = د أ . د ب

رقم ٣ :- أ جـ د مثلث قائم الزاوية في أ

المستقيم أ ب ⊥ سطح △ أ جـ د إذا كان أ ب = ٢سم ، أ جـ = ٤ $\sqrt{٣}$ ، أ د = ٤ سم فأوجد قياس الزاوية الزوجية (ب – جـ د – أ)

الحـــــــــل



نسقط العمود أ هـ ⊥ ب هـ ثم نصل ب هـ

فتكون ⊂ أ هـ د هي مقياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين ب جـ د ، أ جـ د

جـ د = $\sqrt{٤٨ + ١٦}$ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨

المسقط أ هـ ⊥ جـ د

المائل ب هـ ⊥ جـ د، ∴ أهـ ب هي الزاوية الزوجية

أ هـ = $\frac{٤ \times ٢\sqrt{٣}}{٨}$ = $\sqrt{٣}$

ظا هـ = $\frac{٢}{٢\sqrt{٣}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

ق (هـ) = ٣٠°

نموذج رقم ٤ :- د ١٦٥

أولاً :- الجبر — السؤال الأول

أ :- إذا كان $\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ن}-٢} = ٣$ فأوجد $\text{ل}^{\text{ن}+٢}_{٤}$

الحل

$\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ن}-٢} = ٣ \Longleftarrow \text{ق}^{\text{ن}}_{٢} = ٣ \Longleftarrow \frac{\text{ن}!}{٢!} = ٣$

$\text{ل}^{\text{ن}}_{٢} = ٣ \; ٢! \Longleftarrow \text{ل}^{\text{ن}}_{٢} = ٦ \qquad \text{ل}^{\text{ن}}_{٢} = ٣ \times ٢$

$\text{ل}^{\text{ن}}_{٢} = \text{ل}^{٣}_{٢} \qquad \text{ن} = ٣$

$\text{ل}^{\text{ن}+٢}_{٤} = \text{ل}^{٥}_{٤} = ٥ \times ٣ \times ٢ = ١٢٠$

ب :- حل المعادلات الآتية بطريقة كرامر

٣س + ٢ص + ع = ٣

س + ص + ع = ٢

س - ٣ص + ع = ٦

الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & -٣ & ١ \end{vmatrix} = ٨$$

$$\Delta\text{س} = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٦ & -٣ & ١ \end{vmatrix} = ٨$$

$$\Delta\text{ص} = \begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ١ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٦ & ١ \end{vmatrix} = -٨$$

$$\Delta\text{ع} = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ٣ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ١ & -٣ & ٦ \end{vmatrix} = ١٦$$

$$\text{س} = \frac{\Delta\text{س}}{\Delta} = \frac{٨}{٨} = ١ \qquad \text{ص} = \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta} = -١$$

$$\text{ع} = \frac{\Delta\text{ع}}{\Delta} = \frac{١٦}{٨} = ٢$$

مجموعة الحل = { ١ ، -١ ، ٢ }

---

٢ (م) إثبت بدون فك المحدد أن :-

$$\begin{vmatrix} \text{س}+\text{ص} & \text{ع}+\text{ل} & \text{ع} \\ \text{ص}+\text{ع} & \text{س}+\text{ل} & \text{س} \\ \text{ع}+\text{س} & \text{ص}+\text{ل} & \text{ص} \end{vmatrix} = ٠$$

بضرب $\text{ع}_٣$ × -١ ثم الجمع علي $\text{ع}_٢$

باضافة $\text{ع}_٣$ إلي $\text{ع}_١$ نحصل علي

$$\begin{vmatrix} \text{س}+\text{ص}+\text{ع} & \text{ل} & \text{ع} \\ \text{س}+\text{ص}+\text{ع} & \text{ل} & \text{س} \\ \text{س}+\text{ص}+\text{ع} & \text{ل} & \text{ص} \end{vmatrix}$$

بأخذ عامل مشترك من $\text{ع}_١$ ، $\text{ع}_٢$

$$\text{ل}\,(\text{س}+\text{ص}+\text{ع}) \begin{vmatrix} ١ & ١ & \text{ع} \\ ١ & ١ & \text{س} \\ ١ & ١ & \text{ص} \end{vmatrix}$$

$\text{ع}_١ = \text{ع}_٢$ ينعدم المحدد

ل (س + ص + ع) × ٠ = ٠

رقم ٢ :- ب أوجد قيمة المقدار

$$\left(\frac{\text{س}}{١+٢\omega}\right)^٢ + \left(\frac{\text{ص}^٢}{١+٢\omega^٢}\right)^٢$$

الحل

$$\left(\frac{\text{س}}{١+٢\omega}\right)^٢ + \left(\frac{\text{ص}^٢}{١+٢\omega^٢}\right)^٢$$

$$= \frac{\text{س}^٢}{١+٤\omega+٤\omega^٢} + \frac{\text{ص}^٤}{١+٤\omega^٢+٤\omega^٤}$$

$$= \frac{\omega^٢}{-٣+\omega} + \frac{\omega}{-٣\omega^٢+\omega} = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$$

رقم ٣ :- أ ضع كل من العددين ١ ـ ت ، $\sqrt{٢}$ ت علي الصورة الأسية ثم استخدم ذلك في ايجاد قيمة $\left(\frac{١-\text{ت}}{\sqrt{٢}\,\text{ت}}\right)^٨$ الحل

$\text{ع}_١ = ١ - \text{ت}$ نحوله لمصدره المثلثية

$\text{ع}_١ = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{٤}\right)$

$\frac{٧ط ت}{٤}$

١ ـ ت = $\sqrt{٢}$ هـ رقم (١)

ع = $\sqrt{٢}$ ت يقع علي محور الصادات الموجب

ع = $\frac{ط}{٢}$ ، ل = $\sqrt{٢}$

$\sqrt{٢}$ ت = $\sqrt{٢}$ [جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$]

$\frac{ط ت}{٢}$

= $\sqrt{٢}$ هـ رقم (٢)

$\frac{٧ط ت}{٤}$

$\frac{١ ـ ت}{\sqrt{٢} ت}$ = $\frac{\sqrt{٢} هـ^{(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢})ت}}{\frac{ط ت}{٢}}$ = هـ

$\sqrt{٢}$ هـ

= هـ $\frac{٥ط ت}{٤}$

$\left(\frac{١ ـ ت}{\sqrt{٢} ت}\right)^{٨}$ = (هـ $^{\frac{٥ط ت}{٤}}$)^{٨} = هـ $^{١٠ ط ت}$

$\left(\frac{١ ـ ت}{\sqrt{٢} ت}\right)^{٨}$ = هـ $^{٠ ت}$ = جتا ٠ + ت جا ٠ = ١

رقم ٣ :ـ ب في مفكوك $\left(س + \frac{١}{٢س}\right)^{١٣}$

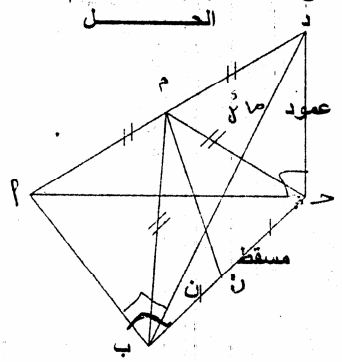
أوجد معامل $س^{١}$ ثم أوجد قيمة س التي تجعل قيمة الحدين الأوسطين في هذا المفكوك متساويين الحـــــل

تم حل هذه المسألة في مسائل مختارة من إمتحانات الثانوية العامة علي نظرية ذات الحدين س ٢ ٣ بالنموذج وهي رقم ٤ في امتحان مصر دور ثاني ٢٠٠٢

ثانياً :ـ الهندسه الفراغية السؤال الأول

ثانياً:ـ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، د جـ ⊥ مستوي المثلث ، م منتصف أ د ، ن منصف ب جـ اثبت أن م ن ⊥ ب جـ

الحـــــل



نصل كل من ب د ، م جـ ، م ب

المسقط جـ ب ⊥ أ ب ، المائل د ب ⊥ أ ب

ب م واصل من راس القائمة في △ د ب أ القائم في ب إلي منتصف الوتر أ د

ب م = $\frac{١}{٢}$ أ د وكذلك جـ م من رأس القائمة إلي منتصف أ د جـ م = $\frac{١}{٢}$ أ د

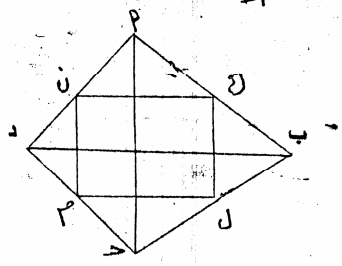
م جـ = م ب △ م ب جـ متساوي الساقين

م ن متوسط فيه م ن ⊥ ب جـ

رقم ٢ :ـ أ ب جـ د شكل رباعي أضلاعة ليست في مستوي واحد والمستوي س يوازي كلا من $\overleftrightarrow{أ جـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب د}$ ويقطع الأضلاع أ ب في ك ب جـ في ل ، جـ د في م ، د أ في ن اثبت أن

أولاً:ـ الشكل ك ل م ن متوازي أضلاع

ثانياً:ـ $\frac{ك ل}{أ ب}$ + $\frac{ل م}{ب جـ}$ = ١ الحـــل



ب د // المستوي المحل م ن ومر بالمستقيم
ب د المستوي جـ ب د الذي قطع المستوي ك ل م ن في ل م
ل م // ب د ، ك ن // ب د ك ن // ل م بالمثل ك ل // م ن
الشكل ك ل م ن متوازي أضلاع
△ جـ ل م ~ △ جـ ب د

$\frac{جـ ل}{جـ ب} = \frac{ل م}{ب د} = \frac{جـ م}{جـ د}$ رقم ①

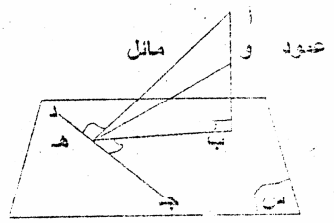
بالمثل △ ب ل ك ~ △ ل جـ أ

$\frac{ب ل}{ل جـ} = \frac{ب ك}{أ ل} = \frac{ك ل}{أ جـ}$ رقم ②

$\frac{ك ل}{أ جـ} + \frac{ك ل}{ب د} = \frac{ب ل}{ل جـ} + \frac{ب ل}{ل جـ} = \frac{ب ل + ل جـ}{ل جـ} = \frac{ب جـ}{ل جـ}$

$\frac{ك ل}{أ جـ} + \frac{ك ل}{ب د} = ١$

رقم ٣:- أ ب ⊥ المستوي س بحيث أ ب ∩ س = { ب }
جـ د ⊂ س ولا يمر بالنقطة ب رسم أ هـ ⊥ $\overleftrightarrow{جـ د}$ وكان أ هـ ∩
س = { هـ } فإذا كانت النقطة و ∈ أ ب
فاثبت أن و هـ ⊥ $\overleftrightarrow{جـ د}$ الحـــــل



المثلث أ هـ ⊥ جـ د المسقط ب هـ ⊥ جـ د
جـ د ⊥ كل من هـ أ ، هـ ب جـ د ⊥ المستوي أ ب هـ
فهو عمودي علي كل المستقيمات الواقعة في المستوي أ ب هـ
جـ د ⊥ و هـ أي و هـ ⊥ جـ د

نموذج ٥ :- ص١٦٨ أولاً :- الجبر ١:- أ

أوجد قيمة ن إذا علم أن $ن = {}^{٥}ق_{٢} \times {}^{٦}ل_{م}$

الحـــــل

$ن = {}^{٥}ق_{٢} \times {}^{٦}ل_{م} = \frac{٥ \times ٤}{٢} \times ٩ \times ٨ = ٧٢٠$

$\frac{ن}{٦} = ل$ ∴ ن = ٦

رقم ١:- ب أوجد قيمة س ، ص
الحقيقين اللتين تحققان المعادلة
(١ – ت) س + ١ (١ + ت) ص = ٢ت
ومن ثم اثبت أن (س + ت ص)^٨ = ١٦
الحـــــل
(١ - ت) س + ١ (١ + ت) ص = ٢ت
بالقسمة علي (١ – ت) للطرفين

$س + \left(\frac{١+ت}{١-ت}\right) ص = \frac{٢ت}{١-ت}$

$س + \frac{(١+ت)(١+ت)}{(١-ت)(١+ت)} ص = \frac{٢ت(١+ت)}{(١-ت)(١+ت)}$

$س + \frac{ت^٢}{٢} ص = \frac{٢ت(١+ت)}{٢}$

س + ص ت = - ١ + ت ①
س = -١ ، ص = ١
من المعادلة ①

$(س + ص ت)^٨ = (-١ + ت)^٨$

$(س + ص ت)^٨ = [(-١ + ت)^٢]^٤$

$(س + ص ت)^٨ = (١ + ٢ت + ت^٢)^٤$

$= (١ + ٢ت - ١)^٤ = (٢ت)^٤ = ١٦ت^٤ = ١٦$

رقم ٢:- أ أوجد المقياس والسعة الأساسية
للعدد $\frac{\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} + ت}$ ثم أوجد مجموعة الحل
للمعادلة $ع^{٣} = \frac{\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} + ت}$ علي الصورة
الأسية . الحـــــل
نفس المسألة رقم ٤٩ في الأعداد
المركبة ص ٦٨ بالنموذج وقد تم
حلها سابقاً

رقم ٢:- ب بدون فك المحدد اثبت أن
(س+ص)^٢ س^٢ + ص^٢ س ص
(ع+ل)^٢ ع^٢ + ل^٢ ع ل = ٠
(م + هـ)^٢ م^٢ + هـ^٢ م هـ

الحـــــــــل

بضرب ع هـ ٢ واضافته إلي ع

٣ ٢

الايمن =	(س+ص)٢	س٢ + ٢س ص+ص٢	س ص
	(ع+ل)٢	ع٢+٢ع ل+ ل٢	ع ل
	(م +هـ)٢	م٢+٢م هـ + هـ٢	م هـ

(س+ص)٢	(س+ص)٢	س ص	= ٠
(ع+ل)٢	(ع+ل)٢	ع ل	
(م +هـ)٢	(م +هـ)٢	م هـ	

لان ع = ع

رقم ١ : إذا كان (٣ س – ١)٥ = أ + ب س + جـ س٢ + د س٣ + هـ س٤ + و س٥ فأوجد قيمة أ + ب + جـ + د + هـ + و

الحـــــــــل

بوضع س = ١ في المفكوك

(٣ – ١)٥ = أ + ب + جـ + د + هـ + و

أ + ب + جـ + د + هـ + و = ٣٢

رقم ٢ : حل مجموعة المعادلات الآتيه بستخدام كرامر

٢س – ص = ١

٣ص – ٢ ع = ١

٣ع – س = ٢

الحـــــــــل

يجب ترتيب الرموز بطريقة منظمة كالآتي :-

٢س – ص = ١

٣ص – ٢ ع = ١

– س + ٣ ع = ٢

	٢	١-	٠	
△ =	٠	٣	٢-	= ١٦
	١-	٠	٣	

	١	١-	٠	
△ س =	١	٣	٢-	= ١٦
	٢	٠	٣	

	٢	٠	٠	
△ ص =	٠	١	٢-	= ١٦
	١-	٢	٣	

	٢	١-	١	
△ ع =	٠	٣	١	= ١٦
	١-	٠	٢	

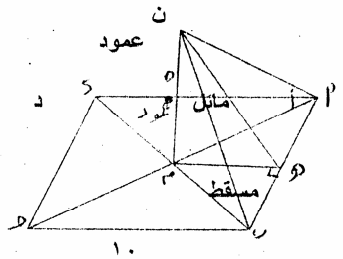
س = △ س / △ = ١ ، ص = △ ص / △ = ١ ، ع = △ ع / △ = ١

ثانياً :- الهندسة الفراغية

١ :- ثانياً :- أ ب جـ د مربع طول ضلعة ١٠سم تتقاطع قطراه في ن ، م ن ⊥ مستوي المربع فاذا كان م ن = ٥ فاوجد

أ - طول ن أ

ب- قياس الزاوية الزوجية بين المستوي ن أ ب والمربع



نسقط م هـ ⊥ أ ب ثم نصل ن هـ

ن م ⊥ المستوي أ ب جـ د

ن م ⊥ كل المستقيمات فيه ن م ⊥ أ م

طول ضلع المربع = ١٠سم

قطره أ جـ = ١٠ √٢

أ م = ٥ √٢

(أ ن)٢ = (٥)٢ + (٥ √٢)٢

أ ن = √(٢٥ + ٥٠) = √٧٥ = ٥ √٣

المسقط م هـ ⊥ أ ب المائل ن هـ ⊥ أ ب

د ن هـ م هي مقياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين ن أ ب والمربع

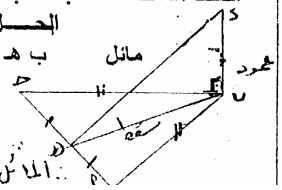
حيث م هـ = ١/٢ أ ب = ٥ سم

ظا(ن هـ م) = ٥/٥ = ١

ق (ن – أ ب – جـ) = ٤٥°

رقم ٢ :- أ ب جـ متساوي الساقين فية أ ب = ب جـ رسم ب د ⊥ مستوي المثلث أ ب جـ فاذا كانت النقطة هـ منتصف أ جـ فاثبت أن د هـ ⊥ أ جـ

الحـــــل



ب هـ متوسط في △ أ ب جـ

جـ المتساوي الساقين

ب هـ ⊥ أ جـ

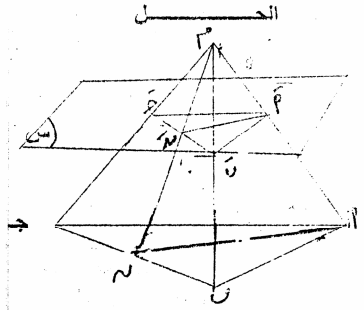
المسقط ب هـ ⊥ أ جـ

∴ المائل د هـ ⊥ أ جـ

رقم ٣:- م أ ، م ب ، م جـ ثلاث قطع مستقيمة ليست في مستوي واحد قطعها المستوي س في أَ ، بَ ، جـَ علي الترتيب فاذا كان المستوي س ∥ المستوي أ ب جـ فاثبت أن المثلث أَ بَ جـَ ~ △ أ ب جـ وإذا رسم م ن ⊥ المستوي أ ب جـ فقطعه في ن وقطع المستوي س في نَ فاثبت أن

$$\frac{\text{مساحة } \triangle \text{ المثلث } \overline{أَبَ جَ}}{\text{مساحة المثلث أ ب جـ}} = \frac{(\overline{م نَ})^2}{(م ن)^2}$$

الحـــــــل



لمستوى س ∥ أ ب جـ وقطعهما المستوى م أ ب فى $\overline{أَبَ}$ ، أ ب ∴ $\overline{أَبَ}$ ∥ أ ب بالمثل $\overline{بَجَ}$ ∥ ب جـ

وأيضاً $\overline{أَجَ}$ ∥ أ جـ

لزاوية المتناظرة في كل من المثلثين $\overline{أَبَ جَ}$ ، أ ب جـ

تساوية △ $\overline{أَبَ جَ}$ ~ △ أ ب جـ

$$\frac{\overline{أَبَ}}{أ ب} = \frac{\overline{بَجَ}}{ب جـ} = \frac{\overline{أَجَ}}{أ جـ} = \frac{\overline{م أَ}}{م أ} \quad (١)$$

لمستوي م أ ن قطع المستويين المتوازيين $\overline{أَبَ جَ}$ ، أ ب جـ في $\overline{أَنَ}$ ، أ ن ∴ $\overline{أَنَ}$ ∥ أ ن

△ م $\overline{أَنَ}$ ~ △ م أ ن

$$\frac{\overline{م أَ}}{م أ} = \frac{\overline{م نَ}}{م ن} \quad (٢)$$

من ١ ، ٢ نجد أن $\frac{\overline{أَبَ}}{أ ب} = \frac{\overline{م نَ}}{م ن}$ رقم ٣

△ $\overline{أَبَ جَ}$ ~ △ أ ب جـ

$$\frac{\text{مساحة } \triangle \overline{أَبَ جَ}}{\text{مساحة أ ب جـ}} = \frac{(\overline{أَبَ})^2}{(أ ب)^2} = \frac{(\overline{م نَ})^2}{(م ن)^2}$$

نموذج ٦ ص ١٧١ أولاً : الجبر

رقم ١:- أ أجب عن سؤالين فقط مما يأتي :-

إذا كان $ق_{ن}^{ن} = ٥٦$ أوجد $ل_{ن-٣}^{٤}$

الحـــــــل

$ق_{٣}^{ن} = ٥٦ \quad ل_{٣}^{ن} = ٥٦ \lfloor ٣$

$ل_{٣}^{ن} = ٨ \times ٧ \times ٦ = ل_{٣}^{٨} \quad ن = ٨$

$ل_{٤}^{ن} = ل_{٤}^{٨} = ١٦٨٠$

رقم ٢:- ب أوجد قيمة

$$\left[\frac{١}{١+٢\omega-٢\omega^2} - \frac{١}{١-٢\omega+٢\omega^2}\right]^2$$

الحل

$$\left[\frac{١}{١+٢\omega+٢\omega^2} - \frac{١}{١-٢\omega-٢\omega^2}\right]^2$$

$$\left[\frac{١}{١+٢\omega} + \frac{١}{١+٤\omega}\right]^2$$

$$\left[\frac{١+٤\omega+٣+٤\omega}{(١+٤\omega)(٣+٤\omega)}\right]^2$$

$$\left[\frac{٤+٨\omega}{٣+١٢\omega+٤\omega+١٦\omega^2}\right]^2$$

$$\left[\frac{٤+٨\omega}{٣+١٦\omega+١٦}\right]^2$$

$$\left[\frac{٤+٨\omega}{٣-١٦}\right]^2 = \left[\frac{٤+٨\omega}{-١٣}\right]^2$$

$$= \frac{١٦+٦٤\omega+٦٤\omega^2}{١٦٩} = \frac{١٦-٦٤}{١٦٩}$$

$$= \frac{-٤٨}{١٦٩}$$

رقم ٢ : ب في مفتوك $(\text{س}^2 + \frac{1}{\text{س}})^{15}$ أوجد

النسبة بين الحد الخالي من س ومجموع معاملي الحدين الأوسطين

الحـــــــــل

ح ر+١ = يحتوي على س ٠

$\text{ن} = 15$ ، $\text{ر} = 15 - \text{ر}$

$\text{ح}_{\text{ر}+1} = \text{ق}_{\text{ر}}^{15} (\frac{1}{\text{س}})^{\text{ر}} (\text{س}^2)^{15-\text{ر}}$

$\text{س}^{2(15-\text{ر})} \cdot \text{س}^{-\text{ر}} = \text{س}^{30-3\text{ر}} = \text{س}^0$

$30 - 3\text{ر} = 0$ ، $\text{ر} = 10$

ح ١١ هو الحد الخالي من س

$\text{ح}_{11} = \text{ق}_{10}^{15} (\frac{1}{\text{س}})^{10} (\text{س}^2)^5 = \text{ق}_{10}^{15}$

الحدين الأوسطين رتبتهما $\frac{15+1}{2}$ ، $\frac{15+3}{2}$

الحدان الأوسطان هما ح_8 ، ح_9

$\text{ح}_8 = \text{ق}_7^{15} (\frac{1}{\text{س}})^7 (\text{س}^2)^8$ المعامل ق_7^{15}

$\text{ح}_9 = \text{ق}_8^{15} (\frac{1}{\text{س}})^8 (\text{س}^2)^7$ المعامل ق_8^{15}

$$\frac{\text{الحد الخالي من س}}{\text{مجموع معاملي الحدين الأوسطين}} = \frac{\text{ق}_5^{15}}{\text{ق}_7^{15} + \text{ق}_8^{15}}$$

$= \frac{\quad}{\quad}$

رقم ٣ : ب بدون فك المحدد اثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \text{ب} & 1 & \text{ء} \\ 0 & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} = \text{أ س} + \text{ب ص}$$

الحـــــــــل

الأيمن بتبديل ع_1 مكان ع_3 ثم ع_2 مكان ع_3

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & 0 \\ 0 & \text{ب} & 1 \\ \text{س} & 0 & \text{ء} \end{vmatrix}$$ بضرب $\text{ع}_1 \times -\text{أ}$ ثم اضافته إلي ع_2

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{س} & -\text{أ س} & \text{ص} \end{vmatrix}$$ بضرب $\text{ع}_2 \times -\text{ص}$ واضافته إلي ص_3

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{س} - \text{أ س} - \text{ب ص} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ بتبديل ص_2 مكان ص_3

رقم ٣ : اذا كان $\text{ع}_1 = \text{جتا}\frac{2\text{ط}}{3} + \text{ت جا}\frac{2\text{ط}}{3}$

$\text{ع}_2 = \text{جا}\frac{\text{ط}}{6} + \text{ت جتا}\frac{\text{ط}}{6}$ فأوجد

القيمة $= (\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2})^7$ في الصورة الأسية

الحـــــــــل

$\text{ع}_1 = \text{جتا}\frac{2\text{ط}}{3} + \text{ت جا}\frac{2\text{ط}}{3}$ ويجب وضع العدد ع_2

علي الصورة المثلثية الحقيقية كالآتي:-

$\text{ع}_2 = \text{جتا}(\frac{\text{ط}}{2} - \frac{\text{ط}}{6}) + \text{ت جا}(\frac{\text{ط}}{2} - \frac{\text{ط}}{6})$

$\text{ع}_2 = \text{جتا}\frac{2\text{ط}}{3} + \text{ت جا}\frac{2\text{ط}}{3}$

$\text{ع} = (\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2})^7 = \left[\frac{\text{جتا}\frac{2\text{ط}}{3} + \text{ت جا}\frac{2\text{ط}}{3}}{\text{جتا}\frac{\text{ط}}{3} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{3}}\right]^7$

$\text{ع} = (\text{جتا}\frac{\text{ط}}{3} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{3})^7$

$\text{ع} = (\text{جتا}\frac{7\text{ط}}{3} + \text{ت جا}\frac{7\text{ط}}{3})$ نطرح 2ط من السعة

$\text{ع} = \text{هـ}^{\frac{7\text{ط}}{3}\text{ت}} = \text{هـ}^{\frac{\text{ط}}{3}\text{ت}}$

١	ب	٠
٠	- أ س - ب ص	٠
س	ب	١

بأخذ عامل مشترك
-١ من ع
٢

١	٠	٠
٠	أ س + ب ص	٠
س	- ب	١

= ١(أ س + ب ص)×١ = أ س + ب ص = الأيسر

ثانياً:- الهندسة الفراغية أجب عن سؤالين فقط مما يأتي

١- أكمل مايلي أولاً:-

أ- المستقيمان يكونان متخالفين إذا كانا لا يجمعهما مستوي واحد

ب- المستقيم ل يكون عموديا علي المستوي س إذا كان عموديا علي مستقيمين متقاطعين فيه

جـ - في النموذج الأول

د - إذا تقاطعا مستقيمان في مستوي وكانا موازيين لمستقيمين متقاطعين في مستوي آخر كان مستوي المستقيمين الأولين موازيا لمستوي المستقيمين الآخرين

ثانياً:- س ، ص مستويان متقاطعين في $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ يقع في المستوي س ويوازي ص والمستقيم $\overleftrightarrow{هـ و}$ يقع في المستوي ص ويوازي س

إثبت أن ١- $\overleftrightarrow{جـ د}$ // $\overleftrightarrow{هـ و}$ ٢- أ ب // المستوي جـ د و هـ

الحـــــل

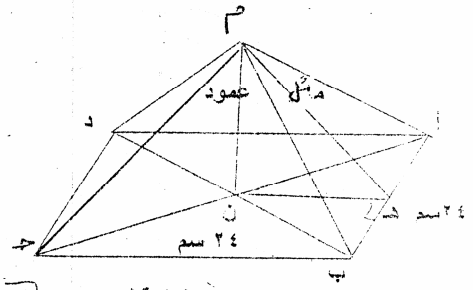
في نفس المسألة رقم ٤١ في الهندسه الفراغية وتم حلها سابقاً

رقم ٢:-(ب) م أ ب جـ د هرم رباعي قائم طول ضلعة ٢٤سم وظل زاوية ميل الوجه م أ ب علي القاعدة = ٤ / ٣

فأوجد ١- ارتفاع الهرم

٢- اثبت أن المستويين م أ جـ ، م ب د متعامدان

الحـــــل



طول ضلع المربع = ٢٤ سم طول قطره = ٢٤ $\sqrt{٢}$

ن أ = ١٢ $\sqrt{٢}$ نسقط ن هـ ⊥ أ ب ثم نصل م هـ

الهرم قائم القاعدة مربعة وارتفاع الهرم م ن حيث ن نقطة تلاقي القطرين

ن هـ = ب جـ = ١٢ سم

∵ المسقط ن هـ ⊥ أ ب

∴ المائل م هـ ⊥ أ ب

د م هـ ن هي مقياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين الوجه م أ ب والقاعدة أ ب جـ د

ظا هـ = $\frac{م ن}{ن هـ}$ = $\frac{٤}{٣}$ = $\frac{م ن}{١٢}$ ∴ م ن = ١٦سم وهو ارتفاع الهرم

ن م ⊥ أ ب جـ د م ن ⊂ م أ جـ

المستوي م أ جـ ⊥ المستوي أ ب جـ د

وكذلك م ن ⊂ م ب د

م ب د ⊥ المستوي أ ب جـ د

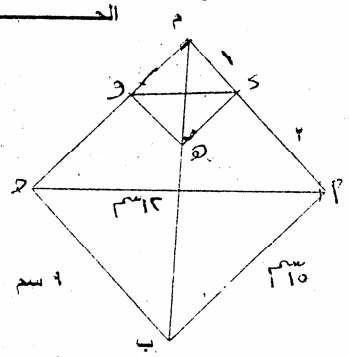
المستوي م أ جـ ⊥ المستوي م ب د

رقم ٣:- أ - م أ ب جـ هرم ثلاثي قاعدته △ أ ب جـ فيها أ ب = ١٥ سم ، ب جـ = ٩سم جـ أ = ١٢سم رسم مستوي يوازي قاعدة الهرم ويقطع م أ في د ، م ب في هـ ، م جـ في و

فاذا كان $\frac{م د}{م أ}$ = $\frac{١}{٣}$

أوجد أطوال أضلاع المثلث د هـ و واحسب مساحته

الحـــــل



المستوي د هـ و // المستوي أ ب جـ وقطعهما المستوي م أ ب في د هـ ، أ ب

د هـ // أ ب بالمثل هـ و // ب جـ

د و // أ جـ الزاوية المتناظرة متساويه في كل من المثلثين د هـ و ، أ ب جـ

د هـ و △ ~ أ ب جـ

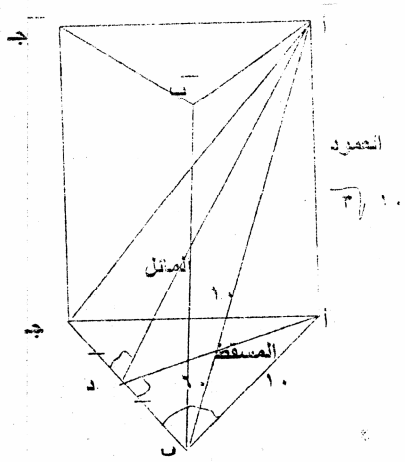
$\frac{د هـ}{أ ب}$ = $\frac{هـ و}{ب جـ}$ = $\frac{د و}{أ جـ}$ = $\frac{١}{٣}$

$\frac{\text{د هـ}}{\text{١٥}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{٩}} = \frac{\text{د و}}{\text{١٢}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$

د هـ = ٥ سم ، هـ و = ٣ سم ، د و = ٤ سم والمثلث
كهو قائم الزاوية في و ومساحته = $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ سم^2

رقم ٣:- (ب) أ ب جـ آ ب جـ منشور ثلاثي قائم قاعدته مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعة ١٠سم فاذا كان
أ آ = ١٠ $\sqrt{3}$ سم د منتصف ب جـ
أرجد ١- قياس زاوية ميل أ جـ علي القاعدة
٢- ظل قياس الزاوية الزوجية (أ – جـ ب – أ)

الحـــــــل



الزاوية بين مستقيم ومستوي هي الزاوية المحصورة بين هذا المستقيم ومسقطه علي المستوي إذا زاوية ميل أ جـ هي د (أ جـ أ)

ظا أ جـ أ = $\frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$

ق (أ جـ أ) = ٦٠°

لمسقط أ د متوسط في △ أ ب جـ المتساوي الأضلاع فهو عمودي علي القاعدة

المسقط أ د ⊥ ب جـ المائل أ د ⊥ ب جـ

د أ د أ هي مقياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين أ ب جـ ، أ ب جـ

أ د = ١٠ جا ٦٠ = $5\sqrt{3}$

ظا أ د أ = $\frac{10\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = 2$ ق (أ – جـ ب – أ) = ٢

نموذج ٧ ص ١٧٤

أولاً:- الجبر أجب عن سؤالين فقط مع يأتي

١- أ:- إذا كان $\text{ق}^{18}_{\text{٢ر-٧}} = \text{ق}^{18}_{\text{٢ر+٥}}$

أوجد $\text{ل}^{7}_{\text{ر}}$

الحـــــــل

$\text{ق}^{18}_{\text{٢ر-٧}} = \text{ق}^{18}_{\text{٢ر+٥}}$ ٢ر-٧=٢ر+٥ وهذا مرفوض

٢ر-٧+٢ر+٥ = ١٨ ٤ر-٢=١٨

٤ر = ٢٠ ⟸ ر = ٥

$\text{ل}^{7}_{\text{ر}} = \text{ل}^{7}_{5} = 840$

١ (ب) اثبت أن

$\left[\frac{\text{٣س}^{3}+\text{٢س}^{2}}{\text{٣س}^{2}+\text{٢س}} + \frac{\text{٣س}^{2}-\text{٥س}^{3}}{\text{٣س}-\text{٥}} - \frac{1}{\text{س}^{2}}\right]^{6} = 1$

الحـــــــل

الأيمن = $\left[\frac{\text{٣س}^{3}+\text{٢س}^{2}}{\text{٣س}^{2}+\text{٢س}} + \frac{\text{٣س}^{3}-\text{٥س}^{2}}{\text{٣س}-\text{٥}} - \frac{1}{\text{س}^{2}}\right]^{6}$

$= \left[\frac{\text{س}(\text{٣س}^{2}+\text{٢})}{\text{٣س}^{2}+\text{٢س}} + \frac{\text{٣س}^{2}(\text{٣س}-\text{٥})}{\text{٣س}-\text{٥}} - \text{س}\right]^{6}$

$= [\text{س} + \text{٣س}^{2} - \text{س}]^{6} = [\text{٣س}^{2}]^{6}$

$= \text{س}^{12} = 1$ = الأيسر

٢ :- (ب) إذا كان

$(1 + \text{س})^{\text{ن}} = 1 + \text{أ}_{1}\text{س} + \text{أ}_{2}\text{س}^{2} + \ldots\ldots\ldots \text{أ}_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}}$

فأوجد قيمة ن التي تحقق

$\text{٢}(\text{أ}_{9} + \text{أ}_{8}) = \text{١٣}\,\text{أ}_{7}$

الحـــــــل

$(1+س)^{ن} = 1 + ق^{ن}_{1} س + ق^{ن}_{2} س^{2} + ... ق^{ن}_{ن} س^{ن}$

$(1+س)^{ن} = 1 + أ_{1} س + أ_{2} س^{2} + ... أ_{ن} س^{ن}$

وبمقارنة المعاملات نجد أن

$ق^{ن}_{1} = أ_{1}$ ، $ق^{ن}_{2} = أ_{2}$ ، $ق^{ن}_{3} = أ_{3}$ وهكذا $ق^{ن}_{ن} = أ_{ن}$

وبالقياس نجد $أ_{9} = ق^{ن}_{9}$ ، $أ_{8} = ق^{ن}_{8}$ ، $أ_{7} = ق^{ن}_{7}$ هكذا

العلاقة $2(أ_{9} + أ_{8}) = 13 أ_{7}$ ∴ $2(ق^{ن}_{9} + ق^{ن}_{8}) = 13 ق^{ن}_{7}$

بقسمة الطرفين على $ق^{ن}_{8}$

$$2\left(\frac{ق^{ن}_{9}}{ق^{ن}_{8}} + 1\right) = 13\left(\frac{ق^{ن}_{7}}{ق^{ن}_{8}}\right)$$

$$2\left[\left(\frac{ن-9+1}{9}\right) + 1\right] = \frac{13 \times 8}{ن-8+1}$$

$$\left[\frac{ن-8+9}{9}\right] = \frac{13 \times 4}{ن-7}$$

$$\frac{(ن+1)}{9} = \frac{52}{ن-7}$$

$(ن-7)(ن+1) = 468$ ، $ن^{2} - 6ن - 7 - 468 = 0$

$ن^{2} - 6ن - 475 = 0$ ، $(ن-25)(ن+19) = 0$

$ن = 25$ ، $ن = -19$ لاغي

٣:- أ- إذا كان $ع_{1} = \frac{6 + 4ت}{1 + ت}$ ، $ع_{2} = \frac{26}{5 - ت}$

فبين $ع_{1}$ ، $ع_{2}$ مترافقان ثم أوجد الجذرين التربيعين للعدد

$(ع_{1} - ع_{2})^{2}$ في الصورة الأسية

الحـــــــل ثم حلها في النموذج الأول في رقم ٢ (ب)

مع اختلاف بسيط وهو $(ع_{1} - ع_{2})^{2}$ مثل $(ع_{1} - ع_{2})$

رقم ٣: ب- بدون فك المحدد اثبت ان

$$\begin{vmatrix} ب جـ & جـ^{2} & ب^{2} \\ جـ^{2} & جـ أ & أ^{2} \\ ب^{2} & أ^{2} & أ ب \end{vmatrix} = أ ب جـ \begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ ب & أ & جـ \\ أ & جـ & ب \end{vmatrix}$$

بأخذ عامل مشترك ب جـ من $ص_{1}$ ثم أخذ

جـ أ من $ص_{2}$ وأخذ جـ ا من $ص_{3}$ نجد أن

$$أ ب جـ \begin{vmatrix} 1 & \frac{جـ}{ب} & \frac{ب}{جـ} \\ \frac{جـ}{أ} & 1 & \frac{أ}{جـ} \\ \frac{ب}{أ} & \frac{أ}{ب} & 1 \end{vmatrix}$$

بضرب $ع_{1} \times$ أ ثم ضرب $ع_{2} \times$ ب ، $ع_{3} \times$ جـ

$$\frac{أ^{2} ب^{2} جـ^{2}}{أ ب جـ} \begin{vmatrix} أ & جـ & ب \\ جـ & ب & أ \\ ب & أ & جـ \end{vmatrix}$$ بتبديل $ع_{2}$ بمكان $ع_{1}$

$$أ ب جـ \begin{vmatrix} جـ & أ & ب \\ ب & جـ & أ \\ أ & ب & جـ \end{vmatrix}$$ ثم تبديل $ع_{2}$ بمكان $ع_{3}$

$$أ ب جـ \begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ أ & جـ & ب \\ ب & أ & جـ \end{vmatrix} = \text{الأيسر}$$

ثانياً:- الهندسه الفراغيه

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي :-

١- أولاً : أكمل إلي جمل صحيحه

أ – إذا وازي مستقيم كلا من مستويين متقاطعين فانه يوازى خط تقاطعهما .

ب- الهرم الثلاثي المنتظم هو كل أوجهه مثلثات متساوية الأضلاع حتى قاعدته فكل أحرفه الجانبيه متساويه مع قاعدته وارتفاعه من أي رأس يصل إلي نقطة تلاقي المتوسطات في القاعدة .

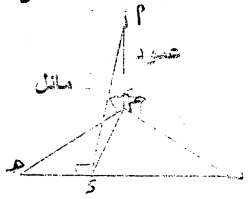
جـ - إذا رسم مستقيم مائل علي مستوي وكان مسقطه علي عمودياً علي مستقيم فيه كان المستقيم المائل عموديا علي نفس المستقيم

د - إذا تعامدا مستويان ورسم أحدهما مستقيم عمودي علي خط التقاطع كان هذا المستقيم عمودي علي المستوي الآخر .

المعطيات : أ ب جـ مرم ثلاثي فيه الأحرف م أ ، م ب متعامدان مثلثي رسم أ د ⊥ ب جـ

المطلوب : أثبت أن م د ⊥ ب جـ

الحـــــل



∵ م د ⊥ ب ، م جـ ∴ أ م ⊥ المستوي م ب جـ

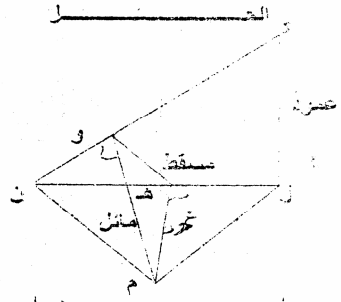
المعطى أ د ⊥ ب جـ المسقط م د ⊥ ب جـ

رقم ٢ ص ١٧٦ : ل م ن مثلث أقيم من ن العمود ن د علي مستوي هذا المثلث رسم م هـ ⊥ ل ن ، م و ⊥ د ن ليقطع ل ن ، د ن في هـ ، و

المطلوب : أن أ - م هـ ⊥ المستوي د ل ن

ب - هـ و ⊥ د ن

الحـــــل



∵ د ل ⊥ المستوي ل م ن ∴ د ل ⊥ م هـ

لكن م هـ ⊥ ل ن ∴ م هـ ⊥ المستوي د ل ن

المائل م و ⊥ د ن المسقط هـ و ⊥ د ن

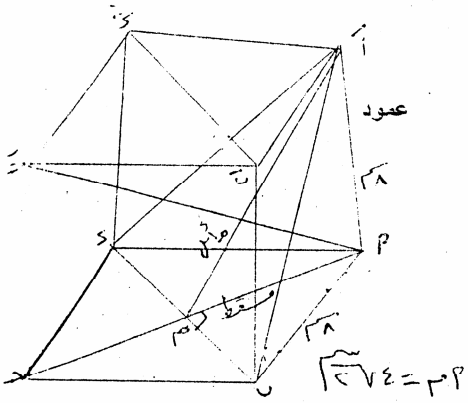
رقم ٣ ص ١٧٦ : أ ب جـ د مكعب طول حرفه ٨ سم أثبت أن قياس الزاوية الزوجيه (أ - ب د - أ) = $\sqrt{2}$ والمستوي أ جـ هـ عمودي علي المستوي ب د د ب

الحـــــل

القطران أ جـ ، ب د متعامدان في المربع

المسقط أ م ⊥ ب د المائل أ م ⊥ ب د

∴ أ م ب هي مقياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين أ ب د ، أ ب د



∴ ظا أ م أ = $\frac{٨}{٤\sqrt{2}}$ = $\sqrt{2}$

ظا (أ - ب د - أ) = $\sqrt{2}$

∵ د د ⊥ مستوي المربع أ ب جـ د

∵ د د ⊥ أ جـ لكن ب د ⊥ أ جـ (مربع)

∴ أ جـ ⊥ كل من ب د ، د د

∴ أ جـ ⊥ المستوي ب د د ب

لكن أ جـ ⊂ مستوي أ جـ جـ

∴ المستوي أ جـ جـ ⊥ المستوي ب د د ب

نموذج ٨ ص ١٧٧

أولاً : الجبر أجب عن سؤالين مما يأتي :-

١ :- أ - إذا كان س + ص = ١٠

$ل_{٢}^{س+ص}$ = ٢١٠

$ق_{٣}^{ص-٣}$ = ٣٥ أوجد قيمة س ، ص

الحـــــل

$ل_{٢}^{س+ص}$ = ١٥ × ١٤٠ ⟸ $ل_{٢}^{١٠}$ = $ل_{٢}^{س+ص}$

س + ص = ١٥ (١)

$ق_{٣}^{ص-٣}$ = ٣٥ $ل_{٣}^{ص-٣}$ = ٣٥ $ل_{٣}^{٣}$

$ل_{٣}^{ص-٣}$ = ٢١٠ $ل_{٣}^{ص-٣}$ = ٧ × ٦ × ٥

س − ٣ = ٧

ل = ل س−٣=٧ ص = ١٠

٣ ٣

لكن س+ ص = ١٥ س = ٥

رقم ١:- ب- إذا كان ω أحد الجذور التكعيبية فاثبت

$$\left[\frac{\omega^{٢}+٤}{\omega^{٢}-٢}+\frac{\omega-١}{\omega^{٢}+٣+\omega+٢}\right]^{٢} = ٤$$

الحـــــــــــــل

في نفس المسألة رقم ٢ ب في نموذج ٣

رقم ٢:- ب في مفكوك

$$\left(٤\,س^{٢}+\frac{جل}{س^{٢}}\right)^{١٥}$$

أوجد أولاً قيمة الحد الخالي من س

ثانياً:- قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين في المفكوك متساويه

الحـــــــــل

في نفس المسألة في النموذج ٢ رقم ٢ أ

رقم ٣:- أ إذا كان $ع_{١} = \sqrt{٣} + ت$ ، $ع_{٢} = \sqrt{٢}\,(١+ت)$

وجد كل من $ع_{١} ع_{٢}$ ، $\frac{ع_{٢}}{ع_{١}}$

الحـــــــــل

$$= \sqrt{٣} + ت$$

$$= ٢\left(جتا\frac{ط}{٦} + ت\,جا\frac{ط}{٦}\right) = ٢\,هـ^{\frac{ط}{٦}ت}$$

$$= \sqrt{٢} + \sqrt{٢}\,ت \qquad ل = \sqrt{٢^{٢}+٢^{٢}} = ٢$$

$$= ٢\left(جتا\frac{ط}{٤} + ت\,جا\frac{ط}{٤}\right) = ٢\,هـ^{\frac{ط}{٤}ت}$$

$$ع_{٢} = ٢\,هـ^{\frac{ط}{٦}ت} \times ٢\,هـ^{\frac{ط}{٤}ت}$$

$$= ٤\,هـ^{\left(\frac{ط}{٦}+\frac{ط}{٤}\right)ت} \qquad = ٤\,هـ^{\frac{٥\,ط\,ت}{١٢}}$$

$$\frac{ع_{٢}}{ع_{١}} = \frac{٢\,هـ^{\frac{ط}{٤}ت}}{٢\,هـ^{\frac{ط}{٦}ت}} = هـ^{\left(\frac{ط}{٤}-\frac{ط}{٦}\right)ت} = هـ^{\frac{ط}{١٢}ت}$$

رقم ب:- باستخدام خواص المحددات اثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١ & س+ص+٢ & س & ص \\ ١ & ص+٢س+١ & ص & \\ ١ & س & س+٢ص+١ & \end{vmatrix} = ٢\,(س+ص+١)^{٣}$$

الحـــــــــل

هي نفس المسألة في نموذج ٢ رقم ٣ أ

ثانياً:- الهندسه الفراغية

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي :-

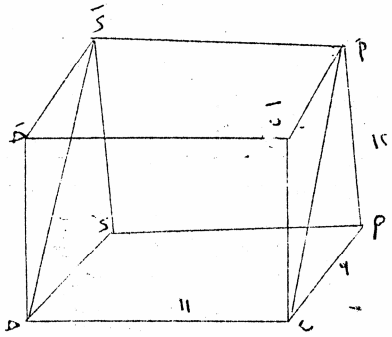
رقم أ :- أولاً أكمل إلي جمل صحيحه

ب :- مكعب طول قطره $٨\sqrt{٣}$ يكون طول حرفه ٨

د- إذا رسم مستقيم عمودياً علي مستوي فكل مستوي يمر بهذا المستقيم يكون عمودياً عني ذلك المستوي

ثانياً :- أ ب جـ د أ ب جـ د متوازي مستطيلات اثبت أن الشكل جـ ب أ د مستطيل وإذا كان ب جـ = ١١ سم ، ب أ = ٩سم ، أ أ = ١٢سم فاحسب مساحة سطح المستطيل جـ ب أ د

الحـــــــــل



جـ ب ⊥ المستوي أ ب ب أ

جـ ب ⊥ ب أَ بالمثل ب جـ ⊥ جـ دَ

الشكل أ ب جـ د كل زواياه قوائم أ ب قطر في
أ ب ب أ حيث أ ب = $\sqrt{١٤٤+٨١}$ = $\sqrt{٢٢٥}$
أ ب = د جـ = ١٥ ، أ د = ب جـ = ١١ سم
الشكل ب جـ د أ مستطيل مساحته = ١١ × ١٥ = ١٦٥ سم^2

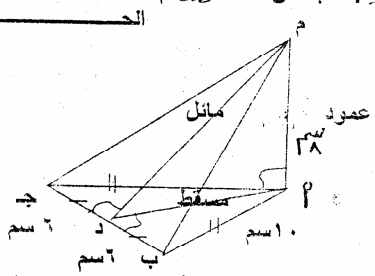
رقم ٢:- ب: أ ب جـ د شكل رباعي أضلاعه ليست في مستوي واحد والمستوي س ∥ كل من أ جـ ، ب د ويقطع أ ب في ك ، ب جـ في ل ، د جـ في م ، د أ في ن
اثبت أن

$$\frac{\text{ك ل}}{\text{أ جـ}} + \frac{\text{ل م}}{\text{ب د}} = ١$$

الحـــــــل
هو نفس التمرين رقم ٢ ص ٩٩ في النموذج رقم ٤

رقم ٣:- م أ ب جـ هرم ثلاثي حرفة م أ ⊥ المستوي أ ب جـ
أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، م أ = ٨ سم
د منتصف ب جـ
أولاً:- احسب طول أ د ، أوجد زاوية مستويه للزاوية الزوجية (م – $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ – أ)
ثانياً:- اثبت أن المستويين م أ د ، أ ب جـ متعامدان

الحـــــــل



أ د متوسط في △ أ ب جـ المتساوي الساقين
أ د ⊥ ب جـ

(أ د)^2 = (١٠)^2 - (٦)^2 أ د = $\sqrt{١٠٠ - ٣٦}$
أ د = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم
المسقط أ د ⊥ ب جـ المائل م د ⊥ ب جـ
د أ د م هي مقياس الزاويه المستويه للزاويه الزوجيه بين أ ب جـ ، م ب جـ

ظا م أ د = $\frac{٨}{٨}$ = ١ ق (م – $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ – أ) = ٤٥°

ب جـ ⊥ د أ ، د م ب جـ ⊥ المستوي م أ د
لكن ب جـ ⊂ المستوي أ ب جـ
المستوي م أ د ⊥ المستوي أ ب جـ

نموذج رقم ٩ ص ١٨٠
أولاً: الجبر :- أجب عن سؤالين فقط
رقم ١:- أ - إذا كان
$^{٦}ل_{ر}$ = ١٢٠

$^{ن+١}ق_{ر}$: $^{ن+١}ق_{ر-١}$ = ١٢ احسب ن – ر

الحـــــــل

$^{٦}ل_{ر}$ = ٦ × ٥ × ٤ $^{٦}ل_{ر}$ = $^{٦}ل_{٣}$

⟸ ر = ٣

$$\frac{^{ن+١}ق_{٣}}{^{ن+١}ق_{٢}} = ٢ \qquad \frac{ن+١-٣+١}{٣} = ٢$$

$$\frac{ن-١}{٣} = ٢ \qquad ن-١ = ٦ \qquad ن = ٧$$

ن – ر = $\underline{|٧}$ – $\underline{|٣}$ = $\underline{|٤}$ = ٢٤

رقم ١: (ب) إذا كان ١ ، ω ، ω^2 هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فاثبت أن

$$[\omega + \frac{١}{\omega}]^2 - [\omega^2 + \frac{١}{\omega^2}]^2 + ٢ = ٠$$

الحـــــــل

الأيمن $[\omega + \frac{\omega^3}{\omega}]^2 - [\omega^2 + \frac{\omega^3}{\omega^2}]^2 + ٢$

$= (\omega + \omega^2)^2 - (\omega^2 - \omega)^2 + ٢$

$= (-١)^2 - (\pm\sqrt{٣}\,ت)^2 + ٢$

= ١ – ٣ + ٢ = صفر

رقم ٢:- (أ) اثبت أنه لا يوجد حد خالي من س في

مفكوك $(س^{٦} - \frac{١}{س})^{١٤}$ ثم أوجد النسبة بين ح ، ح ٧ ، ح ٦

في هذ المفكوك عند س = -١

الحـــــــل

تم حل هذه المسأله في مسائل مختاره من إمتحانات الثانويه العامه وهي المسأله رقم ١٠ ص ٢٠٣ بالنموذج (مصر أغسطس ٩٦)

رقم ٢:- (ب) إذا كان $ع = \frac{-٤}{١ - \sqrt{٣}\,ت}$ اكتب ع علي الصورة المثلثية ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع في الصورة الأسية

الحـــــــل

$ع = \frac{-٤(١ + \sqrt{٣}\,ت)}{(١ - \sqrt{٣}\,ت)(١ + \sqrt{٣}\,ت)}$

$ع = \frac{-٤(١ + \sqrt{٣}\,ت)}{١ - ٣ت^{٢}} = \frac{٤(١ + \sqrt{٣}\,ت)}{٤}$

$ع = -١ - \sqrt{٣}\,ت$

$ع = ٢(جتا \frac{٤ط}{٣} + ت جا \frac{٤ط}{٣})$ ع = ٢ هـ $^{\frac{٤ط}{٣}ت}$

$ع^{\frac{١}{٣}} = ٢^{\frac{١}{٣}} \left[هـ^{(\frac{٤ط}{٣} + ٢ط ر)ت} \right]^{\frac{١}{٣}}$

$ع^{\frac{١}{٣}} = ٢^{\frac{١}{٣}} \left[هـ^{(\frac{٤ط + ٦ط ر}{٣})ت} \right]^{\frac{١}{٣}}$

$ع^{\frac{١}{٣}} = ٢^{\frac{١}{٣}} \left[هـ^{(\frac{٤ط + ٦ط ر}{٩})ت} \right]^{\frac{١}{٣}}$

عند ر = ٠ الجذر الأول = $٢^{\frac{١}{٣}}$ هـ $^{\frac{٤ط}{٩}ت}$

عند ر = ١ الجذر الثاني = $٢^{\frac{١}{٣}}$ هـ $^{\frac{١٠ط}{٩}ت}$

عند ر = ٢ الجذر الثالث = $٢^{\frac{١}{٣}}$ هـ $^{\frac{١٦ط}{٩}ت}$

رقم ٣:- (ب) بدون فك المحدد اثبت أن

$$\begin{vmatrix} أ & -ب & -جـ \\ ب & ١ & ٠ \\ جـ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = أ + ب^{٢} + جـ^{٢}$$

الحـــــــل

تم حلها في إمتحان مصر أغسطس ١٩٩٨ في مسائل مختاره من إمتحانات الثانوية العامه علي المحددات تحت رقم ٦ ص ٨٤

ثانياً:- الهنسه الفراغيه

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي :-

١- أولاً : أكمل إلي جمل صحيحه

أ – إذا وازي مستقيم خارج مستو مستقيماً في المستوي فانه يوازى ذلك المستوى

ب- طول قطر متوازي المستطيلات الذي أبعاده ٤سم ،٣سم،١٢سم يساوي ١٣ سم

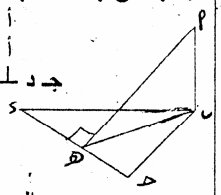
حيث طول القطر = $\sqrt{(٤)^{٢} + (٣)^{٢} + (١٢)^{٢}}$

$= \sqrt{٢٥ + ٩ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$

جـ - إذا قطعت عدة مستويات متوازيه بمستقيمين فان أطوال القطع المستقيمه المحصوره بينها تكون متناسبه

ثانياً:- أ ب جـ د هرم ثلاثي فيه $\overline{أب} \perp \overline{جـد}$ رسم $\overline{أ هـ} \perp \overline{جـ د}$ ويقطعها في هـ

اثبت أن $\overline{جـ د} \perp \overline{ب هـ}$ الحـــــل



أ ب ⊥ جـ د

أ هـ ⊥ جـ د

جـ د ⊥ كل من أ ب ، أ هـ

جـ د ⊥ المستوي أ ب هـ

فهو عمود علي جميع المستقيمات في المستوي أ ب هـ

جـ د ⊥ ب هـ #

رقم ٢:- (ب) أ ب جـ مثلث فيه ق(ب)= ٥٣٠ ب جـ = ١٤سم ، رسم $\overline{جـ د} \perp$ علي المستوي أ ب جـ ثم رسم $\overline{د هـ} \perp \overline{أ ب}$ فقطعها في هـ فاذا كان د هـ = ٢٥ سم أوجد

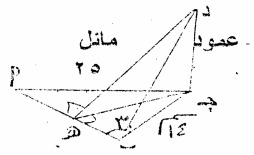
أولاً:- طول جـ د

ثانياً:- ظل زاوية ميل ب د علي المستوي جـ د هـ

الحـــــــل

المائل د هـ ⊥ أ ب المسقط جـ د ⊥ أ ب

جـ هـ = ١٤ جا ٣٠ جـ هـ = ٧ سم



جـ د ⊥ المستوي أ ب جـ جـ د ⊥ جـ هـ

(د هـ)^2 = (د جـ)^2 + (جـ هـ)^2

٦٢٥ = (جـ د)^2 + (٧)^2 (جـ د)^2 = ٥٧٦ جـ د = ٢٤ سم

ب هـ = ١٢ جتا ٣٠ = ٧ √٣

ب هـ ⊥ المستوي د جـ هـ

مسقط د ب علي المستوي هو د هـ

زاوية ميل ب د علي المستوي هي الزاوية المحصوره بين ب د ومسقطه علي المستوي

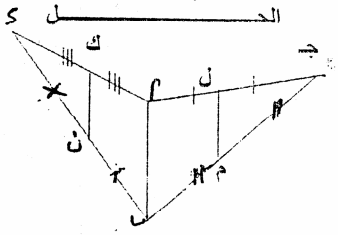
د ب د هـ هي زاوية ميل ب د علي المستوي جـ د هـ

ظا جـ د هـ = ٧ / ٣

رقم ٣:- (أ) – جـ ب أ ، د أ ب مثلثان في مستويين مختلفين إذا كان ل ، م ، ك ، ن منتصفات جـ أ ، جـ ب ، د أ ، د ب علي الترتيب اثبت أن ١- ل م ∥ ك ن

٢- أ ب ∥ المستوي ل م ن ك

الحـــــــــل



ل م واصل بين منتصفي أ جـ ، جـ ب في △ أ ب جـ

ل م ∥ أ ب بالمثل كذلك ك ن ∥ أ ب

ل م ∥ ك ن فهما يكونان مستوي

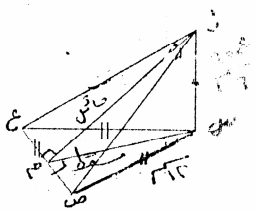
أ ب ∥ ل م الواقع في المستوي ل م ن ك

أ ب ∥ المستوي ل م ن ك

رقم ٣:- (ب) س ص ع مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم رسم س ن ⊥ المستوي س ص ع بحيث س ن = ٦ سم رسم ن م ⊥ ص ع

اثبت أن :- أولاً- المستوي ن س م ⊥ المستوي ن ص ع

ثانياً:- ق (ن – ع ص – س) = ٣٠°



المائل ن م ⊥ ص ع المسقط س م ⊥ ص ع

ص ع ⊥ كل من ن م ، س م

ص ع ⊥ المستوي ن س م لكن ص ع ⊂ المستوي ن ص ع المستوي ن س م ⊥ المستوي ن ص ع

س م = ١٢ جا ٦٠ = ٦ √٣

د ن م س هي مقياس الزاويه المستويه للزاويه الزوجيه بين المستويين ن ص ع ، س ص ع

ظا ن م س = ٦ / ٦√٣ = ١ / √٣

ق (ن – ع ص – س) = ٣٠°

نموذج رقم ١٠ ص١٨٣

أولاً: الجبر أجب عن سؤالين فقط مما يأتي :-

١:- (أ) إذا كان $^{س}ق_{٢}$ = ٦ ، $^{١٠}ل_{ص}$ = ٧٢٠

فأوجد قيمة | ص- س +١

الحـــــــــل

$^{س}ق_{٢}$ = ٦ ∴ $\frac{^{س}ل_{٢}}{\underline{|٢}}$ = ٦

$^{س}ل_{٢}$ = ١٢ $^{س}ل_{٢}$ = ٤ × ٣

$^{س}ل_{٢}$ = $^{٤}ل_{٢}$ س = ٤

$^{١٠}ل_{ص}$ = ١٠ × ٩ × ٨ = $^{١٠}ل_{٣}$ ص = ٣

| ص- س +١ = |٣ – ٤ + ١| = ١

رقم ١: (ب) اثبت أن

[(١ + $\frac{١}{ω^{٤}}$ + ٢ω٢)^{٢} - (١+٢ω+$\frac{١}{ω}$)^{٢}]^{٤}

= ٩

$[(1+\frac{س^3}{ω^2}+2ω^2)^2 - (1+2ω+\frac{س^3}{ω})^2]^4$ ١١٢

$= [(1+ω+2ω^2)^2 - (1+2ω+ω^2)^2]^4$

$= [(-ω2+2ω2)^2 - (-ω+2ω)^2]^4$

$= [(ω2)^2 - (ω)^2]^4 = (ω4 - ω2)^4$

$= (ω - ω2)^4 = (\pm\sqrt{3})^4 = 9ت^4 = 9$

رقم ٢:- (ب) في مفكوك $(س3 + \frac{أ}{س})^8$ إذا كان معامل $س^{16}$ = الحد الخالي من س أوجد قيمة أ

الحـــــل

نفرض أن ح $_{ر+1}$ يشتمل علي $س^{16}$

$ح_{ر+1} = ق^8_ر (\frac{أ}{س})^ر (س3)^{8-ر}$

$س^{-ر} \times س^{24-3ر} = س^{16} \Leftarrow س^{24-4ر} = س^{16}$

$24 - 4ر = 16 \quad 4ر = 24-16 = 8 \quad ر = 2$

$ح_3$ يشتمل علي $س^{16}$

$ح_3 = ق^8_2 (\frac{أ}{س})^2 (س3)^6$

$ح_3 = 28 أ^2 س^{16}$ المعامل $28 أ^2$

$24 - 4ر = س \quad 24 = 4ر \quad \boxed{ر = 6}$

$ح_7$ هو الحد الخالي من س

$ح_7 = ق^8_6 (\frac{أ}{س})^6 (س3)^2$

$= ق^8_2 أ^6 = 28 أ^6 \quad 28 أ^2 = 28 أ^6 \quad أ^4 = 1 \quad أ = \pm 1$

رقم ٣:- إذا كان $ع = (\frac{1+\sqrt{3}ت}{ت})^2$

ضع ع علي الصورة المثلثية ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع في الصورة الأسية

الحـــــل

$ع = [\frac{(1+\sqrt{3}ت)}{ت}]^2 = \frac{1+2\sqrt{3}ت+3ت^2}{ت^2}$

$ع = \frac{1+2\sqrt{3}ت-3}{-1} = 2-2\sqrt{3}ت$

نضع هذا المربع الرابع حيث $ل = \sqrt{4+12} = 4$

$جتاθ = \frac{1}{2}$ ، $جاθ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$θ = 360 - 60 = \frac{300ط}{180} = \frac{5ط}{3}$

$ع = 4(جتا\frac{5ط}{3} + ت جا\frac{5ط}{3})$

$ع^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}[جتا\frac{5ط}{3} + 2ط ر + ت جا\frac{5ط}{3} + 2ط ر]^{\frac{1}{3}}$

$ع^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}[جتا\frac{5ط+6ط ر}{3} + ت جا\frac{5ط+6ط ر}{3}]^{\frac{1}{3}}$

$ع^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}[جتا\frac{5ط+6ط ر}{9} + ت جا\frac{5ط+6ط ر}{9}]$

$ع^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}\, هـ^{\frac{5ط+6ط ر}{9} ت}$

عند ر = ٠ الجذر الأول = $\sqrt[3]{4}\, هـ^{\frac{5ط}{9} ت}$

عند ر = ١ الجذر الثاني = $\sqrt[3]{4}\, هـ^{\frac{11ط}{5} ت}$

عند ر = ٢ الجذر الثالث = $\sqrt[3]{4}\, هـ^{\frac{17ط}{5} ت}$

رقم ٣:- (ب) بدون فك المحدد اثبت أن

$$\begin{vmatrix} ب+جـ-أ & أ & د \\ جـ+أ-ب & ب & د \\ أ+ب-جـ & جـ & د \end{vmatrix} = صفر$$

الحـــــل

بضرب ع × ٢ ثم إضافته علي ع

ب + جـ + أ	أ	د
جـ + أ + ب	ب	د
أ + ب + جـ	جـ	د

بأخذ عامل مشترك

د(أ + ب + جـ) | ١ | أ | ١ |
| ١ | ب | ١ |
| ١ | جـ | ١ |

د (أ + ب + جـ) × ٠ = صفر

ثانياً :- الهندسه الفراغية

١ :- أكمل إلي جمل صحيحه

أ- إذا تقاطع مستقيمان في مستوي وكانا موازيين لمستقيمين في مستوي آخر كان مستوي المستقيمين الأولين موازياً لمستوي المستقيمين الآخرين .

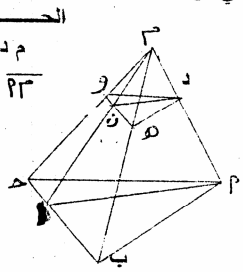
ب- إذا توازي مستويان فأي مستقيم في أحدهما يوازي المستوي الآخر .

جـ - إذا كان كل من مستقيمين متقاطعين عمودياً علي مستو ثالث كان خط تقاطعهما عموديا علي المستوي الثالث .

ثانياً:- م أ ب جـ هرم ثلاثي أخذت النقط د ، هـ ، و علي الأحرف م أ ، م ب ، م جـ علي الترتيب بحيث كان

$\frac{\text{م د}}{\text{م أ}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{م و}}{\text{م جـ}}$ اثبت أن المستوي د هـ و ∥ المستوي أ ب جـ وإذا كانت ك ∈ ب جـ ورسم م ك بحيث يقطع هـ و في ن اثبت أن د ن ∥ أ ك

الحـــــل



$\frac{\text{م د}}{\text{م أ}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{م ب}}$ د هـ ∥ أ ب

بالمثل $\frac{\text{م هـ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{م و}}{\text{م جـ}}$

هـ و ∥ ب جـ

وكذلك د و ∥ أ جـ

الأضلاع المتناظرة في كل من المستويين متوازيه

المستوي د هـ و ∥ المستوي أ ب جـ وقطعهما المستوي م أ ك في د ن ، أ ك ∴ د ن ∥ أ ك

رقم ٢ :- (ب) أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٠ سم رسم أ د عمودي علي مستوي المثلث أ ب جـ بحيث أ د = ٥ سم وكذلك رسم د هـ ⊥ ب جـ يقطعه في هـ .

اثبت ان أولاً : ب جـ ⊥ المستوي أ هـ د

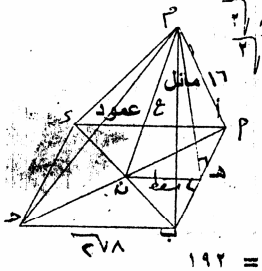
ثانيا:- ق (أ ← جـ ب ← د) = ٥٣٠

الحـــل هو نفس التمرين رقم ٣ (ب) في نموذج ٩ مع اختلاف الرموز فقط والأطوال

رقم ٣:- م أ ب جـ د هرم رباعي قائم قاعدته أ ب جـ مربع طول ضلعه ٨ √٢ سم ، طول حرفه الجانبي ١٦ سم أوجد ١- ارتفاعه ٢- قياس زاوية ميل م ب علي مستوي القاعدة

٣- ظل زاوية ميل الوجه م أ ب علي مستوي القاعدة

الحـــــل



طول ضلع المربع = ٨ √٢

طول قطره = ٨ √٢ √٢

= ١٦

أ ن = ٨ سم

م ن هو ارتفاع الهرم لأنه قائم

م ن ⊥ أ ن

(م ن)² = (١٦)² − (٨)² = ١٩٢

م ن = √١٩٢ = ٨ √٣ سم

ع = ٨ √٣ سم

مسقط م ب علي مستوي القاعدة هو ب ن

∴ م ب ن هي زاوية ميل م ب علي مستوي القاعدة أ ب جـ د

ظا أ ب ن = $\frac{٨\sqrt{٣}}{٨}$ = √٣

م ب يميل علي القاعدة بزاوية ٦٠° نسقط العمود ن هـ ⊥ أ ب ثم نصل م هـ ∵ المسقط ن هـ ⊥ أ ب

∴ المائل م هـ ⊥ أ ب

∴ م هـ ن هي مقياس الزاوية المستويه للزاوية الزوجيه بين المستويين م أ ب ، أ ب جـ د

ظا هـ = $\frac{٨\sqrt{٣}}{٤\sqrt{٢}}$ = $\frac{٢\sqrt{٣}\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$ = √٦

مع أطيب التمنيات بالتفوق إن شاء الله

المستشار المنوفـــي

للرياضيات

نماذج الكتاب المدرسي

النموذج الاول في الكتاب المدرسي

رقم ١:- أ - أوجد الحد الخالي من س في مفكوك

$$\left(\frac{٣س^{٢}}{٢} - \frac{١}{٣س}\right)^{٩}$$

الحـــــــل

نفرض أن ح يحتوي علي س

ر+١

$$ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} \left(\frac{١}{٣س}\right)^{ر} \left(\frac{٣س^{٢}}{٢}\right)^{٩-ر}$$

$$-ر \quad ١٨ - ٢ر \quad ٠ \quad ١٨ - ٣ر \quad ٠$$

$$س^{٠} \times س = س \Leftarrow س = س$$

$$١٨ - ٣ر = ٠ \Leftarrow ر = ٦$$

ح ٧ هو الحد الخالي من س في المفكوك

$$ح_{٧} = {}^{٩}ق_{٦} \left(\frac{١}{٣س}\right)^{٦} \left(\frac{٣س^{٢}}{٢}\right)^{٣}$$

$$= ٨٤ \times \frac{١}{٧٢٩} \times \frac{٢٧}{٨} = \frac{٧}{١٨}$$

رقم ١:- (ب)

إذا كان ل = $\frac{٢ + ت}{١ + ت}$ ، م = $\frac{١ + ٢ت}{١ + ت}$

برهن أن ل ، م مترافقان ثم أوجد قيمة

$$\sqrt{\frac{٢}{٣}(١٣ل - ٥م)}$$

الحـــــــل

$$ل = \left(\frac{(٢ + ت)(١ - ت)}{(١ + ت)(١ - ت)}\right) = \frac{٢ - ت - ت^{٢}}{١ - ت^{٢}}$$

$$ل = \frac{٢ - ت + ١}{١ + ١} = \frac{٣ - ت}{٢} = \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢}ت$$

$$م = \frac{(١ + ٢ت)(١ - ت)}{(١ + ت)(١ - ت)} = \frac{١ + ت - ٢ت^{٢}}{١ - ت^{٢}}$$

$$م = \frac{١ + ت + ٢}{١ + ١} = \frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢}ت$$

∴ ل ، م مترافقان

المقدار =

$$\sqrt{\frac{٢}{٣}(١٣ل - ٥م)} = \sqrt{\frac{٢}{٣} \times ١٣ل - \frac{١٠}{٣}م}$$

$$\sqrt{\frac{٢}{٣} \times ١٣\left(\frac{٣ - ت}{٢}\right) - \frac{١٠}{٣}\left(\frac{٣ + ت}{٢}\right)}$$

$$= \sqrt{٨ - ٦ت} = س + ص ت$$

بتربيع الطرفين ٨ - ٦ت = س٢ - ص٢ + ٢س ص ت

س٢ - ص٢ = ٨ (١)

٢ س ص = - ٦ ص = $\frac{-٣}{س}$

بالتعويض في ١ نجد أن

س٢ - $\frac{٩}{س^{٢}}$ = ٨ س٤ - ٨ س٢ - ٩ = ٠

(س٢ - ٩) (س٢ + ١) = ٠ س٢ = -١ ✗

س٢ = ٩ س = ± ٣

ص = $\frac{-٣}{س}$ = $\frac{-٣}{\pm ٣}$ = ∓ ١

$$\sqrt{٨ - ٦ت} = \pm(٣ - ت)$$

$$\sqrt{\frac{٢}{٣}(١٣ل - ٥م)} = \pm(٣ - ت)$$

رقم ١:- (جـ) ضع علي الصورة الأسيه

$$\left(\frac{٤}{\sqrt{٣} + ت}\right)^{٢}$$

الحـــــــل

$$\frac{٤}{\sqrt{٣} + ت} = \frac{٤(\sqrt{٣} - ت)}{(\sqrt{٣} + ت)(\sqrt{٣} - ت)}$$

$$= \frac{٤(\sqrt{٣} - ت)}{٣ - ت^{٢}} = \frac{٤(\sqrt{٣} - ت)}{٤}$$

يتم التحويل للصورة المثلثية ثم الأسيه

$\sqrt{٣} - ت = (\sqrt{٣} ، -١)$ يقع في الربع الرابع

$$ل = \sqrt{٣ + ١} = ٢ \qquad جتا\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$جا\theta = \frac{-١}{٢} \qquad \theta = ٣٦٠ - ٣٠ = ٣٣٠^{\circ}$$

$$\theta = \frac{١١ط}{٦} \quad \therefore \left(\sqrt{٣} - ت\right) = ٢ هـ^{\frac{١١ط ت}{٦}}$$

$$\left(\sqrt{٣} - ت\right)^{٢} = ٤ \left(هـ^{\frac{١١ط ت}{٦}}\right)^{٢}$$

$$\left(\frac{٤}{\sqrt{٣}+ت}\right)^{٢} = ٤ هـ^{\frac{١١ط ب}{٣}} = ٤ هـ^{\frac{٥ط ت}{٣}}$$

حل آخر يمكن تحويل كل من البسط والمقام إلي الصورة المثلثية أو الأسية ثم نأتي بخارج قسمة عددين مركبين ونكمل الحل .

$$\frac{٤}{\sqrt{٣}+ت} = \frac{٤\left(جتا ٠ + ت جا ٠\right)}{٢\left(جتا\frac{ط}{٦} + ت جا\frac{ط}{٦}\right)}$$

$$\frac{٤}{\sqrt{٣}+ت} = ٢\left(جتا\frac{-ط}{٦} + ت جا\frac{-ط}{٦}\right)$$

بإضافة ٢ط للسعة نجد أن

$$\left[\frac{٤}{\sqrt{٣}+ت}\right]^{٢} = \left[٢\left(جتا\frac{١١ط}{٦} + ت جا\frac{١١ط}{٦}\right)\right]^{٢}$$

$$= ٤\left(جتا\frac{١١ط}{٣} + ت جا\frac{١١ط}{٣}\right) = ٤ هـ^{\frac{٥ط ت}{٣}}$$

$$= ٤ هـ^{\frac{١١ط ت}{٣}}$$

تمرين (١) اثبت أن

$$\begin{vmatrix} أ_١ + ب_١ س & أ_١ س + ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ + ب_٢ س & أ_٢ س + ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ + ب_٣ س & أ_٣ س + ب_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix} = \left(١ - س^{٢}\right) \begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix}$$

الحـــــــــل

الطرف الأيمن (نيتم تقسيمه إلى محددين كالآتي)

$$\begin{vmatrix} أ_١ & أ_١ س + ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & أ_٢ س + ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & أ_٣ س + ب_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ب_١ س & أ_١ س + ب_١ & جـ_١ \\ ب_٢ س & أ_٢ س + ب_٢ & جـ_٢ \\ ب_٣ س & أ_٣ س + ب_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix}$$

- $ع_١ س + ع_٢$ ثم أخذ س عامل مشترك من الثاني

$$\begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix} + س \begin{vmatrix} ب_١ & أ_١ س + ب_١ & جـ_١ \\ ب_٢ & أ_٢ س + ب_٢ & جـ_٢ \\ ب_٣ & أ_٣ س + ب_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix}$$

بضرب $ع_١ \times -١ + ع_٢$ للمحدد الثاني

$$\begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix} + س \begin{vmatrix} ب_١ & أ_١ س & جـ_١ \\ ب_٢ & أ_٢ س & جـ_٢ \\ ب_٣ & أ_٣ س & جـ_٣ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix} + س^{٢} \begin{vmatrix} ب_١ & أ_١ & جـ_١ \\ ب_٢ & أ_٢ & جـ_٢ \\ ب_٣ & أ_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix}$$

بتبديل $ع_١$ مكان $ع_٢$ للمحدد الثاني

$$\begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix} - س^{٢} \begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix}$$

بأخذ المحدد عامل مشترك

$$\begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix} \left(١ - س^{٢}\right) = \text{الأيسر}$$

رقم ٣ :- (ب) مفكوك ن
(١ + ٢ س) حسب قوى
س التصاعدية إذا كانت النسبة بين الحدين الثامن والـ
النسبة ١ : ٢٠ عند س = ٣ إحسب قيمة ن

الحـــــــــل

$$\frac{\text{ح}_{\text{ن}-٧}}{\text{ح}_{٨}} = \frac{٢٨}{١} \Leftarrow \frac{\text{ح}_{١٠}}{\text{ح}_{٩}} \times \frac{\text{ح}_{٩}}{\text{ح}_{٨}} = ٢٨$$

$$\frac{\text{ن}-٦+١}{٩} \times ٢\text{س} \times \frac{\text{ن}-٨+١}{٨} \times ٢\text{س} = ٢٨$$

$$\frac{(\text{ن}-٨)}{٩} \times ٦ \times \frac{(\text{ن}-٧)}{٨} \times ٦ = ٢٨$$

$$\frac{(\text{ن}-٨)(\text{ن}-٧)}{٢} = ٢٨ \Leftarrow (\text{ن}-٨)(\text{ن}-٧) = ٥٦$$

$$(\text{ن}-٧)(\text{ن}-٨) = ٧ \times ٨$$

$$\text{ن}-٧ = ٧ \Leftarrow \text{ن} - ٧ = ٨ \quad \boxed{\text{ن} = ١٥}$$

رقم ٣ :- (أ) باستخدام طريقة كرامر حل المعادلات الآتيه

٢س + ٢ص + ع = ٢
س + ص + ع = ٢
س - ٣ص + ع = ٦

الحـــــــــل

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & -٣ & ١ \end{vmatrix} = ٢ \times ٤ + ١ \times -٤ = ٤$$

$$\Delta\text{س} = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٦ & -٣ & ١ \end{vmatrix} = \Delta.٤ \text{ ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ١ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٦ & ١ \end{vmatrix} = -٤$$

$$\Delta\text{ع} = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ٢ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ١ & -٣ & ٦ \end{vmatrix} = ٨$$

$$\text{س} = \frac{\Delta\text{س}}{\Delta} = \frac{٤}{٤} = ١$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta} = \frac{-٤}{٤} = -١$$

$$\text{ع} = \frac{\Delta\text{ع}}{\Delta} = \frac{٨}{٤} = ٢ \text{ مجموعة الحل } \{(١، -١، ٢)\}$$

(ب) $\frac{\text{س} + \omega\text{ص}}{\omega^{٢}\text{س} + \text{ص}} + \frac{\text{ع}\,\omega^{٢} + \text{ل}}{\text{ع} + \text{ل}\,\omega} = -١$

الحـــــــــل

$$\text{البسط} = \frac{\omega^{٣}\text{س} + \omega\text{ص}}{\omega^{٢}\text{س} + \text{ص}} + \frac{\text{ع}\,\omega^{٢} + \omega^{٣}\text{ل}}{\text{ع} + \text{ل}\,\omega}$$

$$= \frac{\omega(\omega^{٢}\text{س} + \text{ص})}{(\omega^{٢}\text{س} + \text{ص})} + \frac{\omega^{٢}(\text{ع} + \omega\text{ل})}{(\text{ع} + \omega\text{ل})}$$

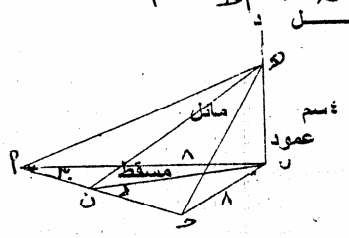
$$= \omega + \omega^{٢} = -١$$

رقم ١ :- (ب) الهندسه الفراغية أ ب جـ مثلث فيه ق(أ) = ٣٠° ، أ ب = ٨سم رسم ب د ⊥ المستوي أ ب جـ أخذت النقطه هـ ∈ ب د بحيث ب هـ = ٤ سم ، رسم ب ن ⊥ أ جـ ويقطعه في ن

أولا :- اثبت أن ن هـ ⊥ أ جـ

ثانيا :- أوجد ق(د ب ، أ جـ ، هـ)

الحـــــــــل



المسقط ب ن ⊥ أ جـ المائل هـ ن ⊥ أ جـ

∴ (هـ ن ب) هي مقياس الزاويه المستويه للزاويه الزوجيه بين المستويين ب أ جـ ، هـ أ جـ

ب ن = ٨ جا ٣٠ = ٤

ظا (د ب ، أ جـ ، ب) = $\frac{٤}{٤}$ = ١

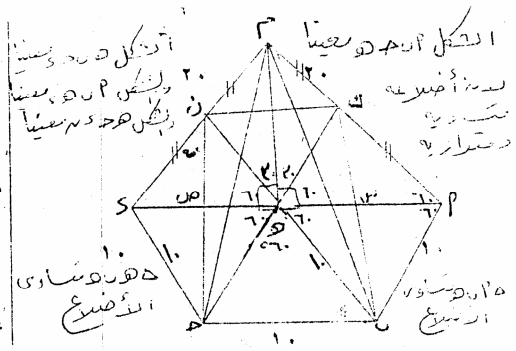
ق (د ب ، أ جـ ، ب) = ٤٥°

رقم ٢ :- أ ب جـ د شبه منحرف متساوي الساقين فيه أ ب ∥ جـ د ، أ د = ٢٠ سم ، أ ب = ب جـ = جـ د = ... م ، س مستوي عمودي المستوي أ ب جـ د ... ضلع أ د رسم المثلث المتساوي الأضلاع م أ د في المستوي س

١- اثبت أن م أ = م ب = م جـ = م د = ٢٠ سم

٢- ... ك ، ن منتصفي م أ ، م د فاثبت أن ... ك ن جـ مستطيل واحسب طول قطره ... مساحته

الحـــــــــــل



الشكل أ ب جـ د معيناً لأن أضلاعه متساوية

الشكل د هـ جـ معيناً

الشكل أ ب هـ معيناً

الشكل هـ د جـ معيناً

٢٠ ، ١٠ ، ٦٠ ، ٣٠ ، ٦٠ ، ٦٠ ، ١٠ ، ١٠ ، ١٠ ، ١٠

د هـ يساوي الأضلاع

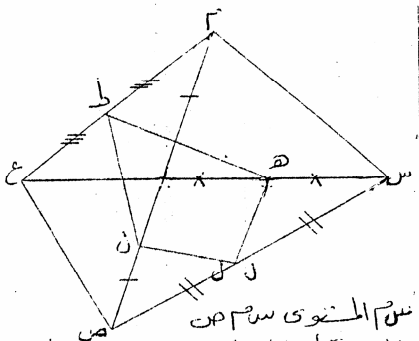
أ ب يساوي الأضلاع

نعين نسقط العمود م هـ ⊥ أ د فينصفه ثم نصل ب هـ ،
جـ هـ الشكل أ ب جـ هـ أ ن جـ معيناً
أ هـ = أ ب جـ ويساويه ب هـ = هـ جـ = ١٠ سم
لكن د هـ = ٢٠ ، جا ٦٠ = ١٠ / ٣
د ب = م جـ = $\sqrt{١٠٠ + ٣٠٠}$ = $\sqrt{٤٠٠}$
د ب = د جـ = ٢٠ سم
د أ = ن ب = ن جـ = م د = ٢٠ سم
نعين د ك ، جـ ن وهما يصلان من رأس القائمة
إلى منتصف الوتر ك هـ = هـ ن = ١٠ سم
المثلثات ك أ هـ ، أ هـ ب ، هـ د جـ ، ن هـ د متساوية
الأضلاع ، أ ⊥ م هـ وعند وضع الزوايا نجد أن هـ ك ،
هـ جـ في استقامة واحدة وكذلك ك هـ = هـ جـ = ب هـ
د هـ القطران متساويان وغير متعامدان
الشكل ب ك ن جـ مستطيل ويكون طول قطره = ٢٠ سم

س ٢ المستطيل الثاني :-
أ ب د هـ متساوي الأضلاع
شرط أ ب = هـ ك معين (قطراه متعامدان)
∴ ك هـ ⊥ د أ لكن ك هـ // أ م
∴ ق (∠ ن ك س) = ٩٠° ومن هنا تكون
كل زوايا المستطيل ب ك ن جـ قوائم
لكن ب جـ = ١/٢ د أ ك ن = ب جـ ②
∴ ب ك ن جـ يساويه وكل الزوايا قوائم
∴ المستطيل ب ك ن جـ مستطيل #

س ٣ : س ص ع هرم ثلاثي رسم مستوي يوازي كلا
من م س ، ص ع مارا بالنقطة ل منتصف س ص
وقاطعا م ص ، م ع ، س ع في ن ، ط ، هـ علي الترتيب
بين أن ل ن ط هـ متوازي أضلاع محيطه = م س + ص ع

الحـــــــــــل



س م المستوي س م ص
الذي قطع المستوي هو ل ن هـ ط
∴ ل ن // س م ، ط هـ // س م من منتصف س ص

ل ن // س م ويساوي نصفه ① ∵ ن منتصف م ص
س م // المستوي ل ن ط هـ ومارا به المستوي
س م ع الذي قطعه في هـ ط
هـ ط // س م ويساوي نصفه ② من ① ، ② نجد أن
ل ن // هـ ط ويساويه
الشكل ل ن ط هـ متوازي أضلاع ومن الممكن
إثبات أن كل ضلعين متقابلين متوازيين
محيط ل ن ط هـ = ٢ (ل ن + ن ط)
= ٢ ل ن + ٢ ن ط = م س + ص ع

النموذج الثاني :- رقم (١ : ١١ أ)

إذا كان م + ن = ١٥

$ل^{م}_{٢١٠}$ ، $ق^{ن-٣}_{٣٥}$

أوجد كل من م ، ن - الحل

$ل^{م+ن}_{١٤}$ = ١٥ × ١٤ ⟸ $ل^{م+ن}_{١٥}$ = $ل^{م}_{٢١٠}$

م + ن = ١٥ ①

$ق^{ن-٣}_{٣٥}$ = $ل^{ن-٣}_{٣}$ ⟸ $ل^{ن-٣}_{٣}$ = ٣٥

$\frac{ل^{ن-٣}_{٣}}{ل^{٣}_{٣}}$ = ٣٥

$ل^{ن-٣}_{٣}$ = ٣٥ ل$^{٣}_{٣}$ ⟸ $ل^{ن-٣}_{٣}$ = ٣٥ × ٦

(ن - ٣)(ن - ٤)(ن - ٥) = ٧ × ٦ × ٥

ن - ٣ = ٧ ، ن = ١٠

لكن م + ن = ١٥

رقم ١:- (ب) ضع المقدار ١ − √٣ ت
علي الصورة المثلثية ثم أوجد جذريه التربيعيين في الصورة الأسيه .

الحـــــــــل

١ − √٣ ت = (١، −√٣) يقع في الربع الرابع

ل = ٢ ، جتاθ = ١/٢ ، جاθ = −√٣/٢

θ = ٣٦٠ − ٦٠ = ٣٠٠ = ٥ط/٣

(١ − √٣ ت) = ٢ (جتا ٥ط/٣ + ت جا ٥ط/٣) = ٢ هـ^(ت ٥ط/٣)

(١ − √٣ ت)^(١/٢) = √٢ [هـ^((٥ط/٣ + ٢ط ر) ت)]^(١/٢)

= √٢ [هـ^((٥ط/٣ + ٢ط ر) ت)]^(١/٢) = √٢ هـ^((٥ط/٦ + ط ر) ت)

عند ر = ٠ الجذر الأول = √٢ هـ^(٥ط/٦)

عند ر = ١ الجذر الثاني = √٢ هـ^(١١ط/٦)

رقم ٢:- (أ) حل المعادلات الآتية باستخدام كرامر

٢س + ص + ع = −٢
س + ص − ع = ٠
٣س + ٢ص + ٥ع = ٣

الحـــــــــل

تم حل مثلها في النموذج الأول وكررت كثيراً في مسائل دليل تقويم الطالب

رقم ٢:- (ب) إذا كانت الحدود ح٢ ، ح٣ ، ح٤ في مفكوك (س + أ)^ن هي ١٦ ، ١١٢ ، ٤٤٨ فما قيمة س ، أ ، ن

الحـــــــــل

ح٤/ح٣ = ٤٤٨/١١٢ ، (ن − ٣ + ١)/٣ × أ/س = ٤

بالمثل ح٣/ح٢ = ١١٢/١٦ ، (ن − ٢ + ١)/٢ × أ/س = ٧

(ن − ١) أ = ١٤ س (١)

(ن − ٢) أ = ١٢ س (٢)

بقسمة ١ علي ٢ نجد أن

(ن − ١) أ / (ن − ٢) أ = ١٤ س / ١٢ س ⟸ (ن − ١)/(ن − ٢) = ٧/٦

٧ ن − ١٤ = ٦ ن − ٦ ⟸ ن = ٨

بالتعويض في ١ نجد أن

٧ أ = ١٤ س ⟸ أ = ٢ س

لكن ح٢ = ١٦ ⟸ ق١ أ^٧ س^٧ = ١٦

٨ أ^٧ س^٧ = ١٦ ⟸ ١٦ س^٨ = ١٦

س^٨ = ١ ، س = ± ١ ، أ = ± ٢

رقم ٣:- (أ)- أوجد قيمة

(ω/(ω + ١))^٢ + (ω^٢/(ω^٢ + ١))^٢

الحـــــــــل

المقدار = ٢ω/(١ + ٤ω + ٤ω^٢) + ٤ω/(١ + ٤ω + ٤ω^٢)

= ω^٢/(١ − ٤) + ω/(١ − ٤) = ω^٢/(−٣) + ω/(−٣)

= (ω^٢ + ω)/(−٣) = −١/(−٣) = ١/٣

رقم ٤:- (أ) باستخدام خصائص المحددات اوجد قيمة

س١	ص١	أ س١ + ل ص١
س٢	ص٢	أ س٢ + ل ص٢
س٣	ص٣	أ س٣ + ل ص٣

الحـــــــــل

- أ ع + ع ، - ل ع + ع نجد أن
١ ٣ ٣

س	ص	٠
١	١	
س	ص	٠
٢	٢	
س	ص	٠
٣	٣	

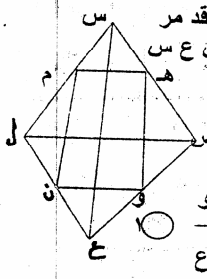
= ٠ لأن ع = ٠
٣

ياً: الهندسه الفراغيه رقم ١:- (ب)

ل ص ع ل شكل رباعي أضلاعه ليست في مستوي واحد
سم مستوي يوازي س ع ، يوازي ص ل ويقطع س ص
ص ع ، ع ل ، ل س في هـ ، و ، ن ، م علي الترتيب
ثبت أن

$$\frac{\text{هـ و}}{\text{س ع}} + \frac{\text{هـ م}}{\text{ص ل}} = ١$$

الحـــــــــــل



المستوي هـ و ن م ∥ ع س وقد مر
بالمستقيم س ع المستوي ص ع س
الذي قطع المستوي هـ و ن م
في هـ و
هـ و ∥ ع س
△ ص هـ و ~ △ ص س ع

$$\frac{\text{ص هـ}}{\text{س ص}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{س ع}} = \frac{\text{ص و}}{\text{ص ع}} \quad (١)$$

بالمثل هـ م ∥ ص ل
△ س هـ م ~ △ س ص ل

$$\frac{\text{س هـ}}{\text{س ص}} = \frac{\text{هـ م}}{\text{ص ل}} = \frac{\text{س م}}{\text{س ل}} \quad (٢)$$

من ١ ، ٢ نجد أن

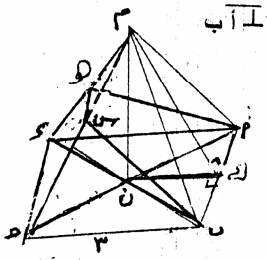
$$\frac{\text{هـ و}}{\text{س ع}} + \frac{\text{هـ م}}{\text{ص ل}} = \frac{\text{ص هـ}}{\text{س ص}} + \frac{\text{س هـ}}{\text{س ص}}$$

$$\frac{\text{هـ و}}{\text{س ع}} + \frac{\text{هـ م}}{\text{ص ل}} = \frac{\text{ص هـ + س هـ}}{\text{س ص}} = \frac{\text{س ص}}{\text{س ص}}$$

$$\frac{\text{هـ و}}{\text{س ع}} + \frac{\text{هـ م}}{\text{ص ل}} = ١$$

رقم ٢:- أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٣ سم تقاطع
قطراه في ن رسم ن م ⊥ المستوي أ ب جـ د
وكان م ن = ٦ سم
اوجد قياس الزاوية الزوجية (م – أ ب – جـ)
وإذا مر مستو بالضلع أ ب وقطع م د في هـ ،
قطع م جـ في س إثبت أن أ ب س هـ شبه منحرف

الحـــــــــــل



نسقط العمود م ك ⊥ أ ب
المائل م ك ⊥ أ ب
المسقط ن ك ⊥ أ ب
د م ك ن هي مقياس
الزاويه المستويه
للزاويه الزوجيه بين
المستويين م أ ب ،
جـ أ ب ولكن

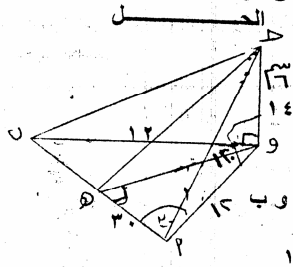
ن ك = $\frac{٣}{٢}$ سم ظا ك = $\frac{٦}{١٫٥}$ = $\frac{٦٠}{١٥}$ = ٤

ق (ك) = ٧٥° ٥٧

أ ب ∥ جـ د الواقع في المستوي م د جـ
أ ب ∥ المستوي م د جـ وقد مر بالمستقيم أ ب
المستوي أ ب س هـ الذي قطعه في س ، هـ
هـ س ∥ أ ب (١)
لكن هـ س ≠ د جـ هـ س ≠ أ ب (٢)
من (١) ، (٢) نجد ان هـ س ∥ أ ب ولا يساويه
الشكل أ ب س هـ شبه منحرف

رقم ٣:- و أ ب جـ هرم ثلاثي فيه وجـ ⊥ كل من
و أ ، و ب وقياس الزاويه الزوجيه التي حرفها
و جـ = ١٢٠° فاذا كان و أ = و ب = ١٢ سم
و جـ = ٦ سم ١- أوجد أطوال أضلاع △ أ ب جـ
٢- إحسب قياس الزاويه الزوجيه التي حرفها أ ب

الحـــــــــــل



جـ و ⊥ و أ
(أ جـ)² = ٣٦+١٤٤
= ١٨٠
أ جـ = ٥٧٦
بالمثل جـ و ⊥ و ب
(ب جـ)² = ١٨٠
ب جـ = ٥٧٦
نسقط العمود و هـ ⊥ أ ب
ثم نصل جـ هـ و هـ ⊥ أ ب في △ و أ ب
المتساوي الساقين أ هـ = هـ ب

∴ أهـ = ١٢ جا ٣٠ = ٦ √٣

أب = ١٢ √٣ ويكون و هـ = ١٢ جا ٣٠ = ٦

المسقط وهـ ⊥ أب المائل جـ هـ ⊥ أب

الزاويه الزوجيه التي حرفها أب هي د (جـ هـ و)

ق (هـ) = ٦/٦ = ١ ∴ ق (هـ) = ٤٥°

النموذج الثالث

رقم ١:- (أ)- إثبت أن ن ق ر + ن ق ر-١ = ن+١ ق ر

الحـــــل

الأيمن = ن! / ر! (ن-ر)! + ن! / (ر-١)! (ن-ر+١)!

= ن! / ر! (ر-١)! (ن-ر) + ن! / (ر-١)! (ن-ر+١) (ن-ر)!

باخذ عامل مشترك من البسط والمقام

= ن! / (ر-١)! (ن-ر) × [١/ر + ١/(ن-ر+١)]

= ن! / (ر-١)! (ن-ر) × (ن-ر+١+ر) / ر (ن-ر+١)

= ن! / (ر-١)! (ن-ر) × (ن+١) / ر (ن-ر+١)

= (ن+١) ن! / ر! (ر-١)! (ن-ر+١) (ن-ر)!

= ن+١! / ر! (ن-ر+١)! = ن+١ ق ر = الأيسر

رقم ١:- (ب)- ضع المقدار ٣ (٥ - ٣√٣ ت) / (٢√٣ ت + ١) على

الصورة المثلثيه ثم أوجد جذريه التربيعين في

الصورة الأسيه (الحـــل) بالضرب × المرافق

ع = ٢ (٥ - ٣√٣ ت) (١ - ٢√٣ ت) / (١ + ٢√٣ ت) (١ - ٢√٣ ت)

ع = ٢ (٥ - ١٠√٣ ت - ٣√٣ ت + ١٨ ت٢) / (١ - ١٢ ت٢)

ع = ٢ (٥ - ١٣√٣ ت - ١٨) / ١٣

ع = ٢ (-١٣ - ١٣√٣ ت) / ١٣ = ٢ (-١ - √٣ ت)

ع = -٢ - ٢√٣ ت = (-٢) - (٢√٣) ت

ل = ٤ + ١٢ = ١٦ = ٤

جتا θ = -١/٢ ، جا θ = -√٣/٢

θ = ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠° = ٤ط/٣

ع١ = ٤ (جتا ٤ط/٣ + ت جا ٤ط/٣) = ٤هـ^(٤ط/٣ ت)

ع^(١/٢) = ٢ [هـ^((٤ط/٣ + ٢ط ر) ت)]^(١/٢)

ع^(١/٢) = ٢ [هـ^((٤ط/٣ + ٦ط ر) ت)]^(١/٢)

ع^(١/٢) = ٢ (هـ^((٤ط/٦ + ط ر) ت))

عند ر = ٠

الجذر الأول = ٢ هـ^(٤ط/٦ ت)

ع = ٢ هـ^(٢ط/٣ ت) هو الجذر الأول

عند ر = ١ الجذر الثاني = ٢ هـ^(ط/٣ ت)

رقم ٢:- (أ) إثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ أ^2 & ب^2 & جـ^2 \\ أ^3 & ب^3 & جـ^3 \end{vmatrix} = (أب + ب جـ + جـ أ)(ب - أ)(جـ - أ)(جـ - ب)$$

الحـــــــــــــل

$-ع_1 + ع_2 \quad ، \quad -ع_1 + ع_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ أ^2 & ب^2 - أ^2 & جـ^2 - أ^2 \\ أ^3 & ب^3 - أ^3 & جـ^3 - أ^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ أ & (ب - أ)(ب + أ) & (جـ - أ)(جـ + أ) \\ أ^2 & (ب - أ)(ب^2 + أب + أ^2) & (جـ - أ)(جـ^2 + أجـ + أ^2) \end{vmatrix}$$

خذ عامل مشترك من $ع_2$ ، $ع_3$ نجد أن

$$(ب - أ)(جـ - أ) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ أ^2 & أ + ب & أ + جـ \\ أ^3 & أ^2 + أب + ب^2 & أ^2 + أجـ + جـ^2 \end{vmatrix}$$

$-ع_2 + ع_3$

$$(أ - ب)(أ - جـ) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ أ^2 & أ + ب & جـ - ب \\ أ^3 & أ^2 + أب + ب^2 & (جـ - ب)(أ + ب + جـ) \end{vmatrix}$$

بأخذ عامل مشترك من $ع_3$

$$(ب - أ)(جـ - أ)(جـ - ب) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ أ^2 & أ + ب & 1 \\ أ^3 & أ^2 + أب + ب^2 & أ + ب + جـ \end{vmatrix}$$

$$(ب - أ)(جـ - أ)(جـ - ب)[(أ + ب)(أ + ب + جـ) - (أ^2 + أب + ب^2)]$$

$$(ب - أ)(جـ - أ)(جـ - ب)(أ^2 + أب + أجـ + أب + ب^2 + ب جـ - أ^2 - أب - ب^2)$$

$$= (ب - أ)(جـ - أ)(جـ - ب)(أجـ + ب جـ + أب)$$

رقم ٢: (ب) إذا كانت نسبة معامل الحد السادس إلي معامل الحد الرابع في مفكوك $\left(\frac{3}{2} + \frac{2س}{3}\right)^{ن}$ حسب قوي س التصاعديه $= \frac{8}{27}$

الحـــــــــــــل

$$\frac{ح_6}{ح_4} = \frac{8}{27}$$

$$\therefore \frac{ح_6}{ح_5} \times \frac{ح_5}{ح_4} = \frac{8}{27}$$

$$\frac{ن - 5 + 1}{5} \times \frac{4}{2} \times \frac{ن - 4 + 1}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{27}$$

$(ن - 4)(ن - 3) = 3$ ⟸ $ن^2 - 7ن + 12 - 30 = 0$

$ن^2 - 7ن - 18 = 0$

$(ن - 9)(ن + 2) = 0$

$ن = 9 \quad ، \quad ن = -2$ ×

رقم ٣(أ) إذا كانت ω هي أحد الجذرين التكعيبين المركبين للواحد الصحيح اوجد قيمة

$$\left(\frac{2ω^2 + 1}{ω^4}\right)^2 \left(\frac{8ω - 1}{ω^5}\right)^2$$

الحل

المقدار $\left(\frac{2ω^2 + 1}{ω}\right)^2 \left(\frac{2ω - 1}{ω^2}\right)^2$

$$\frac{4ω^4 + 4ω^2 + 1}{ω^2} - \frac{4ω^2 - 2ω + 1}{ω^2}$$

$$\frac{4ω + 4ω^2 + 1}{ω} - \frac{2ω^2 - ω + 1}{ω}$$

$$\frac{-4 + 1}{ω^2} - \frac{-2ω^2 - ω}{ω}$$

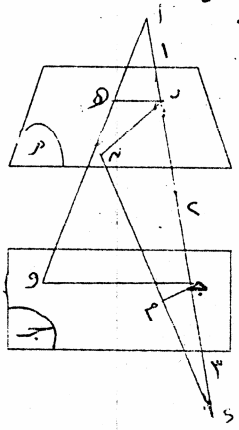
$$\frac{-3}{ω^2} + \frac{3ω^2}{ω} = \frac{-3}{ω^2} + 3ω$$

$$= \frac{-3 + 3ω^3}{ω^2} = \frac{-3 + 3}{ω^2} = \text{صفر}$$

الهندسه الفراغيه

رقم ١:- م، جـ مستويان متوازيان قطعهما المستقيم أ د في النقطتين ب ، جـ بحيث كان أب : ب جـ : جـ د = ١ : ٢ : ٣ رسم من أ مستقيم قطع المستويين س ، ص في هـ ، و علي الترتيب ورسم من د مستقيم آخر قطعهما في ن ، م علي الترتيب إثبت أن جـ و × ب ن = ٥ ب هـ × جـ م

الحـــــــــل



المستوي م ∥ المستوي جـ وقطعهما المستوي أ جـ و في ب هـ ، جـ و

ب هـ ∥ جـ و

بالمثل المستوي د ن ب قطع م ، جـ في جـ م ، ب ن

جـ م ∥ ب ن

ب هـ ∥ جـ و

△ أ ب هـ ~ △ أ جـ و

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}}$

$\frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}} = \frac{١}{٣}$ (١)

بالمثل جـ م ∥ ب ن △ د جـ م ~ △ د ب ن

$\frac{\text{د جـ}}{\text{د ب}} = \frac{\text{جـ م}}{\text{ب ن}} \Leftarrow \frac{٣}{٥} = \frac{\text{جـ م}}{\text{ب ن}}$ (٢)

بضرب ١ × ٢ نجد أن

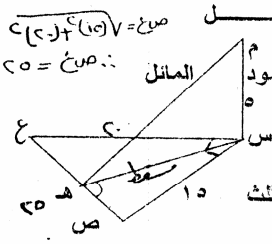
$\frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}} \times \frac{\text{جـ م}}{\text{ب ن}} = \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٥} = \frac{١}{٥}$

جـ و × ب ن = ٥ ب هـ × جـ م #

رقم ٢:- س ص ع مثلث قائم الزاوية في س ، س ص = ١٥سم س ع = ٢٠سم ، رسم س م ⊥ المستوي س ص ع وكان س م = ٥سم ثم رسم س هـ ⊥ ص ع

اثبت أن م هـ ⊥ ص ع وأوجد طول م هـ

الحـــــــــل



ص ع = $\sqrt{(٢٠)^2 + (١٥)^2}$

∴ ص ع = ٢٥

المسقط س هـ ⊥ ص ع

المائل م هـ ⊥ ص ع

هـ س = $\frac{٢٠ \times ١٥}{٢٥}$ = ١٢سم

المائل والعمود والمسقط هو مثلث قائم الزاويه وتره المائل

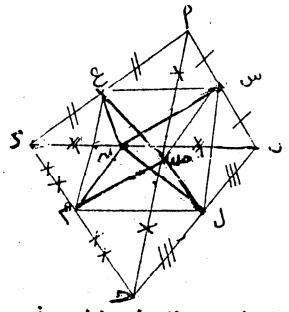
م هـ = $\sqrt{(٥)^2 + (١٢)^2} = \sqrt{٢٥ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$

رقم ٣:- أ ب جـ د هرم ثلاثي س ، ص ، ع ، ل ، م ، ن منتصفات الأحرف أ ب ، أ جـ ، أ د ، ب جـ جـ د ، ب د علي الترتيب

١:- إثبت أن الأشكال الرباعيه س ع م ل ، س ص م ن ، ص ع ن ل متوازيات أضلاع

٢:- س م ، ص ن ، ل ع تتقاطع في نقطة منتصف كل منها .

الحـــــــــل



س ص واصل بين منتصفي ضلعين في مثلث فهو يوازي الضلع الثالث ويساوي نصفه

س ع ∥ ب د ويساوي نصفه

بالمثل ل م ∥ ب د ويساوي نصفه

س ع ∥ ل م ويساويه الشكل س ع م ل متوازي أضلاع بالمثل س ص ∥ ب جـ ويساوي نصفه

ن م ∥ ب جـ ويساوي نصفه

الشكل س ص م ن متوازي أضلاع

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن الشكل ص ع ن ل متوازي أضلاع وهو المطلوب أولاً

الشكل س ص م ن متوازي أضلاع يشترك مع متوازي الأضلاع س ل م ع في القطر س م وكذلك متوازي الأضلاع س ص م ن يشترك مع متوازي الأضلاع ص ل ن ع في القطر ص ن وكذلك متوازي الأضلاع س ل م ع يشترك مع متوازي الأضلاع ص ل ن ع في القطر ل م ∴ القطران ينصف كل منهما الآخر ويتقاطعان في نقطة

س م ∩ ص ن ∩ ل ع لابد أن تتقاطع في نقطه حيث أن قطر التقاطع هـ منتصف كل قطر.

س م ، ص ن ، ع ل تتقاطع في نقطه واحده تنصف كلا منهما

النموذج الرابع

أوجد قيمة س التي تجعل الحد الثالث من مفكوك

(٢س^{٢} + $\frac{١}{٢}$)^{٧} مساويا للحد السادس س^{١٠}

الحـــــــــل

= ق$_{٣}$ ($\frac{١}{٢}$)^{٢} (٢س^{٢})^{٥} = ٤٢ × ٤س^{١٠}

= ق$_{٥}$ ($\frac{١}{٢}$)^{٥} (٢س^{٢})^{٢} = ٢١ × $\frac{١}{٣٢}$ × ٤س^{٤} = $\frac{٢١}{٨}$ س^{٤}

٤ × ٤س^{١٠} = $\frac{١٢}{٨}$ س^{٤} ⟸ ٨س^{١٠} = $\frac{١}{٨}$ س^{٤}

٦٤س^{١٠} = س^{٤} ⟸ ٦٤س^{١٠} - س^{٤} = ٠

س^{٤} (٦٤س^{٦} - ١) = ٠ س = ٠ ×

٦٤س^{٦} = ١ ⟸ س^{٦} = $\frac{١}{٦٤}$

س = (± $\frac{١}{٢}$)^{٦} $\boxed{س = ± \frac{١}{٢}}$

رقم (ب) إذا كانت س = ٢ (جتاθ + ت جا θ)
ص = ٣ (جاθ + ت جتاθ)
أوجد المقياس والسعه كل من س ص ،

الحـــــــــل

س = ٢(جتاθ- ت جاθ) تقع في الربع الرابع
س = ٢[جتا(٣٦٠-θ)+ ت جا(٣٦٠-θ)]
ص = ٣ (جاθ + ت جتاθ) نأتي بالزاويه المتممه
ص = ٣ [جتا(٩٠ - θ)+ ت جا (٩٠ -θ)]
ص = ٢[جتا (٣٦٠-θ)+ت جا(٣٦٠-θ)]
× ٣[جتا(٩٠-θ)+ ت جا(٩٠-θ)]
ص = ٦ [جتا(٤٥٠-٢θ)+ ت جا (٤٥٠-٢θ)]
= ٦ [جتا(٩٠-٢θ)+ ت جا (٩٠-٢θ)]
المقياس = ٦ والسعة ٩٠ - ٢θ

$\frac{س}{ص}$ = $\frac{٢[جتا(٣٦٠-θ)+ ت جا(٣٦٠-θ)]}{٣ [جتا(٩٠ - θ)+ ت جا (٩٠ -θ)]}$

$\frac{س}{ص}$ = $\frac{٢}{٣}$ [جتا٢٧٠ + ت جا٢٧٠]

المقياس = $\frac{٢}{٣}$ والسعة ٢٧٠ = $\frac{٣\pi}{٢}$

رقم ٢: (أ) حل المعادلة س^{٢} – ت س + ١ = ٠
حيث س عدد ومركب

الحـــــــــل

أ = ١
ب = - ت
جـ = ١

س = $\frac{-ب ± \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

س = $\frac{ت ± \sqrt{ت^{٢} - ٤ × ١ × ١}}{٢ × ١}$

س = $\frac{ت ± \sqrt{-١ - ٤}}{٢}$ $\frac{ت ± \sqrt{-٥}}{٢}$

س = $\frac{ت ± \sqrt{٥ت^{٢}}}{٢}$ $\frac{ت ± ت\sqrt{٥}}{٢}$

س = $\frac{ت}{٢}$ [١ ± $\sqrt{٥}$]

رقم ٣(أ) باستخدام خصائص المحددات أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} (أ_{١} + ب_{١})^{٢} & أ_{١}^{٢} + ب_{١}^{٢} & أ_{١} ب_{١} \\ (أ_{٢} + ب_{٢})^{٢} & أ_{٢}^{٢} + ب_{٢}^{٢} & أ_{٢} ب_{٢} \\ (أ_{٣} + ب_{٣})^{٢} & أ_{٣}^{٢} + ب_{٣}^{٢} & أ_{٣} ب_{٣} \end{vmatrix}$$

الحـــــــــل

$$\begin{vmatrix} أ_{١}^{٢} + ٢أ_{١}ب_{١} + ب_{١}^{٢} & أ_{١}^{٢} + ب_{١}^{٢} & أ_{١} ب_{١} \\ أ_{٢}^{٢} + ٢أ_{٢}ب_{٢} + ب_{٢}^{٢} & أ_{٢}^{٢} + ب_{٢}^{٢} & أ_{٢} ب_{٢} \\ أ_{٣}^{٢} + ٢أ_{٣}ب_{٣} + ب_{٣}^{٢} & أ_{٣}^{٢} + ب_{٣}^{٢} & أ_{٣} ب_{٣} \end{vmatrix}$$

- ع$_{٢}$ + ع$_{١}$ نجد أن

$$\begin{vmatrix} ٢\,أ_١ب_١ & أ_١^٢+ب_١^٢ & أ_١ب_١ \\ ٢\,أ_٢ب_٢ & أ_٢^٢+ب_٢^٢ & أ_٢ب_٢ \\ ٢\,أ_٣ب_٣ & أ_٣^٢+ب_٣^٢ & أ_٣ب_٣ \end{vmatrix}$$

$$٢\begin{vmatrix} أ_١ب_١ & أ_١^٢+ب_١^٢ & أ_١ب_١ \\ أ_٢ب_٢ & أ_٢^٢+ب_٢^٢ & أ_٢ب_٢ \\ أ_٣ب_٣ & أ_٣^٢+ب_٣^٢ & أ_٣ب_٣ \end{vmatrix} = ٠$$

لأن $ع_١ = ع_٣$

رقم ٣:- (ب) في مفكوك

$(س^٢ + \frac{١}{س})^{٣ن}$ اثبت أن

الحد الخالي من س = معامل الحد الذي يحتوي علي $س^{٣ن}$

الحـــــــل

تم حلها في دليل تقويم الطالب في هذا الكتاب في فصل نظرية ذات الحدين تحت رقم ٤٣ ص ٥٢

رقم ٣ (جـ) ضع علي الصورة الأسية

$(جتا\frac{ط}{٦} - ت\,جا\frac{ط}{٦})(جتا\frac{ط}{٤} + ت\,جا\frac{ط}{٤})$

يفوض الربع الرابع

الحـــــــل

$[جتا(٢ط - \frac{ط}{٦}) + ت\,جا(٢ط - \frac{ط}{٦})](جتا\frac{ط}{٤} + ت\,جا\frac{ط}{٤})$

$(جتا\frac{١١ط}{٦} + ت\,جا\frac{١١ط}{٦})(جتا\frac{ط}{٤} + ت\,جا\frac{ط}{٤})$

$جتا(\frac{١١ط}{٦} + \frac{ط}{٤}) + ت\,جا(\frac{١١ط}{٦} + \frac{ط}{٤})$

$جتا(\frac{٢٢ط + ٣ط}{١٢}) + ت\,جا(\frac{٢٢ط + ٣ط}{١٢})$

$جتا\frac{٢٥ط}{١٢} + ت\,جا\frac{٢٥ط}{١٢} = هـ^{\frac{ط}{١٢}\,ت}$

الهندسه الفراغيه رقم ١:-

م س ص ع هرم ثلاثي م س ⊥ المستوي س ص

س ص = س ع = ١٠سم ، ص ع = ١٢سم

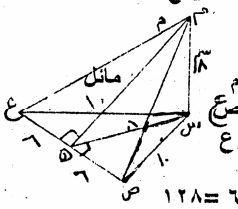
م س = ٨ سم ، هـ منتصف ص ع

أ:- إحسب طول س هـ واثبت أن م هـ ⊥ ص ع

ب:- إحسب طول م هـ وأوجد زاويه مستويه للزاويه الزوجيه د (م – ص ع – س) وإذا فرضنا أن قياسها ى فاحسب جتاى

الحـــــــل

س هـ متوسط في △ س ص ع المتساوي الساقين س هـ ⊥ ص ع



$(س هـ)^٢ = ١٠٠ - ٣٦$

س هـ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

المسقط س هـ ⊥ ص ع

المائل م هـ ⊥ ص ع

(م هـ)^٢ = ٦٤ + ٦٤ = ١٢٨

م هـ = ٨ $\sqrt{٢}$

د (م – ص ع – س) هي مقياس الزاويه المستويه للزاويه الزوجيه بين المستويين م ص ع ، س ص ع

ظا هـ = $\frac{٨}{٨}$ = ق(هـ) = ٤٥°

جتا هـ = جتا٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

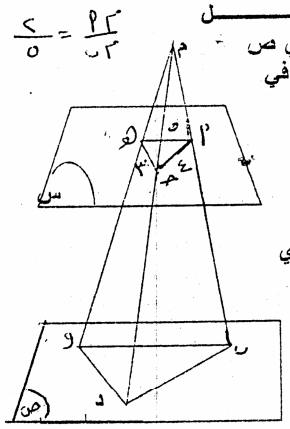
رقم ٣:- س ، ص مستويان متوازيان م نقطة خارجها م ب ، م د ، م و تقطع المستوي ص في ب ، د ، و وتقطع المستوي س في أ ، جـ ، هـ

فاذا كان $\frac{م ب}{م س} = \frac{٢}{٥}$ وكان أ جـ = ٤ سم

جـ هـ = ٣سم ، أ هـ = ٥سم فاوجد أطوال أضلاع المثلث ب د و

الحـــــــل

الحـــــــل



المستوي س // المستوي ص
وقطعهما المستوي م ب د في
أ جـ ، ب د
أ جـ // ب د
بالمثل جـ هـ // د و
وكذلك أ هـ // ب و
الزاويه المحصورة بين
مستقيمين متقاطعين تساوي
الزاويه المحصورة بين
مستقيمين متقاطعين
آخرين بحيث كان
المستقيمين الأولين //
المستقيمين الآخرين
الزوايا المتناظرة في
كل من المثلثين متساويه
△ أ جـ هـ ، △ ب د و متساويان في الزوايا
△ أ جـ هـ ~ △ ب د و

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{د و}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب و}} = \frac{\text{م أ}}{\text{م ب}}$

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{د و}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب و}} = \frac{٢}{٥}$

$\frac{٤}{\text{ب د}} = \frac{٣}{\text{د و}} = \frac{٥}{\text{ب و}} = \frac{٢}{٥}$

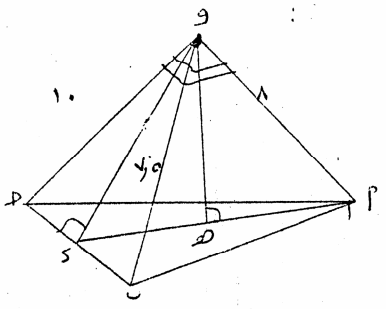
$\frac{٤}{\text{ب د}} = \frac{٢}{٥}$ ب د = ١٠ سم

$\frac{٣}{\text{د و}} = \frac{٢}{٥}$ دو = ٧,٥ سم

$\frac{٥}{\text{ب جـ}} = \frac{٢}{٥}$ ب جـ = ١٢,٥ سم

رقم ٣:- $\overline{\text{و أ}}$ ، $\overline{\text{و ب}}$ ، $\overline{\text{و جـ}}$ متعامده مثني مثني ،
و أ = ٨ سم ، و ب = ٧,٥ سم ، و جـ = ١٠ سم ،
هـ مسقط و علي المستوي أ ب جـ
١- إثبت أن $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ المستوي و أ هـ ، هـ ملتقي إرتفاعات المثلث أ ب جـ
٢- إذا كان $\overline{\text{و د}}$ إرتفاع مثلث و ب جـ فاحسب طول كل من $\overline{\text{و د}}$ ، $\overline{\text{و هـ}}$

الحـــــــل



$\overline{\text{أ و}}$ ⊥ $\overline{\text{و ب}}$ ، $\overline{\text{و جـ}}$ أ و ⊥ المستوي و ب جـ
أ و ⊥ كل المستقيمات الواقعة في و ب جـ
أ و ⊥ ب جـ (١) ١
هـ ملتقي إرتفاعات مثلث أ ب جـ
و هـ ⊥ $\overline{\text{أ ب جـ}}$ و هـ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$
ب جـ ⊥ $\overline{\text{و أ}}$ ، $\overline{\text{و هـ}}$ ب جـ ⊥ المستوي أ و هـ

$(\text{ب جـ})^٢ = (٧,٥)^٢ + (١٠)^٢$
ب جـ = ١٢,٥سم بتطبيق إقليدس في △ و ب جـ

و د = $\frac{٧,٥ \times ١٠}{١٢,٥}$ = ٦ سم

في △ أ و د $(\text{أ د})^٢ = (٨)^٢ + (١٢,٥)^٢$

$(\text{أ د})^٢ = ٢٢٠,٢٥$ ∴ أ د = ١٤,٤٨
بتطبيق إقليدس في △ أ و د يكون

و هـ = $\frac{٨ \times ١٢,٥}{١٤,٤٨٠٨}$ = ٦,٨ تقريباً

النموذج الخامس رقم ١:- (أ) إذا كان

س = $\frac{-١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢}$ ، ص = $\frac{-١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢}$

فاثبت أن س٣ + ص٣ − ٣ س ص = − ١

الحـــــــل

نلاحظ أن س ، ص هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

حيث $\frac{-١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢}$ = ω

ص = $\frac{-١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢}$ = ω٢

الأيمن = $س^3 + ص^3 - 3س ص$

$= (\omega)^3 + (\omega^2)^3 - 3\omega\,\omega^2$

$= \omega^3 + \omega^6 - 3\omega^3 = 1 + 1 - 3 = -1 =$ الأيسر

رقم ١:- (ب) في مفكوك $(س^3 + \frac{5}{س})^8$ أوجد الحد الخالي من س وقيمة الحد الأوسط ؟

الحـــــل

$ح_{ر+1} = ق^8_ر (\frac{5}{س})^ر (س^3)^{8-ر}$

$س^{-ر} \times س^{24-3ر} = س^{24-4ر} = س^0 \Leftarrow س = س$

$24 = 4ر \Leftarrow ر = 6$

$ح_7 = ق^8_6 (\frac{5}{س})^6 (س^3)^2$

$ح_7 = ق^8_2 \times 5^6 = 28 \times 625 \times 25 = 437500$

رتبة الحد الأوسط = $\frac{8+2}{2} = 5$ ح هو الحد الأوسط $_5$

$ح_5 = ق^8_4 (\frac{5}{س})^4 (س^2)^4$

$= 70 \times 625\ س^4 = 437500\ س^4$

رقم ٢:- (ب) إذا كانت س = جتا١٠ + ت جا ١٠
ص = جتا٢٥ + ت جا ٢٥ أوجد علي الصورة أ + ب ت
العدد المركب $س^7 ص^2$

الحل

$س^7 ص^2 = (جتا 10 + ت جا 10)^7 (جتا 25 + ت جا 25)^2$

$= (جتا 70 + ت جا 70)(جتا 50 + ت جا 50)$

$= جتا 120 + ت جا 120$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ ت$

رقم ٣:- (أ) باستخدام خصائص المحددات أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} جا^2 س & 1 & جتا^2 س \\ جا^2 ص & 1 & جتا^2 ص \\ جا^2 ع & 1 & جتا^2 ع \end{vmatrix}$$

الحـــــل

بجمع العمود الثالث للعمود الأول

$$\begin{vmatrix} جا^2 س + جتا^2 س & 1 & جتا س \\ جا^2 ص + جتا^2 ص & 1 & جتا ص \\ جا^2 ع + جتا^2 ع & 1 & جتا ع \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & جتا^2 س \\ 1 & 1 & جتا^2 ص \\ 1 & 1 & جتا^2 ع \end{vmatrix} = 0$$

لأن $ع_1 = ع_2$

رقم ٣:- (ب) إذا كان الحد الرابع في مفكوك $(1 + س)^ن$ حسب قوي س التصاعديه $= \frac{25}{3}$ من المرات قدر الحد الثاني
، الحد السادس = الحد الخامس

أوجد قيم كل من ن ، س

الحـــــل

$ح_4 = \frac{25}{3} ح_2$

$\frac{ح_4}{ح_2} = \frac{ح_3}{ح_2} = \frac{25}{3}$

$\frac{ن-3+1}{3} \times \frac{س}{1} \times \frac{ن-2+1}{2} \times س = \frac{25}{3}$

(ن − ٢) (ن − ١) س^{٢} = ٥٠ رقم ①

لكن $ح_{٦}$ = $ح_{٥}$

$\frac{ح_{٦}}{ح_{٥}}$ = ١ ⟸ $\frac{ن-٥+١}{٥}$ × $\frac{س}{١}$ = ١

(ن − ٤) س = ٥ ⟸ س = $\frac{٥}{ن-٤}$ رقم ②

بالتعويض من ٢ في ١ نجد أن

(ن − ٢)(ن − ١) × $\frac{٢٥}{(ن-٤)^{٢}}$ = ٥٠

$\frac{ن^{٢}-٣ن+٢}{ن^{٢}-٨ن+١٦}$ = ٢ ⟸ ٢ن^{٢} − ١٦ن + ٣٢ = ن^{٢} − ٣ن + ٢

ن^{٢} − ١٣ن + ٣٠ = ٠ ⟸ (ن − ٣)(ن − ١٠) = ٠

ن = ٣ وهذا لاغي لأن (١+س)^{٣} لايوجد بها $ح_{٦}$ ، $ح_{٥}$

ن − ١٠ = ٠ ⟸ ن = ١٠

لكن س = $\frac{٥}{ن-٤}$ = $\frac{٥}{١٠-٤}$ = $\frac{٥}{٦}$

رقم ٣ :- (أ جـ) ضع العدد ع = $\frac{-١}{٢}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت على الصورة الأسيه

الحـــــــــل

ع = ($\frac{-١}{٢}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) يقع في الربع الثالث

ل = $\sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}}$ = $\sqrt{١}$ = ١

جتا θ = $\frac{-١}{٢}$ ، جا θ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

θ = ١٨٠ + ٦٠ = $\frac{٤٠٢ط}{١٨٠}$ = $\frac{٤ط}{٣}$

ع = هـ$^{\frac{٤ط}{٣}}$ ت

الهندسه الفراغيه

رقم ١ :- أ ب جـ د أَ بَ جَ دَ مكعب طول حرفه ل

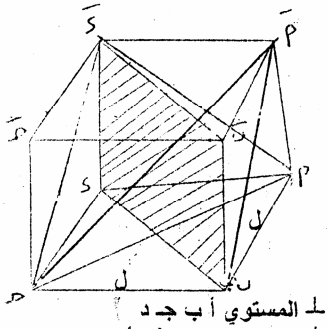
١- اثبت أن أ جـ ⊥ المستوي د ب ب د

٢- اثبت دَ أ جـ متساوي الأضلاع

واحسب مساحة سطحه بدلالة ل

٣- احسب مساحة سطح △ أ ب جـ بدلالة ل

الحـــــــــل



دَ د ⊥ المستوي أ ب جـ د

دَ د ⊥ كل المستقيمات في أ ب جـ د

دَ د ⊥ أ جـ ①

لكن أ جـ ⊥ ب د قطري مربع متعامدان ②

من ١ ، ٢ نجد أن

أ جـ ⊥ كل من ب د ، د دَ

أ جـ ⊥ المستوي دَ بَ ب د المطلوب أولاً

أوجه المكعب كلها مربعات طول ضلعه ل

طول أى قطر في أي وجه = ل $\sqrt{٢}$

أ جـ = أَ دَ = دَ جـ = ل $\sqrt{٢}$

دَ أ جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه = ل $\sqrt{٢}$

مساحة دَ أ جـ = $\frac{١}{٢}$ ل $\sqrt{٢}$. ل $\sqrt{٢}$ جا ٦٠

= $\frac{١}{٢}$ ل^{٢} × ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل^{٢} المطلوب ثانياً

الأحرف الجانبيه كلها عموديه علي القاعده

جـ ب ⊥ أَ ب ب أَ ، جـ ب ⊥ ب أَ

كل المستقيمات

الواقعه فيه ∴ جـ ب ⊥ ب أَ

△ أ ب جـ قائم الزاويه في ب

أ ب قطر في المربع = ل $\sqrt{٢}$

مساحه △ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ل × ل $\sqrt{٢}$

= $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ل^{٢}